3.1 Proof. (1) $\|x\|_w = \|Wx\| \geq 0$, $\|x\|_w = 0 \Rightarrow \|Wx\| = 0 \Rightarrow Wx = 0 \Rightarrow x = 0$ (W is nonsingular).

(2) $\|x+y\|_w = \|W(x+y)\| = \|Wx + Wy\| \geq \|Wx\| + \|Wy\| = \|x\|_w + \|y\|_w$

(3) $\|\alpha x\|_w = \|\alpha W x\| = |\alpha| \|Wx\| = |\alpha| \|x\|_w$

3.2 Proof. 令 $|\lambda_j| = \max_i |\lambda_i|$, $Av_j = \lambda_j v_j$. $v_j \neq 0$ $x = v_j$

有 $\|Ax\| = \|Av_j\| = \|\lambda_j v_j\| = |\lambda_j| \|v_j\|$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Av_j\|}{\|v_j\|} = |\lambda_j| = \rho(A)$$

3.3 Proof. (a) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2} \geq \sqrt{\max_i |x_i|^2} = \max |x_i| = \|x\|_\infty$

$x = (1, 0, \ldots 0)$

(b) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2} \leq \sqrt{m \cdot \max_i |x_i|^2} = \sqrt{m} \|x\|_\infty$

$x = (1, 1, \ldots 1)$

(c) $$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\sqrt{n}\|x\|_\infty} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty$$

(d) $$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sup \frac{\sqrt{m}\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sup \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sqrt{m}\|A\|_\infty$$

3.4 (a) 证 $B = PAQ$.

$P \in C^{\mu \times m}$. $P_{i u_i} = 1$

$Q \in C^{n \times \nu}$ $Q_{\nu_i i} = 1$

(b) $\|B\|_p = \|PAQ\|_p \leq \|P\| \cdot \|A\| \cdot \|Q\|$

$$\|P\|_p = \frac{\sup \|Px\|_p}{\|x\|_p} \leq 1$$

上述式子成立是因为 P每行仅有1个元素为1. Q同理. $\|Q\|_p \leq 1$

$\Rightarrow \|B\|_p \leq \|A\|_p$.

3.5. Proof. $\|E\|_F^2 = tr(EE^*) = tr(u v^* v u^*) = v^* v \, tr(u u^*) = \|v\|_F \cdot \|u\|_F$.

3.6 (a) Proof. $\|x\|' \geq 0$, $\|x\|' = 0 \Rightarrow \sup_{\|y\|=1} |y^* x| = 0 \Rightarrow |x|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\|x_1 + x_2\|' = \sup_{\|y\|=1} |y^*(x_1+x_2)| \leq \sup_{\|y\|=1} |y^* x_1| + \sup_{\|y\|=1} |y^* x_2| = \|x_1\|' + \|x_2\|'$

$\|\alpha x\|' = \sup_{\|y\|=1} |y^* \alpha x| = \sup_{\|y\|=1} |\alpha| |y^* x| = |\alpha| \|x\|'$.

(b). 由引理. $\exists z\in \mathbb{C}^m$, $z\neq 0$. st $|z^*x| = \|z\|'\|x\|$

恰当的旋转 st $z^*x\in \mathbb{R}^+$, 从而有 $\|x\|' = |z^*x| = z^*x$

令 $B = \dfrac{yz^*}{\|z\|'}$ $\quad Bx = \dfrac{yz^*x}{\|z\|'} = y$

$$\|B\| = \sup_{\|x\|=1}\frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1}\frac{|z^*x|\ \|y\|}{\|z\|'\ \|x\|} = 1$$

4.1 (a) $\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}0&2\\0&0\\0&0\end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&0\end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

4.2 Proof. 记A的第i列为a_i.

则 B的第i行为 a_{n+1-i}^T.

只需证明. BB^T 与 A^TA 特征值相同

$(BB^T)_{ij} = a_{n+1-i}^T a_{n+1-j}$. $\quad (A^TA)_{ij} = a_i^T a_j$

记 λ是 A^TA的特征值, α为对应的特征向量,

则有 $\quad \sum_j a_i^T a_j \alpha_j = \lambda\alpha_i$

即有 $\quad \sum_j a_{n+1-i}^T a_{n+1-j}\alpha_{n+1-j} = \lambda\alpha_{n+1-i}$. 从而 λ是 BB^T的特征值 同理可证 BB^T的特征值也是A^TA的特征值.

4.4 Proof. $A=QBQ^*$, $B=U\Sigma V^*$

$\Rightarrow A=QU\Sigma(QV)^*$

$\Rightarrow$ AB 有相同奇异值

反之不成立.

4.5 定理4.1中 C^m 可改成 R^m 而不影响证明.

5.1. $AA^T=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\4&4\end{pmatrix}$

$\lambda(AA^T)=\frac{9\pm\sqrt{65}}{2}$. $\sigma_{max}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{65}}{2}}$ $\sigma_{min}=\sqrt{\frac{9-\sqrt{65}}{2}}$

5.2 记S是满秩矩阵集.

$\forall A\in C^{m\times n}$, 若 A满秩, $A\in S$.

否则 $\mathrm{rank}(A)=r<\min(m,n)$. $A=U\Sigma V^*$.

~~$\forall\varepsilon>0$, 令 $\hat{\Sigma}_{r+1,r+1}=\frac{\varepsilon}{2}$, 其他元与$\Sigma$相同~~

$\forall\varepsilon>0$, 令 $\hat{\Sigma}_{i,i}=\frac{\varepsilon}{2}$, $i>r$, 其它与Σ相同

$\hat{A}=U\hat{\Sigma}V^*$. $\hat{A}$满秩 $\in S$ 且 $\|A-\hat{A}\|_2=\sigma_{r+1}(\hat{A})=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

5.3 (a) $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\sqrt2&0\\0&5\sqrt2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac35&\frac45\\ \frac45&\frac35\end{pmatrix}$