Trabajo final de edp, luego vemos un buen título xddddddddddddddddddddddddddd

María Alejandra Rodríguez Ríos.[1]
mrodriguezri@unal.edu.co

Mateo Andrés Manosalva Amaris.[2]
mmanosalva@unal.edu.co

Edgar Santiago Ochoa Quiroga
eochoaq@unal.edu.co

17 de septiembre de 2024

Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

1. Preliminares

Definición 1.1. Sea $\{e_j : 1 \leq j \leq n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se dice periódica de periodo $L \neq 0$, si

$$f(x + Le_j) = f(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ y } 1 \leq j \leq n,$$

Algunas observaciones:

- Tenemos que dado $L \in \mathbb{R} - \{0\}$, para todo $m \in \mathbb{Z}$, mL también es un periodo de f en el sentido que $f(x + mLe_j) = f(x)$, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y $1 \leq j \leq n$. En particular, $-L$ también es un periodo para la función f. Por esta razón se puede asumir que $L > 0$.
- Si f es constante, entonces f es periódica de cualquier periodo. Si f es periódica no constante, existe un menor periodo $L > 0$, el cual se conoce como periodo fundamental.

Nota. Dado $L > 0$ el conjunto $C_{per}([-L, L]^n)$ consiste de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ continuas con periodo $2L$. Similarmente, dado $k \in \mathbb{Z}^+$, $C^k_{per}([-L, L]^n)$ consiste de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ periódicas con periodo $2L$ de clase C^k.

De manera equivalente, los espacios anteriores se pueden identificar como sigue:

$$C_{per}([-L, L]^n) := \{f \in C([-L, L]^n) : f(Le_j) = f(-Le_j), 1 \leq j \leq n\}.$$

Cuando $k \in \mathbb{Z}^+$, dado un multiíndice $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$,

$$C^k_{per}([-L,L]^n) := \Big\{ f \in C^k([-L,L]^n) : \partial^\beta f(Le_j) = \partial^\beta f(-Le_j), \text{ para todo } \beta \text{ tal que } |\beta| \le k \\ \text{y para todo } 1 \le j \le n \Big\}$$

Diremos que $f \in C^\infty_{per}([-L,L]^n)$, si $f \in C^k_{per}([-L,L]^n)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$. Por consistencia en la notación, definimos $C^0_{per}([-L,L]^n) = C_{per}([-L,L]^n)$.

De la definición de los espacios $C^k_{per}([-L,L]^n)$ notamos que

$$2C_{per}([-L,L]^n) \supseteq C^1_{per}([-L,L]^n) \supseteq \cdots \supseteq C^k_{per}([-L,L]^n).$$

Dado $L > 0$, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es una función periódica de periodo $2L$, entonces

$$\widetilde{f}(x) := f\left(\frac{L}{\pi}x\right)$$

define una función periódica de periodo 2π. En particular, obtenemos que los espacios $C^k_{per}([-L,L]^n)$ y $C^k_{per}([-\pi,\pi]^n)$ son isomorfos como espacios vectoriales. De igual manera, la teoría de la transformada de Fourier se puede reescalar para pasar de la región $[-L,L]^n a [-\pi,\pi]^n$. Por estas razones y sin pérdida de generalidad, en lo que sigue trabajaremos con funciones periódicas de periodo 2π.

Otra notación frecuente para funciones periódicas y transformada de Fourier es considerar funciones sobre el toro $\mathbb{T}^n$. El toro $\mathbb{T}^n$ es el intervalo $[0,2\pi]^n$ donde los lados opuestos se identifican. De manera más precisa, el toro es el conjunto de clases de equivalencia en $\mathbb{R}^n$ dada por la relación $x \sim y$ si y solo si $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^n$, es decir $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$. Adicionalmente el toro es un grupo aditivo por lo que será útil hacerle una traslación a $[-\pi,\pi]^n$

Por las propiedades anteriores, funciones $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ se pueden identificar como funciones periódicas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ con periodo 2π. De esta manera, $C^k_{per}([-\pi,\pi]^n)$ es isomorfo a $C^k(\mathbb{T}^n)$ por lo que por comodidad trabajaremos sobre este espacio. [1]

Nota. Dado que podemos identificar $\mathbb{T}^n$ como $[-\pi,\pi]^n$, vemos que la integración de funciones sobre el toro resulta de restringir la medida de Lebesgue en $[\pi,\pi]^n$ y por la periodicidad de las funciones en $\mathbb{T}^n$ tenemos que:

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)dx = \int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)dx = \int_{[0,2\pi]^n} f(x)dx = \int_{[a_1,2\pi+a_1]\times\cdots\times[a_n,2\pi+a_n]} f(x)dx$$

para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, en efecto:

$$\begin{aligned} \int_{[\pi,\pi]^n} f(x)dx &= \int_{[-\pi,0]^n} f(x)dx + \int_{[0,\pi]^n} f(x)dx \\ &= \int_{[\pi,2\pi]^n} f(y - 2\pi\cdot\mathbf{1})dy + \int_{[0,\pi]^n} f(x)dx \\ &= \int_{[\pi,2\pi]^n} f(x)dx + \int_{[0,\pi]^n} f(x)dx \\ &= \int_{[-0,2\pi]^n} f(x)dx \end{aligned}$$

Para la última propiedad note que:

$$\int_{[0,2\pi]^n} f(x)dx = \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,2\pi]} \cdots \int_{[0,2\pi]} f(x)dx_1 \dots dx_n$$

dado que $f(x)$ es integrable entonces vale el teorema de fubini, dicho esto, basta ver que el resultado se tiene para una de las integrales, a saber:

$$\int_{[0,2\pi]} f(x)dx = \int_{[a,2\pi+a]} f(x)dx$$

Si $a > 2\pi$, en efecto:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)dx &= \int_0^a f(x)dx - \int_{2\pi}^a f(x)dx \\ &= \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(y-2\pi)dy - \int_{2\pi}^a f(x)dx \\ &= \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(x)dx - \int_{2\pi}^a f(x)dx \\ &= \int_a^{2\pi+a} f(x)dx.\end{aligned}$$

los casos $a \in [0, 2\pi]$ y $a < 0$ son análogos.

Finalmente por la periodicidad, la integración por partes no nos deja términos de borde:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n} \partial_j f(x)g(x)dx &= \int_{\partial\mathbb{T}^n} f(x)g(x)\eta_i dS(x) - \int_{\mathbb{T}^n} \partial_j g(x)f(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{T}^n} \partial_j g(x)f(x)dx\end{aligned}$$

ya que $f(-\pi e_j)g(-\pi e_j) = f(\pi e_j)g(\pi e_j)$ para todo $1 \leq j \leq n$.

Preguntarle a Oscar por esto

Teorema 1.2. Si $k \in \mathbb{Z}^n$, sea $\Phi_k(x) := e^{ik\cdot x}$ entonces que para $k, m \in \mathbb{Z}^n$

$$(\Phi_k \mid \Phi_m) = \int_{[-\pi,\pi]^n} \Phi_k(x)\overline{\Phi_m(x)} = 0, \qquad \text{si } k \neq m$$

$$(\Phi_k \mid \Phi_m) = \int_{[-\pi,\pi]^n} \Phi_k(x)\overline{\Phi_m(x)} = (2\pi)^n, \quad \text{si } k = m$$

Demostración. En efecto:

$$
\begin{aligned}
(\Phi_k \mid \Phi_m) &= \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{ik\cdot x} e^{-im\cdot x} dx \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[-\pi,\pi]} \cdots \int_{[-\pi,\pi]} e^{i(k-m)\cdot x} dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[-\pi,\pi]} \cdots \int_{[-\pi,\pi]} e^{i(k_1-m_1)x_1} e^{i(k_2-m_2)x_2} \dots e^{i(k_n-m_n)x_n} dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} e^{i(k_1-m_1)x_1} dx_1 \int_{[-\pi,\pi]} e^{i(k_2-m_2)x_2} dx_2 \dots \int_{[-\pi,\pi]} e^{i(k_n-m_n)x_n} dx_n.
\end{aligned}
$$

y como:

$$
\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq k \\ 2\pi, & \text{si } m = k \end{cases}
$$

entonces se concluye que:

$$
(\Phi_k | \Phi_m) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq k \\ (2\pi)^n & \text{si } m = k \end{cases}
$$

$\square$

Dado el sistema ortogonal $\phi_k(x) = e^{ik\cdot x}$ con $k \in \mathbb{Z}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, queremos escribir a $f \in C_{per}(\mathbb{T}^n)$ como:

$$
f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{ik\cdot x}
$$

Mañana sigo

2. Resultados de Buen Planteamiento

Consideremos el problema de valor inicial asociado a la *ecuacion con no linealidad modificada de Zakharov-Kustnesov-Burgers*

$$
\begin{cases} u_t + \partial_{x_1} \Delta u - \Delta u + u^3 = 0, & (x,t) \in (-\pi,\pi)^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [-\pi,\pi]^n. \end{cases}
$$

Luego escribo bien, de momento pura cuenta

$$
\begin{aligned}
(u_t + \partial_{x_1} \Delta u - \Delta u + u^3)^\wedge(k) &= \widehat{u}_t(k) + \widehat{\partial_{x_1} \Delta u}(k) - \widehat{\Delta u}(k) + \widehat{u^3}(k) \\
&= \partial_t \widehat{u}(k) + ik_1 \widehat{\Delta u}(k) - \widehat{\Delta u}(k) + \widehat{u^3}(k) \\
&= \partial_t \widehat{u}(k) + (ik_1 - 1) \sum_{i=1}^{n} \widehat{\partial_{x_i}^2 u}(k) + \widehat{u^3}(k) \\
&= \partial_t \widehat{u}(k) + (ik_1 - 1) \sum_{i=1}^{n} i^2 k_i^2 \widehat{u}(k) + \widehat{u^3}(k) \\
&= \partial_t \widehat{u}(k) + (1 - ik_1)|k|^2 \widehat{u}(k) + \widehat{u^3}(k).
\end{aligned}
$$

Asi junto al hecho de que $\widehat{u}(k,0) = \widehat{u}_0(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ tenemos el siguiente problema de valor inicial (EDO) respecto a t

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\widehat{u}(k) + (|k|^2 - ik_1|k|^2)\widehat{u}(k) = -\widehat{u^3}(k), & k \in \mathbb{Z}^n, t > 0, \\ \widehat{u}(k,0) = \widehat{u}_0(k), & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Luego usando el factor integrante $e^{(|k|^2 - ik_1|k|^2)t}$, e integrando a ambos lados de 0 a t tenemos que

$$e^{(|k|^2 - ik_1|k|^2)t}\widehat{u}(k,t) - \widehat{u}_0(k) = -\int_0^t e^{(|k|^2 - ik_1|k|^2)t'}\widehat{u^3}(k,t')\,dt'.$$

Asi despejando $\widehat{u}(k,t)$ llegamos a que

$$\widehat{u}(k,t) = e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)t}\widehat{u}_0(k) - \int_0^t e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)(t-t')}\widehat{u^3}(k,t')\,dt',$$

tomando la transformada inversa de Fourier tenemos que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)t}\widehat{u}_0(k))^{\vee} - \int_0^t (e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)(t-t')}\widehat{u^3}(k,t'))^{\vee}\,dt' \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)t + ik\cdot x}\widehat{u}_0(k) - \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)(t-t') + ik\cdot x}\widehat{u^3}(k,t')\,dt'. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esto, es en cierta medida natural definir la familia de operadores $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ tal que: Preguntar pq es en todo R

$$U(t)f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{(ik_1|k|^2 - |k^2|)t + ik\cdot x}\widehat{f}(k).$$

Para f lo suficientemente regular. De esta manera formalmente nuestro candidato a solucion es la formula integral dada por

$$u(x,t) = U(t)u_0(x) - \int_0^t U(t-t')u^3(x,t')\,dt'.$$

Referencias

[1] Riaño Oscar. *Notas de clase : Series de Fourier*. UNAL, 2024.

[2] L Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Springer, 2008.