## Ранг. Хомогенни системи линейни ур-я. (ХСЛУ). Фундаментална система решения (ФСР). Представяне на линейно пространство като решение на ХСЛУ

## Системи линейни уравнения. Базис на сума и сечение на подпространства.

### 1 Ранг

Зад. Да се намери рангът на системата вектори и МЛНП

а) $a_1=(2,1,-3)$ $a_2=(3,1,-5)$ $a_3=(1,0,-7)$
$a_4=(4,2,-1)$ $a_5=(1,0,-2)$

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -7 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ a_2 \\ a_3 \\ \\ a_5 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(a_1 \dots, a_5) = 3$ МЛНП: $a_2, a_3, a_5$

б) $a_1 = (0, 6, 6, 1, 0)$ $a_2 = (1, 2, 1, -2, 1)$

$a_3 = (2, -1, 1, 3, 2)$ $a_4 = (1, -1, 2, -1, 3)$

$a_5 = (1, -1, 3, -1, 7)$ – за упр.

Зад. Да се намери рангът на матрицата

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & -15 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i-1 & -2 & -i-1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1-i & -2 & i-1 & \end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & -2 & i & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

Зад. $r(A) = ?$ спрямо $\lambda$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix} (1)\,(-2)\,(-3) \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & \lambda-6 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ & & 0 & \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} r(A) = 2 \text{ при } \lambda \neq 0 \\ r(A) = 1 \text{ при } \lambda = 0 \end{array}$$

Зад. Да се намери рангът на системата вектори $a_1, \dots, a_n$ в зависимост от ст-стите на $\lambda$

$a_1 = (\lambda+1, \lambda, \lambda, \dots, \lambda)$

$a_2 = (\lambda, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda, \dots, \lambda)$

$a_3 = (\lambda, \lambda, \lambda + \frac{1}{3}, \lambda, \dots, \lambda)$

$\vdots$

$a_{n-1} = (\lambda, \dots, \lambda, \lambda + \frac{1}{n-1}, \lambda)$

$a_n = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda, \lambda + \frac{1}{n})$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda & \lambda & \dots & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda+\frac{1}{2} & \lambda & \dots & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+\frac{1}{3} & \lambda & \dots & \lambda \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda+\frac{1}{n-1} & \lambda \\ \lambda & \lambda & \dots & & \dots & \lambda+\frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda & \dots & \dots & \dots & \lambda \\ -1 & \frac{1}{2} & & & & \\ \vdots & & \frac{1}{3} & & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ -1 & & 0 & & \ddots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \forall & \lambda & \dots & \dots & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$(2) \quad (3) \quad (n)$

Сега рангът зависи от $\forall = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \lambda + 1$

$= \frac{n(n+1)\lambda}{2} + 1 \Rightarrow r(A) = n-1$ при $\lambda = -\frac{2}{n(n+1)}$

$r(A) = n$, иначе

# 2. ФСР

Нека $A$ - матрица на система и $\bar{A}$ - разширената матрица на системата

$$\begin{cases} a_{11} + \dots & a_{1n} = b_1 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} + \dots & a_{mn} = b_m \end{cases} \to A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Системата е съвместима $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$

когато $b_i = 0 \quad \forall i$
системата наричаме хомогенна
Ако $m = n$, системата има ненул. реш. $\Leftrightarrow \det A = 0$

**Деф** Всеки базис на пространството от решения на хомогенна система ще наричаме фундаментална система решения (ФСР)

**Деф** Нека $U$ - пр-вото от решения на хомог. с-ма. Тогава, ако $r(A) = r$, то $\dim U = n - r$

Зад. Да се намери ФСР на хомог. с-ма

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) & (-2) \\ \phantom{0} & \\ \phantom{0} & \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left| \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = p \\ x_4 = q \end{array} \right. \rightsquigarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = p \\ x_2 = q \\ x_3 = p \\ x_4 = q \end{array} \right.$$

2 параметра $\Rightarrow$ ФСР е двумерка

Примерен базис:

$$\left.\begin{array}{ll} p=1, q=0 & (1,0,1,0) \\ p=0, q=1 & (0,1,0,1) \end{array}\right\} \text{ФСР на системата}$$

$$U = \ell((1,0,1,0),(0,1,0,1))$$

Можем да правим и обратното преобразуване, от линейна обвивка на вектори, в система

$\begin{vmatrix} x_1 \dots \\ x_n \dots \end{vmatrix} \rightsquigarrow \ell(a_1, \dots a_m)$ с алгоритъма от по-горе

$\ell(a_1, \dots, a_m) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$ чрез общия алгоритъм

Зад. Намерете хомогенна система, пространството от решения на която съвпада с $W = \ell(a_1, a_2, a_3)$, където

$a_1 = (1, 2, 3, 4) \quad a_2 = (3, 2, 7, 6) \quad a_3 = (1, -2, 1, -2)$

Реш:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} (-1)(-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Сега, $\rightsquigarrow \begin{vmatrix} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 = p \\ x_4 = q \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 = -2p - q \\ x_2 = \frac{-p - 3q}{2} \\ x_3 = p \\ x_4 = q \end{vmatrix}$

Примерна система,

$\begin{vmatrix} -4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0 \end{vmatrix}$ $p = 2, q = 0$ / $p = 0, q = 2$

За упр. Направете обратните преобр. в двете предходни задачи, т.е. от обвивка в система в 1. и от система в обвивка в 2.

3. Базис на сума и сечение на подпространства

Зад. Нека в $\mathbb{R}^4$ са дадени лин. обв. $W = \ell(a_1, a_2, a_3)$ на

$a_1 = (1,2,3,4)$ $a_2 = (3,2,7,6)$ $a_4 = (1,-2,1,-2)$

и пр-вото от решения $U$ на хомог. с-ма

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Да се намерят базиси на пространствата $U + W$ и $U \cap W$

Реш: От училище знаем, че решенията на две уравнения са сечението на решенията на двете

Например, $x + 2y + z = 0 \to x = -2y - z$
$x + 2z = 0 \to x = -2z$

Сега, за да са изпълнени и двете, трябва да вземем сечението на двете множества, т.е. $2y+z=2z$ ...

Значи, за да намерим $U \cap W$, ще разгледаме системите на двете пр-ва в една

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\
x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
2x_1 - 3x_3 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\
4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\
5x_1 - 3x_3 + x_4 = 0
\end{cases}
$$

$\downarrow$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 \\
2 & -3 & -2 & 3 \\
4 & 1 & -2 & 0 \\
5 & 0 & -3 & 1
\end{pmatrix}
(-1)(-2)(-4)(-5)
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 \\
0 & -2 & 0 & 2 \\
0 & -5 & 0 & 5 \\
0 & -3 & 2 & 4 \\
0 & -5 & 2 & 6
\end{pmatrix}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 2 & 4 \\
0 & -5 & 2 & 6
\end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 2 & 1 \\
 & & & \\
 & & &
\end{pmatrix}
\rightsquigarrow
$$

$$\sim \left| \begin{array}{l} x_1 \quad - x_3 \quad = 0 \\ \quad x_2 \quad - x_4 = 0 \\ \qquad 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 2p \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = p \\ x_2 = 2p \\ x_3 = -p \\ x_4 = 2p \end{array} \right.$$

При $p = 1$ получ. базисния вектор
$c = (1, 2, -1, 2)$ $\quad U \cap W = l(c)$

Сега, за $U + W$, разсъждавайки със знанията от уки, можем да разгледаме обединението на линейните обвивки на пространствата:

Търсим МЛНЗП на $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\}$
от зад 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (\cdot 1)(-3) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \Bigg( \qquad \ldots \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow a_1 \\ \rightarrow a_2 \\ \\ \\ \rightarrow b_2 \end{array}$$

МЛНЗП е $\{a_1, a_2, b_2\}$ и $U+W = l(a_1, a_2, a_3)$

! Имаме, че $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Ползваме го за проверка

## Задачи за упражнение

1 Всичко от сборника за ранг, ФСР, сума и сечение!

**Задача 2:** Да се намери фундаментална система решения на ХС:

$$\left|\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ -3x_1 - 8x_2 - 4x_3 + 13x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 6x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 9x_4 &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_5 &= 0 \end{aligned}\right.$$

**Задача 3:** Да се намери ХС , пространството от решение на която съвпада с $\mathbb{W} = l(a_1, a_2, \ldots)$

а) $a_1 = (2, 1, -1, 3), a_2 = (3, 1, 2, 1), a_3 = (1, 1, -4, 5)$

б) $a_1 = (1, 2, -1, 1), a_2 = (-3, -5, 2, 1), a_3 = (1, 2, 3, 4)$

в) $a_1 = (2, 3, 1, 2, 4), a_2 = (3, 4, 2, 3, -1), a_3 = (6, 2, 1, -2, -4)$

г) $a_1 = (1, 1, -2, 2), a_2 = (2, 1, 3, -2), a_3 = (3, 4, 5, 6), a_4 = (3, 6, 9, 12)$

**Задача 4:** В линейното пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени векторите $a_1 = (25, 0, -5, -10), a_2 = (3, 4, 9, -2), a_3 = (1, -2, -5, 0), a_4 = (-3, 1, 3, 1)$. Нека $U = l(a_1, a_2, a_3, a_4)$, a W е множеството от решенията на хомогенната система:

$$\left| \begin{array}{c} 17x_1 - 9x_2 - 13x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_3 + 4x_4 = 0 \\ 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Да се намерят базиси на $\mathbb{U}, \mathbb{W}, \mathbb{U} + \mathbb{W}$ и $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$.

**Задача 5.** Нека в линейното пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени $\mathbb{W} = l(a_1, a_2, a_3)$, където:
$a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (3, 2, 7, 6), a_3 = (1, -2, 1, -2)$
и пространството от решения $\mathbb{U}$ на линейната хомогенна система:

$$\left| \begin{array}{c} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{array} \right.$$

Намерете базиси на пространствата $\mathbb{U} + \mathbb{W}$ и $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$.

**Задача 4.** *В пространството*

$$\mathbb{Q}^3[x] = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg f \leq 2\}$$

*са дедени полиномите*

$$f_1(x) = 2x^2 - 3x + 1, f_2(x) = x^2 - 8x + 2, f_3(x) = 2x^2 + 2x + 1, f_4(x) = x^2 - 1.$$

*Определете ранга на системата вектори* $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ *и намерете някоя МЛНЗП.*

**Задача 2.** Намерете ранга на матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \lambda \end{pmatrix}$$

в зависимост от стойностите на $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Задача 3.** Намерете ранга на системите от вектори:

а) $a_1(1,1,-1)$, $a_2(1,0,1)$, $a_3(1,2,1)$, $a_4(2,0,2)$;

б) $a_1(3,-1,3,2,5)$, $a_2(5,-3,2,3,4)$, $a_3(1,-3,-5,0,-7)$.

**Задача 4.** Да се намери рангът на матрицата в зависимост от стойността на параметъра $\lambda$:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & \lambda & 0 & 9 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 & \cdots & n-2 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & 3 & \cdots & n-2 & 1 \\ \hdotsfor{7} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & \cdots & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & \lambda & \lambda \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & \lambda & \lambda & \cdots & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

**Задача 32.** *Намерете ранга на матрицата $A(p)$ в зависимост от стойностите на $p$:*

$$A(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -13 & -6 \\ -1 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p \end{pmatrix}$$