Przygotowanie do egzaminu z geometrii 3D

31 stycznia 2025

Spis treści

1 Formulas

Długość wektora **V** jest określona jako:

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Opis: Ten wzór pozwala obliczyć długość (moduł) wektora w przestrzeni trójwymiarowej, używając jego współrzędnych V_x, V_y, V_z.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów **V** i **W** jest określony jako:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z$$

Opis: Ten wzór oblicza iloczyn skalarny (dot product) dwóch wektorów w przestrzeni trójwymiarowej, mnożąc odpowiadające sobie współrzędne V_x, W_x, V_y, W_y, V_z, W_z i sumując wyniki.

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów **V** i **W** jest określony jako:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{W} = \begin{bmatrix} V_y W_z - V_z W_y \\ V_z W_x - V_x W_z \\ V_x W_y - V_y W_x \end{bmatrix}$$

Opis: Iloczyn wektorowy (cross product) dwóch wektorów w przestrzeni trójwymiarowej tworzy nowy wektor, który jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez $\mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$. Składniki nowego wektora są obliczane na podstawie powyższego wzoru.

Rzut wektora $\mathbf{W}$ na $\mathbf{V}$ jest określony jako:

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{V}}\mathbf{W} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}}{\|\mathbf{V}\|^2}\mathbf{V}$$

Opis: Rzut wektora $\mathbf{W}$ na $\mathbf{V}$ to wektor będący projekcją $\mathbf{W}$ na kierunek $\mathbf{V}$.

Każdy układ liniowo niezależnych wektorów $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ i $\mathbf{W}$ można przekształcić w ortonormalny układ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ za pomocą algorytmu ortonormalizacji Grama-Schmidta:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}}{\|\mathbf{V} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}\|}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}}{\|\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}\|}$$

Opis: Algorytm ortonormalizacji Grama-Schmidta służy do przekształcenia układu liniowo niezależnych wektorów w układ ortonormalny (wektory wzajemnie prostopadłe o długości 1). Proces polega na: - Normalizacji pierwszego wektora $\mathbf{U}$, - Usuwaniu rzutów kolejnych wektorów na wcześniejsze i normalizacji powstałych wyników.

Wyznacznik macierzy $M - \lambda I$ jest obliczany jako:

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Opis: Wzór ten przedstawia wyznacznik macierzy $M - \lambda I$, gdzie λ to wartość własna (eigenvalue), a I to macierz jednostkowa. Wyznacznik jest wykorzystywany w obliczaniu wartości własnych macierzy oraz w analizie jej własności algebraicznych.

Wyznacznik macierzy 3×3 można rozwinąć wzdłuż pierwszego wiersza w następujący sposób:

$$\begin{vmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{vmatrix} = M_{xx}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zy} & M_{zz} \end{vmatrix} + M_{xy}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} M_{yx} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zz} \end{vmatrix} + M_{xz}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} M_{yx} & M_{yy} \\ M_{zx} & M_{zy} \end{vmatrix}$$

$$= M_{xx}M_{yy}M_{zz} - M_{xx}M_{yz}M_{zy} - M_{xy}M_{yx}M_{zz} + M_{xy}M_{yz}M_{zx} + M_{xz}M_{yx}M_{zy} - M_{xz}M_{yy}M_{zx}$$

Opis: Wyznacznik macierzy 3×3 oblicza się, rozwijając go wzdłuż wiersza lub kolumny. Wzór ten przedstawia rozwinięcie wzdłuż pierwszego wiersza z zastosowaniem wyznaczników macierzy 2×2 dla odpowiednich podmacierzy.

Iloczyn dwóch macierzy M i K można zapisać jako:

$$MK = \begin{pmatrix} M_{xx}K_{xx} + M_{xy}K_{yx} + M_{xz}K_{zx} & M_{xx}K_{xy} + M_{xy}K_{yy} + M_{xz}K_{zy} & M_{xx}K_{xz} + M_{xy}K_{yz} + M_{xz}K_{zz} \\ M_{yx}K_{xx} + M_{yy}K_{yx} + M_{yz}K_{zx} & M_{yx}K_{xy} + M_{yy}K_{yy} + M_{yz}K_{zy} & M_{yx}K_{xz} + M_{yy}K_{yz} + M_{yz}K_{zz} \\ M_{zx}K_{xx} + M_{zy}K_{yx} + M_{zz}K_{zx} & M_{zx}K_{xy} + M_{zy}K_{yy} + M_{zz}K_{zy} & M_{zx}K_{xz} + M_{zy}K_{yz} + M_{zz}K_{zz} \end{pmatrix}$$

Opis: Iloczyn dwóch macierzy M i K oblicza się jako sumę iloczynów odpowiednich wierszy macierzy M i kolumn macierzy K. Wynikiem jest nowa macierz, której elementy są obliczane zgodnie z powyższym wzorem.

2 Operacje wektorowe

1. Oblicz: $\mathbf{V_1}+\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_1}-\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_1}\cdot\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_1}\times\mathbf{V_2}$ dla wektorów:

$$\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1x} + V_{2x} \\ V_{1y} + V_{2y} \\ V_{1z} + V_{2z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V_1} - \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1x} - V_{2x} \\ V_{1y} - V_{2y} \\ V_{1z} - V_{2z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V_1} \cdot \mathbf{V_2} = V_{1x}V_{2x} + V_{1y}V_{2y} + V_{1z}V_{2z}$$

$$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} V_{1y}V_{2z} - V_{1z}V_{2y} \\ V_{1z}V_{2x} - V_{1x}V_{2z} \\ V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x} \end{bmatrix}$$

(a) $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. Wyznacz długość wektora $\|\mathbf{V}\|$:

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

(a) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

3. Wylicz znormalizowany wektor $\hat{\mathbf{V}}$:

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$$

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

(a) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

4. Wyznacz projekcję wektora W na wektor V dla:

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{V}}\mathbf{W} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}}{\|\mathbf{V}\|^2}\mathbf{V}$$

(a) $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

5. Sprowadź wektory $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ do postaci ortogonalnej, wykorzystując metodę Grama-Schmidta dla danych:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}}{\|\mathbf{V} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{V}\|}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}}{\|\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{W} - \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{W}\|}$$

(a) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(f) $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

3 Macierze

1. Oblicz wyznaczniki dla poniższych macierzy i jeśli to możliwe wyznacz macierze odwrotne.

(a) $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

2. Wyznacz macierze odwrotne używając metody Gaussa-Jordana.

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

3. Dokonaj diagonalizacji macierzy.

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

4. Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy.

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(f) $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. Wykonaj operacje skalowania macierzą M dla macierzy wierzchołków N.

(a)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(c)

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Zbuduj macierz skalowania S dla której wynikiem operacji na punkcie P_1 będzie punkt P_2.

(a) $P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

7. Siatka geometryczna obiektu zawiera punkty P_1, P_2, P_3, P_4. Oblicz pozycję punktów P_1', P_2', P_3', P_4', które powstaną po zastosowaniu do nich macierzy skalowania S względem punktu P_T.

(a)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P_T = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P_T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8. Wyznacz wektor $\mathbf{V}'$ będący wektorem powstałym w wyniku obrotu wektora V o kąt α w osi Z.

(a)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 60^\circ$$

(b)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 45^\circ$$

(c)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 30^\circ$$

(d)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 90^\circ$$

9. Zbuduj macierz obrotu R pozwalającą wykonać operację obrotu o kąt α wokół osi Z.

Macierz obrotu wokół osi Z ma postać:

(a) $\alpha = 30^\circ$

(b) $\alpha = 45^\circ$

(c) $\alpha = 60^\circ$

(d) $\alpha = 90^\circ$

10. Pracując we współrzędnych jednorodnych zbuduj macierz transformacji F pozwalającą wykonać operację skalowania S oraz translacji T jednocześnie. Oblicz pozycję punktów P_1', P_2', P_3', które powstaną po zastosowaniu do nich macierzy transformacji F.

(a)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(f)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S_x = 2, \quad S_y = 1, \quad S_z = 3, \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

11. Zbuduj macierz transformacji M pozwalającą wykonać kolejno operację obrotu o kąt α wokół osi Z, obrotu o kąt β wokół osi Y jednocześnie. Oblicz pozycje punktów P_1', P_2', P_3', które powstaną po zastosowaniu macierzy transformacji M do punktów P_1, P_2, P_3.

(a)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 90^\circ$$

12. Pracując we współrzędnych jednorodnych zbuduj macierz transformacji F pozwalającą wykonać kolejno operację skalowania S, obrotu o kąt α wokół osi X, translacji $\mathbf{T_1}$, obrotu o kąt β wokół osi Y i translacji $\mathbf{T_2}$ jednocześnie. Oblicz pozycję punktów P_1', P_2', P_3', które powstaną po zastosowaniu macierzy transformacji F do punktów P_1, P_2, P_3.

(a)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S_x = 2, \quad S_y = 1, \quad S_z = 2, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 90^\circ$$

(b)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$S_x = 4, \quad S_y = 2, \quad S_z = 2, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 45°, \quad \beta = 120°$$

(c)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$S_x = 0.5, \quad S_y = 2, \quad S_z = 3, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 150°, \quad \beta = 270°$$

4 Frustum

1. Wyznacz płaszczyzny bryły widzenia

Podane są parametry kąt widzenia β, rozdzielczość ekranu oraz zakres rysowania n, f:

(a) $\beta = 90°, \quad 1280 \times 960, \quad n = 1, \quad f = 100$

(b) $\beta = 45°, \quad 1920 \times 1080, \quad n = 1, \quad f = 100$

(c) $\beta = 60°, \quad 1024 \times 768, \quad n = 1, \quad f = 100$

2. Sprawdź, czy punkt P leży wewnątrz bryły widzenia

(a) $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad a = 4 : 3, \quad e = 1, \quad n = 1, \quad f = 100$

(b) $P = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad a = 16 : 9, \quad e = 1, \quad n = 1, \quad f = 100$

(c) $P = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad a = 16 : 10, \quad e = 2, \quad n = 1, \quad f = 100$

3. Wyznacz wektor normalny N i określ relacje punktu O

Dane są płaszczyzny A, B, C zdefiniowane macierzą punktów:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. Sprawdź czy punkty P_1 i P_2 leżą wewnątrz bryły widzenia (frustum) zdefiniowanej płaszczyznami:

	bliska	daleka	lewa	prawa	górna	dolna
	0	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0	0
n	0	0	0	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
a	-1	1	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
	-1	100	0	0	0	0

$$P_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

5. Sprawdź czy sfery w punktach P_1 i P_2, i promieniach r_1 i r_2 leżą wewnątrz bryły widzenia (frustum) zdefiniowanej płaszczyznami:

	bliska	daleka	lewa	prawa	górna	dolna
N	0	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0	0
	0	0	0	0	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
a	-1	1	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
	-1	100	0	0	0	0

$$P_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad r_1 = 3$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad r_2 = 2$$

Ray tracing

1. Sprawdź czy półprosta o początku w punkcie S i kierunku V przecina płaszczyznę określoną przez wektor normalny N i punkt na płaszczyźnie P. Jeżeli to możliwe to wyznacz punkt przecięcia.

(a)

$$S = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$S = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Sprawdź czy promień o początku w punkcie S i kierunku V trafi trójkąt zdefiniowany macierzą punktów P.

(a)

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$V = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & -10 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

(d)

$$V = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Sprawdź czy promień o początku w punkcie S i kierunku V trafi wielokąt o wierzchołkach zdefiniowanych macierzą punktów P.

(a)

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Sprawdź czy promień o początku w punkcie S i kierunku V trafi prostopadłościan o środku w punkcie C, długościach boków a, b, c i orientacji zgodnie z wersorami u, v, w.

(a)

$$S = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a = 2, \quad b = 2, \quad c = 1$$

$$(u\ v\ w) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(b)

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a = 2, \quad b = 2, \quad c = 3$$

$$(u\ v\ w) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(c)

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad a = 4, \quad b = 5, \quad c = 4$$

$$(u\ v\ w) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Oświetlenie

1. Dla punktowego światła znajdującego się w punkcie Q o kolorze RGB. Wyznacz intensywność światła w punkcie P, dla współczynników osłabienia: k_c, k_l, k_q

(a)

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.04$$

(b)

$$Q = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.05$$

(c)

$$Q = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix}1\\0.5\\0.2\end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.05$$

(d)

$$Q = \begin{bmatrix}2\\-4\\4\end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix}1\\0.5\\0.25\end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.05$$

(e)

$$Q = \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix}0.25\\0.5\\1\end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.02$$

2. Dla światła reflektora znajdującego się w punkcie Q o kierunku s i kolorze RGB oraz parametrze skupienia wiązki p. Wyznacz intensywność światła w punkcie P, dla współczynników osłabienia: k_c, k_l, k_q

(a)

$$Q = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix}1\\0.5\\1\end{bmatrix}$$
$$k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.04, \quad p = 2$$

(b)

$$Q = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix}1\\0.5\\1\end{bmatrix}$$
$$k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.04, \quad p = 2$$

(c)

$$Q = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix}0\\0\\5\end{bmatrix}, \quad RGB = \begin{bmatrix}1\\0.5\\1\end{bmatrix}$$
$$k_c = 1, \quad k_l = 0.2, \quad k_q = 0.04, \quad p = 2$$