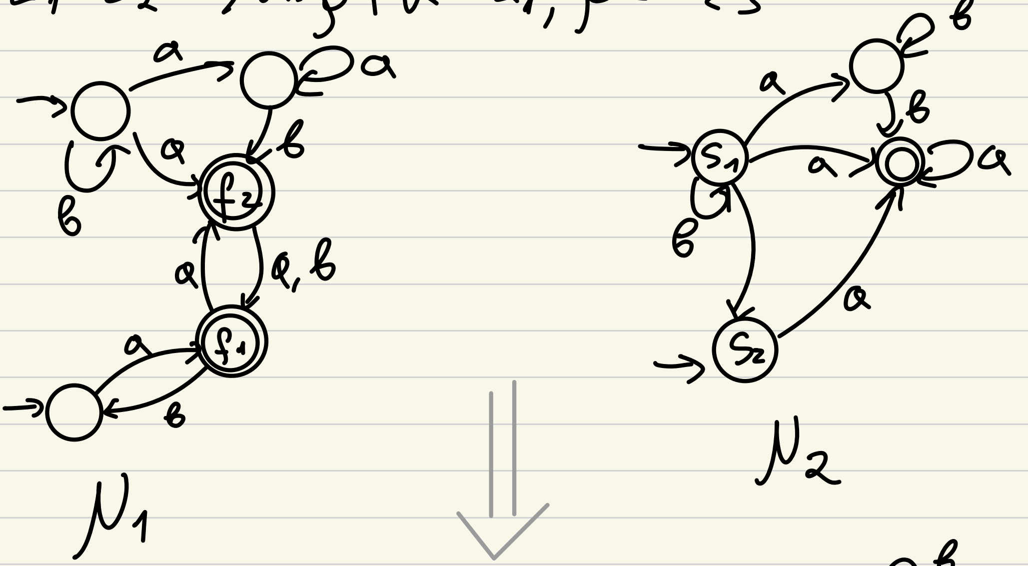
~Недетерминирани автомати~

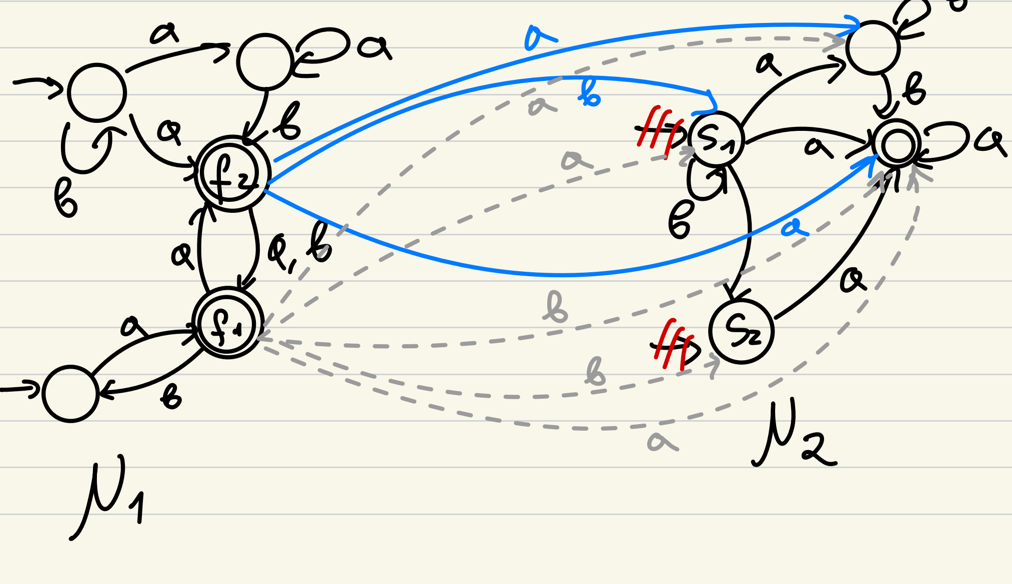
За език L: има дет. автомат $\mathcal{A}$: $L(\mathcal{A}) = L$

$\Updownarrow$

има недет. автомат $\mathcal{N}$: $L(\mathcal{N}) = L$

$L_1 \cdot L_2 = \{\alpha . \beta \mid \alpha \in L_1, \beta \in L_2\}$





Нека $N_1 = \langle \Sigma, Q_1, I_1, \Delta_1, F_1 \rangle$

$N_2 = \langle \Sigma, Q_2, I_2, \Delta_2, F_2 \rangle$

Строим автомат за $L(N_1) \cdot L(N_2)$

$Q = Q_1 \cup Q_2$

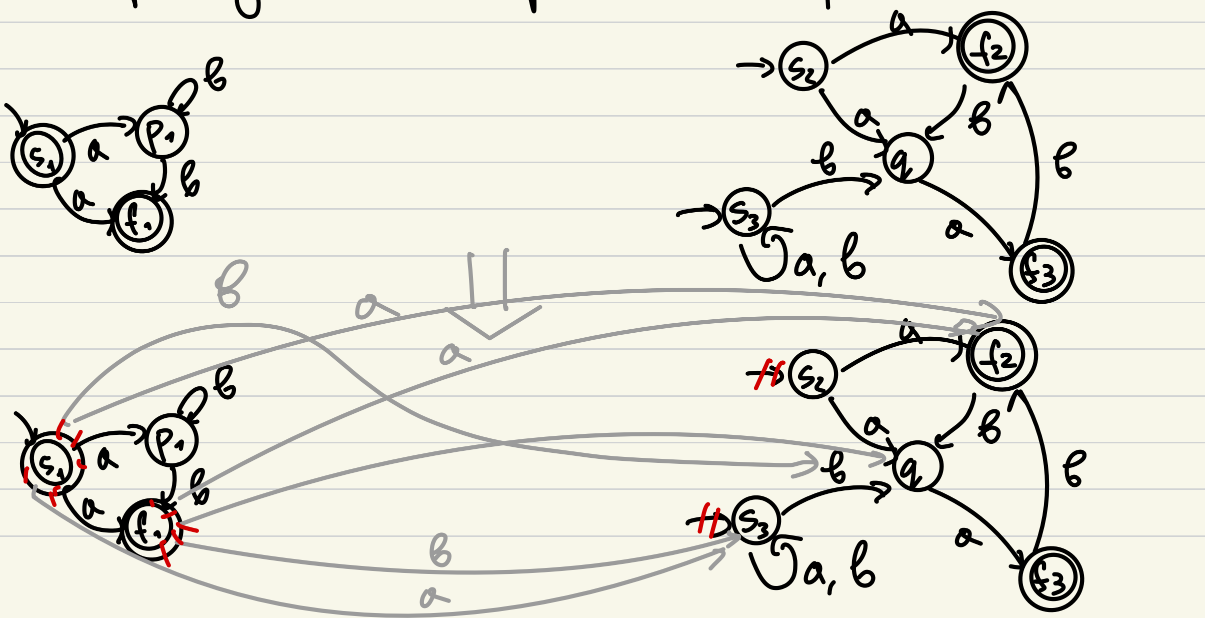
$I = I_1$

$$\Delta(p,c) = \begin{cases} \Delta_2(p,c) & , p \in Q_2 \\ \Delta_1(p,c) & , p \in Q_1 \text{ и } p \notin F_1 \\ \Delta_1(p,c) \cup \bigcup\limits_{s \notin I_2} \Delta_2(s,c) & , p \in Q_1 \text{ и } p \in F_1 \end{cases}$$

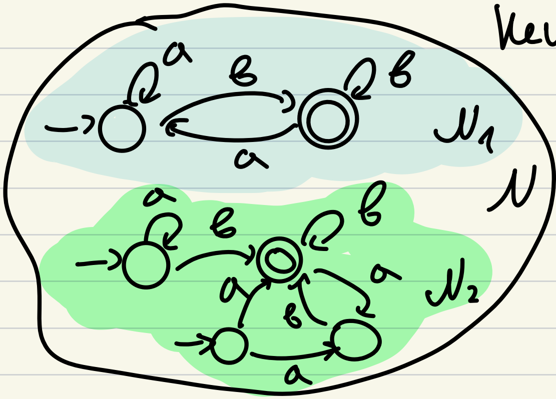
$$F = \begin{cases} F_2 & , I_2 \cap F_2 = \emptyset \\ F_1 \cup F_2 & , I_2 \cap F_2 \neq \emptyset \end{cases} *$$

$\varepsilon \in L(N) \iff I \cap \emptyset \neq \emptyset$

На всяко финално състояние на N_1 добавяме същите преходи като тези на началните състояния на N_2, т.е. ако $f \in F_1$ и $s \in I_2$ има стрелка $s \xrightarrow{c} p$, добавяме стрелка $f \xrightarrow{c} p$



$L = L_1 \cup L_2$



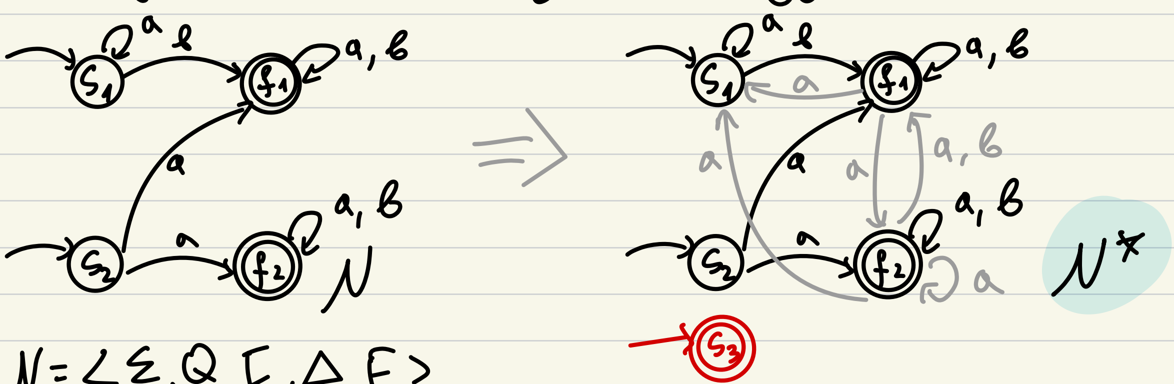
Нека $N_1 = \langle \Sigma, Q_1, I_1, \Delta_1, F_1 \rangle$
$N_2 = \langle \Sigma, Q_2, I_2, \Delta_2, F_2 \rangle$

$\Rightarrow N = \langle \Sigma, Q_1 \cup Q_2, I_1 \cup I_2, \Delta_1 \cup \Delta_2, F_1 \cup F_2 \rangle$

!Трябва да преименуваме състоянията!

$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n \qquad L^n = \begin{cases} L^0 = \{\varepsilon\} \\ L^{n+1} = L^n . L = L . L^n \end{cases}$

L^* съдържа всички думи, които могат да се получат чрез конкатенация на краен брой незадължително различни думи



$N = \langle \Sigma, Q, I, \Delta, F \rangle$

Строим N^*

$Q_* = Q \cup \{s_*\}$ където $s_* \notin Q$ $\quad \Delta_*(p,c) = \begin{cases} \Delta(p,c), & p \notin F \\ \Delta(p,c) \cup \bigcup_{s \in I} \Delta(s,c), & p \in F \end{cases}$

s_3 - начално и финално състояние, разпознаващо ε

~Регулярни изрази и езици~

Деф) Регулярен израз и съответен регулярен език:

* ε е регулярен израз с език $L = \{\varepsilon\}$
* $\emptyset$ е регулярен израз с език $\emptyset$
* за всяка буква $\sigma \in \Sigma$
  σ е регулярен израз с език $\{\sigma\}$

Нека r_1 и r_2 са регулярни изрази със съотв. езици L_1 и L_2, тогава:

- $r_1 + r_2$ е регулярен израз с език $L_1 \cup L_2$
- $r_1 . r_2$ е регулярен израз с език $L_1 . L_2$
- r_1^* е регулярен израз с език L_1^*

Пример:

$r = (a+b)^* . a . b . a^* + b^*$ израз

$(\{a\} \cup \{b\})^* . \{a\} . \{b\} . \{a\}^* \cup \{b\}^*$ език

вход: ρ

изход: дали ρ отговаря на шаблона r

Регулярен израз ⇝ Регулярен език

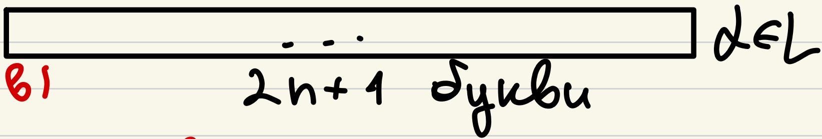
Регулярен израз	Регулярен език
$\varnothing$	$\varnothing$
ε	$\{\varepsilon\}$
σ за $\sigma \in \Sigma$	$\{\sigma\}$
ако r_1 то r_2	L_1 L_2
$r_1 + r_2$	обединение $L_1 \cup L_2$
$r_1 \cdot r_2$	конкатенация $L_1 \cdot L_2$
r_1^*	звезда L_1^*

! липсват сечение и допълнение !

по-много неудобни за регулярни изрази

L е автоматен $\iff$ L е регулярен

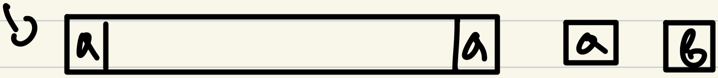
* $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha| \equiv 1 \mod 2\}$



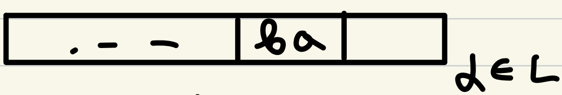
* 1 буква - $(a+b)$
* 2 букви - $(a+b)(a+b)$
* 2n букви - $[(a+b)(a+b)]^*$

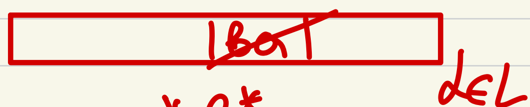
* $\alpha = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha$ започва и завършва с еднаква буква$\}$

$a.(a+b)^*.a + b.(a+b)^*.b + a + b$



* $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha$ не съдържа $ba\}$

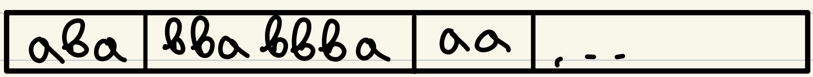




$(a+b)^*.ba.(a+b)^*$

a^*b^*

* $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha|_a \equiv 0 \mod 2\}$



Разделяме на блокчета $b^*ab^*ab^*$, които съдържат точно 2 'a'

$(b^*ab^*ab^*)^* + b^*$ → може да не съдържа 'a'

+ $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha|_a \equiv 0 \mod 2$ и $|\alpha|_b \equiv 1 \mod 2\}$

ДСД, че регулярен

$$L = \underbrace{\{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha|_a \equiv 0 \mod 2\}}_{\text{рег. израз } r_1} \cap \underbrace{\{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha|_b \equiv 1 \mod 2\}}_{\text{рег израз } r_2}$$

Зад. Да се докаже, че ако L е регулярен, то и езикът $ins(L) = \{\alpha a \beta \mid \alpha\beta \in L\}$ също е регулярен

Д-во: Индукция по построението на L, че $ins(L)$ е регулярен

База: + $ins(\emptyset) = \emptyset$ - регулярен език

+ $ins(\{\varepsilon\}) = \varepsilon.a.\varepsilon = a$ - рег. език

* $ins(\{\sigma\}) \left| \begin{array}{l} = \varepsilon.a.\sigma \Rightarrow \{a\sigma, \sigma a\} \text{- р.е.} \\ = \sigma.a.\varepsilon \end{array} \right.$

И.Х: Нека знаем, че Тв. е в сила за L_1 и L_2
(т.е. $ins(L_1)$ и $ins(L_2)$)

И.С: Предполагаме, че $ins(L_1 \cup L_2)$, $ins(L_1.L_2)$, $ins(L^*)$ са регулярни

+ $ins(L_1 \cup L_2) = \{\alpha a \beta \mid \alpha\beta \in L_1 \cup L_2\} =$

$= \{\alpha a \beta \mid \alpha\beta \in L_1$ или $\alpha\beta \in L_2\} = \{\alpha a \beta \mid \alpha\beta \in L_1\} \cup \{\alpha a \beta \in L_2\}$

$= ins(L_1) \cup ins(L_2)$

По И.Х. езиците $ins(L_1)$ и $ins(L_2)$ са регулярни и понеже '$\cup$' запазва регулярността, то $ins(L_1) \cup ins(L_2) = ins(L_1 \cup L_2)$ е регулярен

$* \; ins(L_1 . L_2) = ins(L_1) . L_2 + L_1 . ins(L_2)$

$\in L_1$	$\in L_2$
α	

$L = L_1 . L_2$

Д-во: 1) $ins(L_1.L_2) \subseteq ins(L_1).L_2 \cup L_1.ins(L_2)$

Нека $\gamma \in ins(L_1.L_2)$

Тогава $\gamma = \alpha a \beta$, където $\alpha . \beta = L_1 . L_2$

Тогава $\alpha . \beta = w_1 w_2$, където $w_1 \in L_1$ и $w_2 \in L_2$

разделение a

α	β
$w_1 \in L_1$	$w' \; w_2 \in L_2 \; w''$

a

I случай $|w_1| \le |\alpha|$

$\alpha = w_1 . w_2' \quad \beta = w_2''$

γ:

α		a	β
w_1	w_2'	a	w_2''

$\underbrace{w_2' . w_2'' = w_2 \in L_2}$

$\underbrace{w_2' a w_2'' \in ins(L_2)}$

$w_1 w_2' a w_2'' = \alpha a \beta \in L_1 . ins(L_2)$

II случай $|w_1| > \alpha$

γ:

α	a	β	
w_1'		w_1''	w_2

$w_1' w_1'' \in L_1 \rightsquigarrow w_1' a w_1'' \in ins(L_1)$

$w_2 \in L_2 \longrightarrow w_1' a w_1''.w_2 \in ins(L_1).L_2$

$\alpha a \beta = p$

2) $ins(L_1).L_2 \cup L_1.ins(L_2) \subseteq ins(L_1.L_2)$

Нека $p \in ins(L_1).L_2 \cup L_1.ins(L_2)$

Тогава 1) $p \in ins(L_1).L_2$, тогава има $w_1 \in ins(L_1)$

$w_2 \in L_2$, $p = w_1.w_2$

$w_1 = \alpha a \beta$, където $\alpha\beta \in L_1$

Тогава $p = w_1 w_2 = \alpha a \beta . w_2$

$\alpha\beta \in L_1$, $w_2 \in L_2$ $\quad \alpha(\beta w_2) \in L_1.L_2$

$\alpha a(\beta w_2) \in ins(L_1.L_2)$

2) - симетрично

3) $ins(L^*)$

$$\underbrace{\boxed{\in L}\boxed{\in L}\boxed{\in L}\boxed{\;..\;}}_{L^*}\underbrace{\boxed{\overset{a}{\in L}}}_{ins(L)}\boxed{..}\underbrace{\boxed{\in L}}_{L^*}$$

$ins(L^*) = L^*.ins(L).L^*$

Д-во: 1) Нека $p \in ins(L^*)$

Тогава $p = \alpha a \beta$, $\alpha\beta \in L^*$ $\alpha\beta = p_1 p_2 .. p_n$, където $p_i \in L$

Нека $\alpha = p_1 p_2 .. p_{i+1}'$

$\beta = p_{i+1}'' ... p_n$

$\rho = \alpha a \beta = \underbrace{(\rho_1 \cdots \rho_i)}_{\in L^*} \underbrace{\rho_{i+1}' a \rho_{i+1}''}_{\in ins(L)} \underbrace{(\rho_{i+2} \cdots \rho_n)}_{\in L^*}$

$\rho_{i+1}' \rho_{i+1}'' = \rho_{i+1} \in L \Rightarrow \rho_{i+1}' a \rho_{i+1}'' \in ins(L)$

$\rho \in L^* . ins(L) . L^*$

Зад. Нека L е регулярен език

Док. че $L^{rev} = \{\alpha^{rev} \mid \alpha \in L\}$ е р.е.

(α^{rev} = α записана наобратно)

Д-во: Индукция по постр. на L

База: * $L = \emptyset$ $L^{rev} = \emptyset$ ✓

* $L = \{\varepsilon\}$ $L^{rev} = \{\varepsilon\}$ ✓

* $L = \{\sigma\}$ $L^{rev} = \{\sigma\}$ ✓

И.Х. Нека знаем, че езиците L_1^{rev} и L_2^{rev} са регулярни

И.С: 1) $L = L_1 \cup L_2$

$L_{rev} = \{\alpha^{rev} \mid \alpha \in L\} = \{\alpha^{rev} \mid \alpha \in L_1 \cup L_2\} =$

$= \{\alpha^{rev} \mid \alpha \in L_1\} \cup \{\alpha^{rev} \mid \alpha \in L_2\} = L_1^{rev} \cup L_2^{rev}$

2) $L = L_1 . L_2 = L_2^{rev} . L_1^{rev}$

$(L_1 . L_2)^{rev}$

$$\overbrace{a_1 a_2 \ldots a_n}^{\in L_1}\,\big|\,\overbrace{b_1 b_2 \ldots b_k}^{\in L_2} \quad p \in L_1.L_2$$

$$\underbrace{b_k b_{k-1} \ldots b_1}_{\in L_2^{rev}}\,\big|\,\underbrace{a_n a_{n-1} \ldots a_1}_{\in L_1^{rev}} \in (L_1.L_2)^{rev}$$

* Нека $p \in (L_1 . L_2)^{rev}$ $\quad w = \alpha\beta$ ($\alpha \in L_1$, $\beta \in L_2$)

Тогава има $w \in L_1 . L_2$ т,че $p = w^{rev}$

$(\alpha.\beta)^{rev} = \beta^{rev}.\alpha^{rev} \in L_2^{rev}.L_1^{rev} = w^{rev} = p$

$\beta \in L_2 \to \beta^{rev} \in L_2^{rev}$

$\alpha \in L_1 \to \alpha^{rev} \in L_1^{rev}$ $\quad \beta^{rev}\alpha^{rev} \in L \Rightarrow p \in L^{rev}$

* Нека $p \in L_2^{rev} . L_1^{rev}$

Тогава $p = \alpha.\beta$, където $\alpha \in L_2^{rev}$, $\beta \in L_1^{rev}$

Тогава $\alpha^{rev} \in L_2$, $\beta^{rev} \in L_1$

Тогава $p = \alpha.\beta = (\underbrace{\beta^{rev}}_{\in L_1} . \underbrace{\alpha^{rev}}_{\in L_2})^{rev}$

$\beta^{rev}.\alpha^{rev} \in L \Rightarrow p \in L^{rev}$

* $L = ((L_1)^*)^{rev}$

$$\overbrace{a_1 a_n}^{\in L_1}\,\big|\,\overbrace{b_1 b_n}^{\in L_1}\,\big|\,\ldots\,\big|\,\overbrace{c_1 c_n}^{\in L_1}$$

$$\xrightarrow{rev}$$

$$\underbrace{c_n c_1}_{\in L_1^{rev}}\,\big|\,\ldots\,\big|\,\underbrace{b_n b_1}_{\in L}\,\big|\,\underbrace{a_n a_1}_{\in L_1^{rev}}$$

$(L_1^*)^{rev} = (L_1^{rev})^*$

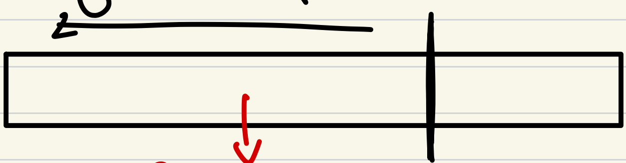
$(L_1^*)^{rev} = \{w^{rev} \mid w \in L_1^*\} = \{(\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n)^{rev} \mid \alpha_i \in L_1\}$

$= \{\alpha_n^{rev} \cdot \alpha_{n-1}^{rev} \cdot \ldots \alpha_1^{rev} \mid \alpha_i \in L_1\} =$

$= \{\alpha_n^{rev} \cdot \ldots \alpha_1^{rev} \mid \alpha_i \in L^{rev}\} = (L_1^{rev})^*$

Зад. Нека L е регулярен език.

Тогава $Pref(L) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid (\exists \beta \in \Sigma^*)(\alpha\beta \in L)\}$ също е р.е.



$\in Pref(L)$

$Pref(\emptyset) = \emptyset$

$\beta \in L$ $Pref(\{\varepsilon\}) = \{\varepsilon\}$

$Pref(\{\sigma\}) = \{\varepsilon, \sigma\}$

$Pref(L_1 \cup L_2) = Pref(L_1) \cup Pref(L_2)$

$Pref(L_1 . L_2) = Pref(L_1) \cup L_1 . Pref(L_2)$

$Pref(L^*) = L^* . Pref(L)$

за вкъщи: Д-во: ...

Зад. Да се док, че ако L е регулярен, то и езикът

$sub(L) = \{\alpha \mid$ има дума $\beta \in L$, такава че α е поддума на $\beta\}$

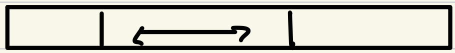
също е регулярен

$\beta = a_1 a_2 \dots a_n$

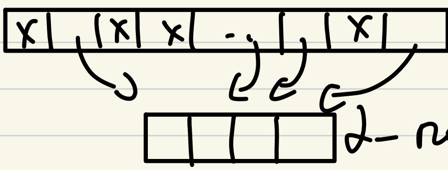
$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$

където $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$

подниз s



поддума



α – поддума на β

Д-во: индукция по построението на L, че $sub(L)$ е р.е.

База:
* $L = \emptyset \rightsquigarrow sub(L) = \emptyset$
* $L = \varepsilon \longrightarrow sub(L) = \{\varepsilon\}$
* $L = \{\sigma\} \rightsquigarrow sub(L) = \{\varepsilon, \sigma\}$

крайни $\Rightarrow$ рег.

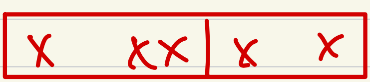
И.Х: Нека $sub(L_1)$ и $sub(L_2)$ са регулярни

И.С: * $sub(L_1 \cup L_2) = sub(L_1) \cup sub(L_2)$

↳ д-во...

* $sub(L_1 . L_2) = sub(L_1) . sub(L_2)$..

↳ д-во



$\in L_1$ $\in L_2$

$\beta \in L_1 . L_2$

* $sub(L_1^*)$?