Sobre la buena colocación del problema de Cauchy asociado a la ecuación con no linealidad modificada de Zakharov-Kusnetsov-Burgers en espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^n)$.

María Alejandra Rodríguez Ríos.[1]
mrodriguezri@unal.edu.co

Mateo Andrés Manosalva Amaris.[2]
mmanosalva@unal.edu.co

Edgar Santiago Ochoa Quiroga[3]
eochoaq@unal.edu.co

24 de septiembre de 2024

Resumen

Este trabajo se centra en el estudio de la ecuación no lineal modificada de Zakharov-Kusnetsov-Burgers en $\mathbb{T}^n$, el cual es un dominio periódico. Utilizando resultados de series de Fourier y espacios de Sobolev, se realiza la buena colocación local del problema en dichos espacios. El resultado principal demuestra que, para $n \geq 1$ y $s > \frac{n}{2}$, existe una única solución local en el tiempo que depende del dato inicial en $H^s(\mathbb{T}^n)$, se realiza la demostración en base a la fórmula integral de Duhamel, lo que permite un análisis formal de la dependencia continua de las soluciones.

1. Introducción

En este trabajo vamos a realizar un estudio de la ecuación no lineal modificada de Zakharov-Kusnetsov-Burgers, la cual se enuncia de la siguiente manera

$$\begin{cases} u_t + \partial_{x_1}\Delta u - \Delta u + u^3 = 0, & (x,t) \in (-\pi,\pi)^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [-\pi,\pi]^n. \end{cases} \tag{1}$$

2. Preliminares

Definición 2.1. Sea $\{e_j : 1 \leq j \leq n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se dice periódica de periodo $L \neq 0$, si

$$f(x + Le_j) = f(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ y } 1 \leq j \leq n,$$

Algunas observaciones:

- Tenemos que dado $L \in \mathbb{R} - \{0\}$, para todo $m \in \mathbb{Z}$, mL también es un periodo de f, es decir, $f(x + mLe_j) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $1 \leq j \leq n$. En particular, $-L$ también es un periodo para la función f. Por esto se puede asumir en particular que $L > 0$.
- Si f es periódica no constante, existe un periodo mínimo $L > 0$, el cual se conoce como periodo fundamental.

Nota. Dado $L > 0$ el conjunto $C_{per}([-L, L]^n)$ consiste en las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ continuas con periodo 2L. Análogamente, dado $k \in \mathbb{Z}^+$, $C^k_{per}([-L, L]^n)$ consiste de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ periódicas con periodo 2L de clase C^k.

Una manera equivalente de identificar los espacios anteriores es la siguiente:

$$C_{per}([-L, L]^n) := \{f \in C([-L, L]^n) : f(Le_j) = f(-Le_j), 1 \leq j \leq n\}.$$

Cuando $k \in \mathbb{Z}^+$, dado un multiíndice $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$,

$$\begin{aligned} C^k_{per}([-L, L]^n) : = \big\{ & f \in C^k([-L, L]^n) : \partial^\beta f(Le_j) = \partial^\beta f(-Le_j), \text{ para todo } \beta \text{ tal que } |\beta| \leq k \\ & \text{y para todo } 1 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

Diremos que $f \in C^\infty_{per}([-L, L]^n)$, si $f \in C^k_{per}([-L, L]^n)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$.

Note que:

$$C_{per}([-L, L]^n) \supseteq C^1_{per}([-L, L]^n) \supseteq \cdots \supseteq C^k_{per}([-L, L]^n),$$

es decir, el conjunto es más pequeño cuando pedimos más regularidad a las funciones.

Dado $L > 0$, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es una función periódica de periodo 2L, entonces el mapeo

$$\widetilde{f}(x) := f\left(\frac{L}{\pi}x\right),$$

define una función periódica de periodo 2π. Esto es, que los espacios $C^k_{per}([-L, L]^n)$ y $C^k_{per}([-\pi, \pi]^n)$ son isomorfos como espacios vectoriales. Por estas razones y sin pérdida de generalidad, trabajaremos con funciones de periodo 2π.

Otra forma frecuente para trabajar sobre este espacio de funciones periódicas es considerar funciones sobre el toro $\mathbb{T}^n$. El toro $\mathbb{T}^n$ es el intervalo $[0, 2\pi]^n$ donde los lados opuestos se identifican.

De manera más rigurosa, el toro es el conjunto de clases de equivalencia de $\mathbb{R}^n$ dadas por la relación $x \sim y$ si y solo si $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^n$, esto es $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$. Adicionalmente el toro es un grupo aditivo por lo que será útil hacerle una traslación a $[-\pi, \pi]^n$

Por las propiedades del toro que hemos mencionado, funciones $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ se pueden identificar como funciones periódicas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ con periodo 2π. De esta manera, $C^k_{per}([-\pi, \pi]^n)$ es isomorfo a $C^k(\mathbb{T}^n)$, por comodidad en la notación durante el resto de este trabajo nos referiremos a este espacio como $C^k(\mathbb{T}^n)$. [1]

Nota. Dado que podemos identificar $\mathbb{T}^n$ como $[-\pi,\pi]^n$, vemos que la integración de funciones sobre el toro resulta de restringir la medida de Lebesgue en $[\pi,\pi]^n$ y por la periodicidad de las funciones en $\mathbb{T}^n$ tenemos que:

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)dx = \int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)dx = \int_{[0,2\pi]^n} f(x)dx = \int_{[a_1,2\pi+a_1]\times\cdots\times[a_n,2\pi+a_n]} f(x)dx.$$

para cualesquiera $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$, en efecto:

$$\begin{aligned}\int_{[\pi,\pi]^n} f(x)dx &= \int_{[-\pi,0]^n} f(x)dx + \int_{[0,\pi]^n} f(x)dx \\ &= \int_{[\pi,2\pi]^n} f(y-(2\pi,\ldots,2\pi))dy + \int_{[0,\pi]^n} f(x)dx \\ &= \int_{[\pi,2\pi]^n} f(x)dx + \int_{[0,\pi]^n} f(x)dx \\ &= \int_{[0,2\pi]^n} f(x)dx.\end{aligned}$$

Para la última propiedad note que:

$$\int_{[0,2\pi]^n} f(x)dx = \int_{[0,2\pi]}\int_{[0,2\pi]}\cdots\int_{[0,2\pi]} f(x)dx_1\ldots dx_n,$$

dado que $f(x)$ es integrable entonces vale el teorema de fubini, dicho esto, basta ver que el resultado se tiene para una de las integrales, a saber:

$$\int_{[0,2\pi]} f(x)dx = \int_{[a,2\pi+a]} f(x)dx.$$

Si $a > 2\pi$, en efecto:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)dx &= \int_0^a f(x)dx - \int_{2\pi}^a f(x)dx \\ &= \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(y-2\pi)dy - \int_{2\pi}^a f(x)dx \\ &= \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(x)dx - \int_{2\pi}^a f(x)dx \\ &= \int_a^{2\pi+a} f(x)dx,\end{aligned}$$

los casos $a \in [0,2\pi]$ y $a < 0$ son análogos.

Finalmente por la periodicidad, la integración por partes no nos deja términos de borde:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} \partial_{x_i} f(x) g(x) dx &= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \partial_{x_i} f(x) g(x) dx_i \right) d\widetilde{x} \\
&= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} [fg(x_1, \dots, \pi, \dots, x_n) - fg(x_1, \dots, -\pi, \dots, x_n)] \, d\widetilde{x} \\
&\quad - \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \partial_{x_i} g(x) dx_i d\widetilde{x} \\
&= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} 0 \, d\widetilde{x} - \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \partial_{x_i} g(x) dx \\
&= - \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \partial_{x_i} g(x) dx
\end{aligned}
$$

(**Espacios ℓ^p**). Sea $1 \leq p < \infty$. Consideramos el siguiente conjunto de sucesiones a valor complejo:

$$
\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z}^n) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} : \alpha_k \in \mathbb{C} \text{ para todo } k, \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_k|^p < \infty \right\}
$$

Note que l^p es un espacio vectorial con la suma $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} + (\beta_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} = (\alpha_k + \beta_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ y la multiplicación por escalar $\lambda \cdot (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} = (\lambda \alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}, \lambda \in \mathbb{C}$. Adicionalmente, considere la norma:

$$
\|\alpha\|_p = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}
$$

Es posible ver que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach. Cuando $p = \infty$, definimos ℓ^∞ como sigue:

$$
\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{Z}^n) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} : \alpha_k \in \mathbb{C} \text{ para todo } k, \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_k| < \infty \right\}
$$

y definimos la norma

$$
\|\alpha\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_k|
$$

También tenemos que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. Cuando $p = 2$, la norma es inducida por el producto interno

$$
(\alpha \mid \beta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_k \overline{\beta_k}
$$

donde $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}, \beta = (\beta_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$.

(**Norma L^p**). Para $1 \leq p < \infty$ y $f \in C(\mathbb{T}^n)$ definimos la norma

$$
\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}
$$

Tenemos que $(C(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_p)$ es un espacio vectorial normado que no es completo. Por otro lado, considere la norma

$$
\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{T}^n} |f(x)|.
$$

Se puede mostrar también que $(C(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. Cuando $p = 2$, la norma es inducida por el producto interno

$$(f \mid g) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$$

La norma $\|\cdot\|_p$ se le llama la norma L^p, $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 2.2. Si $k \in \mathbb{Z}^n$, sea $\Phi_k(x) := e^{ik\cdot x}$ entonces que para $k, m \in \mathbb{Z}^n$

$$(\Phi_k \mid \Phi_m) = \int_{\mathbb{T}^n} \Phi_k(x)\overline{\Phi_m(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k, \\ (2\pi)^n & \text{si } m = k \end{cases}$$

Demostración. En efecto, por el teorema de Tychonoff tenemos que el producto cartesiano de conjuntos compactos es compacto y como $\mathbb{T}^n = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] \times \ldots \times [-\pi,\pi]$ entonces $\mathbb{T}^n$ es compacto, por lo cual, como $\Phi_k(x)$ es una función continua en $[-\pi,\pi]^n$ podemos aplicar el teorema de Fubini como sigue:

$$\begin{aligned}
(\Phi_k \mid \Phi_m) &= \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{ik\cdot x}e^{-im\cdot x}dx \\
&= \int_{[-\pi,\pi]}\int_{[-\pi,\pi]}\cdots\int_{[-\pi,\pi]} e^{i(k-m)\cdot x}dx_1\ldots dx_n \\
&= \int_{[-\pi,\pi]}\int_{[-\pi,\pi]}\cdots\int_{[-\pi,\pi]} e^{i(k_1-m_1)x_1}e^{i(k_2-m_2)x_2}\ldots e^{i(k_n-m_n)x_n}dx_1\ldots dx_n \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} e^{i(k_1-m_1)x_1}dx_1\int_{[-\pi,\pi]} e^{i(k_2-m_2)x_2}dx_2\ldots\int_{[-\pi,\pi]} e^{i(k_n-m_n)x_n}dx_n.
\end{aligned}$$

y como:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_i-m_i)x_i}dx_i = \begin{cases} 0, & \text{si } m_i \neq k_i, \\ 2\pi, & \text{si } m_i = k_i. \end{cases}$$

entonces se concluye que:

$$(\Phi_k|\Phi_m) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq k, \\ (2\pi)^n & \text{si } m = k. \end{cases}$$

□

Dado el sistema ortogonal $\phi_k(x) = e^{ik\cdot x}$ con $k \in \mathbb{Z}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, queremos escribir a $f \in C(\mathbb{T}^n)$ como:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{ik\cdot x},$$

procedamos formalmente asumiendo que la serie anterior converge uniformemente, así:

$$\begin{aligned}
(f|\Phi_m) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k\,(\Phi_k|\Phi_m) \\
&= c_m(2\pi)^n,
\end{aligned}$$

donde c_m, con $m \in \mathbb{Z}^n$ son los coeficientes de Fourier, esto es:

$$c_m = \frac{1}{(2\pi)^n}(f|\Phi_m) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-im\cdot x}dx,$$

esto motiva la definición de la transformada y serie de Fourier en $C(\mathbb{T}^n)$.

Definición 2.3. Dada $f \in C(\mathbb{T}^n)$ la secuencia de números complejos $\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ se llama la transformada de Fourier de f y está definida como

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-ik\cdot x}dx.$$

Al número complejo $\widehat{f}(k)$ se le llama el coeficiente de Fourier. La serie (puede ser no convergente)

$$\sum_{k=\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k)e^{ik\cdot x}.$$

se llama la serie de Fourier de f.

Se puede estudiar a detalle la convergencia de esta serie, sin embargo esto se sale del propósito de este trabajo. Más adelante presentaremos resultados conocidos de la convergencia de la serie de Fourier que requerimos para obtener nuestro resultado de buena colocación, no adentraremos en los detalles de la demostración de los mismos, esto se puede consultar en [2] o en [3].

Teorema 2.4 (Desigualdad de Bessel)**.** Si $f \in C(\mathbb{T}^n)$ entonces:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^n}\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^2\, dx.$$

Demostración. Sabemos que como la norma es mayor o igual a cero, entonces

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| f(x) - \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\|k|\leq N}} \widehat{f}(k)e^{ik\cdot x}\right\|_{L^2}^2 \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \left\|\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\|k|\leq N}} \widehat{f}(k)e^{ik\cdot x}\right\|_{L^2}^2 - 2\mathfrak{R}\left(f(x) \,\middle|\, \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\|k|\leq N}} \widehat{f}(k)e^{ik\cdot x}\right) \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{\substack{k,m\in\mathbb{Z}^n\\|k|,|m|\leq N}} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{f}(m)}(e^{ik\cdot x}|e^{im\cdot x}) - 2\mathfrak{R}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\|k|\leq N}} \overline{\widehat{f}(k)}\left(f(x)|e^{ik\cdot x}\right)\right) \\
&= \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\|k|\leq N}} (2\pi)^n\left|\widehat{f}(k)\right|^2 - 2\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\|k|\leq N}} (2\pi)^n\left|\widehat{f}(k)\right|^2 \\
&= \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\|k|\leq N}} (2\pi)^n\left|\widehat{f}(k)\right|^2.
\end{aligned}$$

Así

$$0 \leq ||f||_{[L^2}^2 - (2\pi)^n \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ |k| \leq N}} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 .$$

Por lo cual

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ |k| \leq N}} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^n} ||f||_{L^2}^2 .$$

Luego tomando el límite cuando $N \to \infty$, se sigue que:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^n} ||f||_{L^2}^2 .$$

□

Teorema 2.5. La transformada de Fourier es lineal.

Demostración. Note que:

$$\begin{aligned}
(f + cg)(k) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (f+g)(x) e^{-ik\cdot x} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (f(x) + cg(x)) e^{-ik\cdot x} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ik\cdot x} dx + \frac{c}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} g(x) e^{ik\cdot x} dx \\
&= \widehat{f}(k) + c\widehat{g}(k)
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.6. Si $f \in C^l(\mathbb{T}^n)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ es un multi-índice de orden l, es decir, $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n = l$, entonces $\widehat{\partial^\beta f}(k) = i^{|\beta|} k^\beta \widehat{f}(k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}^n$.

Demostración. Procedamos por inducción sobre el orden del multi-índice, primero note que si β es un multi-índice de orden 1, entonces $\beta = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, así:

$$\partial^\beta f(x) = \partial_{x_j} f(x),$$

luego:

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial^\beta f}(k) &= \widehat{\partial_{x_j} f}(k) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \partial_{x_j} f(x) e^{-ik\cdot x} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (-ik_j) f(x) e^{-ik\cdot x} \\
&= \frac{i^{|\beta|} k^\beta}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ik\cdot x} \\
&= i^{|\beta|} k^\beta \widehat{f}(k).
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que la igualdad se tiene para todo multi-índice α de orden n, note que dado un multi-índice de orden $n+1$, β, existe un multi-índice α de orden n tal que:

$$\partial^{\beta} f(x) = \partial_{x_j} \partial^{\alpha} f(x),$$

así:

$$\begin{aligned} \widehat{\partial^{\beta} f}(k) &= \widehat{\partial_{x_j} \partial^{\alpha} f}(k) \\ &= ik_j \widehat{\partial^{\alpha} f}(k) \\ &= ik_j i^{|\alpha|} k^{\alpha} \widehat{f}(k) \\ &= i^{|\beta|} k^{\beta} \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática se sigue la igualdad.

□

A continuación presentamos el espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Definición 2.7. El espacio $L^2(\mathbb{T}^n) = L^2([-\pi, \pi]^n)$ consiste de funciones $f : [-\pi, \pi]^n \to \mathbb{C}$ medibles según Lebesgue tales que:

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Asumimos que,

Teorema 2.8. El espacio $C^{\infty}(\mathbb{T}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Nota. Recordemos que $C^{\infty}(\mathbb{T}^n) \subset C^m(\mathbb{T}^n) \subset \ldots \subset C(\mathbb{T}^n)$, es claro que las funciones en $C(\mathbb{T}^n)$ son funciones en $L^2(\mathbb{T}^n)$ por la continuidad sobre un compacto, esto nos dice que el conjunto $C^m(\mathbb{T}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{T}^n)$ para todo $m \geq 0$

Es posible ver que $L^2(\mathbb{T})$ es completo y el espacio $C(\mathbb{T}^n)$ no lo es con la norma $\|\cdot\|_{L^2}$, dicho esto podemos definir a $L^2(\mathbb{T}^n)$ como el espacio de completación de $C(\mathbb{T}^n)$ por la densidad.

Teorema 2.9. Si $m > \frac{n}{2}$ con m entero, entonces la serie de Fourier de una función $f \in C^m(\mathbb{T}^n)$ converge absoluta y uniformemente a f, además, se tiene que $\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_1$ donde $\|\cdot\|_1$ es la norma de $\ell^1(\mathbb{Z}^n)$. Más aún, vale la identidad de Parseval

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\|f\|_{L^2}^2. \tag{2}$$

De manera equivalente, si $f, g \in C^m(\mathbb{T}^n)$,

$$(\widehat{f} \mid \widehat{g}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{(2\pi)^n}(f \mid g). \tag{3}$$

Por lo anterior podemos probar que si $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ entonces $\widehat{f}$ es inyectiva.

Teorema 2.10. Sean $f, g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Suponga que $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$. Entonces $f = g$.

Demostración. Sea $h = f-g$ luego, por propiedades de las funciones continuas en $\mathbb{T}^n$,tenemos que $h \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y por hipótesis $\widehat{h}(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, por el Teorema 2.9 , se sigue que $\|\widehat{h}\|_2 = 0 = \|h\|_{L^2}$, es decir, $h = 0$. □

Nota. Sobre la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{T}^n)$ tenemos de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(k)| &= \left|\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-ik\cdot x}dx\right| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}|(f|e^{ik\cdot x})| \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^n}\|f\|_{L^2}\,\|\Phi_k\|_{L^2} \\
&\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|f\|_{L^2},
\end{aligned}$$

dado que $\|f\|_{L^2} < \infty$ entonces sabemos que $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k)\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$, sin embargo podemos decir aún más sobre la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{T}^n)$

Teorema 2.11. La transformada de Fourier

$$\wedge : L^2(\mathbb{T}^n) \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$$

es un isomorfismo. Además, vale la identidad de Parseval (1) y (2)

Demostración. Veamos que si $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, entonces $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión, de manera que $\{f_n\} \subset C^m(\mathbb{T}^n)$ tal que f_n converge a f en el sentido de L^2. Por el teorema 2.9, sabemos que vale la identidad de Parseval para funciones en $C^m(\mathbb{T}^n)$, lo cual implica

$$\|f_n - f_m\|_{L^2}^2 = (2\pi)^n\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|_2^2,$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}^n$.
Luego, como $\{f_n\} \subset C^m(\mathbb{T}^n)$ converge en L^2, esta define una secuencia de Cauchy. La identidad de Parseval entonces nos muestra que $\{\widehat{f_n}\}$ es de Cauchy en $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Puesto que $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ es completo, entonces toda sucesión de Cauchy converge. Sea $\{\alpha_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ el límite de $\{\widehat{f_n}\}$.

Ahora, veamos que $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k)\} = \{\alpha_k\}$, es decir, $\alpha_k = \widehat{f}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$.

Note que,

$$|\widehat{f}_n(k) - \alpha_k|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}_n(k) - \alpha_k|^2 = \|\widehat{f}_n - \{\alpha_k\}\|_2^2 \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Por otro lado, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos da

$$|\widehat{f}_n(k) - \widehat{f}(k)| = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (f_n(x) - f(x)) e^{-ik\cdot x}\, dx \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f_n - f\|_2 \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Esto es que $a_k = \widehat{f}(k)$, en efecto $\widehat{f}$ es el límite de $\{\widehat{f_n}\}$.

Con lo anterior es claro que la transformada está llegando $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$, pero podemos decir más, note que lo anterior nos dice que $f_n \to f$ en $L^2(\mathbb{T}^n)$ y $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ en $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$, por la identidad de Parseval tenemos que:

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = (2\pi)^n \left\|\widehat{f_n}\right\|_2^2,$$

tomando $n \to \infty$ se sigue que:

$$\|f\|_{L^2}^2 = (2\pi)^n \|\widehat{f}\|_2^2.$$

Esto es que vale la identidad de Parseval en L^2. Tenemos que la transformada es lineal, veamos que es inyectiva y continua, en efecto dado $\varepsilon > 0$, si $\|f - g\|_{L^2} < (2\pi)^{\frac{n}{2}} \varepsilon$ por la identidad de Parseval:

$$\|\widehat{f} - \widehat{g}\|_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f - g\|_{L^2} < \varepsilon.$$

Análogamente si $\widehat{h}(k) = \widehat{f}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$ considere $g = h - f$, entonces $\|\widehat{g}\|_2 = 0 = \|g\|_{L^2}$, luego $g = 0$. Finalmente debemos ver que $\wedge$ es sobreyectiva.

Sea $\{\alpha_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Dado un entero $n \geq 1$, definimos $f_n(x) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ |k|\leq n}} \alpha_k \Phi_k$, así $f_n \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset C(\mathbb{T}^n)$. Por el Teorema 2.2 tenemos que:

$$\|f_n - f_m\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ n+1\leq|k|\leq m}} \alpha_k \Phi_k \right\|_{L^2}^2 = (2\pi)^n \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ n+1\leq|k|\leq m}} |\alpha_k|^2$$

Como $\{\alpha_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, lo anterior muestra que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{T}^n)$. Ahora, como $L^2(\mathbb{T}^n)$ es completo, entonces existe $f \in L^2([-\pi, \pi])$ el límite de $\{f_n\}$ en L^2. Basta ver que $\widehat{f}(k) = \alpha_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$. Notemos que si $n \geq |k|$, por la construcción de f_n, $\widehat{f_n}(k) = \alpha_k$, tomando el límite cuando $n \to \infty$ de f_n obtenemos lo deseado. $\square$

Nota. Sobre la prueba anterior hay un comentario importante, note que nuestro candidato a preimágen de la transformada en la sobreyectividad fue la serie de Fourier de f, en este caso es importante resaltar que esta serie es convergente en el sentido L^2.

El teorema anterior implica que existe la inversa de la transformada de Fourier que denotaremos como

$$\vee : l^2(\mathbb{Z}^n) \to L^2(\mathbb{T}^n)$$

definida como $\{\alpha_k\}^\vee = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \alpha_k \Phi_k$, donde el sentido de esta serie es en $L^2(\mathbb{T}^n)$.

2.1. Espacios de Sobolev

En esta subsección presentamos los espacios de Sobolev periódicos $H^s(\mathbb{T}^n)$ y algunas propiedades importantes que necesitaremos en la prueba de buena colocación, estos espacios se estudian de manera más detallada en [4].

Es posible demostrar que el espacio $C^1(\mathbb{T}^n)$ no es completo con la norma

$$\|f\|_{H^1} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

La norma anterior es interesante para establecer si una función es integrable y diferenciable (en algún sentido) y estudiar si su derivada conserva la misma propiedad de integrabilidad. Esto motiva a definir el espacio [1].

$$H^1(\mathbb{T}^n) = \overline{(C^1(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{H^1})}.$$

Dado que la transformada de Fourier en L^2 es un isomorfismo y vale la identidad de Parseval en $L^2(\mathbb{T}^n)$ observamos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^1} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\sum_{|\alpha|\le 1} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{|\alpha|\le 1} \|i^{|\alpha|} k^\alpha \widehat{f}(k)\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\|\widehat{f}(k)\|_2^2 + \sum_{j=1}^{n} \left\|i k_j \widehat{f}(k)\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sum_{j=1}^{n} |k_j|^2 |\widehat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(k)|^2 \left(1 + |k|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\langle k\rangle \widehat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\langle k\rangle \widehat{f}(k)\|_2,
\end{aligned}$$

donde $\langle k\rangle = (1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.12. Sea $s \geq 0$. Definimos el espacio de Sobolev periódico de orden s como

$$H^s = H^s(\mathbb{T}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}^n) : \left\{ \langle k\rangle^s \widehat{f}(k) \right\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n) \right\},$$

para $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\langle k\rangle = \left(1+|k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ con $|k|^2 = k_1^2 + \cdots + k_n^2$.

Le asignamos al espacio $H^s(\mathbb{T}^n)$ el producto interno

$$(f \mid g)_{H^*} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} \tag{4}$$

para $f, g \in H^s(\mathbb{T}^n)$, el cual induce la norma

$$\|f\|_{H^s}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s} |\widehat{f}(k)|^2$$

Teorema 2.13. Sea $s \geq 0$. Muestre que $H^s(\mathbb{T}^n)$ con el producto interno anterior es un espacio de Hilbert.

Demostración. Primero veamos que $H^s(\mathbb{T}^n)$ es subespacio vectorial de $L^2(\mathbb{T}^n)$, dados $f, g \in H^s(\mathbb{T}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, en efecto:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\|k|\leq N}} |\langle k\rangle^s \widehat{f+\lambda g}(k)|^2 &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\|k|\leq N}} |\langle k\rangle^s (\widehat{f}(k) + \lambda\widehat{g}(k))|^2 \\ &\leq 2\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\|k|\leq N}} |\langle k\rangle^s \widehat{f}(k)|^2 + |\lambda|^2 \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\|k|\leq N}} |\langle k\rangle^s \widehat{g}(k)|^2 \right).\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $N \to \infty$ obtenemos:

$$\|\langle k\rangle^s \widehat{f+\lambda g}(k)\|_2^2 \leq 2\|\langle k\rangle \widehat{f}(k)\|_2^2 + 2|\lambda|^2 \|\langle k\rangle \widehat{g}(k)\|_2^2 < \infty.$$

Ahora veamos que $H^s(\mathbb{T}^n)$ es completo con la norma inducida por el producto interno (3).

Si (f_j) es una sucesión de Cauchy en $H^s(\mathbb{T}^n)$, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que si $m, l > N$ entonces

$$\|f_m - f_l\|_{Hs} < \varepsilon$$

Luego,

$$\|f_m - f_l\|_{Hs} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^s |\widehat{f_m}(k) - \widehat{f_l}(k)|^2$$

Por lo cual $\{\langle k\rangle^s \widehat{f_j}(k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$, es decir, existe $g \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ tal que

$$\langle k\rangle^s \widehat{f}(k) \to g(k)$$

Así, $f = \left(\frac{g(k)}{\langle k\rangle^s}\right)^{\nu}$, por tanto $\widehat{f} = \left(\frac{g(k)}{\langle k\rangle^s}\right)$.

Para completar la prueba debemos mostrar que $f \in H^s$ y que $f_j \to f$ está en H^s, tenemos que

$$\|f\|_{H^s}^s = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s} \left|\frac{g(k)}{\langle k\rangle^s}\right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(k)|^2 = \|g\|_{\ell^2}^2 < \infty$$

Con lo cual $f \in H^s$.
Ahora bien, como f es una sucesión de Cauchy entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ de manera que si $j < N$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f - f_j\|_{H^s}^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^{2s} |\widehat{f}(k) - \widehat{f}_j(k)|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s} \left|\frac{g(k)}{\langle k\rangle^s} - \widehat{f}_j(k)\right|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left|g(k) - \langle k\rangle^s \widehat{f}_j(k)\right|^2 \\
&< \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Con lo cual probamos que $H^s(\mathbb{T}^n)$ es completo con la norma inducida por el producto interno.
$\square$

Teorema 2.14 (Encajamiento de Sobolev). Suponga que $s > \frac{n}{2}$, entonces si $f \in H^s(\mathbb{T}^n)$ se tiene que f se puede considerar como un elemento de $C(\mathbb{T}^n)$ y $\widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z}^n)$. Más precisamente, la aplicación $f \in H^s(\mathbb{T}^n) \mapsto f \in C(\mathbb{T}^n)$ es continua y existe una constante universal $C > 0$ tal que

$$\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_1 \leq C\|f\|_{H^s}$$

Más aún, el espacio $H^s(\mathbb{T}^n)$ define una álgebra de Banach, esto es, existe $C > 0$ tal que para todo $f, g \in H^s(\mathbb{T}^n)$, se tiene que el producto $fg \in H^s(\mathbb{T}^n)$[1] y

$$\|fg\|_{H^s} \leq C\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}$$

3. Resultados de Buen Planteamiento

Consideremos el problema de valor inicial asociado a la *ecuación con no linealidad modificada de Zakharov-Kusnetsov-Burgers*

$$\begin{cases} u_t + \partial_{x_1}\Delta u - \Delta u + u^3 = 0, & (x,t) \in (-\pi,\pi)^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [-\pi,\pi]^n. \end{cases} \tag{5}$$

Procedamos de manera formal en búsqueda de un candidato a solución, tomando la transformada de Fourier respecto a la variable espacial

$$\begin{aligned}(u_t + \partial_{x_1}\Delta u - \Delta u + u^3)^{\wedge}(k) &= \widehat{u}_t(k) + \widehat{\partial_{x_1}\Delta u}(k) - \widehat{\Delta u}(k) + \widehat{u^3}(k)\\ &= \partial_t \widehat{u}(k) + ik_1\widehat{\Delta u}(k) - \widehat{\Delta u}(k) + \widehat{u^3}(k)\\ &= \partial_t \widehat{u}(k) + (ik_1 - 1)\sum_{i=1}^{n} \widehat{\partial^2_{x_i} u}(k) + \widehat{u^3}(k)\\ &= \partial_t \widehat{u}(k) + (ik_1 - 1)\sum_{i=1}^{n} i^2 k_i^2 \widehat{u}(k) + \widehat{u^3}(k)\\ &= \partial_t \widehat{u}(k) + (1 - ik_1)|k|^2\widehat{u}(k) + \widehat{u^3}(k).\end{aligned}$$

Así junto al hecho de que $\widehat{u}(k,0) = \widehat{u}_0(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$ tenemos una ecuación diferencial ordinaria asociada a un problema de valor inicial respecto a la variable temporal

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\widehat{u}(k) + (|k|^2 - ik_1|k|^2)\widehat{u}(k) = -\widehat{u^3}(k), & k \in \mathbb{Z}^n, t > 0\\ \widehat{u}(k,0) = \widehat{u}_0(k), & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Luego usando el factor integrante $e^{(|k|^2 - ik_1|k|^2)t}$, e integrando a ambos lados de 0 a t tenemos que

$$e^{(|k|^2 - ik_1|k|^2)t}\widehat{u}(k,t) - \widehat{u}_0(k) = -\int_0^t e^{(|k|^2 - ik_1|k|^2)t'}\widehat{u^3}(k,t')\,dt'.$$

Así despejando $\widehat{u}(k,t)$ llegamos a que

$$\widehat{u}(k,t) = e^{(ik_1|k|^2 - |k|^2)t}\widehat{u}_0(k) - \int_0^t e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)(t-t')}\widehat{u^3}(k,t')\,dt',$$

tomando la transformada inversa de Fourier tenemos que

$$\begin{aligned}u(x,t) &= (e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)t}\widehat{u}_0(k))^{\vee} - \int_0^t (e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)(t-t')}\widehat{u^3}(k,t'))^{\vee}\,dt'\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)t + ik\cdot x}\widehat{u}_0(k) - \int_0^t \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)(t-t') + ik\cdot x}\widehat{u^3}(k,t')\,dt'.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esto, es en cierta medida natural definir la familia de operadores $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ tal que:

$$U(t)f(x) = \begin{cases} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)t + ik\cdot x}\widehat{f}(k), & t > 0,\\ f(x), & t = 0 \end{cases}$$

Para f lo suficientemente regular. A continuación presentamos una propiedad de estos operadores:

Proposición 3.1. Si $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ entonces $U(t)f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, ademas

$$\widehat{U(t)f}(k) = e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)t}\widehat{f}(k).$$

Para todo $k \in \mathbb{Z}^n$.

De esta manera, nuestro candidato a solución es la formula de Duhamel dada por

$$u(x,t) = U(t)u_0(x) - \int_0^t U(t-t')u^3(x,t')\,dt', \tag{6}$$

en algunas ocasiones omitiremos la dependencia espacial con el propósito de no sobrecargar la notación.

Definición 3.2. Dado $s \geq 0$. Diremos que el problema (5) esta localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{T}^n)$ si:

- **(Existencia y Unicidad).** Dado $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$, existe $T > 0$ y una única solución de la formula de Duhamel (6) con dato inicial u_0 en el espacio $C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$.
- **(Dependencia Continua).** Dado $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$ existe una vecindad V de u_0 en $H^s(\mathbb{T}^n)$ y $T > 0$ tal que la aplicación dato inicial solución

  $$v_0 \in H^s(\mathbb{T}^n) \mapsto v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^n)).$$

  Es continua.

Antes de continuar con el resultado principal debemos hacer varias salvedades. Primero definimos el espacio $C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$.

Definición 3.3. El espacio $C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$ consiste de funciones $f : [0,T] \to H^s(\mathbb{T}^n)$, continuas en el siguiente sentido:
Dado $t' \in (0,T)$ tenemos que

$$\lim_{t \to t'} \|f(t) - f(t')\|_{H^s} = 0,$$

si $t' = 0$ o $t' = T$ se toma el limite lateral.

Segundo introducimos los conceptos claves de contracción y punto fijo.

Definición 3.4. Sea (M,d) un espacio métrico y $\psi : M \to M$ una función.

- ψ es una **contracción** si existe $0 < L < 1$ tal que

  $$d(\psi(x), \psi(y)) \leq Ld(x,y),$$

  para todo $x, y \in M$.
- Dado $x \in M$, si $\psi(x) = x$, se dice que x es un **punto fijo** de ψ.

Teorema 3.5 (Punto fijo de Banach)**.** Sea (M,d) un espacio métrico completo. entonces toda contracción tiene un único punto fijo.

La idea para el buen planteamiento es ver (6) como una aplicación y usar (3.5) para encontrar soluciones como puntos fijos en espacios de funciones adecuados. Con todo esto procedemos a la demostración de el resultado principal, la buena colocación local.

Teorema 3.6. Para cualquier $n \geq 1$ fijo, el problema de Cauchy (5) esta localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{T}^n)$, $s > \frac{n}{2}$. Esto es:

- **(Existencia y Unicidad).** Para cualquier $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$, existe un tiempo $T > 0$ y una única $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$ solución de la formula integral (6) con dato inicial u_0.
- **(Dependencia Continua).** Dado $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$ existe una vecindad V de u_0 en $H^s(\mathbb{T}^n)$ y $T > 0$ tal que la aplicación dato inicial solución

$$v_0 \in V \mapsto v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^n)).$$

Es continua.

Demostración. Dividiremos la prueba en tres partes.

i) **Existencia.** Sea $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$ con $s > \frac{n}{2}$ arbitrario pero fijo. Veamos que existe una solución de (6) con dato inicial u_0. Si $u_0 = 0$, tomando $u = 0$ tenemos la existencia. Ahora si asumimos $u_0 \neq 0$ tenemos que $\|u_0\|_{H^s} > 0$. Dados $T > 0$ y $a > 0$ fijos definimos el espacio

$$X_T^s(a) = \{v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^n)) : \sup_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_{H^s} \leq a\}.$$

Primero probemos que $X_T^s(a)$ es completo con la distancia

$$\sup_{t \in [0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{H^s},$$

para $u, v \in X_T^s(a)$.

El Ivan es un pedante

Con esto, sea $v \in X_T^s(a)$, definimos la función

$$\phi(v)(x,t) = U(t)u_0(x) - \int_0^t U(t-t')v^3(x,t')\, dt'.$$

Veamos que $\phi(v) \in X_T^s(a)$.
Utilizando la definición de la norma en $H^s(\mathbb{T}^n)$ y la proposición (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\phi(v)(x,t)\|_{H^s} &\leq \|U(t)u_0(x)\|_{H_s} + \int_0^t \|U(t-t')v^3(x,t')\|_{H^s}\, dt' \\
&= \|\langle k\rangle^s \widehat{U(t)u_0}(k)\|_2 + \int_0^t \|\langle k\rangle^s (U(t-t')v^3)^\wedge(k,t')\|_2\, dt' \\
&= \|e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)t}\langle k\rangle^s \widehat{u}_0(k)\|_2 + \int_0^t \|e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)(t-t')}\langle k\rangle^s \widehat{v^3}(k,t')\|_2\, dt' \\
&\leq \|u_0(x)\|_{H^s} + \int_0^t \|v^3(x,t')\|_{H^s}\, dt' \\
&\leq \|u_0(x)\|_{H^s} + c\int_0^t \|v(x,t')\|_{H^s}^3\, dt'.
\end{aligned}$$

Note que esto lo podemos hacer ya que $H^s(\mathbb{T}^n)$ es álgebra de Banach y

$$\left|e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)t}\right| = \left|e^{ik_1|k|^2 t}\right| \left|e^{-|k|^2 t}\right| \leq 1.$$

Si tomamos el supremo a ambos lados de la desigualdad tenemos que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \|\phi(v)(x,t)\|_{H^s} &\leq \|u_0(x)\|_{H^s} + cT \sup_{t\in[0,T]} \|v(x,t)\|^3 \\ &\leq \|u_0(x)\|_{H^s} + cTa^3,\end{aligned}$$

esto ultimo ya que $v \in X_T^s(a)$. Note que si escogemos

$$\begin{cases} a = \frac{3}{2}\|u_0(x)\|_{H^s} > 0, \\ 0 < T < \frac{4}{27c}\|u_0(x)\|_{H^s}^{-2}, \end{cases}$$

tenemos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\phi(v)(x,t)\|_{H^s} < \|u_0(x)\|_{H^s} + c\left(\frac{4}{27c}\|u_0(x)\|_{H^s}^{-2}\right)\left(\frac{3}{2}\|u_0(x)\|_{H^s}\right)^3 = \frac{3}{2}\|u_0(x)\|_{H^s}$$

Ahora falta probar que $\phi(v) \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$Primero notemos que dado $s \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\|\phi(v)(t) - \phi(v)(s)\|_{H^s} &= \left\| U(t)u_0 - \int_0^t U(t-t')v^3(t')\,dt' - U(s)u_0 + \int_0^s U(s-t')v^3(t')\,dt' \right\|_{H^s} \\ &\leq \|U(t)u_0 - U(s)u_0\|_{H^s} + \left\| \int_0^s U(s-t')v^3(t')\,dt' - \int_0^t U(t-t')v^3(t')\,dt' \right\|_{H^s}\end{aligned}$$

Luego basta con probar que cuando $t \to s$ cada sumando se hace 0. Primero veamos el caso donde $s = 0$, note que la definición de la norma en $H^s(\mathbb{T}^n)$ y la proposición (3.1)

$$\begin{aligned}\|U(t)u_0 - U(0)u_0\|_{H^s}^2 &= \|\langle k\rangle^s(\widehat{U(t)u}_0(k) - \widehat{u_0}(k))\|_2^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\langle k\rangle^s(e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)t} - 1)\widehat{u}_0(k)|^2\end{aligned}$$

Ahora note que

$$\begin{aligned}|\langle k\rangle^s(e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)t} - 1)\widehat{u}_0(k)|^2 &\leq (|e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)t}| + |1|)^2|\langle k\rangle^s\widehat{u}_0(k)|^2 \\ &\leq 4|\langle k\rangle^s\widehat{u}_0(k)|^2\end{aligned}$$

Así como por hipótesis $\{\langle k\rangle^s\widehat{u}_0(k)\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ concluimos que $\{\langle k\rangle^s(e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)t}-1)\widehat{u}_0(k)\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ por M de Weierstrass, Así tenemos que

$$\lim_{t\to0^+} \|U(t)u_0 - U(0)u_0\|_{H^s} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lim_{t\to0^+} |\langle k\rangle^s(e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)t} - 1)\widehat{u}_0(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Ahora para el otro sumando tenemos que

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^s U(s-t')v^3(t')\,dt' - \int_0^t U(t-t')v^3(t')\,dt' \right\|_{H^s} &\leq \int_0^t \|U(t-t')v^3(t')\|_{H^s}\,dt' \\ &\leq \int_0^t \|v^3(t')\|_{H^s}\,dt' \to 0\end{aligned}$$

Cuando $t \to 0^+$ de esta manera concluimos que

$$\lim_{t\to 0^+} \|\phi(v)(t) - \phi(v)(0)\|_{H^s} = 0$$

Ahora si $s \neq 0$ podemos asumir sin perdida de generalidad que $t < s$ de manera similar para el primer sumando

$$\begin{aligned}\|U(t)u_0 - U(s)u_0\|_{H^s}^2 &= \|\langle k\rangle^s(\widehat{U(t)u}_0(k) - \widehat{U(s)u_0}(k))\|_2^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\langle k\rangle^s(e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)t} - e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)s})\widehat{u}_0(k)|^2\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}|\langle k\rangle^s(e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)t} - e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)s})\widehat{u}_0(k)|^2 &\leq (|e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)t}| + |e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)s}|)^2|\langle k\rangle^s\widehat{u}_0(k)|^2 \\ &\leq 4|\langle k\rangle^s\widehat{u}_0(k)|^2\end{aligned}$$

y nuevamente por M de Weierstrass podemos ingresar el limite, es decir

$$\lim_{t\to s} \|U(t)u_0 - U(s)u_0\|_{H^s} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lim_{t\to s} |\langle k\rangle^s(e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)t} - e^{(ik_1|k|^2-|k^2|)s})\widehat{u}_0(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Para el caso del sumando con la integral tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^s U(s-t')v^3(t')\,dt' - \int_0^t U(t-t')v^3(t')\,dt'\right\|_{H^s} &\leq \int_t^s \|U(s-t')v^3(t') - U(t-t')v^3(t')\|_{H^s}\,dt' \\ &\leq \int_t^s \|U(s-t')v^3(t')\|_{H^s} + \|U(t-t')v^3(t')\|_{H^s}\,dt' \\ &\leq \int_t^s \|v^3(t')\|_{H^s}\,dt' + \int_t^s \|v^3(t')\|_{H^s}\,dt' \to 0.\end{aligned}$$

Cuando $t \to s$.
Así concluimos que $\phi : X_T^s(a) \to X_T^s(a)$. Ahora veamos que ϕ define una contracción para los a y T dados previamente. Sean $u, v \in X_T^s(a)$, Note que por la definición de ϕ y de manera similar al argumento previo tenemos

$$\begin{aligned}\|\phi(v)(t) - \phi(u)(t)\|_{H^s} &= \left\|-\int_0^t U(t-t')v^3(t')\,dt' + \int_0^t U(t-t')u^3(t')\,dt'\right\|_{H^s} \\ &\leq \int_0^t \|U(t-t')(u^3(t') - v^3(t'))\|_{H^s}\,dt' \\ &\leq \int_0^t \|u^3(t') - v^3(t')\|_{H^s}\,dt' \\ &= \int_0^t \|(u-v)(u^2+uv+v^2)(t')\|_{H^s}\,dt' \\ &\leq c\int_0^t \|u(t') - v(t')\|_{H^s}\|(u^2+uv+v^2)(t')\|_{H^s}\,dt' \\ &\leq c\int_0^t \|u(t') - v(t')\|_{H^s}(\|u^2(t')\|_{H^s} + \|uv(t')\|_{H^s} + \|v^2(t')\|_{H^s})\,dt'.\end{aligned}$$

Con esto si tomamos el supremo a ambos lados respecto a t tenemos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\phi(v)(x,t) - \phi(u)(x,t)\|_{H^s} \leq 3ca^2T \sup \|u(x,t) - v(x,t)\|_{H^s}.$$

Luego note que

$$0 < 3ca^2T < 3c\left(\frac{3}{2}\|u_0(x)\|_{H^s}\right)^2\left(\frac{4}{27c}\|u_0(x)\|_{H^s}^{-2}\right) = 1$$

De esta manera concluimos que ϕ es una contracción sobre un espacio métrico completo, y por el teorema (3.5) tenemos que existe una única función $u \in X_T^s(a)$ donde $\phi(u) = u$, esto quiere decir que u es una solución de (6). Finalizando así la existencia.

- **Unicidad.**
- **Dependencia Continua.** luego hago esto, toca monear

$\square$

Referencias

[1] O. Riaño. *Notas de clase : Series de Fourier*. UNAL, 2024.

[2] L Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Springer, 2008.

[3] R. J. Iorio Jr. and V. d. M. A. Iorio. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, volume 70 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[4] R. Iório Júnior and V. d. M. A. Iório. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*. Projeto Euclides. 2001.