# 2. Групи

**Деф** Нека $M$ - мн-во.

$*: M\times M \to M$ наричаме **бинарна операция**

**Деф** Нека $G\neq\emptyset$ с въведена бинарна операция $*$. **$(G,*)$ е група,** ако:

1) $*$ е **асоциативна**, т.е. $(a*b)*c = a*(b*c)$ $\forall a,b,c\in G$
2) $\exists e\in G$ (**неутрален елемент**) т.че $a*e=e*a=e$ $\forall a\in G$
3) $\forall a\in G$ $\exists b\in G$ (**обратен елемент**) т.че $a*b=b*a=e$

**Примери:**

1) $F$ - произволно числово поле ($F=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$). Тогава $(F,+)$ е група относно събирането
2) $(\mathbb{Z},+)$ е група, въпреки, че $\mathbb{Z}$ не е поле
3) Ако $F$ е поле, $F^*:=F\setminus\{0\}$ е група относно умножението, $(F^*,\cdot)$ - мултипликативна група

**Деф** $M\subseteq G$, $(G,*)$ - група. $M\leq G$ е подгрупа на $G$, ако е група отн. $*$

За да докажем $M\leq G$ е достатъчно да проверим, че $M$ е затв. отн $*$ и $\forall a\in M$, $a^{-1}\in M$

Зад. Док, че $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ е подгрупа на $(\mathbb{Z}, +)$

Д-во: $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ и $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$
Ще проверим, че група отн $+$!

1) Затв. отн $+$: За $nz_1, nz_2 \in n\mathbb{Z}$ е в сила, че $nz_1 + nz_2 = n\underbrace{(z_1+z_2)}_{z_0 \in \mathbb{Z}} = nz_0 \in \mathbb{Z}$

2) Обр. елементи: $nz_1 \in \mathbb{Z}$, но $n\underbrace{(-z_1)}_{z_0} = nz_0 \in \mathbb{Z}$

и $nz_1 + nz_0 = nz_1 + n(z_1) = 0$

$\Rightarrow \quad n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

Зад. Док, че $\mathbb{C}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ е група относно умножението ($n$-фиксирано)

Реш: Ще док, че $\mathbb{C}_n < \mathbb{C}^*$

1) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_n$. Тогава $z_1^n = z_2^n = 1$ и

$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n = 1 \Rightarrow z_1 z_2 \in \mathbb{C}_n$

2) Нека $z_1 \in \mathbb{C}_n$, $z_1^n = 1$. $\left(\frac{1}{z_1}\right)^n = \frac{1}{z_1^n} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{z_1} = z_1^{-1} \in \mathbb{C}_n$

Зад.

$GL_n(F) = \{A \in M_n(F) \mid \det A \neq 0\}$

обща линейна група

$SL_n(F) = \{A \in M_n(F) \mid \det A = 1\}$

специална линейна група

Зад. Док, че (1) $GL_n(F)$ е група, (2) $SL_n(F) < GL_n(F)$

Реш: (1) $GL_n(F) \neq 0$

1) $A, B \in GL_n(F)$, т.е. $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$, то
$\det AB = \det A . \det B \neq 0 \Rightarrow AB \in GL_n(F)$

2) $E_n \in GL_n(F)$ : $AE = EA = A \quad \forall A \in GL_n(F)$

3) $A \in GL_n(F) \Rightarrow A$ - обратима, ко $A^{-1}$ : $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \neq 0$
$\Rightarrow A^{-1} \in GL_n(F) \qquad (AA^{-1} = E)$

(2) $SL_n(F) \leq GL_n(F)$

1) $A, B \in SL_n(F) \Rightarrow \det A = \det B = 1 \Rightarrow \det AB = 1$
$\Rightarrow AB \in SL_n(F)$

2) $A \in SL_n(F) \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1 \Rightarrow A^{-1} \in G$

Зад. Групи ли са:

а) $\{-1, 0, 1\}$ относно $\cdot$ и $+$

б) $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, $r \in \mathbb{R}^+$ отн $\cdot$

Реш: а) не е гр. отн $\cdot$, т.к. нулата няма обр. елемент. не е гр. отн $+$, т.к. $1+1=2 \notin \{-1,0,1\}$

б) ако $z_1, z_2 \in G$, то $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = r^2$
За да е затвор. отн $\cdot$ трябва $r^2 = r$
$\Leftrightarrow r = 1$

Деф/ Нека $(G_1, \circ)$ и $(G_2, *)$ - групи. Едно изображение $\varphi: G_1 \to G_2$ наричаме изоморфизъм, ако
1) $\forall a, b: \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ (хомоморфизъм)
2) $\varphi$ е биекция
Ако $G_1$ и $G_2$ са изоморфни, пишем $G_1 \cong G_2$

Зад. Кои от следните изображения са изоморфизми? Кои са хоморфизми?

а) $f(z) = |z|$

Реш: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ $f(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = f(z_1) f(z_2)$
$\Rightarrow$ хомоморфизъм (ХММ)

? биекция ? Не е инективно:
$f(i) = f(1) = 1$

б) $f(z) = 2|z|$
$f(z_1 z_2) = 2|z_1| 2|z_2| = 4|z_1 z_2| \neq f(z_1) f(z_2)$
$\Rightarrow$ не е ХММ

За упражнение: в) $f(z) = \frac{1}{|z|}$ г) $f(z) = r$, $r \in \mathbb{R}^*$

Зад. Док, че $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$, $H \leq GL_2(\mathbb{R})$, и $(\mathbb{R}, +)$ са изоморфни
Д-во: Нека $\varphi: H \to \mathbb{R}$

$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = a$

1) ХММ? Ако $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, то

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = a+b = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

2) $\varphi$ - биекция?

Нека $a_0 \in \mathbb{R}$. Тогава $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = a_0 \Rightarrow$ сюрекция.

Нека $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = a \neq$
$\neq b = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow$ инекция

$\Rightarrow$ $\varphi$ - изоморфизъм $\Rightarrow H \cong (\mathbb{R}, +)$

Зад. Док, че $(\mathbb{R}^+, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$, $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$

Реш: Търсим ф-я с деф област неотр. числа и м-во от стойности - реалната права

$\ln x$

Нека $\varphi: (\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ $\qquad \varphi(x) = \ln x$

1) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \varphi(x_1 x_2) = \ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 =$
$= \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \Rightarrow \varphi$ - ХММ

2) $\ln x_1 = \ln x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \iff \ln\frac{x_1}{x_2} = 0$

$\iff \frac{x_1}{x_2} = 1 \iff x_1 = x_2 \Rightarrow$ инекция

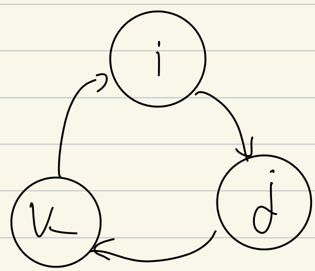
Нека $x \in \mathbb{R}$. Тогава $e^x \in \mathbb{R}^+$ и $\varphi(e^x) = x$

$\Rightarrow$ сюрекция $\Rightarrow$ биекция

$\Rightarrow$ изоморфизъм

Деф/ Ако $(G,*)$ е комутативна група, т.е. $a*b = b*a$ $\forall a,b \in G$, то $G$ наричаме абелева (или комутативна)

Зад. Нека $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$




$$\left|\begin{array}{l} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = -ji = k \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \end{array}\right.$$

и 1 - единичен елемент

Док, че $Q_8$ е неабелева

$Q_8$ наричаме група на кватернионите

Реш: очевидно $ij = -ji \neq ji$

$\Rightarrow$ не е абелева

Група е:

1) асоциативност

ще покажем, че $(ki)j = k(ij)$

(останалите проверки, $8^3$, са аналогични)

$(ki)j = jj = j^2 = -1$ , $k(ij) = kk = k^2 = -1$

2) по усл. $1$ е единичен елемент

3) Обр. елементи за всички?

$1, -1$ - обратни на себе си, т.к. $1 \cdot 1 = 1$, $(-1)(-1) = 1$

Ако $a \in \{i, j, k\}$, то $a^2 = -1 \Rightarrow a^4 = 1 \Rightarrow a^3$ е обратен на $a$

Напр. $i^3 = i^2 i = -i$ е обр. на $i$

## Задачи за упражнение

1. Док, че $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ е група

2. Док, че $SO_n(\mathbb{R}) \cong U$

Упътване: $GO_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}, \det A = \pm 1 \}$
обща ортогонална група

$SO_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}, \det A = 1 \}$

Първо може да докажете $SO_n(\mathbb{R}) < \ {}_n(\mathbb{R})$

После, разгледайте $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = a + ib$