KTH Engineering Sciences

Laboration 2

Differentialekvationer och numerisk integration

Före redovisningen ska ni skicka in MATLAB*-filerna ni skrivit till alla uppgifterna i Canvas. På redovisningen ska ni (båda i laborationsgruppen om ni är två) kunna redogöra för teori och algoritmer som ni använt. Ni ska kunna svara på frågorna i uppgifterna och förklara hur era* MATLAB*-program fungerar. Kom väl förberedda!*

1. Olinjär modellanpassning

Den här uppgiften är en fortsättning på uppgift 3 i Lab 1. Där bestämde ni skärningspunkterna till två cirklar genom att lösa ett olinjärt ekvationssystem

$$\begin{aligned}(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2 &= L_A^2,\\ (x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2 &= L_B^2.\end{aligned}$$

Mittpunkternas positioner var givna till $A = (93, 63)$ och $B = (6, 16)$, och avstånden är $L_A = 55.1$ och $L_B = 46.2$. Antag nu att vi har ännu en cirkel:

$$\begin{aligned}(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2 &\approx L_A^2,\\ (x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2 &\approx L_B^2,\\ (x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2 &\approx L_C^2.\end{aligned}$$

Låt $C = (20, 83)$ och $L_C = 46.2$.

(a) Skriv ned Gauss–Newton-iterationen för detta problem. Varför använder vi Gauss-Newtons metod och inte Newtons metod?

(b) Kör Gauss-Newton med en startgissning som motsvarar lösningen på Lab 1. Ange lösningen och antalet iterationer som behövdes.

(c) Rita upp cirklarna och lösningspunkterna i en figur. Går cirklarna genom punkterna? Vad förväntar vi oss?

2. Numerisk integration

Följande integral ska beräknas

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{x+2}\, dx.$$

(a) Rita en graf över integranden. Beräkna integralens värde analytiskt: $I =$

(b) Approximera integralen med (sammansatta) trapetsregeln. Låt $T(h)$ vara approximationen med steglängd h. Beräkna $T(h)$ för $h = 1$, 0.5, 0.25, 0.125 och 0.0625. Verkar approximationen konvergera när $h \to 0$?

(c) Beräkna felet $|T(h) - I|$ i trapetsregeln. Vad säger teorin om felet? Med vilken faktor förväntar vi oss att felet förändras när man halverar steglängden? Stämmer det?

(d) Approximera nu integralen med (sammansatta) Simpsons formel[1] istället. Beräkna felet för h-värdena ovan. Vad säger teorin i detta fall om felets avtagande när $h \to 0$?

(e) Plotta felet som funktion av h för trapetsregeln och för Simpsons metod i samma figur. Plotta i log-skala. Använd MATLABs kommando `loglog`, gärna tillsammans med `grid`-kommandot. Uppskatta båda metodernas noggrannhetsordning med hjälp av plotten. Stämmer det med teorin?

3. Generatorn 2

Detta är en fortsättning på uppgift 2 i Lab 1. Generatorföretaget har kommit på att man inte känner till θ exakt. Man betraktar istället θ som en stokastisk variabel som följer en trunkerad normalfördelning med väntvärde $\bar{\theta}$ i intervallet $\bar{\theta} \pm s$. För att beräkna väntvärdet för den maximala magnetiseringen $\bar{m}$ behöver man då beräkna

$$\bar{m} = \frac{\int_{-s}^{s} e^{-\beta t^2} m(\bar{\theta} + t)\, dt}{\int_{-s}^{s} e^{-\beta t^2}\, dt},$$

där $m(\theta)$ är samma maximala magnetisering som beräknades i Lab 1, dvs $m(\theta) =$`max(u)` när `u` beräknats via `generator.m` med argumentet θ. Använd parametrarna $s = 2$, $\beta = 1$ och $\bar{\theta} = 40$.

(Ni behöver alltså använda filerna `generator.m` och `generator_data.mat` från Lab 1 i denna uppgift.)

(a) Beräkna nämnaren i uttrycket mycket noggrant med en numerisk metod.

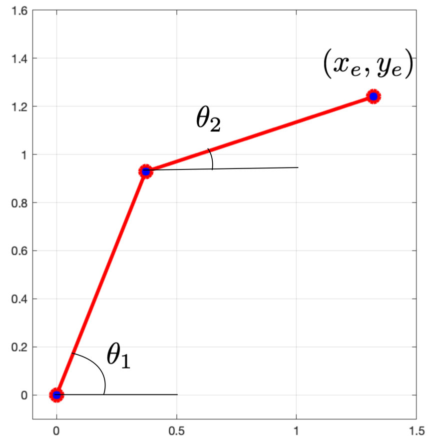
(b) Använd (sammansatta) trapetsregeln för att beräkna täljaren och $\bar{m}$. Välj h så att den totala beräkningstiden i programmet blir ca 1 minut. Uppskatta noggrannheten genom att halvera h.

(c) Använd (sammansatta) Simpsons formel för att beräkna täljaren och $\bar{m}$. Välj h så att den totala beräkningstiden i programmet blir (ungefär) lika lång som i (b). Uppskatta noggrannheten genom att halvera h. Är det bättre eller sämre att använda Simpson i detta fall? Motivera!

Not: I uppgift 3b-c kan "1 minut" behöva justeras beroende på er dator. Försök använda $h \leq 0.1$ i alla fall.

[1] Ni kan antingen implementera Simpson direkt eller genom att göra ett steg med Richardsonextrapolation av trapetsregeln.

4. Robotarm



En robotarm består av två länkar med längden $R = 1$ (se bild). Armens tillstånd definieras utifrån länkarnas vinklar (θ_1, θ_2) som är definierade i förhållande till x-axeln. Dess ändpunkt betecknas (x_e, y_e) och ges av

$$x_e = R\cos\theta_1 + R\cos\theta_2,$$
$$y_e = R\sin\theta_1 + R\sin\theta_2.$$

Robotarmen kan styras med hjälp av ett styrsystem som påverkar robotarmens vinklar.

(a) Bestäm vinklarna $\theta_1 = \theta_1^*$ och $\theta_2 = \theta_2^*$ så att robotarmens ändpunkt (x_e, y_e) landar på position $(1.3, 1.3)$ genom att formulera problemet som ett olinjärt ekvationssystem i två obekanta. Lös problemet med Newtons metod i flera variabler. Felet ska vara mindre än 10^{-10} i båda variablerna.

Plotta robotarmen med funktionen `plot_robotarm.m` som du hittar i Canvas. Argument till funktionen är en vektor som innehåller de två vinklarna θ_1 och θ_2.

Vi ska nu studera robotarmens rörelse som en funktion av tiden. Ett styrsystem införs så att vi hamnar i den avsedda positionen. Vinklarna betraktas som funktioner av tiden och uppfyller differentialekvationerna

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\alpha\cdot(\theta_1(t) - \theta_1^*) - \gamma\frac{d\theta_1}{dt} + \beta\sin(\omega t),$$
$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\alpha\cdot(\theta_2(t) - \theta_2^*) - \gamma\left(\frac{d\theta_2}{dt} + \left|\frac{d\theta_1}{dt}\right|\right) + \beta\sin(\omega t),$$

där vinklarna θ_1^* och θ_2^* är de vinklar ni bestämt i (a). Faktorn γ motsvarar en dämpning (friktion) och är här $\gamma = 4$. Vibrationerna representeras av amplitud β och en frekvens ω är bestämda till $\beta = 0.5$ och $\omega = 3\pi$. Styrsystemet beror också på en parameter α som är vald som $\alpha = 2$.

(b) Skriv om den andra ordnings differentialekvation på standardform, dvs ett system av fyra första ordningens differentialekvationer (ODE).

(c) Lös differentialekvationen med Framåt Euler (för ODE-system), med startvärden $\theta_1(0) = \pi/2$, $\theta_1'(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi/6$ och $\theta_2'(0) = 0$. För denna uppgift kan ni ta hjälp av skelettprogrammet `f_robotarm.m` som ni hittar i Canvas.

Var är robotarmen efter $t = 15$ tidsenheter? Använd Framåt Euler med steglängd $h = 0.01$. Visualisera lösningen med en animation genom att löpande anropa `plot_robotarm.m` när ni räknar ut lösningen.

Tips: Det är beäkningskrävande att rita upp lösningen, så det är bättre om man gör det endast i tex vart 10e tidssteg i Framåt Euler. Om ni inför en räknare `k` i den inre loopen kan ni göra det med kod av typen:

```
if (mod(k,10)==1)
   plotta lösning
end
```