2. Метод на Гаус. Действия с матрици

Деф| Нека F - числово поле. Система линейни уравнения наричаме система от вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

коефициенти $a_{i,j}, b_k \in F$

m уравнения, n неизвестни

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица на системата

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

разширена матрица

Видове системи

съвместими (имат решение)

- определени (имат точно едно решение)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$$

- неопределени (повече от едно решение)

$$\begin{cases} 6x - y = 11 \\ 12 - 2y - 22 = 0 \end{cases}$$

несъвместими (нямат решение)

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 6x + 2y = -10 \end{cases}$$

Деф| Елементарни преобразувания на система наричаме:

* умножение на ред с число $R_i = kR_i$
* добавяне на ред, умножен с число към друг $R_i = R_i + kR_j$
* размяна на редове $R_i <=> R_j$

/* Краен брой преобразувания не променят решението на системата */

Метод на Гаус

Последователно елиминираме променлива от останалите уравнения

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \quad \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \quad b_m \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \\ 0 \quad a'_{22}x_2 + \dots \\ 0 \quad a'_{m2}x_2 + \dots \end{array}\right.$$

Задачи

1 Да се реши линейната система:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{array}\right.$$

Работим с разширената матрица на системата (за удобство)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 = R_2 + (-1).R_1 \\ R_3 = R_3 + (-3).R_1 \end{array} \sim$$

! не пишем '=', матриците не са едни и същи!

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \quad R_3 = R_3 - 4R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ -3x_2 - 2x_3 = 11 \\ -8x_3 = 8 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ -3x_2 = 9 \\ x_3 = -1 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = -1 \end{array} \right.$$

системата има единствено решение (определена)

Зад.

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 9 \end{array} \right. \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 = R_2 - 2R_1 \\ R_3 = R_3 - 3R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad R_3 = R_3 - R_2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

В този случай системата е ==неопределена== (имаме 3 неизвестни, но само 2 уравнения за тях), въвеждаме параметър.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + p \\ 5x_2 = -2p \rightarrow x_2 = -\frac{2}{5}p \\ x_3 = p \end{cases}$$

$x_3 = p$ ← избираме x_3 да приема произволна стойност

$\Rightarrow$ решенията (x_1, x_2, x_3) са всички тройки от вида $(2+p, -\frac{2p}{2}, p)$

Зад.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = R_3 - R_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad R_3 = R_3 + R_2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Получихме (от третия ред), че $0x_3 = 1$, т.е. $0 = 1$ ↯ невъзможно

Следователно системата няма решение (==несъвместима==)

Зад.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 \qquad\qquad\qquad - 3x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$R_4 \leftrightarrow R_1,\ R_4 = R_4 : 3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2)\ (1)\ (-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

За по-кратко, това означава

$R_2 = R_2 - 2R_1;\ R_3 = R_3 - R_1;\ R_4 = R_4 - R_1$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Отново системата е неопределена

Въвеждаме $4 - 2 = 2$ параметъра

неизвестни уравнения

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_4 = -1 \\ x_2 - 2x_3 \quad = 0 \\ x_3 = p \\ x_4 = q \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -q - 1 \\ x_2 = 2p \\ x_3 = p \\ x_4 = q \end{cases}$$

Така системата има решения от вида $(-q-1, 2p, p, q)$ (за всяко p и q)

Зад. Да се реши според стойността на параметъра системата

← ламбда, не алфа!

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Такива системи решаваме по същия начин, с разликата, че в някакъв момент правим проверки за стойността на λ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \; (1-\lambda) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \underbrace{1-\lambda^2}_{(1-\lambda)(1+\lambda)} & 1-\lambda \end{array}\right)$$

Сега бихме се изкушили да разделим втори и трети ред на $(\lambda-1)$, но можем само при $\lambda - 1 \neq 0$

За това разделяме на случаи:

1 сл. $\lambda - 1 = 0$, т.е. $\lambda = 1$, тогава

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ и системата е неопредел.

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = -p-q \\ x_2 = p \\ x_3 = q \end{array}\right. \rightarrow$$ С-мата има решения от вида $(-p-q, p, q)$

2сл. $\lambda \neq 1$, спокойно разделяме на $\lambda - 1$!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1-\lambda & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ \\ d \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1) \\ \\ d \end{array} \sim$$

2.1 сл. $\lambda = -2$, системата е несъвместима

2.2 сл. $\lambda \neq -2$, заместваме в с-мата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = 1 - \frac{1}{\lambda+2} - \frac{\lambda}{\lambda+2} = \frac{1}{\lambda+2} \\ x_2 = \frac{1}{\lambda+2} \\ x_3 = \frac{1}{\lambda+2} \end{array}\right.$$

Сл. системата е определена и има решение $\left(\frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}\right)$

Зад. Да се реши спр. стойностите на параметрите системата:

$$\left|\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \\ 7x_1 - 4x_2 - 10x_3 + 5x_4 - 5x_5 = \lambda - 2 \\ 2x_1 - x_2 - \mu x_3 + x_4 - x_5 = -1 \end{array}\right.$$

Реш: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & 4 & -10 & 5 & -5 & \lambda-2 \\ 2 & -1 & -\mu & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$ (-3) (-7) (-2) $\sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & 4 & -2 & 2 & \lambda-9 \\ 0 & -5 & 4-\mu & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \quad (1)\ (-2)\ (-1) \quad \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-\mu & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1 сл. $\lambda \neq 3$ – системата е несъвместима

2 сл. $\lambda = 3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2-\mu & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2.1 сл. $\mu = 2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\xrightarrow[\dots]{\text{сметки}} (3p-2, p, q, r, -3+5p-2q+r)$

2.2 сл. $\mu \neq 2$

$\xrightarrow[\dots]{\text{сметки}} (3p-2, p, 0, q, -3+5p+q)$

Задачи за упражнение

Решете системите:

Note: системи, при които $b_i = 0$ за всяко i, наричаме хомогенни системи. Те винаги имат поне едно решение, нулевото.

$$\left|\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 11x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 9x_1 - 18x_2 + 19x_3 + 13x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_4 + 8x_4 &= 8 \\ 10x_1 + 2x_2 + 8x_4 &= \lambda \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 &= 8 \\ 6x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 7x_4 &= 18 \\ 4x_1 + 6x_2 - 12x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}\right.$$

Действия с матрици

Нека $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}\in F_{m\times n}$

1) Събиране на матрици

$A+B:=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

2) Умножение на матрица с число

скалар

Нека $\lambda\in F$, $\lambda A:=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$

3) Транспониране

$A^t:=(a'_{ij})_{n\times m}$, $a'_{ij}=a_{ji}$

Пример:
$$\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

4) Умножение на матрици

Матрици не умножаваме поелементно.
За да умножим 2 матрици, първата трябва да има равен брой стълбове с редовете на втората, т.е.

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots\\a_{i1}\ a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1j}&\cdots&b_{1k}\\\vdots&&b_{2j}&&\vdots\\&&\vdots&&\\b_{n1}&\cdots&b_{nj}&\cdots&b_{nk}\end{pmatrix}_{n\times k}=\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1j}&\cdots&c_{1k}\\\vdots&&&&\vdots\\c_{i1}&\cdots&c_{ij}&\cdots&c_{ik}\\\vdots&&&&\vdots\\c_{m1}&\cdots&&\cdots&c_{mk}\end{pmatrix}_{m\times k}$$

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$ броя на първата

Резултатът е матрица с m реда и k стълба

броя на втората

Задачи. Извършете операциите

* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Реш.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

---

* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

---

* $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

---

* $\underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \underset{1\times 3}{\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1.-2 & 1.4 & 1.5 \\ 2.-2 & 2.4 & 2.5 \\ 3.-2 & 3.4 & 3.5 \end{pmatrix} = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -4 & 8 & 10 \\ -6 & 12 & 15 \end{pmatrix}}$

$$\cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{1\times 3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -2.1+4.2+5.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \end{pmatrix}_{1\times 1}$$

Умножението на матрици не е комутативно !!!

Зад. Да се пресметне степента $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

Реш: Проверяваме за първите няколко степени

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следователно ще пок, че $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

База: Изп. ✓

И.Х: $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ за някое $k \in \mathbb{N}$

И.С: $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (k+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Сл. $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$* \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}$

Реш:

за упражнение, довършете сметките

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2 = \ldots = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

От тук забелязваме, че

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$$

Отново по индукция:

База: ✓

И.Х.: — // —

И.С.:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos k\alpha - \sin\alpha\sin k\alpha & -(\cos\alpha\sin k\alpha + \sin\alpha\cos k\alpha) \\ \sin\alpha\cos k\alpha + \cos\alpha\sin k\alpha & \cos\alpha\cos k\alpha - \sin k\alpha\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos((k+1)\alpha) & -\sin(k+1)\alpha \\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha \end{pmatrix}$$

1. (Междууниверситетско състезание по мат, 2022)

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

(Random fact: горнотриъг. матрица по горнотр. м. = горнотр. матр.)

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 2x^2+2x \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2x & 2x^2+2x \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3x & 3x^2+6x \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & nx & nx^2 + n(n-1)x \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

И.С.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & kx & kx^2 + \cdot x \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (k+1)x & \\ 0 & 1 & 2(k+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(k+1)x^2 + k(k+1)x$

Задачи за упражнение

* Да се пресметнат произведенията на матр.

* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

* $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

* $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

* $\overset{(1)}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \overset{(2)}{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \overset{(3)}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$

Note: Умножението на матрици е асоциативно, т.е. няма значение реда, в който извършим умноженията (т.е. можем първо да умн. (2) с (3), и резултатът с (1))

Reminder: Не е комутативно!

В общия случай, ако можем да умножим AB, нямаме гаранция, че можем BA