1. Комплексни числа

От училище знаем числовите множества:

$\mathbb{N}$ → естествени числа $1, 2, 3 \dots$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z}$ → цели числа $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z})$

$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ → остатъци при деление на p

$\mathbb{Q}$ → рационални числа $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, (p,q) = 1 \}$ ← взаимно прости

$\mathbb{R}$ ← реални числа $\pi, \sqrt{2}, \dots$

Сега въвеждаме и множеството на комплексните числа – $\mathbb{C}$:

$\mathbb{C} = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ ← двойка реални числа

Запис на комплексни числа:

1) алгебричен вид:

$x^2 + 1 = 0$, $x = i = \sqrt{-1}$

$z = a + bi$

a – реална част $Re(z) = a$

b – имагинерна част $Im(z) = b$

Дефинираме:

* събиране

$z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$

$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

Пример: $(5-3i) + (-2+i) = 3 - 2i$

* изваждане

$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i - a_2 - b_2 i =$

$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$

Пример: $(2-3i) - (4-6i) = -2 + 3i$

$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ ...

* умножение

$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i$

$+ a_2 b_1 i - b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

Пример: $(1+2i)(-3+i) = -5 - 5i$

* деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{(a_2 - b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \left(\frac{a_1a_2 - b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + \left(\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)i \qquad a^2+b^2 \geq 0,\ \mathbb{R}$$

Пример: $\frac{2+3i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{18+i}{3^2+4^2} = \frac{18}{25} + \frac{1}{25}i$

Комплексно спрегнато на $z = a+bi$:

$\bar{z} = \overline{a+bi} = a - bi$

$z . \bar{z} = a^2 + b^2$

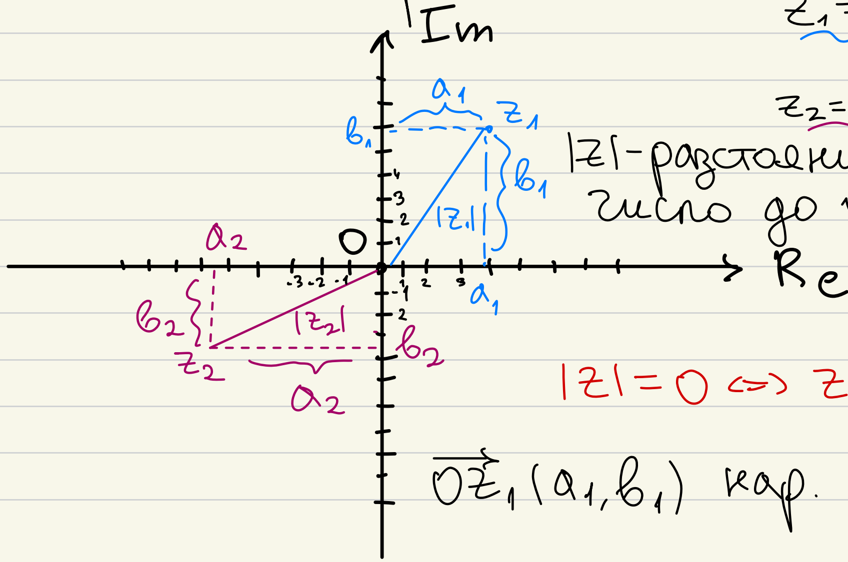
модул на z : $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0 \in \mathbb{R}$

2) Тригонометричен вид

Геометрично представяне в комплексна равнина:

$z_1 = a_1 + b_1 i$

$z_2 = a_2 + b_2 i$



$|z|$-разстоянието на компл. число до центъра на равнината

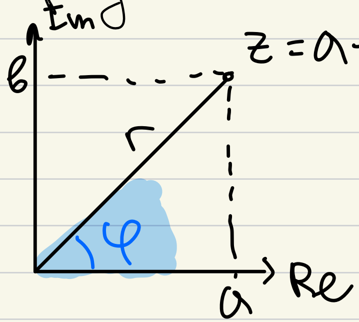
$|z| = 0 \Leftrightarrow z = (0,0)$

$\overrightarrow{OZ_1}(a_1, b_1)$ кар. радиус-вектор

Пример: $z = 3+4i$, $|z| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

Озн. $r := |z|$

Аргумент:



φ – аргумент на z

(ъгълът, който радиус-векторът сключва с полож. посока на реалната ос)

$Arg(z) = \varphi$

Виждаме, че $a = r.\cos\varphi$, $b = r.\sin\varphi$

$\Rightarrow z = a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Тригонометричен вид на комплексно число

Привеждане в триг. вид: $z = a+bi$

1) $r = \sqrt{a^2+b^2}$ 2) $Arg z = \varphi = \begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{r} \\ \sin\varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$

$\Rightarrow z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Умножение и деление:

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$* \; z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

$* \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$

Примери: $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_1 z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

Формули на Моавър: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

Пример: Да се преведе в тригонометричен вид $(-1+i)^{543}$

Удобен начин за пресмятане

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

$\hookrightarrow \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

коренуване и делим на 2

Реш: $z = -1 + i$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$z^{543} = \sqrt{2}^{543}\left(\cos\frac{543 \cdot 3\pi}{4} + i\sin\frac{543 \cdot 3\pi}{4}\right) =$

$= 2^{271}\sqrt{2}\left(\cos\left(406\pi + \frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(406\pi + \frac{5\pi}{4}\right)\right) =$

$= 2^{271}\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k\in\{0,1,\dots n-1\}$$

Пример: Да се приведе в триг. вид $\sqrt[12]{1}$

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\sqrt[12]{1} = \cos\frac{2\pi k}{12} + i\sin\frac{2\pi k}{12} = \cos\frac{\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi k}{6}$$

$$k\in\{0,1,\dots,11\}$$

Задачи

Зад. Да се запише в алгебричен вид:

а) $(3+i)^2+(3-i)^2$

Реш: $(3+i)^2+(3-i)^2 = 9+6i+\underbrace{i^2}_{=-1}+9-6i+\underbrace{i^2}_{=-1} =$

$= 18-2 = 16$

б) $$\frac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2} = \frac{1+4i+4i^2-(8-12i+6i^2-i^3)}{1+3i+3i^2-i^3+4+4i+i^2} =$$

$$= \frac{1+4i-4-8+12i+6-i}{1-3i-3+i+4+4i-1} = \frac{-5+15i}{1+2i}$$

$$\frac{-5+15i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{-5+30+10i+15i}{1+4} = \frac{25+25i}{5} = 5+5i$$

в) $$\frac{(\sqrt{3}+i)^{20}}{(1-i)^{32}}$$

Реш: Ще представим числителя и знаменателя в тригонометричен вид:

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Сега от формулите за компл. ч. в триг. вид

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{20}}{(1-i)^{32}} = \frac{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{20}}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{32}} =$$

$$= \frac{2^{20}\left(\cos\frac{20\pi}{6}+i\sin\frac{20\pi}{6}\right)}{2^{16}\left(\cos\frac{-32\pi}{4}+i\sin\frac{-32\pi}{4}\right)} =$$

$$= 2^4\left[\cos\left(\frac{10\pi}{3}+8\pi\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{3}+8\pi\right)\right] =$$

$$= 2^4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2^4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= -8-8\sqrt{3}i$$

г) Всички решения на $\sqrt[3]{8}$

Реш: Понеже $8 = 2^3(\cos 0 + i\sin 0)$, то мн-вото от решения е

$$\sqrt[3]{8} = \left\{2\left(\cos\frac{2}{3}k\pi + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right) \middle| k=0,1,2\right\} =$$

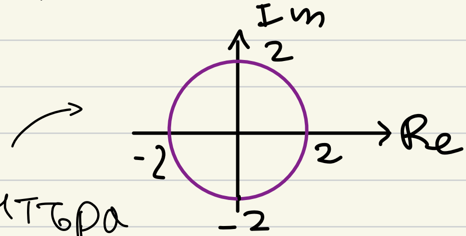
$$= \left\{2(\cos 0 + i\sin 0),\ 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right),\right.$$

$$\left. 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)\right\} =$$

$$= \{2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i\}$$

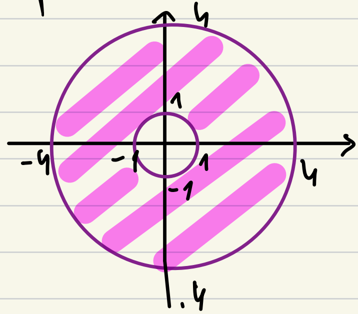
Зад. Да се определи мн-вото от точките в компл. равнина, на което съотв. z, за които:

а) $|z| = 2$



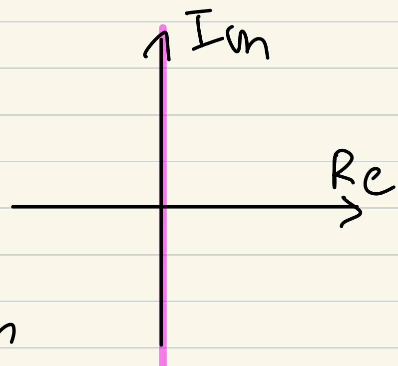
Точките с разст. 2 от центъра

б) $1 \le |z| \le 4$

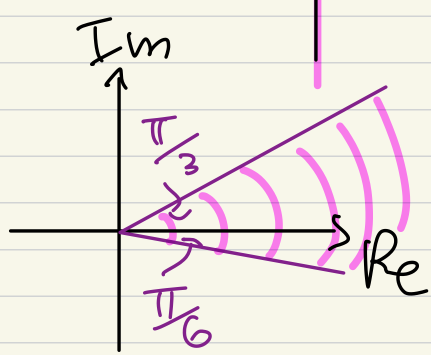


в) $\arg z = \frac{\pi}{2}$

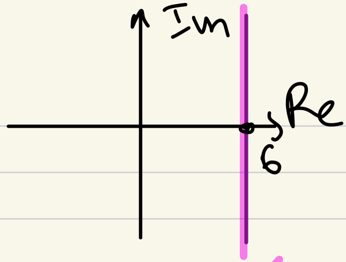
$\Rightarrow Re(z) = 0$ $\left(\cos\frac{\pi}{2} = 0\right)$



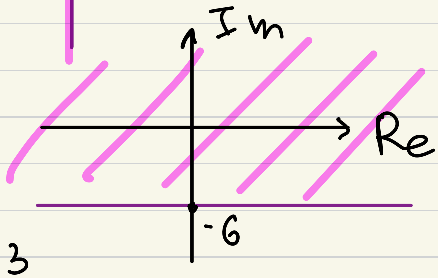
г) $-\frac{\pi}{6} \le \arg z \le \frac{\pi}{3}$



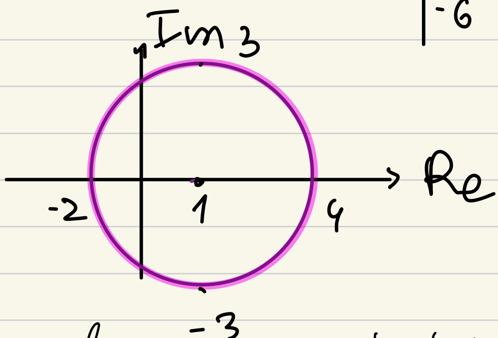
д) $Re(z) = 6$



е) $Im\, z \geq -6$



ж) $|z - 1| = 3$



Зад. Да се реши уравнението $|z| + (1-i)z = 4 + 7i$

Реш.:

Представяме $z \in \mathbb{C}$ като: $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + x + y + (y-x)i = 4 + 7i$

Сега остава да решим системата

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + x + y = 4 \\ y - x = 7 \Rightarrow y = x + 7 \end{cases} \text{ заместваме}$$

$\therefore\ x = -\frac{9}{2} \quad y = \frac{5}{2}$

Зад. Да се запише в триг. вид:

а) $z = \sqrt{3} + i$

Реш: $r = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{2+4\sqrt{3}+6} =$

$= \sqrt{\sqrt{2}^2+2.\sqrt{2}.\sqrt{6}+\sqrt{6}^2} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2} = \sqrt{2}+\sqrt{6}$

Търсим точен квадрат, a, b т.че $\left|\begin{array}{l} 2ab = 4\sqrt{3} \\ a^2+b^2 = 8 \end{array}\right.$

$$z = (\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right) = \ldots$$

$$= (\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(\underbrace{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}_{\cos\frac{\pi}{12}} + i\,\underbrace{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}_{\sin\frac{\pi}{12}}\right)$$

Лесен начин за намиране, ако сме забравили: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

б) $1+\cos\varphi + i\sin\varphi$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin 2x = 2\sin x\cos x \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \\ 1+\cos 2x = 2\cos^2 x \end{array}}$$

Реш: $r = |z| =$

$= \sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} = \sqrt{2+2\cos\varphi} =$

$= \sqrt{2+4\cos^2\frac{\varphi}{2}-2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}$

$$z = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{1+\cos\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}} + i\,\frac{\sin\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}} + i\,\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

г) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{15}}{(1+i)^{8}}$

Реш: $\sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{15}}{(1+i)^{8}} = \frac{2^{15}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right)}{2^{4}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)} =$$

$$= 2^{11}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

Зад. Да се реши уравнението:

а) $x^2 - (3-2i)x + (5-5i) = 0$

$D = 9 - 12i - 4 - 20 + 20i = -15 + 8i$

За да изразим $\sqrt{D}$, представяме $\sqrt{-15+8i} = a + bi$, и ^{2}

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ 2ab = 8 \end{cases} \to b = \frac{4}{a} \to a^4 + 15a^2 - 16 = 0$$

$\to a^2 = 1,\ a^2 = -16 \quad (a \in \mathbb{R} \Rightarrow a = \pm 1)$

$\to b = \pm 4$

Сега от формулата за корените знаем, че е достатъчно да вземем една от стойностите за дискриминантата

$D = 1 + 4i$ и

$$z_{1,2} = \frac{3+2i \pm (1+4i)}{2} \nearrow z_1 = 2+3i \quad \searrow z_2 = 1-i$$

Зад. Нека $z \in \mathbb{C}$, за което е изпълнено
$z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$

Да се док., че $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$

Д-во: $z + \frac{1}{z} - 2\cos\varphi = 0$

$$z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{2\cos\varphi \pm \sqrt{4\cos^2\varphi - 4}}{2} =$$

$$= \cos\varphi \pm \sqrt{\underbrace{\cos^2\varphi - 1}_{\sin^2\varphi}} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

Сега за двете решения ще покажем, че удовлетворяват $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\varphi)$

За $z_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$, от Моавър:

$$z^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

$$\frac{1}{z^n} = z^{-n} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)$$

Сл. $z^n + \frac{1}{z^n} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) + \cos(-n\varphi) + \sin(-n\varphi) =$
$= 2\cos(n\varphi)$

!За триг. вид искаме "+"!

$z_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$ и аналогично пресметаме

Зад. Да се докаже, че

С $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ означаваме n-ти корени на единицата $(k=0,..n-1)$

а) $\omega_1^k = \omega_k$

Д-во: Следва директно от формулите на Моавър

б) $\omega_1^s = 1 \Leftrightarrow n$ дели s

Д-во: $\omega_1^0 = 1, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ са различни и n е най-малкото ест. число т, че

$\omega_1^n = 1$

Нека $s = nq + r \quad 0 \le r \le n-1$ ← остатъци при деление на n

$\omega_1^s = \omega_1^{nq+r} = \underbrace{(\omega_1^n)^q}_{=1} \cdot \omega_1^r = \omega_1^r$

$\Rightarrow \omega_1^s = \omega_1^r = 1 \Leftrightarrow r = 0$, т.е. когато

n дели s } ще означаваме с $n|s$

Зад. Да се док, че ако m е цело число, то:

$$\omega_0^m + \omega_1^m + \dots + \omega_{n-1}^m = \begin{cases} n, & \text{ако } n|m \\ 0, & \text{ако } n\nmid m \end{cases}$$

n не дели m

Д-во: ако n дели m, то $w_k^m = 1$ $(k = 0, 1, \dots n-1)$ и

$$w_0^m + \dots + w_{n-1}^m = n$$

ако n не дели m, то

$$w_0^m + w_1^m + \dots + w_{n-1}^m = 1 + w_1^m + \dots + w_1^{(n-1)m} =$$

$$= \underbrace{\frac{w_1^{mn} - 1}{w_1^m - 1}}_{\text{сума на геометр. прогресия}} = 0 \quad (w_1^m \neq 1)$$

Зад. Да се докажат неравенствата:

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos(nx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin(nx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Реш: Нека $z := \cos x + i\sin x$

Тогава от формулите на Моавър

$$z^m = \cos(mx) + i\sin(mx)$$

Нека $S = z + z^2 + \dots + z^n$

$$S = z\frac{z^n - 1}{z - 1} = (\cos x + i\sin x)\frac{\overbrace{\cos nx}^{1-2\sin^2\frac{nx}{2}} + \overbrace{i\sin nx}^{2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2}} - 1}{\cos x - 1 + i\sin x} =$$

$$= (\cos x + i\sin x)\frac{2i\sin\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right)}{2i\sin x/2\,\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= (\cos x + i \sin x) \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{(n-1)x}{2} + i \sin \frac{(n-1)x}{2} \right) =$$

$$= \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{(n+1)x}{2} + i \sin \frac{(n+1)x}{2} \right)$$

От друга страна

$$S = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + i(\sin x + \ldots + \sin nx)$$

Като приравним реалните и имагинерните части в двата израза за S, получаваме двете равенства.

Задачи за упражнение

Зад. Намерете алгебричния вид на числата:

а) $(i+1)^n$

б) $\sqrt[7]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$

в) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{47}$

Зад. Да се реши уравнението:

а) $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$

б) $z^2+3z+5=0$

в) $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$

г) $|z|+z=1+2i$

д) $(3-i)z^2+(1+i)z+6i=0$

Зад. Да се пресметне $z^{2024}+\frac{1}{z^{2024}}$, ако

а) $z^2+z+1=0$

б) $z+\frac{1}{z}=1$