Przygotowanie do egzaminu z geometrii 3D

23 stycznia 2025

Spis treści

1 Formulas

Długość wektora $\mathbf{V}$ jest określona jako:

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Opis: Ten wzór pozwala obliczyć długość (moduł) wektora w przestrzeni trójwymiarowej, używając jego współrzędnych V_x, V_y, V_z.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ jest określony jako:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z$$

Opis: Ten wzór oblicza iloczyn skalarny (dot product) dwóch wektorów w przestrzeni trójwymiarowej, mnożąc odpowiadające sobie współrzędne V_x, W_x, V_y, W_y, V_z, W_z i sumując wyniki.

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ jest określony jako:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{W} = \begin{bmatrix} V_y W_z - V_z W_y \\ V_z W_x - V_x W_z \\ V_x W_y - V_y W_x \end{bmatrix}$$

Opis: Iloczyn wektorowy (cross product) dwóch wektorów w przestrzeni trójwymiarowej tworzy nowy wektor, który jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$. Składniki nowego wektora są obliczane na podstawie powyższego wzoru.

Rzut wektora $\mathbf{W}$ na $\mathbf{V}$ jest określony jako:

$$\text{proj}_{\mathbf{V}}\mathbf{W} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}}{\|\mathbf{V}\|^2}\mathbf{V}$$

Opis: Rzut wektora $\mathbf{W}$ na $\mathbf{V}$ to wektor będący projekcją $\mathbf{W}$ na kierunek $\mathbf{V}$.

Każdy układ liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ można przekształcić w ortonormalny układ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ za pomocą algorytmu ortonormalizacji Grama-Schmidta:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V} - \text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}}{\|\mathbf{V} - \text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}\|}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{W} - \text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}}{\|\mathbf{W} - \text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}\|}$$

Opis: Algorytm ortonormalizacji Grama-Schmidta służy do przekształcenia układu liniowo niezależnych wektorów w układ ortonormalny (wektory wzajemnie prostopadłe o długości 1). Proces polega na: - Normalizacji pierwszego wektora $\mathbf{U}$, - Usuwaniu rzutów kolejnych wektorów na wcześniejsze i normalizacji powstałych wyników.

Wyznacznik macierzy $M - \lambda I$ jest obliczany jako:

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Opis: Wzór ten przedstawia wyznacznik macierzy $M - \lambda I$, gdzie λ to wartość własna (eigenvalue), a I to macierz jednostkowa. Wyznacznik jest wykorzystywany w obliczaniu wartości własnych macierzy oraz w analizie jej własności algebraicznych.

Wyznacznik macierzy 3×3 można rozwinąć wzdłuż pierwszego wiersza w następujący sposób:

$$\begin{vmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{vmatrix} = M_{xx}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zy} & M_{zz} \end{vmatrix}$$
$$+ M_{xy}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} M_{yx} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zz} \end{vmatrix} + M_{xz}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} M_{yx} & M_{yy} \\ M_{zx} & M_{zy} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= M_{xx}M_{yy}M_{zz} - M_{xx}M_{yz}M_{zy} \\ &\quad - M_{xy}M_{yx}M_{zz} + M_{xy}M_{yz}M_{zx} \\ &\quad + M_{xz}M_{yx}M_{zy} - M_{xz}M_{yy}M_{zx} \end{aligned}$$

Opis: Wyznacznik macierzy 3×3 oblicza się, rozwijając go wzdłuż wiersza lub kolumny. Wzór ten przedstawia rozwinięcie wzdłuż pierwszego wiersza z zastosowaniem wyznaczników macierzy 2×2 dla odpowiednich podmacierzy.

Iloczyn dwóch macierzy M i K można zapisać jako:

$$MK = \begin{pmatrix} M_{xx}K_{xx} + M_{xy}K_{yx} + M_{xz}K_{zx} & M_{xx}K_{xy} + M_{xy}K_{yy} + M_{xz}K_{zy} & M_{xx}K_{xz} + M_{xy}K_{yz} + M_{xz}K_{zz} \\ M_{yx}K_{xx} + M_{yy}K_{yx} + M_{yz}K_{zx} & M_{yx}K_{xy} + M_{yy}K_{yy} + M_{yz}K_{zy} & M_{yx}K_{xz} + M_{yy}K_{yz} + M_{yz}K_{zz} \\ M_{zx}K_{xx} + M_{zy}K_{yx} + M_{zz}K_{zx} & M_{zx}K_{xy} + M_{zy}K_{yy} + M_{zz}K_{zy} & M_{zx}K_{xz} + M_{zy}K_{yz} + M_{zz}K_{zz} \end{pmatrix}$$

Opis: Iloczyn dwóch macierzy M i K oblicza się jako sumę iloczynów odpowiednich wierszy macierzy M i kolumn macierzy K. Wynikiem jest nowa macierz, której elementy są obliczane zgodnie z powyższym wzorem.