# Контролно 2023:

1. Ако $L$ е рег., вярно ли е, че

$Suf(L) = \{w_1 w_2 \in L \mid w_2 \notin L\}$ е рег.?

Реш: Разглеждаме думите: $\alpha = w_1 w_2$

$$\underbrace{\boxed{w_1 \in \Sigma^* \mid w_2 \notin L}}_{\in L} \qquad \alpha \in Suf(L)$$

$$L' = (\Sigma^* . \overline{L}) \cap L$$

* $Suf(L) \subseteq L'$

нека $\alpha \in Suf(L)$

Тогава ① $\alpha \in L$ и $\exists w_1, w_2 : w_1 w_2 = \alpha \; \& \; w_2 \notin L$

$\Rightarrow$ ② $\alpha \in \Sigma^* . \overline{L}$

①&② $\Rightarrow \alpha = w_1 w_2 \in (\Sigma^* . \overline{L}) \cap L$

* $L' \subseteq Suf(L)$

нека $\alpha \in L'$

Тогава $\alpha \in$ ① $(\Sigma^* . \overline{L}) \; \&$ ② $\alpha \in L$

Тогава от ① $\exists w_1, w_2 \in \Sigma^* : \alpha = w_1 w_2 \; \& \; w_2 \in \overline{L}$

$\Rightarrow$ ② $w_1 w_2 \in L, \; w_2 \notin L \Rightarrow w_1 w_2 \in Suf(L)$

Ако $L$ - рег,

2. $Ord(L) = \{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n \mid a_1 b_1 \dots a_n b_n \in L\}$ рег?

Реш: при $L = \{ab\}^*$, $Ord(L) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Д-во:

Нека $\alpha \in Ord(L)$

$\exists \beta \in L\ (\{ab\}^*)$ : $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n$

$\beta = a_1 b_1 \dots a_n b_n$

$\beta = (ab)^* \Rightarrow a_i = a$

$b_j = b$

$\alpha = \underbrace{a \dots a}_{n} \underbrace{b \dots b}_{n} = a^n b^n \in \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Нека $\alpha \in \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$(ab)^n \in L \quad (ab)^n = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n \in L$

$a_i = a, \ b_j = b$

Тогава $a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n = a^n b^n \in Ord(L)$

Ако $L$ - рег, то

**3.** $Part(L) = \{w_1.w_2.w_3 \mid w_1 w_2 \in L,\ w_2 \notin L\}$ рег?

Реш: $Part(L) = \underbrace{Suf(L)}_{\text{рег}} \circ \underbrace{\Sigma^*}_{\text{рег}} \Rightarrow$ рег

**4.** Деф. $\beta \prec \alpha \iff (\exists p \in \Sigma^+)[\beta.p = \alpha]$

"същински префикс"

Ако $L$ е рег, то
$Ext(L) = \{\alpha \in L \mid (\exists \beta \in L)[\beta \prec \alpha]\}$ рег.?

Реш: Разгл. думи от вида

$\alpha: \boxed{\beta \in L}\boxed{p \in \Sigma^+}$ $\quad \alpha \in Ext(L)$

$Ext(L) = L \cap (L.\Sigma^+)$ ⇧ пробвайте да го докажете

Втори начин: Конструираме автомат
$A\langle \Sigma, Q, s, \delta, F\rangle$ за $L$

$A_E$ : $s_E = \langle s, 0\rangle$

$Q_E = Q \times \{0,1\}$

$F_E = F \times \{1\}$

доразвийте идеята сами

за $\forall p \in Q$: $\delta_E(\langle p,1\rangle, c) = \langle \delta(p,c), 1\rangle$
ако $p \in F$: $\delta_E(\langle p,0\rangle, c) = \langle \delta(p,c), 1\rangle$
ако $p \notin F$: $\delta_E(\langle p,0\rangle, c) = \langle \delta(p,c), 0\rangle$

# Още задачи с конструкции върху автомати

1. Прегледайте $L = \{a_1 b_1 \ldots a_n b_n \mid a_1 \ldots a_n \in L_1 \ \& \ b_1 \ldots b_n \in L_2\}$ (задача от предно упражнение)

2. ДСД, че ако $L$ - рег., то

$L' = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha\alpha \in L\}$ също е рег

I начин?

Д-во: Нека $A = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ - ДКА за $L$ и $Q = \{q_1 \ldots q_n\}$, и $q_1 = s$

Конструираме автомат $A' = \langle \Sigma, Q', s', \delta', F' \rangle$ за $L'$:

* $Q' = Q^n$
* $s' = \langle q_1, \ldots, q_n \rangle$
* $\delta'(\langle p_1 \ldots, p_n \rangle, c) = \langle \delta(p_1, c), \ldots, \delta(p_n, c) \rangle$

**

* $F' = \{\langle p_1 \ldots, p_n \rangle \in Q' \mid (\exists i \in \{1 \ldots n\})(p_1 = q_i \ \& \ p_i \in F)\}$

Ще док., че

$\delta'^*(\langle p_1 \ldots, p_n \rangle, \alpha) = \langle \delta^*(p_1, \alpha) \ldots, \delta^*(p_n, \alpha) \rangle$ * с индукция по $|\alpha|$: Тук сте вие :)

Тогава $\alpha \in L(A') \Leftrightarrow \delta'(\underbrace{\langle q_1 \ldots q_n \rangle}_{s'}, \alpha) \in F' \overset{*}{\Leftrightarrow}$ $\Leftrightarrow \langle \delta^*(q_1, \alpha), \ldots, \delta^*(q_n, \alpha) \rangle \in F'$

(**) $\Leftrightarrow (\exists i \in \{1..n\})(\delta^*(\underbrace{s, \alpha}_{q_1}) = q_j \ \& \ \delta^*(q_j, \alpha) \in F)$

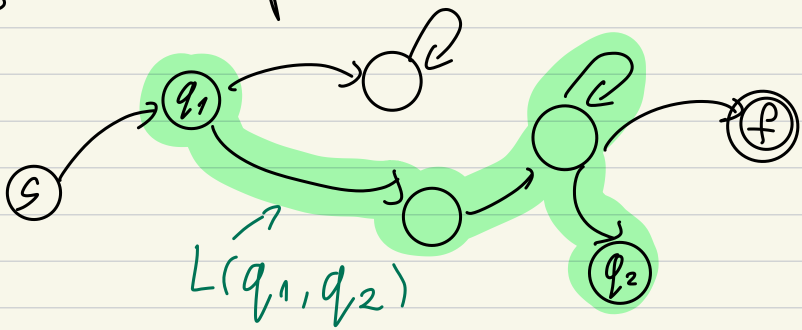
$\Leftrightarrow \delta^*(s, \alpha\alpha) \in F \Leftrightarrow \alpha\alpha \in L(A) = L$

## II начин

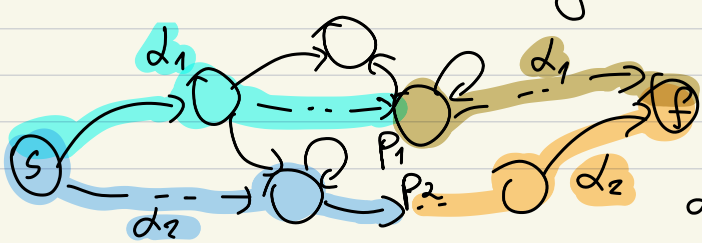
---

Дефинираме $L(q_1, q_2) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_1, \alpha) = q_2\}$

Идея: За задачи, в които работим с цели "парчета" от думите в езика (а и не само) можем да разглеждаме какъв език ни генерира пътя от дадено състояние до друго (цялото "парче")




И така, за тази задача ни интересуват тези думи от дадено разцепване на две (на пътя от началното до финалното), такива че са еднакви (думите)




тук например $L(s, p_1) \cap L(p_1, f)$ ни генерира думата $\alpha_1$, която $\in L'$ т.к. $\alpha_1\alpha_1 \in L$

и формално:

---

$$\rho \in L' \iff \exists p \in Q : \delta^*(s,\rho) = p \ \&\ \delta^*(p,\rho) \in F$$

$$\iff \exists p \in Q : \rho \in L(s,p) \ \&\ \rho \in L(p,f) \in F$$

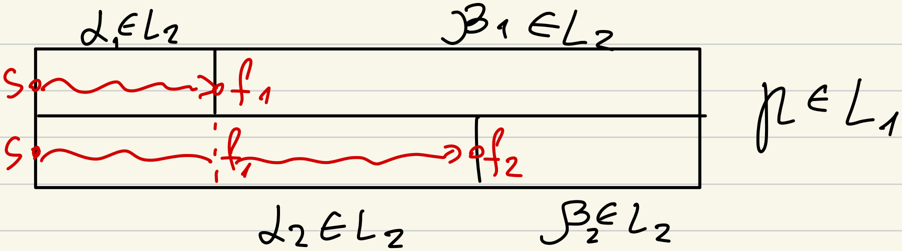
$$\iff \rho \in \bigcup_{p \in Q} L(s,p) \cap L(p,f)$$

⌂ ДСД, че $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha\alpha.\alpha. \in L\}$ е рег.

3. Нека $L_1$ и $L_2$ - рег. ДСД, че

$$L = \{\rho \in L_1 \mid \rho = \alpha_1\beta_1,\ \rho = \alpha_2\beta_2,\ \alpha_1 \neq \alpha_2,\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in L_2\} \text{ е рег.}$$

Реш: Искаме само думите от $L_1$, за които:




$$L' = L_1 \cap \left[ \bigcup_{f_1, f_2 \in F} (L(s,f_1) \cap L_2).(L(f_1,f_2) \setminus \{\varepsilon\} . L_2) \right]$$

Да, изглежда ужасно, но нека разглеждаме частите стъпка по стъпка

$L_1 \cap$ *нещо* частта е ясна, искаме думи от $L_1$, но с някакво условие

*нещо*: искаме думите от $L_1$, които минават през поне две финални състояния по пътя си, за да можем да създадем желаната $\beta$ по поне два различни начина

от тук идва идеята за $L(s, f_1)$.*нещо2*

*нещо 2*: вече сме минали през едно финално съст. по пътя си, сега искаме второ, естествено, пътят започва от $f_1$ (там сме завършили предишния)

искаме той да продължи до следващо финално $f_2$, като махаме $\{\varepsilon\}$, просто за да нямаме съвпадение на две едни и същи финални

Така получихме $L(f_1, f_2) \setminus \{\varepsilon\}$

И сега, добавяме остатъка да бъде някаква дума от $L_2$ (т.е. $\beta_1, \beta_2$) и цялото нещо пресичаме с $L_2$ (за да $\alpha_1, \alpha_2 \in L_2$)

Сега докажете $L = L'$ (и ако имам грешка, тъкмо ще я откриете)

4. $Cyc(L) = \{\alpha.\beta \mid \beta.\alpha \in L\}$ е рег.

Реш: $\gamma \in Cyc(L) \Leftrightarrow \gamma = \alpha.\beta \ \& \ \beta.\alpha \in L$

$\Leftrightarrow \exists p \in Q: \delta^*(s, \beta) = p \ \& \ \delta^*(p, \alpha) = f \in F$

$\Leftrightarrow \exists p \in Q: \beta \in L(s, p) \ \& \ \alpha \in L(p, f)$

$$\Leftrightarrow \gamma \in \bigcup_{\substack{p \in Q \\ f \in F}} L(p, f).L(s, p)$$

5. Док, че ако $L$ - рег., то

$L' = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha\alpha^{rev} \in L\}$ е рег.

Hint: знаем, че rev запазва рег.

6. Док, че ако $L$ - рег., то

$ChangeSomeLetters(L) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid (\exists \beta \in L)(|\beta| = |\alpha|)\}$

Д-во: Нека $A = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ е ДКА за $L$

Строим $A'$ за $ChangeSomeLetters(L)$

$A' = \langle \Sigma, Q, I, \overset{\text{НКА}}{\Delta}, F \rangle$

$I = \{s\}$

$\Delta(p, c) = \{\delta(p, a), \delta(p, b)\}, p \in Q, c \in \Sigma$

Докажете, че $\Delta^*(S, \alpha) = \{\delta^*(S, \beta) \mid \beta \in \Sigma^* \ \& \ |\beta| = |\alpha|\}$

Така получаваме

$\alpha \in L(A') \Leftrightarrow \Delta^*(S, \alpha) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$(\exists \beta \in \Sigma^{|\alpha|})(\delta^*(S, \beta) \in F) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists \beta \in \Sigma^{|\alpha|})(\beta \in L) \Leftrightarrow \alpha \in ChangeSomeLetters(L)$

**Доказване на рег. с индукция по построението на езика**

**1** Док, че $Pref(L)$ е рег.

Д-во: индукция по дефо на рег. езици:

База: $\left.\begin{array}{l} * \ Pref(\emptyset) = \emptyset \\ * \ Pref(\{\varepsilon\}) = \{\varepsilon\} \\ * \ Pref(\{c\}) = \{\varepsilon, c\} \end{array}\right\}$ рег.

И.Х: Нека $L_1, L_2$ - рег

И.С: $Pref(L_1 \cup L_2) = Pref(L_1) \cup Pref(L_2)$

Д-во: за вас

$Pref(L_1 . L_2) = Pref(L_1) \cup L_1 . Pref(L_2)$

Д-во: Нека $\alpha \in Pref(L_1 . L_2)$

Тогава $\exists \beta: \ \alpha\beta \in L_1 . L_2$

| | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| I | $w_1 \in L$ | $w_2 \in L_2$ |
| II | $w_1 \in L_1$ | $w_2 \in L_2$ |

Нека $\alpha\beta = w_1 w_2 \in L_1 . L_2$

$w_1 \in L_1, \ w_2 \in L_2$

1сл. $|w_1| \leq |\alpha|$

Тогава $\alpha = w_1 w_2' \quad \beta = w_2'' \quad , w_2 = w_2' w_2''$

Тогава $w_2' \in Pref(L_2)$ и $\alpha \in L_1 . Pref(L_2)$

2сл. $|w_1| > |\alpha|$

Тогава $\alpha = w_1', \ \beta = w_1'' w_2 \ , \ w_1 = w_1' w_1''$ и

сл. $w' = \alpha \in Pref(L_1)$

Нека сега $\alpha \in Pref(L_1) \cup L_1 . Pref(L_2)$

1сл.) $\alpha \in Pref(L_1), \ \exists \beta : \alpha\beta \in L_1$

Тогава $\forall \gamma \in L_2 : \alpha\beta\gamma \in L_1 . L_2$

$\Rightarrow \alpha \in Pref(L_1 . L_2)$

2сл.) $\alpha \in L_1 . Pref(L_2) \Rightarrow \exists \gamma : \alpha\gamma \in L_1 . L_2$

$\Rightarrow \alpha \in Pref(L_1 . L_2)$

$Pref(L_1^*) = L_1^* . Pref(L_1^*)$

Нека $\alpha \in L_1^* . Pref(L_1)$

$\alpha = \gamma_1 \dots \gamma_n \cdot \beta$, където $\gamma_i \in L_1$, $\beta \in Pref(L_1)$

$\Rightarrow \exists \rho \in \Sigma^* : \beta\rho \in L_1$

$\Rightarrow \alpha\rho \in L_1^*$ $\left(\alpha\rho = \underbrace{\gamma_1}_{\in L} \dots \underbrace{\gamma_n}_{\in L}\underbrace{\beta\rho}_{\in L}\right)$

$\Rightarrow \alpha \in Pref(L_1^*)$

Нека $\alpha \in Pref(L_1^*)$

$\alpha = \gamma_1 \dots \gamma_n \beta$, $\exists \rho \in \Sigma^* : \alpha\rho \in L_1^*$

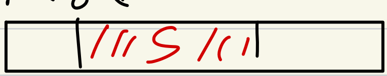
$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\gamma_1}_{\in L_1} \dots \underbrace{\gamma_n}_{\in L_1}}_{\in L_1^*}\underbrace{\beta\rho}_{\in L_1} \in L_1^* \Rightarrow \gamma_1 \dots \gamma_n \beta \in L_1^* . Pref(L_1)$

Прегледайте записките от упражнения за този вид задачи и пробвайте:

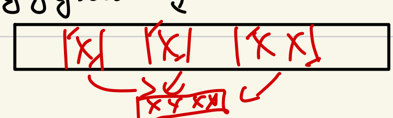
2. $Sub(L) = \{\alpha \mid \exists \beta \in L : \alpha$ е поддума на $\beta\}$

поддума: $\beta = a_1 a_2 \dots a_n$
$\alpha = a_{i_1} \dots a_{i_k}$
$1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$

подниз?



поддума?



# Хомоморфизми

Деф/ Нека $\varphi: \Sigma^* \to \Sigma^*$ удовл. ↑ хомоморфизъм (ХММ)

$\varphi(\alpha . \beta) = \varphi(\alpha) . \varphi(\beta)$

$\alpha = a_1 \dots a_n$, $\varphi(\alpha) = \varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)$, $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$

Нека $\varphi$ - ХММ

① Ако $L$ е рег, то $\varphi[L]$ е рег:

образ: $\varphi[L] = \{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in L\}$

$\varphi[L_1 \cup L_2] = \varphi[L_1] \cup \varphi[L_2]$

$\varphi[\underset{\downarrow \alpha}{L_1} . \underset{\downarrow \beta}{L_2}] = \varphi[L_1] . \varphi[L_2]$

$\varphi(\alpha . \beta) = \varphi(\alpha) . \varphi(\beta)$

$\varphi[L_1^*] = (\varphi[L_1])^*$

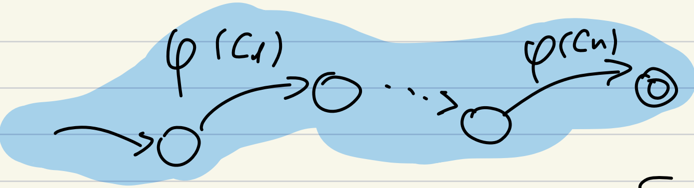
② Ако $L$ е рег, то $\underbrace{\varphi^{-1}[L]}_{\text{праобраз на } L \text{ при } \varphi}$ е рег

$\varphi^{-1}[L] = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \varphi(\alpha) \in L\}$

вход: $\boxed{c_1 \mid c_2 \mid \dots}$ $\beta$

? $\varphi(\beta) \in L = \varphi(c_1) \dots \varphi(c_n) \in L$

$A$ за $L$:




$A_{-1}: Q_{-1} = Q$

$F_{-1} = F$

$s_{-1} = s$

$\delta_{-1}(p, c) = \delta^*(p, \varphi(c))$

$\boxed{\text{Тв}}$ $\delta^*_{-1}(s, \alpha) = \delta^*(s, \varphi(\alpha))$

**Приложение**

$L_1 = \{a\}^*$ – рег. , $L_2 = \{a\}^* . \{b\}^*$

$\varphi(a) = aa$

$\varphi[L_1] = \{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in L\} = \{\varphi(a^n) \mid \alpha \in L\} =$

$= \{a^{2n} \mid \alpha \in L\}$

$\varphi(a) = bb$ , $\varphi(b) = a$

$\varphi[L_2] = \{b^{2n} a^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

---

1. Рег ли е $L = \{a^{3n} b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ? , $L_1 = \{a^n b^n\}$

$\varphi(a) = a^3$ , $\varphi(b) = b^2 \Rightarrow \varphi[L_1] \stackrel{!}{=} L$

$\varphi^{-1}(L_3) = \{\alpha \mid \varphi(\alpha) \in L_3\} = \{\alpha \mid \varphi(\alpha) = a^{3n} b^{2n}\} =$

$= \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

допускаме, че $L_3$ е рег, тогава $\varphi_i^{-1}[L_3]$ е рег, т.е. $L_1$ е рег ↯

2. Нека $L$ - р.е., да се док, че
$L' = \{\beta \mid \exists \gamma \in \Sigma^* : |\beta| = |\gamma| \ \& \ \beta\gamma \in L\}$
Нека $h(a) = h(b) = \{a, b\}$ - хомоморфизъм
Тогава $\beta \in L' \Leftrightarrow$ има състояние $p \in Q$
т.че $\beta \in L(s, p) \ \& \ \beta \in h(L(p, f))$

$\Leftrightarrow \beta \in \bigcup_{\substack{p \in Q \\ f \in F}} L(s, p) \cap h(L(p, f))$

Друг тип задача

1. Нека $\Sigma = \{0, 1\}$ и нека за $w \in \Sigma^*$, $w = w_1 \dots w_n$
дефинираме $\overline{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot 2^{i-1}$

ДСД, че $L = \{w \in \Sigma^* \mid \overline{w} \% 4 = 0\}$ е рег

Реш: Имаме, че $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \% 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\exists k \in \mathbb{N}$, $n = k * 4$

В двоичен запис, ако $w = w_1 w_2 \dots w_n$ и
$w_n = 0$, $\overline{w} \% 2 = 0$, ако $w_n = w_{n-1} = 0$, то
$w_n \% = 4$, оттук

$L = \{w \in \Sigma^* \mid \overline{w} \% 4 = 0\} = \Sigma^* . \{00\} \cup \{\varepsilon\}$

$\Rightarrow L$ е рег.

Нерегулярни езици – прегледайте записките от упражнение, и не забравяйте, че има няколко начина за доказване на нерег.