Vortrag 14 – Die Dedekindsche Zetafunktion

Primzahlen der Form x^2+ny^2

Seminar im WS 2021/2022

Vinzenz Baumann

Zusammenfassung

Wir führen die Dedekindsche Zetafunktion ζ_K eines Zahlkörpers K (als Eulerprodukt) ein, zeigen, dass sie eine holomorphe Funktion auf $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re(s)} > 1\}$ definiert, und leiten ihre Dirichletreihenentwicklung her. Anschließend beweisen wir, dass ζ_K im Falle eines quadratischen Zahlkörpers K als Produkt der Riemannschen Zetafunktion ζ mit einer gewissen L-Funktion geschrieben werden kann. Ist K imaginär quadratisch, so erhalten wir auf diese Weise eine handliche Formel für die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ als $n = \mathrm{f(x,y)}$, wobei f eine reduzierte quadratische Form $f \in \mathbb{Z}[X, Y]$ mit Diskriminante Δ_K ist.

Definition 1.1 (Riemannsche Zetafunktion)**.** Die *Riemannsche Zetafunktion* ist definiert als

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{(\text{-}s)}}$$

mit

$$\zeta : \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\} \to \mathbb{C}$$

Dabei ist $\prod_p \frac{1}{1-p^{(\text{-}s)}}$ die Definition als Eulerprodukt über Primzahlen und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ die Definition als Dirichletreihe.

Definition 1.2 (Zahlkörper)**.** Ein *Rationalitätsbereich* oder *(algebraischer) Zahlkörper* ist eine endliche Körpererweiterung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Sei im Folgenden K ein Zahlkörper. Man nennt einen Zahlkörper *quadratisch*, wenn er die Dimension 2 hat.

Definition 1.3 (Ganzheitsring)**.** Sei K ein Zahlkörper. Dann definiert $O_K := K \cap \mathbb{A}$ den *Ganzheitsring*, wobei $\mathbb{A}$ als Ring der ganz algebraischen Zahlen definiert ist.

Definition 1.4 (Absolutnorm eines Ideals)**.** Sei K ein Zahlkörper mit Ganzheitsring O_K und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in O_K, welches ungleich dem Nullideal ist. So ist die *Absolutnorm* definiert durch

$$N(\mathfrak{a}) := [O_K : \mathfrak{a}] = |O_K/\mathfrak{a}|$$

Bemerkung. (1) Nach Konvention ist die Norm des Nullideals 0.
(2) Ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal (a), dann ist

$$N(\mathfrak{a}) = |N_{K|\mathbb{Q}}(a)|$$

(3) Die Norm ist multiplikativ. Es ist $N(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{b})$

Definition 1.5 (Dedekindsche Zetafunktion)**.** Sei K ein Zahlkörper. Wir definieren die *Dedekindsche Zetafunktion* ζ_K zum Zahlkörper K durch

$$\zeta_{K(s)} := \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{(\text{-}s)}}$$

wobei sich das Produkt über alle Primideale $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq O_K$ erstreckt. Wir definieren $N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) := |O_K|$ und auch $N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{(\text{-}s)} := \exp(-\log(N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})) \cdot s)$

Satz 1.1. *Für Zahlkörper $K = \mathbb{Q}$ stimmt die Dedekindsche Zetafunktion mit der Riemanschen Zetafunktion überein.*

Beweis. Es ist $O_K = \mathbb{Z}$, also sind die Primideale $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq O_K$ gerade jene Haupideale $\langle p \rangle \subseteq \mathbb{Z}$, die von Primzahlen p erzeugt werden. Führen wir diesen Gedanken weiter so gilt $N_{\mathbb{Q}|\mathbb{Q}}(\langle p \rangle) = |\mathbb{Z}/\langle p \rangle| = p$, also erhalten wir

$$\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{(\text{-}s)}} = \zeta(s)$$

□

Definition 1.6 (Unendliches Produkt)**.** Sei $(a_\nu) \subset \mathbb{C}$. Das *unendliche Produkt* $\prod_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu)$ existiert, falls gilt:

(1) Entweder sind alle $a_\nu \neq 0$, es existiert der Grenzwert $a := \lim \prod_{\nu=1}^{n}(a_\nu)$ und es ist $a \neq 0$
(2) Oder es gibt ein ν_0, so dass $a \neq 0$ für alle $\nu \geq \nu_0$ ist, und es existiert $a^* := \prod_{\nu=\nu_0}^{\infty}$ im obigen Sinne. Dann setzen wir $a := a^* \cdot \prod_{\nu=1}^{\nu_0 - 1} a_\nu$.

Bemerkung (Konvergenz von unendlichen Produkten)**.** Das unendliche Produkt $\prod_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu)$ existiere. Dann gilt:

(1) $\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = 0$ genau dann, wenn mindestens ein a_ν gleich Null ist.

(2) Die Folge (a_ν) ist "1-Folge", das heißt es ist $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = 1$.

Bemerkung (Konstruktion des Logarithmus im Komplexen)**.** Durch die Einschränkung der Exponentialfunktion auf den Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\}$ wird sie injektiv und der Satz der Umkehrfunktion ist anwendbar. Daraus folgt:

$$\mathrm{Log}(z) := \log(r) + \phi$$

mit $r = |z|$ mit $arg(z) = \phi$. Hierbei bezeichnet log den reellen und Log den komplexen Logarithmus.

Bemerkung (Cauchy-Riemann-Differentialgleichug in Polarkoordinaten (CRDFG))**.** Durch die Darstellung einer komplexen Zahl als $z = r \cdot e^{i\phi}$ folgt eine besondere Form der CRDFG. Es ist:

$$(1)\frac{\delta u}{\delta r} = \frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta \phi}$$

und

$$(2)\frac{\delta v}{\delta r} = -\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta \phi}$$

mit $f := u + iv$.

Folgerung (Log ist holomorph)**.** Mit obiger Gleichung folgt mit $Log(r \cdot e^{i\phi}) := log(r) + i\phi$, dass

$$\frac{\delta u}{\delta r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta \phi}$$

und

$$\frac{\delta v}{\delta r} = 0 = -\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta \phi}$$

mit $f = log(r) + i\phi = u + iv$.

Bemerkung (Potenzreihe des Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)**.** Mit

$$Log(z) := log|z| + i \cdot arg(z)$$

folgt:

$$Log(z) = \sum_{n=1} \infty \frac{(-1)^{(n-1)}}{n}(z-1)^n$$

als Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 für alle $z \in \mathbb{C}$ und $z \neq 0$.

Definition 1.7 (Normale Konvergenz)**.** Eine Reihe von Funktionen $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots .\ f_n : D \to \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ heißt *normal konvergent in D*, falls es zu jedem Punkt $a \in D$ eine Umgebung U und eine Folge $(M_n)_{n \geq 0}$ nicht negativer reeller Zahlen gibt, so dass gilt

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

für alle $z \in U \cap D$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ konvergent.

Bemerkung (Identitätssatz)**.** Seien f und g holomorphe Funktionen auf einer Umgebung U von z_0 und sei z_0 ein Häufungspunkt der Koinzidenzmenge $\{z \in U | f(z) = g(z)\}$, dann existiert eine Umgebung V von z_0 mit $f(\mathrm{z}) = g(\mathrm{z})$ auf ganz V.

Lemma 1.2. *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine normal konvergente Reihe von holomorphen Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$. Dann existiert für jeden Punkt $z \in \mathbb{C}$ eine offene Umgebung $z \in U \subseteq \mathbb{C}$ so wie eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass $|f_n(z) \leq \frac{1}{2}$ für alle $z \in U$ und alle $n \geq N$ gilt. In diesem Fall ist durch*

$$F_N(z) := \sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{Log}(1 + f_n(z))$$

eine holomorphe Funktion $F_N : U \to \mathbb{C}$ definiert. Weiter gilt

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} (1 + f_n(z)) = \prod_{n=1}^{N-1} (1 + f_n(z)) \cdot e^{F_N(z)}$$

für alle $z \in U$. Insbesondere stellt das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)) := \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} (1 + f_n(z))$$

eine holomorphe Funktion auf D dar.

Beweis. Für den Beweis benötigen wir zunächst zwei Hilfslemmata.

Hilfslemma 1. Aus $|f_n(z)| \leq \frac{1}{2}$ folgt $f_n(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

Beweis. Es ist $|f_n(z)| \leq 0$, daher ist die Anwendung der Wurzelfunktion und das Quadrieren eine Äquivalenzumformung. So folgt mit der Definition des komplexen Betrags direkt:

$$|(f_n(z))|^2 = \sqrt{f_n(z) \cdot \iota(f_n(z))}^2 = \sqrt{f_n(z)}^2 \cdot \sqrt{\iota(f_n(z))}^2 = f_n(z) \cdot \iota(f_n(z))$$

und wegen der Positiven Definitheit des Betrags gilt bereits, das jeweils beide Ausdrücke größer oder gleich Null sind. Die Null wird aber durch die Addition mit der 1 ausgeschlossen. So folgt $1 + (f_n(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$

Insbesondere:
Es ist $\operatorname{Log}(1 + f_n(z))$ für alle $z \in U$ und $n \geq N$ definiert, da aus der obiger Betrachtung hervorgeht, dass $1 + f_n(z)$ auf der Einschränkung, auf der Log definiert ist, operiert.

□

Hilfslemma 2. Abschätzung $|Log(1 + z)| \leq 2|z|$ für alle $z \in \mathbb{C}\, mit |z| \leq \frac{1}{2}$

Beweis.

$$|\operatorname{Log}(1+z)| = |\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{z^n}{n}| \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n+1}$$
$$< |z| \cdot (\frac{1}{1} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + ... + \frac{1}{(n+1)\cdot 2^(n)}) = 2 \cdot |z|$$

wobei bei dem letzten Gleichheitszeichen der Wert der geometrischen Reihe benutzt wurde. Nämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{(n)}} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(n)}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})} = 2$$

□

Beweis zu Lemma 1.2. Aus Hilfslemma 1 folgt $(1 + f_n(z)) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.
Zeige weiter $F_N(z) := \sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{Log}(1 + f_n(z))$ ist normal konvergent auf U. Dies folgt daraus, dass $|Log(1 + z)| \leq 2|z|$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \frac{1}{2}$ nach Hilfslemma 2 und der Tatsache, dass mit der Abschätzung von $|Log(1 + z)| \leq 2|z|$ mit $|f_n(z)| \leq \frac{1}{2}\ F_N(z)$ genau der Definition der normalen Konvergenz entspricht. Insbesondere stellen F_N und e^{F_N} holomorphe Funktionen dar, da Holomorphie unter Bildung von Summen, Produkten und Verkettungen erhalten bleibt. Für beliebige $z \in \mathbb{C}$ und $m \leq N$ gilt, dass

$$\prod_{n=1}^{m}(1+f_n(z)) = \prod_{n=1}^{N-1}(1+f_n(z)) \cdot \prod_{n=N}^{m}(1+f_n(z)) = \prod_{n=1}^{N-1}(1+f_n(z)) \cdot \prod_{n=N}^{m}(e^{Log(1+f_n(z)})$$

$$= \prod_{n=1}^{N-1}(1+f_n(z)) \cdot \prod_{n=N}^{m}(e^{\sum_{n=N}^{m} Log(1+f_n(z)})$$

wobei hier benutzt wurde, dass e^{F_n} auf der bereits oben angesprochenen Einschränkung konform mit dem komplexen Logarithmus agiert. Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt

$$\lim_{m \to \infty} \prod_{n=1}^{m}(1+f_n(z)) = \prod_{n=1}^{N-1}(1+f_n(z)) \cdot e^{F_N(z)}$$

für alle $z \in U$ gilt. Durch die Holomorphie von $(1 + f_n)$ für $1 \leq n \leq N - 1$ und e^{F_n} und dem Umstand, dass endliche Produkte holomorpher Funktionen wiederum holomorph sind, stellt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$$

als unendliches Produkt eine holomorphe Funktion - nicht nur für alle z_0 auf U, sondern aufgrund der Offenheit der Umgebung U auf ganz D - dar.

□

Proposition 1.3. *Sei K ein Zahlkörper. Dann konvergiert das unendliche Produkt*

$$\zeta_{K(s)} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{(\text{-}s)}}$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. *Des weiteren stellt $\zeta_K(s)\colon \{s \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(s) > 1\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion dar.*

Beweis. Der Ausdruck

$$\zeta*_{K(s)} = \prod_{\mathfrak{p}} 1 - N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{(\text{-}s)}$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ konvergiert, beziehungsweise ist auf diesem Gebiet holomorph. Zunächst ist es wichtig zu sehen, dass keiner der Faktoren $1 - N_{K\,|\,\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{(-s)}$ eine Nullstelle in der Menge $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ besitzt.
Dies folgt schnell über:

Angenommen $1 - N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{(-s)}$ hat eine Nullstelle in der Menge $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$, so folgt $1 = N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{(-s)}$. Das bedeutet nach der Norm $|O_K/\mathfrak{p}| = 1$, d. h. $\mathfrak{p} = O_K$. Dann ist aber $\mathfrak{p}$ nicht echt in O_K und daher kein Primideal.

Trifft die Behauptung auf $\zeta*_K$ zu, so gilt zusätzlich $\zeta*_K \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. Denn wäre $\zeta*_K = 0$, so wäre nach oben stehendem Satz mindestens ein Faktor gleich Null. Dies haben wir aber eben ausgeschlossen. So ist auch $\zeta*_K^{-1}$ holomorph auf diesem Gebiet.
Es genügt nun zu zeigen, dass $\zeta*_K^{-1} = \zeta_K$. Es ist

$$\zeta*_K^{-1} = (\prod_{\mathfrak{p}} (1 - N_{N|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{(-s)}))^{-1}$$

$$= \prod_{\mathfrak{p}} (1 - N_{N|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{(-s)})^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - N_{N|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{(-s)}} = \zeta_K$$

Damit folgt ζ_K ist holomorph auf $\{s \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Der Nachweis der normalen Konvergenz der Funktionenreihe

$$\sum_{\mathfrak{p}} N_{N|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-s}$$

auf $\{s \in \mathbb{C} \colon Re(s) > 1\}$ folgt aus

$$\sum_{\mathfrak{p}} |e^{Log(N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{(-s)}}| = \sum_{\mathfrak{p}} |e^{-s \cdot Log(N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})}|$$

und unter der Verwendung von Folgendem:
Es ist mit $z = x + iy$

$$|e^z| = e^x$$

da

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x \cdot |e^{iy}| = e^x \cdot |\cos(y) + i \cdot \sin(y)|$$

$$= e^x \cdot \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = e^x \cdot 1$$

und mithilfe der folgenden Betrachtung:
Jedes Primideal $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq O_K$ in $\mathfrak{p} \in O_K$ enthält eine Primzahl p und $\mathfrak{p}$ tritt in diesem Fall in der Primidealzerlegung (siehe Vortrag 5) des Hauptideals $\langle p \rangle = p \cdot O_K$ auf. Weiter gibt es zu jeder Primzahl p nur endlich viele Primideale $\mathfrak{p} \subset O_K$, die p enthalten. Präziser gilt: Für fast alle Primzahlen p gibt es höchstens $[K \colon \mathbb{Q}]$ verschiedene Primideale $\mathfrak{p} \subset O_K$, die p enthalten.
So folgt:

$$\sum_{\mathfrak{p}, p \in \mathfrak{p}, p > C} (N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{-\mathrm{Re}(s)} \leq [K \colon \mathbb{Q}] \cdot \sum_{p > C} p^{-\mathrm{Re}(s)}$$

Den letzten Ausdruck kann man mithilfe der Geometrischen Reihe abschätzen.
$\square$

Definition 1.8 (Dirichletreihe)**.** Eine (formale) Dirichletreihe ist eine Reihe der Form

$$\mathbb{D}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

wobei a_n eine beliebige Folge komplexer Zahlen beschreibt.

Proposition 1.4. *Sei K ein Zahlkörper. Dann gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit* $\mathrm{Re}(s) > 1$*, dass*

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{J}} \frac{1}{(N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{J}))^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

wobei sich die Summation in $\sum_{\mathfrak{J}}$ über alle Ideale $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq O_K$ erstreckt, und a_n für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Ideale $\mathfrak{J} \subseteq O_K$ mit $N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{J}) = n$ bezeichnet. Insbesondere gilt:

$$\zeta_{K(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Beweis. Zur Vereinfachung, führt man eine beliebige Nummerierung auf der Menge aller Primideale $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq O_K$ ein. Diese hat die Form

$$\{\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq O_K Primideal\} = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 ...\}$$

Die Abzählbarkeit dieser Menge folgt aus:
Jedes Primideal $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq O_K$ in O_K enthält eine Primzahl p. Die Primideale die in O_K sind und p enthalten, sind genau die Primideale, die in der Faktorisierung des Hauptideals pO_K auftreten (nach Vortrag 5). In der Faktorisierung von pO_K treten aber nur endlich viele Primideale auf, das heißt zu jeder Primzahl p gibt es nur endlich viele Primideale, die p enthalten. Somit besteht die Menge der Primzahlen, die p enthalten aus einer abzählbaren Vereinigung von Abzählbaren Mengen. Die Vereinigung über alle Primzahlen und der Vereinigung aller Primideale, die p enthalten. Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind wiederum abzählbare Mengen.
Sei weiter $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ beliebig, dann ist mit $N_{K|\mathbb{Q}} \geq 2$ für jedes $m \in \mathbb{N}$, siehe Beweis Proposition 1.3. So folgt:

$$\prod_{m=1}^{n} \frac{1}{1 - N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}_m)^{(-s)}} = \prod_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} (N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}_m))^{-k \cdot (s)} = \prod_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} (N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}_m^k))^{(-s)}$$

Daraus resultiert mit Anwendung der Geometrischen Reihe auf
$(N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}_m^k))^{(-s)} < 1$, dass das Produkt absolut konvergiert, da es Produkt absolut konvergenter Reihen ist. Mithilfe des Umordnungssatzes für absolut konvergente Reihen und der Mulitplikativität der Norm spricht dann:

$$\prod_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} (N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}_m^k))^{(-s)} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}_{m_1}^{\alpha_1})^{(-s)} \cdots (N_{K|\mathbb{Q}} \mathfrak{p}_{m_j}^{\alpha_j})^{(-s)}$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}_{m_1}^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_{m_j}^{\alpha_j})^{(-s)}$$

wobei sich die unbeschriftete Summe über alle Teilmengen $\{m_1, ..., m_j\} \subseteq \{1, ..., n\}$ und alle $(\alpha_1, ..., \alpha_j)$ erstreckt. Mit $n \to \infty$ folgt mit der vorherigen Proposition, dass

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}_{m_1}^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_{m_j}^{\alpha_j})^{(-s)}$$

Aufgrund der eindeutigen Primidealzerlegung in O_K und dass $\mathbb{N}_K(O_K)^{-s} = 1$ tritt jedes Ideal $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq O_K$ genau einmal als $\mathfrak{p}_{m_1}^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{p}_{m_j}^{\alpha_j}$ genau einmal auf. Wieder aufgrund der Umordnung, folgt daraus

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{J}} \frac{1}{(N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{J}))^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

und im Falle $K = \mathbb{Q}$ gibt es für jede natürliche Zahl genau ein Ideal mit Norm n, nämlich $\langle n \rangle = n\,\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$, daher gilt $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. So folgt insbesondere:

$$\zeta_{K(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

□

Definition 1.9. Aus Vortrag 8 existierender Gruppenhomomorphismus als Funktion aufgefasst $\chi_k\colon \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$, wobei man für $n \in \mathbb{N}$ schreibt, dass

$$\chi_K = \begin{cases} 0 \ falls \ ggT(n, \Delta_K) > 1, \\ \chi_K(\bar{n}) \ falls \ ggT(n, \Delta_K) = 1 \end{cases}$$

Theorem 1.5. *Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper. Dann definiert das Eulerprodukt*

$$L(s, \chi_K) := \prod_p \frac{1}{1 - \chi_K(p)p^{(-s)}}$$

eine holomorphe Funktion $L(s, \chi_K)\colon \{s \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(s) > 1\} \to \mathbb{C}$, und es gilt

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) \cdot L(s, \chi_K)$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$. Man nennt $L(\cdot, \chi_k)$ die L-Funktion zum Gruppenhomomorphismus χ_K.

Beweis. Wenn

$$\prod_{\mathfrak{p}, p \in \mathfrak{p}} \frac{1}{(1 - N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{(-s)}} = \frac{1}{1 - p^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - \chi_k(p)p^{-s}}$$

für jede Primzahl p gilt, dann folgt daraus

$$L(s, \chi_K) = \zeta_K(s) \cdot \zeta(s)^{-1}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ gilt, da $\zeta(s) \neq 0$. Dadurch ist

$$L(\cdot, \chi_K) = \zeta_K \cdot \zeta^{-1}\colon \{s \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(s) > 1\} \to \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion.

Fall 1. $O_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$
Betrachte also $d \equiv 2, 3 (\bmod\ 4)$ Die Primideale $\mathfrak{p} \subseteq O_K$, die p enthalten, entsprechen genau den Primidealen im Ring

$$O_K/\langle p\rangle \cong \mathbb{Z}[X]/\langle X^2 - d, p\rangle \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]/\langle X^2 - \bar{d}\rangle$$

Dies folgt aus Vortrag 3, Beweis Proposition 1, aus dem Isomorphiesatz.

Fall 1.1. Angenommen $p|\Delta_K$. Das bedeutet im Fall $d \equiv 2, 3 (\bmod\ 4)$ das entweder $p = 2$ oder $p|d$. Im ersten Fall ist $X^2 - \bar{d} = (X - \bar{d})^2 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.
Im zweiten Fall ist $X^2 - \bar{d} = X^2 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$, also hat das Polynom $X^2 - \bar{d} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ auf jeden Fall eine doppelte Nullstelle in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Vermöge der Isomorphismus von oben, bedeutet das einerseits, dass $\langle p\rangle \subseteq O_K$ kein Primideal ist und andererseits, dass es ein eindeutiges Primideal $\mathfrak{p} \subseteq O_K$ mit $p \in \mathfrak{p}$ gibt. Dies folgt daraus, dass eine Primzahl genau dann prim in O_K ist, wenn das Polynom keine Nullstellen in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ hat. Des Weiteren ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper. Das einzige maximale und damit primes Ideal ist das Nullideal, welches p enthält.

In Anbetracht der eindeutigen Primfaktorzerlegung kann das nur bedeuten, dass in $\langle p\rangle = \mathfrak{p}^k$ für ein $k \geq 2$ gilt. Da aber $p^2 = N_{K|\mathbb{Q}}(\langle p\rangle) = N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}^k) = N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^k$gilt, folgt aus der eindeutigen Primzfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$, dass $k = 2$ und $N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p} = p)$. So gilt für die linke Seite $\frac{1}{1-p^{-s}}$ und durch die rechte Seite

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 0 \cdot p^{-s}} = \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

die Gleichheit beider Seiten.

Fall 1.2. Angenommen $p \nmid \Delta_K$ und $\chi(\bar{p}) = (\frac{\Delta_K}{p}) = 1$. Da $\Delta_K = 4d$, folgt daraus, dass

$$(\frac{d}{p}) = (\frac{2}{p})^2 \cdot (\frac{d}{p}) = (\frac{4d}{p}) = (\frac{\Delta_K}{p}) = 1$$

dann liefert die Definition des Legendre Symbols, dass $\bar{d} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ ein Quadrat ist, sagen wir $\bar{d} = \bar{y}^2$ für ein $y \in \mathbb{Z}, p \nmid y$. Das ergibt, dass

$$X^2 - \bar{d} = (X - \bar{y})(X + \bar{y})$$

in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$gilt, also dass $X^2 - \bar{d}$ zwei verschiedene Nullstellen in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat. Das bedeutet, dass es genau zwei verschiedene Primideale in O_K gibt, die p enthalten, und wie in (Fall 1.1), dass diese Norm p haben. Somit ist die linke Seite gegeben durch $(\frac{1}{1-p^{-s}})^2$, die rechte Seite durch

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 1 \cdot p^{-s}} = (\frac{1}{1 - p^{-s}})^2$$

wiederum gleich.

Fall 1.3. Angenommen $p \nmid \Delta_K$ und $\chi(\bar{p}) = (\frac{\Delta_K}{p}) = -1$. Wie in (Fall 1.2) folgt $(\frac{d}{p}) = -1$, also dass $\bar{d} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ kein Quadrat ist. Das bedeutet aber, dass das Polynom $X^2 - \bar{d} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ keine Nullstelle in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ besitzt. Bei einem Polynom von Grad 2 ist das wiederum äquivalent dazu, dass es keine Nullstellen in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ besitzt. Damit ist das Polynom irreduzibel. Daraus folgt aber $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]/\langle X^2 - \bar{d}\rangle$ ist ein Körper. Also trifft wegen des Isomorphismus Selbiges auf $O_K/\langle p\rangle$ zu. Das macht das von p erzeugte Ideal in O_K zu einem maximalen und insbesondere zu einem Primideal. Somit haben wir wieder für die linke Seite: $\frac{1}{1-(p^2)}^{-s} = \frac{1}{1-(p)}^{-2s}$ und die rechte Seite stimmt damit überein mit

$$\frac{1}{1-(p^{-s})} \cdot \frac{1}{(1-(-1)1p^{-s})} = \frac{1}{(1-p^{-s}(1+p^{-s})} = \frac{1}{1-p^{-2s}}$$

.

Fall 2. $O_K = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$
Betrachte also $d \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$

Fall 2.1. Angenommen $p \mid \Delta_K$. Im Falle $d \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ bedeutet das $p \mid d$ da $\Delta_K = d$. Das folgt aus dem Bilden der Diskriminante aus dem Polynom $4 \cdot (X^2 - X + \frac{1-d}{4})$. So folgt direkt $2(X-1)^2 - d$ hat zwei Nullstellen in $\mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}[X]$ und wie in Fall 1.1 folgt Gleichheit der beiden Seiten.

Fall 2.2. Angenommen $p \nmid \Delta_K$ und $\chi_K(\bar{p}) = (\frac{\Delta_K}{p}) = 1$. So folgt direkt $(\frac{d}{p}) = 1$ mit Definition des Legendre Symbol, dass $\bar{d} \in (\mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z})^\times$ ein Quadrat ist und somit hat $(2x-1)^2 - d$ zwei Nullstellen in $\mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}$. Der Rest folgt analog dem Beweis von Fall 1.2.

Fall 2.3 Angenommen $p \nmid \Delta_K$ und $\chi_K(\bar{p}) = (\frac{\Delta_K}{p}) = -1$. So ist $\bar{d}$ wie im Beweis drüber kein Quadrat, hat in $\mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}$ keine Nullstellen. der Beweis schließt analog wie im Fall 1.3.

□

Theorem 1.6. *Sei K ein imaginär quadratischer Zahlkörper. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $r_k(n)$ die Anzahl der Paare $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, sodass $n = f(x, y)$ für eine reduzierte quadratische Form $f \in \mathbb{Z}[X, Y]$ mit Diskriminante Δ_K gilt. Dann ist*

$$r_k(b) =^{(1)} |O_K^\times| \cdot a_n =^{(2)} |O_K^\times| \cdot \sum_{d|n} \chi_K(n)$$

wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Koeffizienten der Dirichletreihe zu ζ_K ist, und

$$|O_K^\times| = \begin{cases} 4, falls\ d = -1 \\ 6, falls\ d = -3 \\ 2, sonst \end{cases}$$

gilt.

Beweis. Die Aussage über $|O_K^\times|$ wurde in Vortrag 3 bewiesen. Somit verbleibt es die Gleichheitszeichen (1) und (2) zu zeigen. Beginne mit dem (2). Es ist

$$L(s, \chi_K) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_K(n)}{n^s}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. Dies folgt aus dem folgenden Hilfslemma 3.

$\square$

Hilfslemma 3. Sei f eine multiplikative Funktion, sodass die $\sum f_n(n)$ absolut konvergiert. So kann der Wert der Reihe, als ein absolut konvergentes Produkt ausgedrückt werden. Im Spezialfall der strikten Multiplikativität von f, erhält man $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \prod_{\mathfrak{p}}$.

Beweis. Sei

$$P(x) = \prod_{p \leq x} \{1 + f(p) + f(p^2) + ...\}$$

welches sich über alle Primzahlen p erstreckt. Da es ein Produkt von endlicher Anzahl von absolut konvergenter Reihen ist, ist es erlaubt die Reihen zu multiplizieren und gegebenenfalls umzuordnen, ohne den Wert zu verändern. Hierbei wählt man die Form:

$$f(p_1^{a_1}) \cdot f(p_2^{a_2}) \cdot f(p_3^{a_3}) \cdot .... \cdot f(p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot .... \cdot p_r^{a_r})$$

Dies folgt aus der Multiplikativität von f. Benutzt man nun die Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung/Primidealzerlegung, so folgt, dass $P(x) = \sum_{n \in A} f(n)$ wobei A aus allen n besteht mit Primfaktoren welche kleiner oder gleich x sind. Daraus folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) = \sum_{n \in B} f(n)$$

wobei B die Menge derjenigen n ist, die mindestens einen Primfaktor strikt größer x besitzen. Hieraus resultiert:

$$|\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x)| \leq \sum_{n \in B} |f(n)| \leq \sum_{n > x} |f(n)|$$

läuft jetzt $x \to \infty$, so geht der ganz rechte Ausdruck gegen Null, da $\sum |f(n)|$ konvergent ist. So konvergiert $P(x)$ gegen $\sum f(n)$ für $x \to \infty$. Hier ist es noch wichtig zu sehen, dass das unendliche Produkt der Form $\prod 1 + a_n$ absolut konvergiert, wenn $\sum a_n$ absolut konvergiert. In diesem Fall folgt:

$$\sum_{p \leq x} |f(p) + f(p^2) + ...| \leq \sum_{p \leq x} (|f(p)| + |f(p^2)| + ...)) \leq \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)|$$

Da alle Partialsummen beschränkt sind, folgt mit $\sum_p |f(p) + f(p^2) + ...|$ konvergiert und daraus folgt die absolute Konvergenz der oben genannten unendlichen Produktes.
Im strikt multiplikativem Fall folgt sogar: $f(p^n) = f(p)^n$ und jede Reihe im unendlichen Produkt (von oben) ist eine konvergente geometrische Reihe mit dem Wert $(1 - f(p))^{-1}$

In diesem Fall erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-1}}$$

für $\sum f(n)n^{-1}$ absolut konvergent. Nun setze $f(n) = \chi_K(n)$ und man erhält:

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1} \infty \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-1}}$$

und damit die Behauptung.
Von Nutzen hierbei, ist die Beobachtung $\chi_K: \ \to \{-1,0,1\}$ ist strikt multiplikativ. Das heißt es gilt $\chi(mn) = \chi(m) \cdot \chi(n)$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$. Die Fallunterscheidung nach O.B.D.A. $ggT(n, \Delta_K) > 1$ hat direkt zur Folge, dass $ggT(nm, \Delta_K) > 1$ und daraus resultiert $\chi_K(nm) = 0 = 0 \cdot \chi(m) = \chi(m) \cdot \chi(n)$ Nun bleibt $ggT(n, \Delta_K) = 1$, so wie $ggT(m, \Delta_K) = 1$ so folgt, nach der Definition der Abbildung für beliebige natürliche Zahlen als Gruppenhomomorphismus

$$\chi(mn) = \chi(\bar{n}) \cdot \chi(\bar{m}) = \chi(m) \cdot \chi(n)$$

Das führt zur Behauptung

$$\zeta(s) \cdot L(s,\chi_K) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{d|n} \chi_K(d)) \frac{1}{n^s}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$, wobei die Summe $\sum_{d|n}$ über alle positiven Teiler $d \in \mathbb{N}$ von n durchläuft. Da die beiden Dirichletreihen

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

und

$$L(s,\chi_K) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi_K(d)}{d^s}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut konvergieren. Dies folgt für beide direkt wegen der Anwendung der Geometrischen Reihe.
So konvergiert auch das Produkt aus beiden, mit dem Namen

$$\zeta_(s) \cdot L(s,\chi_K) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi_K(d)}{(md)^s}$$

absolut. Dadurch ist die Umordnung der Summation beliebig veränderbar zu

$$\zeta_(s) \cdot L(s,\chi_K) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi_K(d)}{(md)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{d|n} \chi_K(d)) \frac{1}{n^s}$$

im letzten Schritt nutzt es, dass $n \cdot m = n$ wiederum in $\mathbb{N}$ durch ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ dargestellt werden kann. $\square$

Motivation. Die Identität $\zeta_K(s) = \zeta(s) \cdot L(s,\chi_K)$ aus vorigem Theorem liefert nun eine also eine Identität von, für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut konvergenten Dirichletreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{d|n} \chi_K(d)) \frac{1}{n^s}$$

wobei $a_n = \sum_{d|n} \chi_K(d)$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ aus dem nächsten Lemma folgt.

Lemma 1.7. *Sei $N \in \mathbb{N}_0$ und $f\colon \{s \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(s) > N\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, falls für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > N$ durch eine absolut konvergente Dirchletreihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

gegeben ist, dann ist die Koeffizientenfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eindeutig durch f festgelegt. Dies ist äquivalent zur Einzigartigkeit der Darstellung von f als absolut konvergente Dirichletreihe, sofern die Darstellung überhaupt existiert.

Beweis. Es bietet sich ein induktives Vorgehen an. Zunächst steht die Behauptung

$$b_1 = lim_{k\to\infty} f(k)$$

also das b_1 Grenzwert der Folge

$$(f(N+1), f(N+2), f(N+3), ...)$$

ist. Denn dadurch ist b_1 eindeutig durch f festgelegt. Dies gilt da

$$f(s) = b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \to^{s\to\infty} b_1 + 0 = b_1$$

Dadurch ist $b_1, ..., b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ eindeutig durch f festgelegt. Ersetze $f(s)$ durch $f(s) - \sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{n^s}$. Daraus folgt die Annahme, dass $b_1 = ... = b_m = 0$ gilt. Mit selbigem Argument wie oben folgt

$$b_{m+1} = lim_{k\to\infty}(m+1)^k f(k)$$

also ist auch b_{m+1} eindeutig durch f festgelegt.
Damit ist erreicht, was in der Motivation gefordert war.
Nun schließt der Beweis zur Rechtfertigung des ersten Gleichheitszeichen des Theorems. Zuallererst ist

$$\zeta_K(s) = \sum_{C\in Cl_K} \sum_{\mathfrak{J}\in C} \frac{1}{N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{J})^s}$$

wobei sich die Summe $\sum_{\mathfrak{J}\in C}$ über alle Ideale $\langle 0\rangle \subsetneq \mathfrak{J} \subseteq O_K$ aus der Idealklasse $C \in Cl_K$ erstreckt. Das erste Summenzeichen ist nach Vortrag 7 bereits endliche Summe. Die Fixierung eines beliebigen Ideals $\langle 0\rangle \subsetneq \mathfrak{L} \subseteq O_K$ mit $\mathfrak{L} \in C^{-1}$ wobei C^{-1} die inverse Idealklasse zu C in Cl_K bezeichnet. Die Behauptung liegt nahe, dass

$$\{Ideale\ \langle 0\rangle \subsetneq \mathfrak{J} \subseteq O_K\ mit\ \mathfrak{J} \in \mathbb{C}\} \to (\mathfrak{L}\backslash\{0\})/O_K^\times = \{\beta \cdot O_K^\times\colon \beta \in \mathfrak{L}\backslash\{0\}\}$$

gegeben durch

$$\mathfrak{J} \mapsto \quad Erzeuger\ des\ Haupdideals\ \ \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{L}\cdot O_K^\times$$

eine wohldefinierte Bijektion darstellt.
Zunächst die Wohldefiniertheit:
Es ist $\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{L} \subseteq O_K$ ein Hauptideal mit Namen $\langle\alpha\rangle = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{L}$, weil $\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{L} \in C \cdot C^{-1} =$

P_K, wobei $P_K \in Cl_K$ die Klasse aller gebrochenen Hauptideale,also das neutrale Element bezeichnet. Darüber hinaus ist $\alpha \in \langle\alpha\rangle = \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}$. Es folgt leicht, dass genau dann $\langle\alpha\rangle = \langle\beta\rangle$ für beliebige $\beta \in \mathfrak{L}$ wenn α und β assoziiert sind.Denn sei $\alpha = \beta \cdot y$ mit $y \in O_K^\times$ so folgt $\alpha \mid \beta$ damit unmittelbar $\beta \in \langle\alpha\rangle$ und $\langle\beta\rangle \subseteq \langle\alpha\rangle$. Dasselbe gilt für $y := y^{-1}$ da y eine Einheit ist. Also analog für die Vertauschung von α und β. Die Rückrichtung nutzt, dass O_K ein Hauptidealring ist.Sei weiter $\langle\alpha\rangle = \langle\beta\rangle$. Nach Wahl der Darstellungen für $\beta = \alpha \cdot c$ und $\alpha = \beta \cdot d$, so folgt $\alpha = c \cdot d \cdot \alpha$ daraus unmittelbar $1 - cd = 0$. Da O_K auch noch Integritätsring und somit nullteilerfrei ist, folgt $\alpha = 0$ ($\beta = 0$) oder $1 - cd = 0$. Dies spricht dafür, dass $b, c \in O_K^\times$ also Einheiten sind. So sind α und β assoziiert.
So ist obige Abbildung wohldefiniert und injektiv.
Beweis der Surjektivität:
Sei dazu $\beta \in \mathfrak{L}\backslash 0$ und $\langle 0\rangle \subsetneq \mathfrak{J} \subseteq O_K$ mit $\mathfrak{J} \in C$ beliebig und weiter $\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{L} = \langle\alpha\rangle$ für ein $\alpha \in \mathfrak{L}$. Dann gilt $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \mathfrak{J} \in C$ und $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{L} = \langle\beta\rangle$. Diese Darstellung ist richtig da für $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \mathfrak{J} \subseteq K$ tatsächlich gilt $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \mathfrak{J} \subseteq O_K$. Dies folgt daraus, dass $\beta \in \mathfrak{L}$ und damit $\langle\beta\rangle \subseteq \mathfrak{L}$. Das wiederum hat zur Folge, dass $\mathfrak{L} \mid \langle\beta\rangle$ ist. Dies bedeutet, dass ein Ideal $\mathfrak{L}' \subseteq O_K$ mit $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{L}' = \langle\beta\rangle$. Durch Einsetzen in $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{L} = \langle\beta\rangle$ so ist $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{L} = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{L}'$ und nach Multiplikation mit $\mathfrak{L}^{-1}$ folgt $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \mathfrak{L}' \subseteq O_K$. Daraus folgt die Surjektivität.
Wegen der Eigenschaften der Norm $N(\alpha) = N_{K|\mathbb{Q}}(\langle\alpha\rangle) = N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{L} = N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{J} \cdot N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{L})$ ermöglicht die Bijektion umzuschreiben. Aus Vortrag 5 ist bekannt dass stets $\gamma, \delta \in \mathfrak{L}$ mit

$$\mathfrak{L} = \mathbb{Z}\,\gamma + \mathbb{Z}\,\delta = \{x\gamma + y\delta \colon x, y \in \mathbb{Z}\}$$

gefunden werden können. Weiter ist aus Vortrag 7 gegeben, dass

$$f := \frac{N(\gamma X + \delta Y)}{N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{L})} = \frac{(\gamma X + \delta Y) \cdot \iota((\gamma)X + \iota(\delta)Y)}{N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{L})} \in \mathbb{Z}[X, Y]$$

eine primitive, positiv definite quadratische Form mit Diskriminante Δ_K ist, die unter der Bijektion $C(\Delta_K) \to Cl_K$ auf C^{-1}, die Klasse von $\mathfrak{L}$ in Cl_K abgebildet wird. Hieraus folgt, dass

$$\sum_{\mathfrak{J} \in C} \frac{1}{N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{J})^s} = \frac{1}{|O_K^\times|} \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{f(x,y)^s}$$

wobei sich dies durch das Ersetzen von f durch eine reduzierte quadratische Form, die eigentlich äquivalent zu f, nicht ändert. Das folgt nach Bemerkung aus Cox [5][S. 23], dass äquivalente Formen dieselben Ganzzahlen repräsentieren.
Seien also $f_1, ..., f_k \in \mathbb{Z}[X, Y]$ reduzierte quadratische Formen, die die Äquivalenzklassen aus $C(\Delta_K)$ repräsentieren. Dann erhalten wir aufgrund absoluter Konvergenz, dass

$$\zeta_K(s) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{|O_K^\times|} \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{f_j(x,y)^s} = \frac{1}{|O_K^\times|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_K(n)}{n^s}$$

Das Gleichheitszeichen folgt dann analog mit dem vorherigen Lemma. □

Literatur

[1] J. Neukirch: *Algebraische Zahlentheorie*. Springer, 1. Auflage (1992)

[2] F. Modler, M. Kreh: *Tutorium Algebra*. Springer, 3. Auflage (2013)

[3] D. A. Marcus: *Number Fields*. Springer, 2. Auflage (2018)

[4] E. Freitag, R. Busam: *Funktionentheorie 1*. Springer, 4. Auflage (2006)

[5] D. A. Cox: *Primes of the Form* $x^2 + ny^2$. Wiley, 2. Auflage (2013)

[6] C. Baxa: *Vorlesungsskript Zahlentheorie*. Universität Wien