Линейни пространства. Базис, размерност, координати.

Деф| Нека F - поле и $V \neq \emptyset$, в което са въведени следните операции:

$+ : V \times V \to V, \ (u, v) \mapsto u + v \in V$

и

$\cdot : F \times V \to V, \ (\lambda, v) \mapsto \lambda v \in V$

Казваме, че V е линейно пространство над (полето) F, ако са изпълнени свойствата:

1) $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$ (комутативност)

2) $(u+v)+w = u+(v+w), \ \forall u, v, w \in V$ (асоциативност)

3) $\exists \theta \in V : u + \theta = u$ (нулев. ел.)
$\exists$ - съществува

4) $\forall v \in V \ \exists -v \in V$ т.че $v + (-v) = \theta$
$\forall$ - за всяко (противоположен ел.)

5) $1.v = v, \ 1 \in F \ v \in V$

6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v, \ \forall u, v \in V, \ \forall \lambda \in F$

7) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, \ \forall \mu, \lambda \in F, \ \forall u \in V$

8) $(\lambda . \mu)u = \lambda(\mu . u), \ \forall \lambda, \mu \in F, \ \forall u \in V$

Примери:

1. $\mathbb{R}^3$ е ЛП над $\mathbb{R}$

2. $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ е ЛП над $\mathbb{C}$

3. $\mathbb{C}$ е ЛП над $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}$ е ЛП над $\mathbb{R}$
$\mathbb{C}$ е ЛП над $\mathbb{Q}$

4. $V = \{ f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ - всички ф-ии над $\mathbb{R}$

с дефинирани операции

$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$(\lambda f)(x) = \lambda . f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Проверяваме аксиомите:

Нека $f, g, h \in V \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1) $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) =$
$= (g+f)(x)$

2) $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x) =$
$f(x)+g(x)+h(x) = f(x)+(g+h)(x) =$
$= (f+(g+h))(x)$

3) $\theta \equiv \theta(x)$ т, че: $\theta(x) = 0 \quad \forall x$

$(f+\theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x)$

4) $-f \equiv (-f)(x)$ т, че $(-f)(x) = -f(x)$

$(f+(-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) =$

$= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x)$ ← нулевият ни елемент

5) $1 \in \mathbb{R}$

$(1 \cdot f)(x) = 1 . f(x) = f(x)$

6) $((\lambda+\mu)f)(x) = (\lambda+\mu)f(x) =$

$= \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f + \mu f)(x)$

7) $(\lambda(f+g))(x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda f(x) + \lambda g(x) =$

$= (\lambda f + \lambda g)(x)$

8) $\lambda(\mu . f)(x) = \lambda\mu f(x) = (\lambda\mu) f(x)$

Зад. Нека $V = \mathbb{R}^+$, $F = \mathbb{R}$ с деф. операции $\boxplus$ и $\boxdot$:

$(\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\})$

$x \boxplus y = xy + 1$

$\lambda \boxdot x = \lambda^2 x$

Докажете, че V не е л.п. над $\mathbb{R}$

Д-во: Пак "пробваме" аксиоми, да "счупим" някоя от тях:

Например:

2) $(x \boxplus y) \boxplus z = (xy+1) \boxplus z = (xy+1)z+1 =$
$= xyz + z + 1$

Но

$x \boxplus (y \boxplus z) = x \boxplus (yz+1) = x(yz+1)+1 =$
$= xyz + x + 1$ ↯

$(x \boxplus y) \boxplus z \neq x \boxplus (y \boxplus z)$

$\Rightarrow$ V не е линейно пространство

(Може да го покажете и с други свойства, а понякога и с дефиницията на операцията, ако например $a+b$ ни изпраща извън V за някакви стойности)

Зад. Нека $V = \mathbb{R}^+$, $F = \mathbb{R}$ с деф. операции

$a \oplus b = a \cdot b$

$\lambda \odot a = a^{\lambda}$

Да се докаже, че с въведените операции V е л.п. над F

Д-во:

1) $a \oplus b = a \cdot b = b \cdot a = b \oplus a \quad \forall a, b \in V$

2) $(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (bc) =$
$= a \oplus (b \oplus c) \quad \forall a, b, c \in V$

3) $1 \in \mathbb{R}$
$(1 = \theta)$ $1 \oplus a = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in V$

4) $\frac{1}{a} \equiv$ '$-a$'
$\frac{1}{a} \oplus a = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \quad \forall a \in V$

5) $1 = 1 \in \mathbb{R} = F$

$1 \odot a = a^1 = a \quad \forall a \in V$

6) $(\lambda + \mu) \odot a = a^{\lambda + \mu} = a^\lambda \cdot a^\mu = (\lambda \odot a)(\mu \odot a)$

$= (\lambda \odot a) \oplus (\mu \odot a)$

7) $\lambda \odot (a \oplus b) = (a \oplus b)^\lambda = (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda = a^\lambda \oplus b^\lambda$
$= (\lambda \odot a) \oplus (\lambda \odot b)$

8) $\lambda \odot (\mu \odot a) = \lambda \odot (a^\mu) = (a^\mu)^\lambda = a^{\mu\lambda} =$
$= (\lambda\mu) a$

$\Rightarrow V$ е л.п. над F

Подпространство

Нека V - л.п. над F и $W \subseteq V$ (подмножество).
Ако за $\forall u, v \in W$ и $\forall \lambda \in F$ е изп., че
$u + v \in W$ и $\lambda . u \in W$, то W е л.п. над F
Казваме, че W е подпространство на V
и бележим с $W \leq V$

Когато нещо е подмн-во на л.п., няма
нужда да доказваме аксиомите:

Примери:

1. $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$

2. $Sym_{n \times n}(F) \leq M_{n \times n}(F)$

Симетричните матрици $n \times n$ са подпр-во
на матриците $n \times n$

3. $V = \{(v_1, v_2, 0) \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3$

Зад. Нека $V = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ и
$W_1, W_2 \subseteq V$:

$W_1 = \{f \mid f(1) + f(2) + f(3) = 0\}$

$W_2 = \{f \mid f(1) + f(2) + f(3) = 0\}$

Кои от тях са л.п.?

Реш: Нека $f, g \in W_1$

Тогава за $f+g$ имаме:

$$(f+g)(1)+(f+g)(2)+(f+g)(3) =$$

$$= \underbrace{f(1)+f(2)+f(3)}_{0} + \underbrace{g(1)+g(2)+g(3)}_{0} =$$

$$= 0 \Rightarrow f+g \in W_1$$

Нека $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda f : \lambda f(1) + \lambda f(2) + \lambda f(3) =$$

$$= \lambda(f(1)+f(2)+f(3)) = \lambda \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \lambda f \in W_1 \Rightarrow W_1$ е л.п.

Нека $f, g \in W_2$, тогава

$$(f+g)(1)+(f+g)(2)+(f+g)(3) =$$

$$= \underbrace{f(1)+f(2)+f(3)}_{1} + \underbrace{g(1)+g(2)+g(3)}_{1} =$$

$$= 1+1 = 2 \lightning \Rightarrow f+g \in W_2$$

$\Rightarrow W_2$ не е л.п.