# ~ Pumping Lemma за граматики ~

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е безк.

Тогава $\exists n \in \mathbb{N}$ такова, че $\forall \alpha \in L$

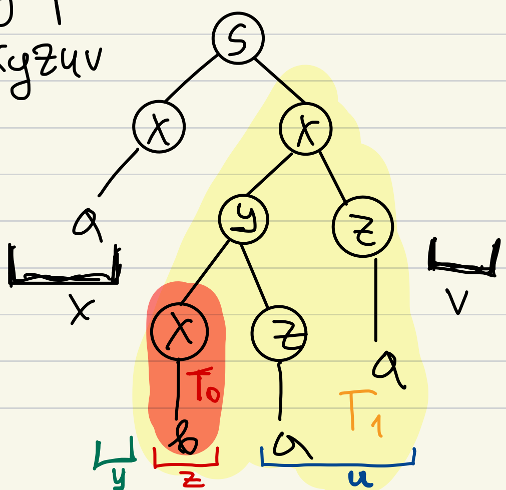
$|\alpha| \geq n$, $\exists x, y, z, u, v \in \Sigma^*$:

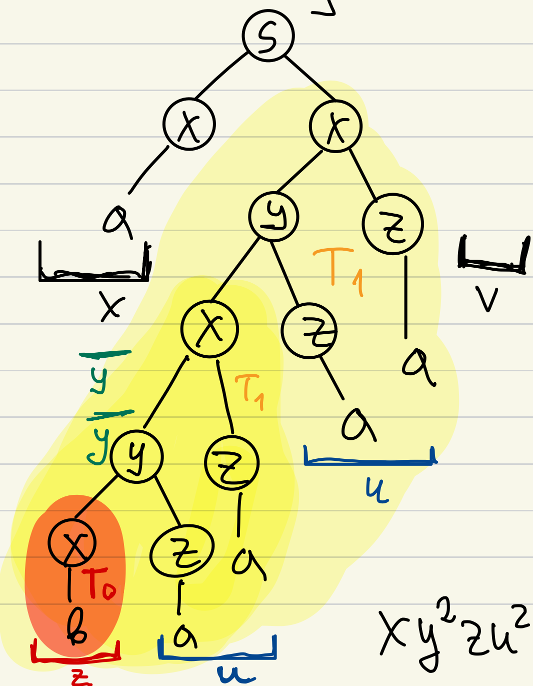
1) $\alpha = xyzuv$
2) $|yzu| \leq n$
3) $|yu| > 0$
4) $(\forall k \in \mathbb{N})[x y^k z u^k v \in L]$

Пример:

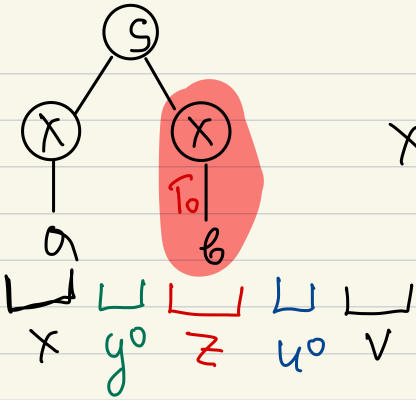
дърво T:

xyzuv




$xy^2zu^2v$



$xy^0zu^0v$

Ако $L$ е безк $\Rightarrow$ $PL$ е изп.

Ако $PL$ не е изп $\Rightarrow$ $L$ не е безк.

(Достатъчно, а не необходимо усл.!)

$\neg PL$: Ако:

$\forall p \geq 1 \quad \exists \alpha \in L,\ |\alpha| \geq p,\ \forall x, y, z, u, v \in \Sigma^*$:

1) $\alpha = xyzuv$

2) $|yzu| \leq p$

3) $|yu| \geq 1$

4) $\exists i \in \mathbb{N}: \ xy^izu^iv \notin L$

Зад. Док, че $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безк.

Д-во:

1) Нека $p$ - произв. $(\geq 1)$

2) Избираме $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$, $\alpha = a^p b^p c^p$

3) $\alpha = xyzuv$, $|yu| \geq 1$, $|yuz| \leq p$

Разглеждаме случаи, породени от "плъзгането" на $yzu$

I сл. $yu = a^k$, $1 \leq k \leq p$, тогава

$xy^0zu^0v = a^{p-k} b^p c^p \notin L$

II, III сл. $yu = b^k$, $c^k$ - аналогично

IV сл. $yu = a^{t_1} b^{t_2}$, $t_1, t_2 > 0$ (поне едното)

Тогава

$xy^0zu^0v = a^{p-t_1} b^{p-t_2} c^p \notin L$

V сл. $yu = b^{t_1} c^{t_2}$ - аналог.

$\Rightarrow$ за всяко разбиване

$\exists i \in \mathbb{N} : xy^i z u^i v \notin L$

$\Rightarrow$ L не безк.

Друг начин:

Т.к. искаме $|yu| \geq 1$, $|yzu| \leq p$,

тогава 1) $|yu|_a = 0$ или 2) $|yu|_c = 0$

Тогава: 1) $xy^0 z u^0 v = a^{p-|yu|_a} b^{p-|yu|_b} c^p$

но $|yu| \geq 1 \Rightarrow \notin L$ ...

Зад. 2 $L = \{a^n b^k c^t \mid n < k < t\}$.

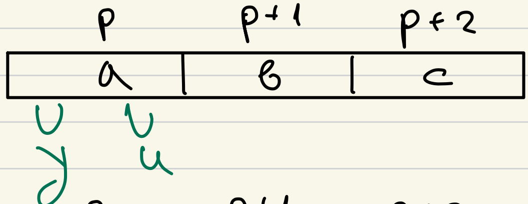
ДСД че не е безк.

1) $p \geq 1$

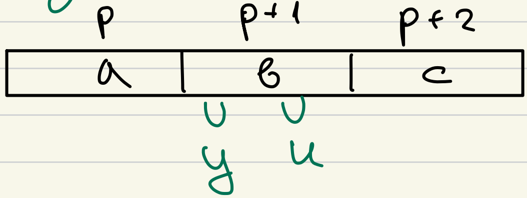
2) $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$, $\alpha = a^p b^{p+1} c^{p+2}$

3) $\alpha = xyzuv$ $\quad |yu| \geq 1$, $|yzu| \leq p$

4)

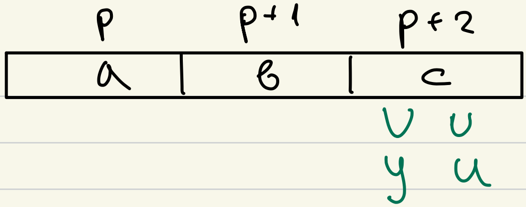
I 


$i = 2$ $\quad |\alpha|_a \geq |\alpha|_b$

II 

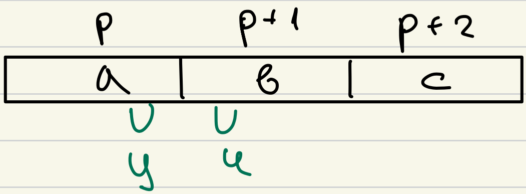

$\forall i \neq 1$

III



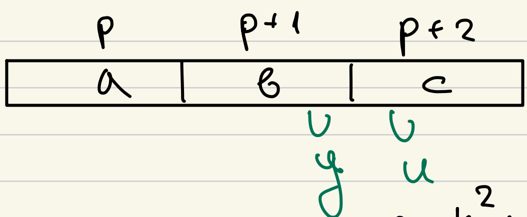
$j = 0$

IV



$\forall j \geq 1$

V



$j = 0$

Зад. Док, че $L = \{ b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \}$ не е безк.

1) Нека $p$ − произв. $(\geq 1)$

2) Избираме $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$, $\alpha = b^{p^2}$

3) $\alpha = xyzuv$, $|yu| \geq 1$, $|yuz| \leq p$

Нека $|yu| = k$, тогава $yu = b^k$ $(1 \leq k \leq p)$

$xy^2zu^2v = b^{n^2+k}$, $n^2+k$ не е точен кв.:

$$n^2 < n^2 + k < \underbrace{n^2 + 2n + 1}_{(n+1)^2}$$

$\Rightarrow b^{n^2+k} \notin L \Rightarrow$ не е безк.

**Теорема на Parikh:**
Нека L - унарен език.
L е регулярен $\Leftrightarrow$ L е безконтекстен

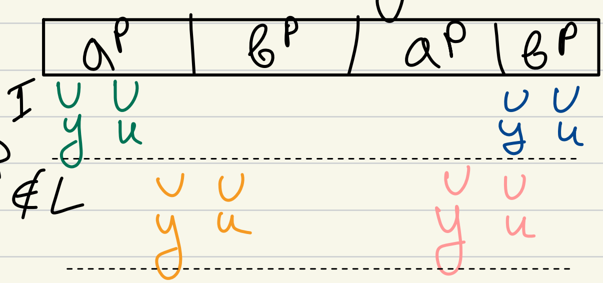
Зад. Док, че $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ не е безк

1) Нека $p$ - произв. $(\geq 1)$

2) Избираме $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$, $\alpha = a^p b^p a^p b^p$

3) $\alpha = xyzuv$, $|yu| \geq 1$, $|yuz| \leq p$

Разглеждаме разбивания: $x\ y\ z\ u\ v$



I сл. $xyzu = a^k$

$xy^0zu^0v = a^{p-k} b^p a^p b^p \notin L$

Аналог. за ост. еднобуквени са:

II сл. $y = a^k$, $u = b^s$

$xy^2zu^2v = a^{p+k} b^{p+s} a^p b^p \notin L$

III сл. $y = b^k$, $u = a^s$

$xy^2zu^2v = a^p b^{p+k} a^{p+s} b^p \notin L$ ...

$\Rightarrow$ L не е безк

Зад.

Да се док., че $L = \{a^n b^k c^{nk} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ не е безк.

1), 2) $\alpha = a^p b^p c^{p^2}$

I сл. $xyzu = a^k$

$xy^0zu^0v = a^{p-|yu|} b^p c^{p^2} \notin L$

(аналог. за $yzu = b^k$, $|yu| = s$.)

II сл. $y = a^k$, $u = b^s$

$xy^2zu^2v = a^{p+k} b^{p+s} c^{p^2} \notin L$

III сл. $y = b^k$, $z = c^s$

$xy^2zu^2v = a^p b^{p+k} c^{p^2+s}$, и имаме

$p(p+k) = p^2 + kp$

1 сл: $k = 0$: $0 \leq s \leq p$ и $p(p+k) = p^2 < p^2 + s$

2 сл: $k > 0$: $0 \leq s \leq p$ и

$p(p+k) = p^2 + kp \geq p^2 + p > p^2 + s$

Зад. $L = \{w_1 \# w_2 \mid w_1$ е инфикс на $w_2\}$

- $a^p \# a^p$ ✗ $\qquad a \ldots \underset{\overline{y}}{a} \underset{\overline{z}}{\#} \underset{\overline{u}}{a} \ldots a$
- $a^p \# b^p a^p$ ✗ $\qquad a \ldots a \# \underset{\overline{y}}{b} \underset{\overline{z}}{\ldots} \underset{\overline{u}}{b} a \ldots a$
- $a^p b^p \# a^p b^p$ ✓

↳ не забравяме, че можем да помпим езика и с нулева степен!

За упражнение: ДСД, че следните езици не са безконтекстни:

$L = \{a^n b^{kn} \mid k, n > 0\}$

$L = \{a^p \mid p$ - просто$\}$

$L = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n > 0\}$