Още малко умножения на матрици:

Зад. Докажете равенството:

а) $$(a_1\ a_2 \dots a_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_1(b_{11} \dots b_{1m}) + \\ a_2(\dots) + \\ \dots \\ + a_n(b_{n1} \dots b_{nm}) \end{matrix}$$

б) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m} \end{pmatrix} + \dots + b_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

Реш: Директна проверка

а) $= (a_1 b_{11} + a_2 b_{21} + \dots + a_n b_{n1}, \dots, a_1 b_{1m} + \dots + a_n b_{nm})$

$= a_1(b_{11}, \dots, b_{1m}) + \dots + a_m(b_{n1}, \dots, b_{nm})$

Зад. $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ - матрица с единица на позиция (i,j) и нули на ост. позиции

$$E_{pq}E_{rs} = \delta_{q,r} E_{ps} = \begin{cases} E_{ps}, & q = r \\ \Theta_{n\times n}, & q \neq r \end{cases}$$

E_{ij} наричаме матрични единици

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$ - символ на Кронекер

Реш: $E_{pq} = (a_{ij})_{n\times n}$ $E_{rs} = (b_{ij})_{n\times n}$

$E_{pq}E_{rs} = C = (c_{ij})_{n\times n}$

$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \neq 0$ само ако се уклопат двете единици

$c_{ps} = \sum_{l=1}^{n} a_{pl} b_{ls} = a_{pq} \cdot b_{rs} = 1$

За упражнение:

Ако $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $p(A)$ наричаме полином од A и $p(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \dots a_nE$!

* Пресметнете $p(A)$ ако

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $p(x) = 2x^2 + 4x - 3$

* Докажете, че, ако $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(F)$, то

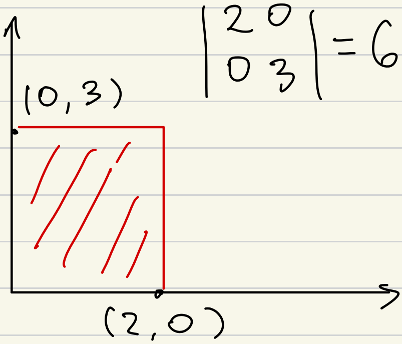
$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$

Детерминанти

Геометричен смисъл

* лица
* обеми

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$



Алгебричен смисъл

$$\Delta_n = \sum_{i_1 \dots i_n} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} \cdot a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

където

$i_1, \dots, i_n$ – пермутация

$[i_1 \dots i_n]$ – четност на пермутация

Четност на пермутация – броят размени (четността им) необходими, за наредим числата в нея до 1, 2, …, n

Примери:

$[2,3,1] \to 2\ 3\ 1 \to 2\ 1\ 3 \to 1\ 2\ 3$

броят инверсии (размени) е четен (2) $\Rightarrow$ четна

$[3,5,2,1,4] \to 3\ 5\ 2\ 1\ 4 \to 3\ 5\ 1\ 2\ 4$

$\to 3\ 1\ 5\ 2\ 4 \to 1\ 3\ 5\ 2\ 4 \to$

$\to 1\ 3\ 2\ 5\ 4 \to 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \Rightarrow 6$ (четна)

Да изведем формулата за пресмятане на детерминанта за $n=2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{[1,2]} a_{11}a_{22} + (-1)^{[2,1]} a_{21}a_{12} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$n=3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + \\ & a_{12}a_{23}a_{31} + \\ & a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & a_{13}a_{22}a_{31} - \\ & a_{12}a_{21}a_{33} - \\ & a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Правило на Сарус

$$\begin{array}{ccc|cc} \oplus & \oplus & \oplus & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \ominus & \ominus & \ominus & & \end{array}$$

Зад. Да се пресметне детерминантата

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 + 5 - 10 - 4 - 3 = 2$$

Свойства на детерминантите

* когато има Λ3 редове в матр. A
  $\det A = 0$

(A - квадратна)

Детерминанти намираме само на квадратни матрици !!!

* при триъгълна матрица:

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & * \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n = \begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_n \end{vmatrix}$$

* елементарни преобразувания

1. Прибавяне на ред към друг, умножен с число

$$\begin{vmatrix} - & A_1 & - \\ - & A_2 & - \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - & A_1 & - \\ - & \lambda A_1 + A_2 & - \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{vmatrix}$$

- дет. се запазва

2. Умножение на ред с число λ $(\lambda \neq 0)$

$$\begin{vmatrix} - & A_1 & - \\ - & \lambda A_2 & - \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ & \cdots & \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} - & A_1 & - \\ - & A_2 & - \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ & \cdots & \end{vmatrix}$$

– дет. се умножава по λ

3. Смяна на редове

$$\begin{vmatrix} - & A_1 & - \\ - & A_2 & - \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ & \cdots & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} - & A_2 & - \\ - & A_1 & - \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ & \cdots & \end{vmatrix}$$

– дет. се умнож. по (-1)

Зад. Да се пресметне дет.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-a) \\ (-a) \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-b) \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-b)(c-a)$$

Детерминанти от този вид наричаме детерминанти на Вандермонд

Общ вид и формула:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$W(x_0, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i \le j \le n} (x_j - x_i)$$

Зад.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (-1) \\ (-1) \\ (-1) \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ (-b) \\ (-c) \\ (-d) \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a+b+c+d & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+a+b+c+d$$

Зад.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} (1) \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ (-1) \\ (-1) \\ (-1) \end{array}$$

$$= 8\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

$$* \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-t) \ (-t^2) \ (-t^3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1-t^2 & t(1-t^2) & t^2(1-t^2) \\ 0 & t(1-t^2) & (1+t^2)(1-t^2) & t(1+t^2)(1-t^2) \\ 0 & t^2(1-t^2) & t-t^5 & 1-t^6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ :(1-t^2) \\ :(1-t^2) \\ :(1-t^2) \end{matrix}$$

$$= (1-t^2)^3 \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & t & t^2 \\ 0 & t & 1+t^2 & t+t^3 \\ 0 & t^2 & t+t^3 & 1+2t^2+t^4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-t) \\ (-t) \\ \\ \end{matrix} = (1-t^2)^3 \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & t & t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-t^2)^3$$

Свойство на детерминантите

$\det A = \det A^t$

$\Rightarrow$ можем да оперираме и по стълбове

Матрица тип "пачи крак"

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c_n & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) \\ \left(-\frac{b_2}{a_2}\right) \\ \vdots \\ \left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \end{matrix} = \begin{vmatrix} * & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_1 & a_1 & \cdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ c_n & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$= * \cdot a_1 a_2 \dots a_n$$

$$* = a_0 - \frac{c_1 b_1}{a_1} - \dots - \frac{c_n b_n}{a_n} =$$

$$= a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i b_i}{a_i}$$

$$\Delta = a_0 \dots a_n - (b_1 c_1 a_2 \dots a_n + \dots + a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_n c_n)$$

(важи и за $a_1, \dots, a_n = 0$)

Зад.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} (-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

$$
* \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ b-a & 0 & \cdots 0 & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & a-b \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ccc} & (1) & (1) \end{array}
$$

$$
= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}
$$

$$
* \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & -x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & x_1 & -x_2 & \cdots & x_n \\ & \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_1 & & & -x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & \cdots & 1 \\ 1 & -2x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & -2x_2 & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & & -2x_n \end{vmatrix} =
$$

$$
\begin{array}{c} (-x_1) \\ (-x_2) \\ \vdots \\ (-x_n) \end{array}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & -2x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots 0 & & -2x_n \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \left(\frac{1}{2x_1}\right) \\ \\ \\ \left(\frac{1}{2x_n}\right) \end{array} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2x_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2x_1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 \cdots 0 & & -2x_n \end{vmatrix}
$$

$$= (-2)^{n-1}(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i = 2^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i$$

НО

$n=1$ $|0|=0$

$n=2$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x_1 \end{vmatrix} = -1$

Развитие на детерминанта по ред и по стълб

* по ред

Δ_{ij} – $(n-1)\times(n-1)$ детерминантата на матрицата без ред i и стълб j

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\Delta_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\Delta_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\Delta_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\Delta_{1j}$$

по стълб – аналогично

Зад.

развиваме по втори стълб

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\curvearrowleft}{\underset{(1)}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} (1) =$$

$$\underset{(-2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2)(-1)^{3+1}(-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} (-1) =$$

развиваме по първи стълб

$$= 2 \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2(1.3 - 2.3)$$

$$= 6$$

по втори стълб

Зад.

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & 0 \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \dots & 0\ x & y \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot x \begin{vmatrix} x & y & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & x & y \end{vmatrix} +$$

развиваме по първи стълб

$$(-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} x & y & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & x & y \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot x^n + (-1)^{n+1} y \cdot y^{n-1} = x^n + (-1)(-1)^n y^n$$
$$= x^n - (-y)^n$$

Зад.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 \dots & n \\ 1 & 2 & 5 & 4 \dots & n \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & - & - & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (n-1)!$$

Зад.

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 \dots & n \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} 1 & - & - & - & 1 \\ 0 & 1 & - & - & 1 \\ \vdots & 1 & 2 & \dots & 2 \\ & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 1 & 2 & & n-1 \end{vmatrix} =$$

развиваме

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 2 & & n-1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_n = \Delta_{n-1} = \dots = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 = \Delta_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 = \Delta_1 = |1|$$

Представяне на детерминанта като сбор на други две

$$* \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & \ddots & & a_2+b_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & \cdots & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & & a_1+b_n \\ \vdots & \vdots & & \\ b_1 & a_n+b_2 & & a_n+b_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \\ a_n & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1 & & a_1 \\ 1 & a_2 & & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n > 2 \\ a_1+b_1, & n = 1 \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), & n = 2 \end{cases}$$