Przygotowanie do egzaminu z geometrii 3D

3 lutego 2025

Spis treści

1 Formulas

Długość wektora $\mathbf{V}$ jest określona jako:

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Opis: Ten wzór pozwala obliczyć długość (moduł) wektora w przestrzeni trójwymiarowej, używając jego współrzędnych V_x, V_y, V_z.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ jest określony jako:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z$$

Opis: Ten wzór oblicza iloczyn skalarny (dot product) dwóch wektorów w przestrzeni trójwymiarowej, mnożąc odpowiadające sobie współrzędne V_x, W_x, V_y, W_y, V_z, W_z i sumując wyniki.

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ jest określony jako:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{W} = \begin{bmatrix} V_y W_z - V_z W_y \\ V_z W_x - V_x W_z \\ V_x W_y - V_y W_x \end{bmatrix}$$

Opis: Iloczyn wektorowy (cross product) dwóch wektorów w przestrzeni trójwymiarowej tworzy nowy wektor, który jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$. Składniki nowego wektora są obliczane na podstawie powyższego wzoru.

Rzut wektora $\mathbf{W}$ na $\mathbf{V}$ jest określony jako:

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{V}}\mathbf{W} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}}{\|\mathbf{V}\|^2}\mathbf{V}$$

Opis: Rzut wektora $\mathbf{W}$ na $\mathbf{V}$ to wektor będący projekcją $\mathbf{W}$ na kierunek $\mathbf{V}$.

Każdy układ liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ można przekształcić w ortonormalny układ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ za pomocą algorytmu ortonormalizacji Grama-Schmidta:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}}{\|\mathbf{V} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}\|}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}}{\|\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}\|}$$

Opis: Algorytm ortonormalizacji Grama-Schmidta służy do przekształcenia układu liniowo niezależnych wektorów w układ ortonormalny (wektory wzajemnie prostopadłe o długości 1). Proces polega na: - Normalizacji pierwszego wektora $\mathbf{U}$, - Usuwaniu rzutów kolejnych wektorów na wcześniejsze i normalizacji powstałych wyników.

Wyznacznik macierzy 3×3 można rozwinąć wzdłuż pierwszego wiersza w następujący sposób:

$$\begin{vmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{vmatrix} = M_{xx}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zy} & M_{zz} \end{vmatrix}$$
$$+ M_{xy}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} M_{yx} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zz} \end{vmatrix} + M_{xz}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} M_{yx} & M_{yy} \\ M_{zx} & M_{zy} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= M_{xx}M_{yy}M_{zz} - M_{xx}M_{yz}M_{zy} \\
&\quad - M_{xy}M_{yx}M_{zz} + M_{xy}M_{yz}M_{zx} \\
&\quad + M_{xz}M_{yx}M_{zy} - M_{xz}M_{yy}M_{zx}
\end{aligned}
$$

Opis: Wyznacznik macierzy 3×3 oblicza się, rozwijając go wzdłuż wiersza lub kolumny. Wzór ten przedstawia rozwinięcie wzdłuż pierwszego wiersza z zastosowaniem wyznaczników macierzy 2×2 dla odpowiednich podmacierzy.

Iloczyn dwóch macierzy M i K można zapisać jako:

$$
MK = \begin{pmatrix} M_{xx}K_{xx} + M_{xy}K_{yx} + M_{xz}K_{zx} & M_{xx}K_{xy} + M_{xy}K_{yy} + M_{xz}K_{zy} & M_{xx}K_{xz} + M_{xy}K_{yz} + M_{xz}K_{zz} \\ M_{yx}K_{xx} + M_{yy}K_{yx} + M_{yz}K_{zx} & M_{yx}K_{xy} + M_{yy}K_{yy} + M_{yz}K_{zy} & M_{yx}K_{xz} + M_{yy}K_{yz} + M_{yz}K_{zz} \\ M_{zx}K_{xx} + M_{zy}K_{yx} + M_{zz}K_{zx} & M_{zx}K_{xy} + M_{zy}K_{yy} + M_{zz}K_{zy} & M_{zx}K_{xz} + M_{zy}K_{yz} + M_{zz}K_{zz} \end{pmatrix}
$$

Opis: Iloczyn dwóch macierzy M i K oblicza się jako sumę iloczynów odpowiednich wierszy macierzy M i kolumn macierzy K. Wynikiem jest nowa macierz, której elementy są obliczane zgodnie z powyższym wzorem.

Metoda Gaussa–Jordana

$$
\left[\ M \mid I\ \right] \xrightarrow{\text{operacje elementarne}} \left[\ I \mid M^{-1}\ \right].
$$

Opis: Metoda Gaussa–Jordana polega na dołączeniu do macierzy M macierzy jednostkowej I (w postaci rozszerzonej) i wykonaniu na niej elementarnych operacji na wierszach. Po sprowadzeniu lewej strony do I, prawa strona staje się macierzą odwrotną M^{-1}.

Przykład (niewielka macierz 2×2)

Rozważmy macierz:

$$
M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.
$$

Aby znaleźć M^{-1} metodą Gaussa–Jordana, tworzymy macierz rozszerzoną:

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].
$$

Krok 1. Wyzeruj elementy poniżej pierwszego przegubowego (tzw. pivotu) w pierwszej kolumnie:

$$
R_2 \leftarrow R_2 - 3\,R_1,
$$

co daje:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Krok 2. Unormuj drugi wiersz (aby mieć jedynkę na przekątnej):

$$R_2 \leftarrow -\tfrac{1}{2}\, R_2 \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Krok 3. Wyzeruj element powyżej nowego pivotu (w pierwszym wierszu, drugim stolcu):

$$R_1 \leftarrow R_1 - 2\, R_2,$$

czyli

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 - 2\cdot\frac{3}{2} & 0 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Wynik: Po lewej stronie mamy macierz jednostkową, a po prawej macierz odwrotną M^{-1}:

$$M^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Macierze obrotu o kąt θ w przestrzeni trójwymiarowej:

$$R_x(\theta) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_z(\theta) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opis: Powyższe macierze reprezentują obroty o kąt θ wokół kolejno osi x, y i z. Każda z nich może służyć do transformacji wektorów w $\mathbb{R}^3$ w celu wykonania obrotu o zadany kąt wokół wskazanej osi.

Diagonalizacja macierzy M polega na znalezieniu takiej macierzy przejścia P oraz macierzy diagonalnej D, aby zachodziła równość:

$$M \;=\; P\, D\, P^{-1}.$$

Macierz diagonalna D zawiera wartości własne (ang. *eigenvalues*) macierzy M na głównej przekątnej, natomiast kolumny macierzy P są wektorami własnymi (ang. *eigenvectors*) odpowiadającymi tym wartościom własnym.

Przykład diagonalizacji prostej macierzy 2×2

Rozważmy macierz:

$$M \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Chcemy znaleźć taką macierz P i macierz diagonalną D, aby:

$$M = P\, D\, P^{-1}.$$

$$\det(M - \lambda I) \;=\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Rysunek 1: Wyznacznik macierzy $(M - \lambda I)$ dla przykładowej macierzy 3×3.

Krok 1: Znalezienie wartości własnych. Wartości własne λ otrzymujemy, rozwiązując równanie:

$$\det(M - \lambda I) \;=\; 0.$$

W naszym przypadku:

$$M - \lambda I \;=\; \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Zatem:

$$\det(M - \lambda I) \;=\; (2-\lambda)(3-\lambda) - (1 \cdot 0) \;=\; (2-\lambda)(3-\lambda).$$

Równanie $\det(M - \lambda I) = 0$ daje:

$$(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \implies \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Krok 2: Znalezienie wektorów własnych. Dla każdej wartości własnej λ_i rozwiązujemy układ:

$$(M - \lambda_i I)\mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

aby otrzymać wektor własny $\mathbf{v}_i$.

Dla $\lambda_1 = 2$:

$$M - 2I \;=\; \begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 3-2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Układ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oznacza, że $v_y = 0$. Nie ma warunku na v_x, więc bierzemy $v_x = 1$. Zatem wektor własny:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dla $\lambda_2 = 3$:

$$M - 3I \;=\; \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Układ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ daje równość $-v_x + v_y = 0$, czyli $v_y = v_x$. Możemy wybrać $v_x = 1$, wtedy $v_y = 1$. Zatem wektor własny:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Krok 3: Zbudowanie macierzy P i macierzy D. Kolumny macierzy P to wektory własne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Zatem:

$$P \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz diagonalna D zawiera wartości własne λ_1, λ_2 na głównej przekątnej (w tej samej kolejności co kolumny w P):

$$D \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Krok 4: Sprawdzenie równości $M = PDP^{-1}$. Aby potwierdzić, że faktycznie zachodzi diagonalizacja, można obliczyć:

$$P\,D\,P^{-1} \quad \text{oraz porównać z} \quad M.$$

W przypadku poprawnego doboru P i D otrzymamy dokładnie macierz M.

Macierz skalowania w trójwymiarowej przestrzeni można zapisać jako:

$$S(\alpha, \beta, \gamma) \;=\; \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

gdzie α, β, γ to dodatnie liczby rzeczywiste.

Działanie tej transformacji na wektor $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)^\top$ daje wektor

$$\mathbf{V}' \;=\; S(\alpha, \beta, \gamma)\,\mathbf{V} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha\,V_x \\ \beta\,V_y \\ \gamma\,V_z \end{pmatrix}.$$

Niech prosta będzie zadana przez punkt S i wektor kierunkowy V.

Jeżeli P to punkt w przestrzeni, to jego odległość od tej prostej wynosi: $d = \frac{\|(P-S)\times V\|}{\|V\|}$.

W powyższym wzorze: $(P-S)\times V$ oznacza iloczyn wektorowy, $\|\cdot\|$ - normę (długość) wektora.

2 Operacje wektorowe

1. Oblicz: $\mathbf{V_1}+\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_1}-\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_1}\cdot\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_1}\times\mathbf{V_2}$ dla wektorów:

$$\mathbf{V_1}+\mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1x}+V_{2x} \\ V_{1y}+V_{2y} \\ V_{1z}+V_{2z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V_1}-\mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1x}-V_{2x} \\ V_{1y}-V_{2y} \\ V_{1z}-V_{2z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V_1}\cdot\mathbf{V_2} = V_{1x}V_{2x}+V_{1y}V_{2y}+V_{1z}V_{2z}$$

$$\mathbf{V_1}\times\mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} V_{1y}V_{2z}-V_{1z}V_{2y} \\ V_{1z}V_{2x}-V_{1x}V_{2z} \\ V_{1x}V_{2y}-V_{1y}V_{2x} \end{bmatrix}$$

(a) $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. Wyznacz długość wektora $\|\mathbf{V}\|$:

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

(a) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

3. Wylicz znormalizowany wektor $\hat{\mathbf{V}}$:

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$$

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

(a) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

4. Wyznacz projekcję wektora W na wektor V dla:

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{V}}\mathbf{W} = \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{W}}{\|\mathbf{V}\|^2}\mathbf{V}$$

(a) $\mathbf{W} = \begin{bmatrix}5\\5\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix}10\\0\\0\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{W} = \begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix}8\\4\\0\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{W} = \begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$

5. Sprowadź wektory $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ do postaci ortogonalnej, wykorzystując metodę Grama-Schmidta dla danych:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}}{\|\mathbf{V} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}\|}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}}{\|\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}\|}$$

(a) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix}6\\2\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix}8\\8\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix}4\\4\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix}4\\-4\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix}-4\\-4\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix}0\\0\\10\end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(f) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

3 Macierze

1. Oblicz wyznaczniki dla poniższych macierzy i jeśli to możliwe wyznacz macierze odwrotne.

$$\begin{vmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{vmatrix} = M_{xx}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zy} & M_{zz} \end{vmatrix} + M_{xy}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} M_{yx} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zz} \end{vmatrix} + M_{xz}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} M_{yx} & M_{yy} \\ M_{zx} & M_{zy} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= M_{xx}M_{yy}M_{zz} - M_{xx}M_{yz}M_{zy} \\ &\quad - M_{xy}M_{yx}M_{zz} + M_{xy}M_{yz}M_{zx} \\ &\quad + M_{xz}M_{yx}M_{zy} - M_{xz}M_{yy}M_{zx} \end{aligned}$$

(a) $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 & 2 \\ \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

2. Wyznacz macierze odwrotne używając metody Gaussa-Jordana.

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

3. Dokonaj diagonalizacji macierzy.

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

4. Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy.

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(f) $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. Wykonaj operacje skalowania macierzą M dla macierzy wierzchołków N.

Macierz skalowania w trójwymiarowej przestrzeni można zapisać jako:

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

gdzie α, β, γ to dodatnie liczby rzeczywiste.

Działanie tej transformacji na wektor $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)^\top$ daje wektor

$$\mathbf{V}' = S(\alpha, \beta, \gamma)\,\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \alpha\, V_x \\ \beta\, V_y \\ \gamma\, V_z \end{pmatrix}.$$

(a)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(c)

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Zbuduj macierz skalowania S dla której wynikiem operacji na punkcie P_1 będzie punkt P_2.

(a) $P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

7. Siatka geometryczna obiektu zawiera punkty P_1, P_2, P_3, P_4. Oblicz pozycję punktów P_1', P_2', P_3', P_4', które powstaną po zastosowaniu do nich macierzy skalowania S względem punktu P_T.

Przy skalowaniu punktu $\mathbf{P}$ względem tzw. pivotu (punktu odniesienia) P_T z użyciem macierzy skalowania S (np. 3×3), nowa pozycja $\mathbf{P}'$ wyznaczana jest ze wzoru:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}_T + S\big(\mathbf{P} - \mathbf{P}_T\big).$$

Algorytm (krok po kroku):

1. *Przesunięcie pivotu do początku:* oblicz $\mathbf{P} - \mathbf{P}_T$.
2. *Skalowanie:* pomnóż otrzymany wektor przez macierz S, czyli $S\big(\mathbf{P} - \mathbf{P}_T\big)$.
3. *Przesunięcie z powrotem:* dodaj $\mathbf{P}_T$, otrzymując $\mathbf{P}' = \mathbf{P}_T + S\big(\mathbf{P} - \mathbf{P}_T\big)$.

(a)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P_T = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P_T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8. Wyznacz wektor $\mathbf{V}'$ będący wektorem powstałym w wyniku obrotu wektora $\mathbf{V}$ o kąt α w osi Z.

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kąt	**Kąt w radianach**	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$
$0°$	0	0	1
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$180°$	π	0	-1

Tabela 1: Podstawowe wartości $\sin\theta$ i $\cos\theta$ dla najważniejszych kątów (w stopniach i radianach).

(a)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 60°$$

(b)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 45°$$

(c)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 30°$$

(d)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 90°$$

9. Zbuduj macierz obrotu R pozwalającą wykonać operację obrotu o kąt α wokół osi Z.

Macierz obrotu wokół osi Z ma postać:

(a) $\alpha = 30°$

(b) $\alpha = 45°$

(c) $\alpha = 60°$

(d) $\alpha = 90°$

10. Pracując we współrzędnych jednorodnych zbuduj macierz transformacji F pozwalającą wykonać operację skalowania S oraz translacji T jednocześnie. Oblicz pozycję punktów P'_1, P'_2, P'_3, które powstaną po zastosowaniu do nich macierzy transformacji F.

W układzie współrzędnych jednorodnych trójwymiarowy punkt

$$\mathbf{P} \;=\; (x,\; y,\; z)$$

zapisujemy jako wektor 4D:

$$\widetilde{\mathbf{P}} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jeśli chcemy wykonać *jednocześnie* skalowanie o współczynniki S_x, S_y, S_z oraz translację o wektor $\mathbf{T} = (T_x, T_y, T_z)$, to stosujemy macierz $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ w postaci:

$$\mathbf{F} \;=\; \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & T_x \\ 0 & S_y & 0 & T_y \\ 0 & 0 & S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wtedy *nowy* punkt $\mathbf{P}' = (x',\, y',\, z')$ otrzymujemy przez wymnożenie:

$$\widetilde{\mathbf{P}}' \;=\; \mathbf{F}\,\widetilde{\mathbf{P}} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{P}' \;=\; \bigl(x',\, y',\, z'\bigr).$$

Dokładniej:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{P}}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & T_x \\ 0 & S_y & 0 & T_y \\ 0 & 0 & S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{P}}} = \begin{pmatrix} S_x\, x + T_x \\ S_y\, y + T_y \\ S_z\, z + T_z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Widać, że $\mathbf{P}'$ to najpierw *skalowanie* współrzędnych (x, y, z) wzdłuż każdej osi, a następnie *przesunięcie* o $\big(T_x, T_y, T_z\big)$.

(a)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(f)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S_x = 2, \quad S_y = 1, \quad S_z = 3, \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

11. Zbuduj macierz transformacji M pozwalającą wykonać kolejno operację obrotu o kąt α wokół osi Z, obrotu o kąt β wokół osi Y jednocześnie. Oblicz pozycje punktów P_1', P_2', P_3', które powstaną po zastosowaniu macierzy transformacji M do punktów P_1, P_2, P_3.

(a)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 90^\circ$$

12. Pracując we współrzędnych jednorodnych zbuduj macierz transformacji F pozwalającą wykonać kolejno operację skalowania S, obrotu o kąt α wokół osi X, translacji $\mathbf{T_1}$, obrotu o kąt β wokół osi Y i translacji $\mathbf{T_2}$ jednocześnie. Oblicz pozycję punktów P_1', P_2', P_3', które powstaną po zastosowaniu macierzy transformacji F do punktów P_1, P_2, P_3.

(a)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S_x = 2, \quad S_y = 1, \quad S_z = 2, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 90^\circ$$

(b)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$S_x = 4, \quad S_y = 2, \quad S_z = 2, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 45°, \quad \beta = 120°$$

(c)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$S_x = 0.5, \quad S_y = 2, \quad S_z = 3, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 150°, \quad \beta = 270°$$

4 Frustum

1. Wyznacz płaszczyzny bryły widzenia

Podane są parametry kąt widzenia β, rozdzielczość ekranu oraz zakres rysowania n, f:

(a) $\beta = 90°, \quad 1280 \times 960, \quad n = 1, \quad f = 100$

(b) $\beta = 45°, \quad 1920 \times 1080, \quad n = 1, \quad f = 100$

(c) $\beta = 60°, \quad 1024 \times 768, \quad n = 1, \quad f = 100$

2. Sprawdź, czy punkt P leży wewnątrz bryły widzenia

(a) $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad a = 4:3, \quad e = 1, \quad n = 1, \quad f = 100$

(b) $P = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad a = 16:9, \quad e = 1, \quad n = 1, \quad f = 100$

(c) $P = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad a = 16:10, \quad e = 2, \quad n = 1, \quad f = 100$

3. Wyznacz wektor normalny N i określ relacje punktu O

Dane są płaszczyzny A, B, C zdefiniowane macierzą punktów:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. Sprawdź czy punkty P_1 i P_2 leżą wewnątrz bryły widzenia (frustum) zdefiniowanej płaszczyznami:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, 6\}: \quad n_{i,x}\,x \;+\; n_{i,y}\,y \;+\; n_{i,z}\,z \;+\; d_i \;\; \geq \; 0.$$

(Jeśli powyższy warunek jest spełniony dla każdego i, punkt jest wewnątrz frustum.)

	bliska	daleka	lewa	prawa	górna	dolna
	0	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0	0
n	0	0	0	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
a	-1	1	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
	-1	100	0	0	0	0

$$P_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

5. Sprawdź czy sfery w punktach P_1 i P_2, i promieniach r_1 i r_2 leżą wewnątrz bryły widzenia (frustum) zdefiniowanej płaszczyznami:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, 6\}: \quad n_{i,x}\,x \;+\; n_{i,y}\,y \;+\; n_{i,z}\,z \;+\; d_i \;\; \geq \; r.$$

	bliska	daleka	lewa	prawa	górna	dolna
N	0	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0	0
	0	0	0	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
a	-1	1	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
	-1	100	0	0	0	0

$$P_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad r_1 = 3$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad r_2 = 2$$

Ray tracing

1. Sprawdź czy półprosta o początku w punkcie S i kierunku V przecina płaszczyznę określoną przez wektor normalny N i punkt na płaszczyźnie P. Jeżeli to możliwe to wyznacz punkt przecięcia.

(a)

$$S = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$S = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Sprawdź czy promień o początku w punkcie S i kierunku V trafi trójkąt zdefiniowany macierzą punktów P.

(a)

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$V = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & -10 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

(d)

$$V = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Sprawdź czy promień o początku w punkcie S i kierunku V trafi wielokąt o wierzchołkach zdefiniowanych macierzą punktów P.

(a)

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Sprawdź czy promień o początku w punkcie S i kierunku V trafi prostopadłościan o środku w punkcie C, długościach boków a, b, c i orientacji zgodnie z wersorami u, v, w.

(a)

$$S = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a = 2, \quad b = 2, \quad c = 1$$

$$(u\ v\ w) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(b)

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a = 2, \quad b = 2, \quad c = 3$$

$$(u\ v\ w) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(c)

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad a = 4, \quad b = 5, \quad c = 4$$

$$(u\ v\ w) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Oświetlenie

1. Dla punktowego światła znajdującego się w punkcie Q o kolorze RGB. Wyznacz intensywność światła w punkcie P, dla współczynników osłabienia: k_c, k_l, k_q

(a)

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.04$$

(b)

$$Q = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.05$$

(c)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.05$$

(d)

$$Q = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.05$$

(e)

$$Q = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.02$$

2. Dla światła reflektora znajdującego się w punkcie Q o kierunku s i kolorze RGB oraz parametrze skupienia wiązki p. Wyznacz intensywność światła w punkcie P, dla współczynników osłabienia: k_c, k_l, k_q

(a)

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.04, \quad p = 2$$

(b)

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.04, \quad p = 2$$

(c)

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.04, \quad p = 2$$