~ Нормална форма на Чомски ~

"хубав вид" на граматики, подобно на детерминиран автомат (тотален, минимален..)

Деф | Една безк. граматика е в НФЧ ако всичките ѝ правила са от вида
$G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$

* $A \to BC$, $A, B, C \in V$
* $A \to a$, $A \in V$, $a \in \Sigma$

Привеждане в НФЧ:

1. Премахване на дългите правила
за $X \to X_1 \dots X_k$, добавяме правила $Y_1, \dots, Y_{k-2}$, и заменяме горното правило с: $X \to X_1 Y_1$, $Y_1 \to X_2 Y_2$ $\dots$, $Y_{k-2} \to X_{k-1} X_k$

2. Премахване на ε-правилата

$Eps(0) = \emptyset$

$Eps(n+1) = \{A \in V \mid (\exists \beta \in Eps(n)^*)(A \to \beta)\}$

т.е. в $Eps(1)$ ще бъдат променливите, които генерират ε, после в $Eps(2)$ тези, които ген. тях и т.н.

Крайно мн-во: $Eps(n) \subseteq Eps(n+1)$

Ако $X \to X_1 \dots X_n$, $X_i \in \Sigma$, добавяме $X \to Y_1 \dots Y_n$:

* ако $X_i \notin Eps$, то $Y_i = X_i$
* ако $X_i \in Eps$, то $Y_i = X_i$ или $Y_i = \varepsilon$

3. Премахване на преименуващите правила:

$A \to B$ - отново рекурсивно

* Премахване на правила, генериращи повече от една буква:

$A \to bc \rightsquigarrow A \to BC$

$B \to b$

$C \to c$

! НФЧ премахва ε от езика, но можем да го добавим с преход $S \to \varepsilon$

Зад. Док., че ако L - безконтекстен, то L^{rev} - безконтекстен

Реш: Нека $G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$ е гр. в НФЧ за L. G_{rev} за L^{rev} ще има:

ако
* $A \to_G a$, то $A \to_{G_{rev}} a$

* $A \to_G BC$, то $A \to_{G_{rev}} CB$

от $(\beta_1\beta_2)^{rev} = \beta_2^{rev}\beta_1^{rev}$ се показва,
че $A \overset{n}{\lhd}_G \alpha \iff A \overset{n}{\lhd}_{G_{rev}} \alpha^{rev}$

$\Rightarrow$) * ако $A \overset{0}{\lhd}_G \alpha$, то $\alpha = A \notin \Sigma^*$ ✓

* ако $A \overset{n+1}{\lhd}_G \alpha$, то сме приложили правило:

1 сл.: $A \to_G a$:

$\alpha = a$, $n = 0$ $\quad A \to_{G_{rev}} a \quad A \overset{1}{\lhd}_{G_{rev}} a = \alpha$

2 сл. $A \to_G BC$, тогава
$B \overset{n_1}{\lhd}_G \alpha_1$, $C \overset{n_2}{\lhd}_G \alpha_2$ $\quad \alpha = \alpha_1\alpha_2$

$n = \max\{n_1, n_2\}$

Тогава от и.х. $B \overset{n_1}{\lhd}_{G_{rev}} \alpha_1^{rev}$, $C_1 \lhd_{G_{rev}} \alpha_2^{rev}$
от правилото
и $A \to_{G_{rev}} CB$ имаме $A \overset{n+1}{\lhd} \alpha_2^{rev}\alpha_1^{rev} = (\alpha_1\alpha_2)^{rev}$

Зад. Да се док, че
ако L - безконтекстен, то $Pref(L)$ - безк.

Д-во: Нека $G\langle \Sigma, V, S, R \rangle$ е гр. в НФЧ
(без променливи, които не генерират нищо от Σ^*)

Строим граматика $G_{pref} = \langle \Sigma, V_{pref}, S_{pref}, R_{pref} \rangle$
за $pref(L)$

* $V_{pref} = V \cup V'$, $V' = \{A' \mid A \in V\}$, $V \cap V' = \emptyset$
* Запазваме старите правила
* Ако $A \to BC \in R$, то $A' \to BC' \mid B' \in R_{pref}$
* Ако $A \to a \in R$, то $A' \to a \mid \varepsilon \in R_{pref}$

За $Pref(L) \subseteq L(G_{pref})$, ще пок, че, ако
$\forall A \in V$, $\alpha \in \Sigma^*$:

$$A \overset{*}{\lhd}_G \alpha, \text{ то } A' \lhd_{G_{pref}} \beta, \ \forall \beta \preceq_{pref} \alpha$$

Индукция по големината на входа:
ако $A \overset{0}{\lhd} \alpha$, $\alpha = A \notin \Sigma^*$

ако $A \overset{n+1}{\lhd} \alpha$, то сме приложили някое
правило:

1 сл. $A \to_G BC$. Тогава $B \overset{n_1}{\lhd} \beta_1$, $C \overset{n_2}{\lhd} \beta_2$

и $n = \max(n_1, n_2)$; $\alpha = \beta_1 \beta_2$

Нека $\rho \preceq_{pref} \alpha$. Тогава от св-вата на Pref (от упражненията за регулярни езици):

* $\rho \preceq_{pref} \beta_1$. Тогава от И.Х. $B' \overset{*}{\lhd} \rho$, понеже имаме правило $A' \to B'$, $A' \overset{*}{\lhd} \rho$

* $\rho = \beta_1 \lambda$ $\lambda \preceq_{pref} \beta_2$
Тогава от И.Х. $C \overset{*}{\lhd} \lambda$, понеже имаме правило $A' \to B C'$, и $A' \overset{*}{\lhd} \beta_1 \lambda = \rho$

2 сл. $A \to a$

Тогава $\alpha = a$ и всичките префикси на a са a и ε, и т.к.
$A' \to a \mid \varepsilon$, имаме $A' \overset{*}{\lhd} a$, $A' \overset{*}{\lhd} \varepsilon$

За $L(G_{pref}) \subseteq Pref(L)$ ще док, че $\forall A \in V$, $\forall \alpha \in \Sigma^*$

ако $A' \overset{*}{\lhd}_{G_{pref}'} \alpha$, то $\exists \beta \in \Sigma^*$: $A \overset{*}{\lhd}_G \alpha\beta$, т.е.
$L_{G_{pref}}(A') \subseteq Pref(L_G(A))$

Д-во: инд. по големината на извода:

* ако $A' \overset{0}{\lhd} \alpha$, то $\alpha = A' \notin \Sigma^*$

* ако $A' \overset{n+1}{\lhd} \alpha$, то сме приложили правило:

1 сл. $A' \underset{G_{pref}}{\rightarrow} BC'$. Тогава $B \overset{n_1}{\lhd} \beta_1$, $C' \overset{n_2}{\lhd} \beta_2$

$n = \max(n_1, n_2)$ и $\alpha = \beta_1 \beta_2$

и от И.Х. $\exists \lambda \in \Sigma^*$: $C \overset{*}{\lhd}_G \beta_2 \lambda$, сл.

$A \rightarrow_G BC$, откъдето $A \overset{*}{\lhd} \beta_1 \beta_2 \lambda = \alpha \lambda$

2 сл. $A' \rightarrow B'$. Тогава $B' \overset{n}{\lhd} \alpha$ и от И.Х.

$\exists \beta_1 \in \Sigma^*$: $B \overset{*}{\lhd}_G \alpha \beta_1$, сл.

$A \rightarrow_G BC$ и $\exists \beta_2 \in \Sigma^*$: $C \overset{*}{\lhd}_G \beta_2$

Тогава $A \overset{*}{\lhd}_G \alpha \beta_1 \beta_2$

3 сл. $A' \rightarrow a$, тогава $A \rightarrow a$ и $A \overset{*}{\lhd}_G a = a\varepsilon$

4 сл. $A' \rightarrow \varepsilon$, тогава $A \rightarrow a$ и $A \overset{*}{\lhd}_G a = \varepsilon a$

Сл.

$Pref(L) = Pref(L(G)) = Pref(L_G(S)) = L_{G_{pref}}(S') = L(G_{pref})$

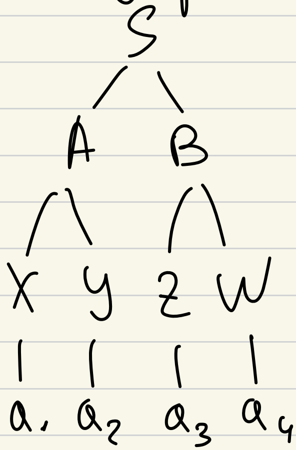
За упр: $Suff(L)$, $Infix(L)$ - безк.

Тв] За всеки безк.-ч езици L и рег. езици M, $L \cap M$ е безконтекстен

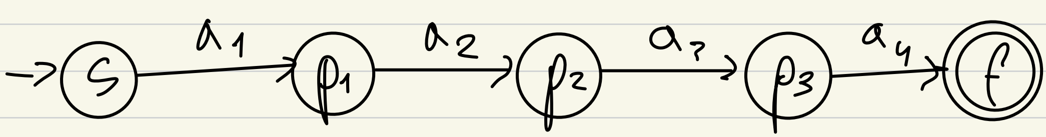
Д-во: Нека $G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$ е гр. в НФЧ за L и $A = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ е ДКА за M

Нека $\alpha = a_1 a_2 a_3 a_4 \in L \cap M$

+ за α има дърво на извод:

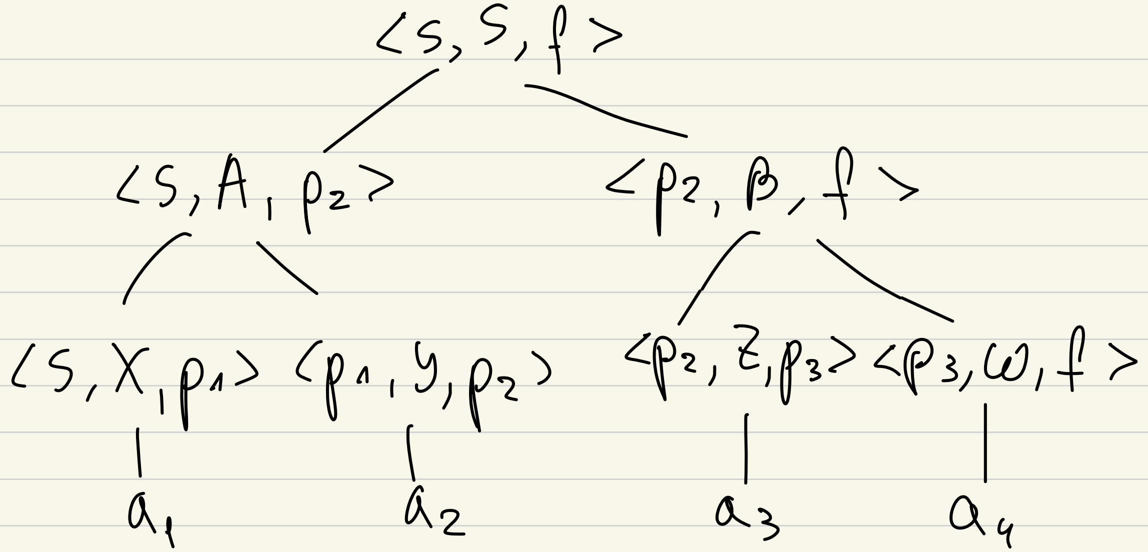


+ в A има път от s до $f \in F$:



(т.е. $\delta^*(s, \alpha) = f \in F$)

Ще кодираме информацията за автомата в дърветата на извод:



Новите пром. ще са от вида $\langle p, A, q\rangle$ и ще са т.че:

$A \overset{*}{\lhd} \alpha$, $\delta^*(p, \alpha) = q$

Формално, конструкцията има вида:

- $V' = (Q \times V \times Q) \cup \{S'\}$ $\quad S' \notin Q \times V \times Q$
- $\forall A \in V$, $p, q, r \in Q$ и $a \in \Sigma$, ако $A \to_G AB$, то $\langle p, A, q\rangle \to_{G'} \langle p, B, r\rangle\langle r, C, q\rangle$

Тук граматиката опитва да "познае" какъв път ще измине, думата в автомата генерирана от граматиката

* $\forall A \in V$, $p, q \in Q$, $a \in \Sigma$, ако $A \to_G a$, то $\langle p, A, q \rangle \to_{G'} a$

Тук ако граматиката е познала преходите на думата, която е решила да генерира

* за $\forall f \in F$, $S' \to_{G'} \langle s, S, f \rangle$

Сега трябва да пок. че $\forall A \in V$, $p, q \in Q$:

$L_{G'}(\langle p, A, q \rangle) = L_G(A) \cap \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(p, \alpha) = q\}$

$\downarrow$

$\underline{\text{Тв}}$ $\forall A \in V$, $\forall p, q \in Q$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \Sigma^*$:

$\langle p, A, q \rangle \overset{n}{\lhd}_{G'} \alpha \Leftrightarrow A \overset{n}{\lhd}_G \alpha \ \& \ \delta^*(p, \alpha) = q$

Д-во: индукция по n

* База: ✓
* И.С.: $\Rightarrow$) $\langle p, A, q \rangle \overset{n+1}{\lhd}_{G'} \alpha$, тогава:

1сл. $\langle p, A, q \rangle \to_{G'} a$, тогава $\alpha = a$

$\delta(p, a) = q$, $A \to_G a$ откъдето $A \overset{1}{\lhd} \alpha$

2 сл. $\langle p, a, q\rangle \to_{G'} \langle p, B, r\rangle\langle r, C, q\rangle$

Тогава $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma^*$ т.че

$\langle p, B, r\rangle \overset{n_1}{\lhd}_{G'} \alpha_1$ и

$\langle r, C, q\rangle \overset{n_2}{\lhd}_{G'} \alpha_2$, като $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ и

$n = \max(n_1, n_2)$ и $A \to BC$

От И.Х:

* $B \overset{n_1}{\lhd}_{G} \alpha_1$ и $\delta^*(p, \alpha_1) = r$
* $C \overset{n_2}{\lhd}_{G} \alpha_2$ и $\delta^*(p, \alpha_2) = q$

Сл. $A \overset{n+1}{\lhd}_{G} \alpha_1\alpha_2 = \alpha$ и $\delta^*(p, \alpha) = \delta^*(p, \alpha_1\alpha_2) =$

$= \delta^*(\delta^*(p, \alpha_1), \alpha_2) = q$

($\Leftarrow$) Нека $A \overset{n+1}{\lhd}_{G} \alpha$ и $\delta^*(p, \alpha) = q$

Тогава

1 сл. $A \to_G a$. Тогава $\alpha = a$ и понеже

$\delta^*(p, a) = q$, то $\langle p, A, q\rangle \to_{G'} a$, oтъдето

$\langle p, A, q\rangle \overset{1}{\lhd} \alpha$.

2 сл. $A \to BC$. Тогава $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma^*$ т.че

$B \overset{n_1}{\lhd}_G \alpha_1$ и $C \overset{n_2}{\lhd}_G \alpha_2$, като $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ и

$n = \max(n_1, n_2)$

Нека $r = \delta^*(p, \alpha_1)$

Очевидно $\delta^*(r, \alpha_2) = q$ и имаме

правилото $\langle p, A, q\rangle \to_{G'} \langle p, B, r\rangle \langle r, C, q\rangle$

от и.х. $\langle p, A, q\rangle \overset{n_1}{\lhd} \alpha_1$

$\langle r, C, q\rangle \overset{n_2}{\lhd} \alpha_2$ и сл.

$$\langle p, A, q\rangle \overset{n+1}{\lhd}_{G'} \alpha$$

$\alpha \in L(G') \iff \alpha \in L_{G'}(S') \iff \alpha \in \bigcup L_{G'}(\langle s, S, f\rangle)$

$\iff \alpha \in \bigcup_{f \in F} (L_G(S) \cap \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(s, \alpha) = f\})$

$\iff \alpha \in L(G) \cap \bigcup_{f \in F} \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(s, \alpha) = f\}$

$\iff \alpha \in L(G) \cap L(\mathcal{A}) \iff \alpha \in L \cap M$

<u>Сл.</u> | Ако $L \cap M$ не е безк., и M-рег, то L не е <u>безконтекстен</u>

Зад. Д-CD, че $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha|_a = |\alpha|_b = |\alpha|_c\}$ не е безконтекстен

Д-во: $L_0 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безк

но $L_0 = L \cap (\{a\}^* \{b\}^* \{c\}^*)$ ↯