Зад. За кое $\underset{\sim}{a}$ векторите са ЛНЗ?

$(1,1,-1)$, $(2,1,1)$, $(2,a,1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{ccc} & 1 & 1 \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right. & \begin{array}{c} \cancel{3} \\ 2 \\ 1 \end{array} & \left.\begin{array}{c} \cancel{3} \\ 1+a \\ 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{cc} (-2) & (-1) \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ (a-1)\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{За } a = 1 \text{ имаме}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_3 \neq 0 \\ \lambda_3 \neq 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ЛЗ

Зад. Образуват ли векторите базис на $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$?

а) $(4,1)$; $(7,8)$

Реш: $(4,1)$ и $(7,8)$ не са пропорционални $\Rightarrow$ ЛНЗ

$(a,b) = (4,1)x + (7,8)y$

(a,b) – произв. вектор. Търсим $x, y \in \mathbb{R}^2$

$(a,b) = (4x + 7y, x + 8y)$

Дали с-мата $\begin{cases} 4x + 7y = a \\ x + 8y = b \end{cases}$ има реш.?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & a \\ 1 & 8 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -25 & a-4b \\ 1 & 8 & b \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} y = \frac{4b-a}{25} \\ x = a - 8 \cdot \frac{4b-a}{25} \end{array}$$

б) $(0,0)$; $(1,3)$

в) $(2,1)$; $(0,3)$; $(2;7)$ } за вкъщи

Ако трите са ЛЗ, то кои двойки са базис?

г) $1-3x+2x^2$; $1+x+4x^2$; $1-7x$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = p \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda_2 = p \\ \lambda_1 = -2p \\ \lambda_3 = p \end{array} \right.$$

$\Rightarrow -2f_1 + f_2 + f_3 = 0 \Rightarrow$ Не е базис

д) $-4+x+3x^2$; $6+5x+2x^2$; $8+4x+x^2$ ← за упр.

(Ако са ЛНЗ, то няма нужда да пров. дали втората с-ма има решение)

Зад. Покажете, че векторите са ЛНЗ и допълнете до базис на пространството V:

а) $a_1 = (-1, 2, 3, -2)$, $a_2 = (2, 1, -4, -3)$, $a_3 = (1, 3, -2, -3)$, $V = \mathbb{R}^4$

Линейната обвивка се запазва при преобр. по редове

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} a_1 \\ a_2+2a_1 \\ a_3+a_1 \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \quad \ell(a_1, a_2, a_3) = \ell(b_1, b_2, b_3)$$

Търсим b_4 т., че b_1, b_2, b_3, b_4 - ЛНЗ (тогава е базис)

Тогава a_1, a_2, a_3, b_4 - базис

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \to b_4 \end{array}$$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $V = M_2(\mathbb{R})$

(hint: разликата м/у матрици и вектори в случая е чисто графична, $(1, -1, 2, 3) \simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$)

Зад. Намерете размерност и базис на следните линейни пространства

а) $\{(a, b, c, d) \mid a = b = c = d\} = V_1$

$V_1 = \{(a, a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

V_1 - л.п. над $\mathbb{R}$

$V_1 = \{a.(1, 1, 1, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$\dim V_1 = 1$, базис - $(1, 1, 1, 1)$

$(5, 5, 5, 5)$ също е базис

б) $V_2 = \{(a, b, c, 0) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ - упр.

в) $V_3 = \{(a, b, c, d) \mid d = a + b,\ c = a - b\}$

$V_3 = \{(a, b, a-b, a+b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} =$

$= \{a(1, 0, 1, 1) + b(0, 1, -1, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$= \ell((1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1))$

$\dim V_3 = 2$, базис $-(1,0,1,1)$; $(0,1,-1,1)$

г) $V_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

$V_4 = \{(x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 - x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$= \{x_1(1,0,0,-1) + x_2(0,1,0,-1) + x_3(0,0,1,-1)\}$

$\dim V_4 = 3$ базис $-(1,0,0,-1)$; $(0,1,0,-1)$; $(0,0,1,-1)$

д) $V_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$

$V_5 = \{x_1(1,0,0,-1) + x_2(0,1,0,-1) + x_3(0,0,1,-1) + (0,0,0,1)\}$

$(1,0,0,0) \in V_5$, но $2.(1,0,0,0) \notin V_5$

$\Rightarrow V_5$ не е л.п.

е) $V_6 = \left\{\begin{pmatrix} a+b & a \\ a-b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$

$V_6 = \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$\dim V_6 = 2$ базис $-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Зад. Векторите e_1 и e_2 обр. базис на двум. пр-во V. Да се пок, че вект. $a_1 = e_1 - e_2$ и $a_2 = e_1 + e_2$ също обр. базис и да се нам. коорд. на $v = e_1 - 5e_2$ в базиса a_1, a_2.

Реш: $e_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ $e_2 = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2)$

Сл. $\ell(e_1, e_2) = \ell(a_1, a_2) \Rightarrow a_1, a_2$ - базис на V

имаме $v = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) - \frac{5}{2}(-a_1 + a_2) =$
$= 3a_1 - 2a_2$

Зад. e_1, e_2, e_3 - базис. Да се пок, че a_1, a_2, a_3 са базис, и коорд на $v = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3$ където:

а) $a_1 = e_1 + e_2 + e_3$ $a_2 = e_1 + e_2 + 2e_3$ $a_3 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$

б) $a_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3$ $a_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3$ $a_3 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$

в) $a_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ $a_2 = 2e_1 + 5e_2 + 7e_3$ $a_3 = 3e_1 + 7e_2 + 10e_3$

а) a_1, a_2, a_3 - получени чрез елем. преобр. на $e_1, e_2, e_3 \Rightarrow$ базис

$\lambda a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = v$

} система

б) в) - упр.

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2 \\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=2 \\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1=2 \\ \lambda_2=\lambda_3=0 \end{array}$$

Сума и директна сума на подпространства

Деф. $V+W=\{v+w \mid v\in V,\ w\in W\}$ - сума на подпространства

$V\subseteq U,\ W\subseteq U \qquad U$ - л.п.

Т-ма $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$

Деф. $U=V\oplus W$ (л.п. U е директна сума на V и W), ако

1) $U=V+W$
2) $V\cap W=\{\theta\}$

Зад. Нека $e_1,\dots,e_n$ обр. базис на V и
$V_1=\{\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n \mid \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=0\}$

$V_2=\{\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n \mid \beta_1=\beta_2=\dots=\beta_n\}$

Да се док., че $V_1\subseteq V$, $V_2\subseteq V$ и $V=V_1\oplus V_2$

Реш: Пров директно, че $V_1\subseteq V$, $V_2\subseteq V$

$v=\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ne_n$ - произв. вектор

$$v = (\lambda e_1 + \dots + \lambda e_n) + ((\lambda_1 - \lambda)e_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda)e_n)$$
$$\quad \in V_2 \qquad\qquad\qquad\qquad \in V_1$$

$$\lambda = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

$$\Rightarrow V = V_1 + V_2$$

Сега, ако $v \in V_1 \cap V_2$, то

$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ и $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$

$$\Rightarrow \lambda_i = 0 \Rightarrow v = \theta$$

$$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$$

Зад. Нека $V = M_n(\mathbb{R})$ и S - мн-вото от симетр. матр. $(A^t = A)$ и T - мн-вото от антисиметр. матр. $(A^t = -A)$. ДСД, че

а) $S, T \leq V$

б) $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim T = \frac{n(n-1)}{2}$

в) $V = S \oplus T$

а) за упр.

б) матр. $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$ и $E_{ij} + E_{ji}$ $i<j$ са базис на S и $E_{11}, \dots, E_{nn}$, $E_{ij} - E_{ji}$ са базис на T

б) Нека $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{R})$

Дефо $B = (b_{ij})_{n \times n}$ $\quad C = (c_{ij})_{n \times n}$

$b_{ij} = \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$ $\quad c_{ij} = \dfrac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$

$\Rightarrow A = B + C \Rightarrow V = S + T$

Нека $A \in S \cap T$

Тогава $a_{ij} = a_{ji} = -a_{ji} \Rightarrow a_{ij} = 0$

$\Rightarrow A = \mathbb{O}_{n \times n} \Rightarrow S \cap T = \{\mathbb{O}\}$

$\Rightarrow V = S \oplus T$

Ранг на матрица, ранг на система вектори

Дефо| Минор на A от ред k

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ & \vdots & \\ a_{i_1 j_k} & & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n \\ j \quad\ j \quad\quad\quad j \end{matrix}$$

Деф| Ще казваме, че матр. има ранг r ($r(A) = r$) ако най-големият й ненулев минор е от ред k

Деф| Нека V - л.п. и $a_1, \dots, a_n$ - система в-ри

Ще казваме че системата има ранг r, ако същ. r ЛНЗ вектора и всеки друг вектор е тяхна линейна комбинация

Деф| Максимално линейно независима подсистема (МЛНП) е мн-во от ЛНЗ в-ри, в което ако добавим кой да е вектор a_i, стават ЛЗ

Зад. Да се намери рангът на с-мата вектори и МЛНП

а) $a_1 = (2, 1, -3)$ $a_2 = (3, 1, -5)$ $a_3 = (1, 0, -7)$
$a_4 = (4, 2, -1)$ $a_5 = (1, 0, -2)$

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -7 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ a_2 \\ a_3 \\ \\ a_5 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(a_1 \ldots, a_5) = 3$ МЛНП: a_2, a_3, a_5

б) $a_1 = (0, 6, 6, 1, 0)$ $a_2 = (1, 2, 1, -2, 1)$

$a_3 = (2, -1, 1, 3, 2)$ $a_4 = (1, -1, 2, -1, 3)$

$a_5 = (1, -1, 3, -1, 7)$ – за упр.

Зад. Да се намери рангът на матрицата

а)
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & -15 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

б)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i-1 & -2 & -i-1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1-i & -2 & i-1 & \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & -2 & i & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

Задачи за упражнение

Зад. Нека $b = (-1, 7, \lambda)$
$a_1 = (1, -2, 1)$, $a_2 = (-1, 3, 1)$, $a_3 = (0, 1, \mu+1)$
Кога:

а) b не е линейна комбинация?

б) b е линейна комбинация на a_1, a_2, a_3 по единствен начин?

в) b е линейна комбинация на a_1, a_2, a_3 по повече от един начин?

// Всички задачи нерешени на упр.

Зад. Нека $V = \mathbb{R}[x]$. ДСД, че

а) ако $V_1 = \{ f \in V \mid f(x) = f(-x) \}$ (четни пол.) и $V_2 = \{ f \in V \mid f(x) = -f(-x) \}$, то

$$V_1 \leq V, \; V_2 \leq V \quad \text{и} \quad V = V_1 \oplus V_2$$

Зад. Нека D е мн-вото от диференцируемите ф-ции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а

$$C = \{ f \in D \mid f(x) = f(y), \; \forall x, y \in \mathbb{R} \}$$

$D \subset \mathcal{D}$, т.е.

а) D е л.п. над $\mathbb{R}$ от опер:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

б) Ако $U = \{ f \in D \mid f(0) = 0 \}$, то $C \leq D$, $U \leq D$ и $D = U \oplus C$

Зад. Да се намери рангът на системата вектори и ЛНП

а) $a_1 = (1, 1, 2)$ $a_2 = (-2, -2, -4)$

$a_3 = (0, 3, 5)$ $a_4 = (4, 1, 3)$ $a_5 = (-2, -5, -9)$

$a_6 = (6, 6, 12)$

б) $a_1 = (0, 6, 6, 1, 0)$ $a_2 = (3, 1, 1, 0, 0)$

$a_3 = (1, -1, 3, 1, -2)$ $a_4 = (-2, 3, 1, 0, 1)$

$a_5 = (2, 3, 5, 1, -1)$ $a_6 = (1, -6, 4, 2, -5)$

Зад. Да се намери рангът на матрицата

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 14 & -27 & -49 & 113 \\ 43 & -82 & -145 & 340 \\ -29 & 55 & 96 & -227 \\ 128 & -245 & -438 & 1017 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$