Przygotowanie do egzaminu z geometrii 3D

30 stycznia 2025

Spis treści

1 Formulas

Długość wektora $\mathbf{V}$ jest określona jako:

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Opis: Ten wzór pozwala obliczyć długość (moduł) wektora w przestrzeni trójwymiarowej, używając jego współrzędnych V_x, V_y, V_z.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ jest określony jako:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z$$

Opis: Ten wzór oblicza iloczyn skalarny (dot product) dwóch wektorów w przestrzeni trójwymiarowej, mnożąc odpowiadające sobie współrzędne V_x, W_x, V_y, W_y, V_z, W_z i sumując wyniki.

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ jest określony jako:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{W} = \begin{bmatrix} V_y W_z - V_z W_y \\ V_z W_x - V_x W_z \\ V_x W_y - V_y W_x \end{bmatrix}$$

Opis: Iloczyn wektorowy (cross product) dwóch wektorów w przestrzeni trójwymiarowej tworzy nowy wektor, który jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$. Składniki nowego wektora są obliczane na podstawie powyższego wzoru.

Rzut wektora $\mathbf{W}$ na $\mathbf{V}$ jest określony jako:

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{V}}\mathbf{W} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}}{\|\mathbf{V}\|^2}\mathbf{V}$$

Opis: Rzut wektora $\mathbf{W}$ na $\mathbf{V}$ to wektor będący projekcją $\mathbf{W}$ na kierunek $\mathbf{V}$.

Każdy układ liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ można przekształcić w ortonormalny układ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ za pomocą algorytmu ortonormalizacji Grama-Schmidta:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}}{\|\mathbf{V} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}\|}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}}{\|\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}\|}$$

Opis: Algorytm ortonormalizacji Grama-Schmidta służy do przekształcenia układu liniowo niezależnych wektorów w układ ortonormalny (wektory wzajemnie prostopadłe o długości 1). Proces polega na: - Normalizacji pierwszego wektora $\mathbf{U}$, - Usuwaniu rzutów kolejnych wektorów na wcześniejsze i normalizacji powstałych wyników.

Wyznacznik macierzy $M - \lambda I$ jest obliczany jako:

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Opis: Wzór ten przedstawia wyznacznik macierzy $M - \lambda I$, gdzie λ to wartość własna (eigenvalue), a I to macierz jednostkowa. Wyznacznik jest wykorzystywany w obliczaniu wartości własnych macierzy oraz w analizie jej własności algebraicznych.

Wyznacznik macierzy 3×3 można rozwinąć wzdłuż pierwszego wiersza w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{vmatrix} &= M_{xx}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zy} & M_{zz} \end{vmatrix} \\
&\quad + M_{xy}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} M_{yx} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zz} \end{vmatrix} + M_{xz}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} M_{yx} & M_{yy} \\ M_{zx} & M_{zy} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M_{xx}M_{yy}M_{zz} - M_{xx}M_{yz}M_{zy} \\
&\quad - M_{xy}M_{yx}M_{zz} + M_{xy}M_{yz}M_{zx} \\
&\quad + M_{xz}M_{yx}M_{zy} - M_{xz}M_{yy}M_{zx}
\end{aligned}$$

Opis: Wyznacznik macierzy 3×3 oblicza się, rozwijając go wzdłuż wiersza lub kolumny. Wzór ten przedstawia rozwinięcie wzdłuż pierwszego wiersza z zastosowaniem wyznaczników macierzy 2×2 dla odpowiednich podmacierzy.

Iloczyn dwóch macierzy M i K można zapisać jako:

$$MK = \begin{pmatrix} M_{xx}K_{xx} + M_{xy}K_{yx} + M_{xz}K_{zx} & M_{xx}K_{xy} + M_{xy}K_{yy} + M_{xz}K_{zy} & M_{xx}K_{xz} + M_{xy}K_{yz} + M_{xz}K_{zz} \\ M_{yx}K_{xx} + M_{yy}K_{yx} + M_{yz}K_{zx} & M_{yx}K_{xy} + M_{yy}K_{yy} + M_{yz}K_{zy} & M_{yx}K_{xz} + M_{yy}K_{yz} + M_{yz}K_{zz} \\ M_{zx}K_{xx} + M_{zy}K_{yx} + M_{zz}K_{zx} & M_{zx}K_{xy} + M_{zy}K_{yy} + M_{zz}K_{zy} & M_{zx}K_{xz} + M_{zy}K_{yz} + M_{zz}K_{zz} \end{pmatrix}$$

Opis: Iloczyn dwóch macierzy M i K oblicza się jako sumę iloczynów odpowiednich wierszy macierzy M i kolumn macierzy K. Wynikiem jest nowa macierz, której elementy są obliczane zgodnie z powyższym wzorem.

2 Operacje wektorowe

1. Oblicz: $\mathbf{V_1}+\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_1}-\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_1}\cdot\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_1}\times\mathbf{V_2}$ dla wektorów:

$$\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1x} + V_{2x} \\ V_{1y} + V_{2y} \\ V_{1z} + V_{2z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V_1} - \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1x} - V_{2x} \\ V_{1y} - V_{2y} \\ V_{1z} - V_{2z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V_1} \cdot \mathbf{V_2} = V_{1x}V_{2x} + V_{1y}V_{2y} + V_{1z}V_{2z}$$

$$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} V_{1y}V_{2z} - V_{1z}V_{2y} \\ V_{1z}V_{2x} - V_{1x}V_{2z} \\ V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x} \end{bmatrix}$$

(a) $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. Wyznacz długość wektora $\|\mathbf{V}\|$:

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

(a) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

3. Wylicz znormalizowany wektor $\hat{\mathbf{V}}$:

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$$

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

(a) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

4. Wyznacz projekcję wektora W na wektor V dla:

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{V}}\mathbf{W} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}}{\|\mathbf{V}\|^2}\mathbf{V}$$

(a) $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

5. Sprowadź wektory $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ do postaci ortogonalnej, wykorzystując metodę Grama-Schmidta dla danych:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}}{\|\mathbf{V} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}\|}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}}{\|\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}\|}$$

(a) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(f) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

3 Macierze

1. Oblicz wyznaczniki dla poniższych macierzy i jeśli to możliwe wyznacz macierze odwrotne.

(a) $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $M = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & 9 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

2. Wyznacz macierze odwrotne używając metody Gaussa-Jordana.

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

3. Dokonaj diagonalizacji macierzy.

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & \\ 1 & 6 & 4 & \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

4. Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy.

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(f) $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. Wykonaj operacje skalowania macierzą M dla macierzy wierzchołków N.

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & \end{bmatrix}$

6. Zbuduj macierz skalowania S dla której wynikiem operacji na punkcie P_1 będzie punkt P_2.

(a) $P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

7. Siatka geometryczna obiektu zawiera punkty P_1, P_2, P_3, P_4. Oblicz pozycję punktów P_1', P_2', P_3', P_4', które powstaną po zastosowaniu do nich macierzy skalowania S względem punktu P_T.

(a) $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

8. Wyznacz wektor V' będący wektorem powstałym w wyniku obrotu wektora V o kąt α w osi Z.

(a) $V = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 60°$

9. Zbuduj macierz obrotu R pozwalającą wykonać operację obrotu o kąt α wokół osi Z.

(a) $\alpha = 30°$

10. Pracując we współrzędnych jednorodnych zbuduj macierz transformacji F pozwalającą wykonać operację skalowania S oraz translacji T jednocześnie.

(a) $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

11. Zbuduj macierz transformacji M pozwalającą wykonać kolejno operacje obrotu o kąt α wokół osi Z, obrotu o kąt β wokół osi Y jednocześnie.

(a) $\alpha = 45°, \quad \beta = 90°$