Лема за покачването

Нека L е регулярен език. Тогава

$(\exists p \geq 1)$

$(\forall \alpha \in L, |\alpha| \geq p)$

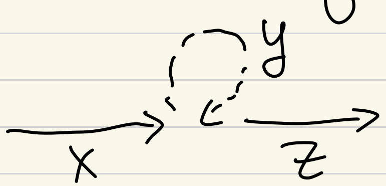
$(\exists x, y, z \in \Sigma^*, xyz = \alpha, |xy| \leq p, |y| \geq 1)$

$(\forall i \in \mathbb{N})[xy^iz \in L]$

Интуиция: Полагаме $p = |Q|$ и $|\alpha| \geq p$

$\Rightarrow$ някое състояние се повтаря при образуването на думата

$\Rightarrow$ имаме цикъл в автомата



можем да повтаряме този цикъл

$\Rightarrow xy^iz \in L$

Контрапозиция на лемата за покачването

Ако е изпълнено, че

$(\forall p \geq 1)$

$(\exists \alpha \in L, |\alpha| \geq p)$

$(\forall x, y, z \in \Sigma^*, xyz = \alpha, |xy| \leq p, |y| \geq 1$

$(\exists i \in \mathbb{N})[xy^iz \notin L]$

то L не е регулярен

|Достатъчно условие за нерегулярност|

Зад. Да се док, че $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен

Реш: "Играем игра" срещу лемата, наш ред е на кванторa $\exists$

Избираме думата α:

Нека $\alpha = a^p b^p = xyz$

$|xy| \leq p \Rightarrow xy = a^k, k \leq p$

Тогава $y = a^s, s \leq k$

Тогава $xy^2z = a^{p+s} b^s \notin L \Rightarrow L$ не е рег.

Зад. $L = \{a^n b^m \mid n < 3m\}$

Реш: Нека $\alpha = a^{3p} b^{p+1}$

Тогава $\alpha = xyz$, $|xy| \leq p \Rightarrow xy = a^k$
$k \leq p$

$|y| \geq 1 \Rightarrow y = a^s \quad s \leq k$

Тогава $xy^4z = a^{3p+3s} b^{p+1}$

и $n = 3p+3s$, $m = p+1$, $3p+3s < 3p+3$ ↯
$s \geq 1$

Зад. $L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$

Нека $\alpha = a^{p+1} b^p$

$|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$ => $y = a^s$, $s > 0$

xy^2z ? Не работи

$p!$ – удобен "трик" да постигнем желано конкретно число

$\alpha = a^p b^{p+p!}$

$y = a^s$

$xy^iz = a^{p+(i-1)s} b^{p+p!}$

$(i-1)s = p!$ => $i = \frac{p!}{s} + 1$

$xy^{\frac{p!}{s}+1}z = a^{p+p!} b^{p+p!} \notin L$ ↯

=> L не е рег.

Зад. (писмен 2022) Вярно ли е, че за всеки език $L \subseteq \Sigma^*$ е изп.:

Ако L не е регулярен, то L'

$L' = \{u \in \Sigma^* \mid (\exists v \in \Sigma^*)(u.v \in L)\}$ не е регулярен?

Реш: Разсъждаваме върху нерегулярните езици, които знаем

$a^n b^n$? неговите префикси също не са регулярни

L_{eq}? неговите префикси са произволни думи от $\{a, b\}^*$ $(L'_{eq} = \Sigma^*)$

$\Rightarrow$ L' щеe регулярен $\Rightarrow$ не е вярно

Зад. К1 2021

$L = \{w \in \Sigma^* \mid \underbrace{|w| \text{ нечет}}_{L_1} \Rightarrow (\forall u \in \Sigma^*) \underbrace{(w \neq uuu)}_{L_2}\}$

идея: $L = L_1 \cup \overline{L_2}$

$L_2 = \{w \mid \exists u \in \Sigma^* : w = uuu\}$

доказваме, че не е рег...

ПИ 2021

Зад. Док, че $L = \{a^n b^m c^k \mid n > m$, ако k-нечетно и $n > 2m$, ако k е четно$\}$

$$L = \{a^n b^m c^k \mid \underbrace{k\%2=1}_{p_1} \Rightarrow \underbrace{n>m}_{q_1} \; \& \; \underbrace{k\%2=0}_{p_2} \Rightarrow \underbrace{n>2m}_{q_2}\}$$

$$(p_1 \Rightarrow q_1) \& (p_2 \Rightarrow q_2) \equiv (\neg p_1 \vee q_1) \& (\neg p_2 \vee q_2)$$

$$\overline{L} = \{a^n b^m c^k \mid \underbrace{(p_1 \& \neg q_1)}_{L_1} \vee \underbrace{(p_2 \vee \neg q_2)}_{L_2}\}$$

$$\overline{L} = L_1 \cup L_2$$

$$L_1 = \{a^n b^m c^k \mid \underbrace{k\%2=1}_{L_1'} \; \& \; \underbrace{n>m}_{L_1''}\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^k \mid \underline{k\%2=0} \; \& \; \underline{n>2m}\}$$

За тези знаем, че запазват регулярност

За тези знаем, че не

$L_1 = L_1' \cap L_1''$ → достатъчно е да докажем нерегулярност за него

Зад. К1 2023, Рег ли е? Ако L рег:
$Ord(L) = \{a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_n \mid a_1 b_1 \ldots a_n b_n \in L\}$

Търсим контрапример: $L = \{(a.b)^*\}$

Тв] За всеки рег. език L езиците $Pref(L)$, $Suff(L)$, $Infix(L)$ също са автоматни

Д-во: Pref:

I) $A\langle\Sigma, Q\ s\ \delta, F\rangle$ - автомат за L

директно дефинираме автомата такъв, че да има път от всяко начално до финално

такъв, че $(\forall q\in Q)(\exists \rho\in\Sigma^*)(\delta^*(q,\rho)\in F)$

Тогава за $A_{pref}\langle\Sigma, Q\ s, \delta, Q\rangle$: $L(A_{pref}) = Pref(L)$

показваме '$\subseteq$' и '$\supseteq$'

II) $A\langle\Sigma, Q, s, \delta, F\rangle$ - автомат за L

$A^{pref}\langle\Sigma, Q, s, \delta, F^{pref}\rangle$

$F^{pref} = \{q\in Q \mid \underbrace{(\exists \rho\in\Sigma^*)(\delta^*(q,\rho)\in F)}_{\exists \text{път от } q \text{ до } f}\}$

Тогава:

$\beta\in Pref(L) \Leftrightarrow (\exists\rho\in\Sigma^*)(\beta\rho\in L) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\rho\in\Sigma^*)(\delta^*(s,\beta\rho)\in F)$

$\Leftrightarrow (\exists\rho\in\Sigma^*)(\delta^*(\delta^*(s,\beta),\rho))\in F)$

$\Leftrightarrow \delta^*(s,\beta)\in F' \Leftrightarrow \beta\in L(A')$

Suff:

$\exists$ п-ят от s до даденото състояние

$S' = \{ \delta^*(s, \beta) \mid \beta \in \Sigma^* \}$

$\mathcal{A}' \langle \Sigma, Q, S', \delta, F \rangle$

$\rho \in Suff(L) \Leftrightarrow (\exists \beta \in \Sigma^*)(\beta\rho \in L)$

$\Leftrightarrow (\exists \beta \in \Sigma^*)(\delta^*(s, \beta\rho) \in F)$

$\Leftrightarrow (\exists \beta \in \Sigma^*)(\delta^*(\delta^*(s, \beta), \rho) \in F)$

$\Leftrightarrow (\exists q \in S')(\delta^*(q, \rho) \in F)$

$\Leftrightarrow \rho \in L(\langle \Sigma, Q, q, \delta, F \rangle)$

Infix(L) $= Pref(Suff(L))$

Зад. Нека L - р.е., да се док, че $L_{1/2} = \{ \alpha \mid \alpha\alpha \in L \}$ е р.е.

Деф. $L(q_1, q_2) = \{ \alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_1, \alpha) = q_2 \}$

Използваме по следния начин:

$\alpha \in L_{1/2} \Leftrightarrow$ има състояние $p \in Q$ т, че $\alpha \in L(s, p)$ & $\alpha \in L(p, f)$, $f \in F$

$\Leftrightarrow \alpha \in \bigcup_{p \in Q, f \in F} L(s, p) \cap L(p, f)$

Работим само с "езиците", които се генерират от дадено състояние до друго