Тв. Ако L_1 и L_2 - безконтекстни

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 \cup L_2 \\ L_1 . L_2 \\ L_1^* \end{array}\right\} \text{безконтекстни}$$

Сечението не запазва безконтекстност

Пример: $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ - безк.

$L_2 = \{a^k b^s c^s \mid s, k \in \mathbb{N}\}$ - безк.

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ - не е безк.

Аналогично, допълнението не запазва безконтекстност.

$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

Допускаме, че ако L_1 е безк., то $\overline{L_1}$ също е безк.

$\overline{L_1}$ и $\overline{L_2}$ са безк., $\cup$ запазва $\Rightarrow \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ безк.

От доп, че $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ - безк., но

$\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = L_1 \cap L_2 \Rightarrow L_1 \cap L_2$ - безк.

$\Rightarrow \cap$ запазва безконтекстност и

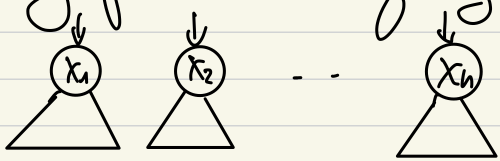
$\Rightarrow$ допълнението не запазва безк.

~ Дървета на извод ~

Нека $G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$ - безк. гр.
Тогава

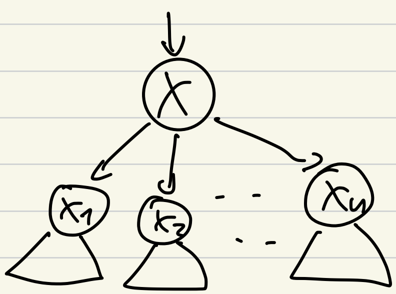
1) X е дърво на извод, $X \in \Sigma \cup V \cup \{\varepsilon\}$

2) Нека



са дървета на извод

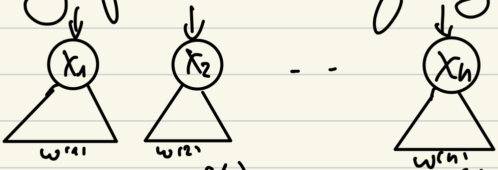
и $X \to X_1 X_2 \dots X_n \in R$, тогава



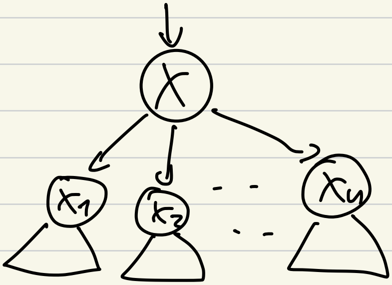
е дърво на извод в G

Дума на дърво на извод

1)  е дърво на извод, с дума $\underset{\sim}{x}$

2) Нека  са дървета на извод

с думи $w^{(1)} \dots w^{(n)}$, тогава



е дърво на извод с дума $w^{(1)}w^{(2)}\dots w^{(n)}$

Дърво на извод бележим с T, а думата му с word(T)

(думата е последователна конкатенация на листата на дървото)

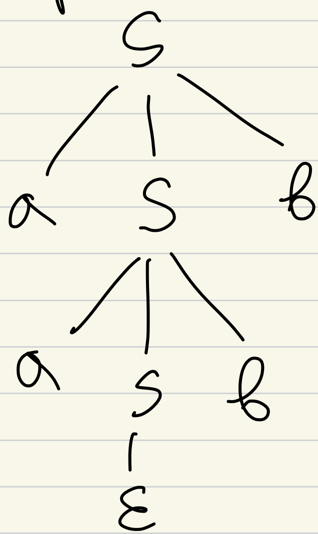
Дефинираме още

height(T) – височина на дървото

root(T) – коренът му

Пример: $G: S \to aSb \mid \varepsilon$

Примерно дърво на извод:



$word(T) = aabb$

$height(T) = 3$

$root(T) = S$

Тв] $X \overset{l}{\triangleleft} \alpha \iff$ има дърво на извод T, т.че $root(T) = X$, $height(T) = l$, $word(T) = \alpha$

Д-во: $\Rightarrow$) индукция по l

$\Leftarrow$) индукция по $height(T)$

Как да използваме за д-во на безк.:

Зад. Док, че $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е безк.

Д-во: постр. граматиката

$G: S \to aSb \mid \varepsilon$

Ще док, че $L(S) = L$:

1) $L \subseteq L(S)$ // $L(S)$ – езикът, "генериран" от променливата S, в случая началната $\Rightarrow L(S) = L(G)$

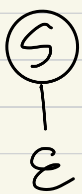
Индуктивно твърдение: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \Sigma^*$ $|\alpha| = n$:

· ако $\alpha \in L$, то $\alpha \in L(S)$

Индукция по n:

База: $|\alpha| = 0 \Rightarrow \alpha = \varepsilon \in L$

Разгл. дървото T:



$$\left.\begin{array}{l} root(T) = S \\ word(T) = \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon \in L(S)$$

И.Х: Нека $\forall k \leq n$: ако $|\alpha| = k$, $\alpha \in \Sigma^*$, то ако $\alpha \in L \Rightarrow \alpha \in L(S)$

И.С: Нека $\alpha \in \Sigma^*$ и $|\alpha| = k+1$, $\alpha \neq \varepsilon$

Нека $\alpha \in L$, тогава $\exists k \in \mathbb{N} : \alpha = a^k b^k$
$(k \neq 0)$

$\alpha = a^k b^k = a . a^{k-1} . b^{k-1} . b$

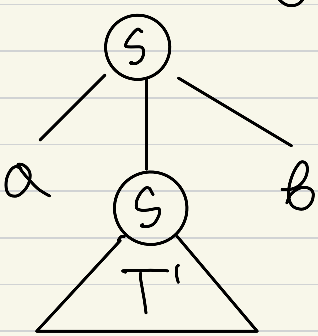
$w = a^{k-1} b^{k-1}$, $k-1 \in \mathbb{N}$,

тогава $|w| < |\alpha|$ и от

И.Х: т.к. $w \in L$, то $w \in L(S)$

Тогава има T' с $root(T') = S$,
$word(T') = w$

Строим дърво T:



Тогава $word(T) =$
$= a . word(T')\, b = awb = \alpha$

и т.к. $root(T) = S$

$\Rightarrow \alpha \in L(S)$

$\Rightarrow L \subseteq L(S)$

2) $L(G) \subseteq L$

Ще док. с индукция по height(T), че ($word(T) \in \Sigma^*$) ако

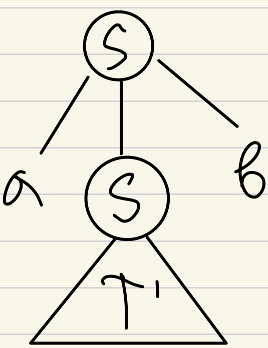
$root(T) = S$, то $word(T) \in L$

База: $height(T) = 0$ – ✓

И.Х: Нека е в сила за $height(T) \leq n$

И.С: $height(T) = n+1$ и $root(T) = S$

Тогава T има вида



където $height(T') = n$ и

от И.Х.: $word(T') \in L \Rightarrow$

$word(T') = a^n b^n$ и

$word(T) = a\, word(T')\, b =$

$= a^{n+1} b^{n+1} \in L$

$\Rightarrow L(G) \subseteq L$

$\Rightarrow L = L(G)$

2. Док, че $L' = \{a^n \# \alpha_1 \# \alpha_2 .. \# \alpha_n \mid n \in \mathbb{N} \ \& \ \alpha_i \in L\}$
където $L = \{\beta\beta^{rev} \mid \beta \in \{a,b\}^*\}$, е безконтекстен

Д-во: $S \to aS\#X \mid \varepsilon$
$X \to aXa \mid bXb \mid \varepsilon$ $\quad L_X = \{\beta\beta^{rev} \mid \beta \in \{a,b\}^*\}$

Ще док, че ① $L(S) = L'$ и ② $L(X) = L_X$

1) $L' \subseteq L(S)$

индукция по n: $\forall \alpha$ с $|\alpha| = n$: 1) ако $\alpha \in L'$, то $\alpha \in L(S)$
2) ако $\alpha \in L_X$, то $\alpha \in L(X)$

База: $n = 0 \leadsto \alpha = \varepsilon$

① $\varepsilon \in L'$, строим T: $\begin{array}{c} S \\ | \\ \varepsilon \end{array}$, тогава $\varepsilon \in L(S) \Rightarrow 1)$ ✓

② $\varepsilon = \varepsilon.\varepsilon^{rev} \in L_X$, строим T: $\begin{array}{c} X \\ | \\ \varepsilon \end{array}$, тогава $\varepsilon \in L(X) \Rightarrow 2)$ ✓

И.Х: Нека знаем, че ако $|\alpha| \leq n$, то
① ако $\alpha \in L'$, то $\alpha \in L(S)$
② ако $\alpha \in L_X$, то $\alpha \in L(X)$

И.С: Нека $|\alpha| = n+1$

② Нека $\alpha \in L_X$, тогава $\exists \beta \in \{a,b\}^* : \alpha = \beta\beta^{rev}$

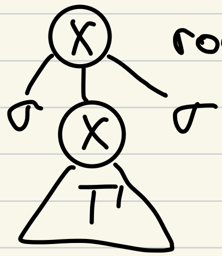
Т.к $|\alpha| = n+1$, $|\alpha| \neq 0$, $\alpha \neq \varepsilon$ и $\beta \neq \varepsilon$

Нека $\beta = \sigma.\omega$, $\sigma \in \{a,b\}$, $\omega \in \{a,b\}^*$

Тогава $\alpha = \sigma.\omega.\omega^{rev}\sigma$, $\omega.\omega^{rev} \in L_X$

$|ww^{rev}| < |\alpha|$, тогава от И.Х., $ww^{rev} \in L(X)$
има дърво T' : $root(T') = X$ и $word(T') = ww^{rev}$

строим дърво T :



$root(T) = X$ и
$word(T) = \sigma\, word(T')\, \sigma$
$= \sigma ww^{rev} \sigma = \alpha$
$\Rightarrow \alpha \in L(X)$

1. Нека $\alpha \in L'$, тогава $\exists k \in \mathbb{N}$ и думи $\beta_1, \ldots \beta_k$:
$\alpha = a^k \# \beta_1 \beta_1^{rev} \# \ldots \# \beta_k \beta_k^{rev}$

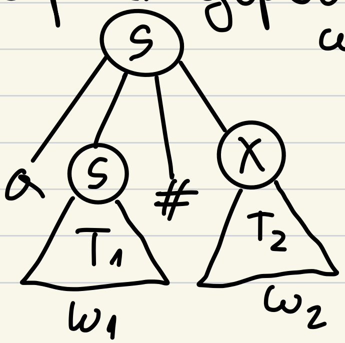
$\alpha \neq \varepsilon$, тогава $k \neq 0$

$$\alpha = a . \underbrace{a^{k-1} \# \beta_1 \beta_1^{rev} \# \ldots \# \beta_{k-1} \beta_{k-1}^{rev}}_{w_1} \# \underbrace{\beta_k \beta_k^{rev}}_{w_2}$$

* $|w_1| < |\alpha|$ и $w_1 \in L'$ и от И.Х. $w_1 \in L(S)$, т.е.
има дърво T_1 с $root(T_1) = S$ и $word(T_1) = w_1$

* $|w_2| < |\alpha|$ и $w_2 \in L_X$ и от И.Х. $w_2 \in L(X)$, т.е.
има дърво T_2 с $root(T_2) = X$ и $word(X) = w_2$

строим дърво T: $root(T) = S$



$word(T) = a.word(T_1).\#.word(T_2) =$
$= a.w_1.\#w_2 = \alpha$

$\Rightarrow \alpha \in L(S)$

2) $L(S) \subseteq L'$

Ще док. с индукция по $h(T)$, $word(T) \in \Sigma^*$, че ако:

① $root(T) = S$, то $word(T) \in L'$

② $root(T) = X$, то $word(T) \in L_X$

База: $h(T) = 0$ ①, и ② - изп.:
ако $word(T) = S \notin \Sigma^*$, то $\forall T$ с $h(T) = 0$ и $root(T) = S$ и $word(T) \in \Sigma^*$ е вярно, че $word(T) \in L_S$, аналог за ②

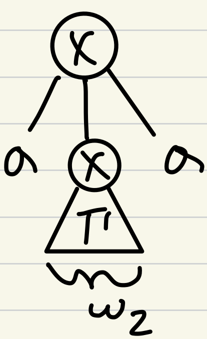
И.Х.: ако $h(T) \leq n$ то ① и ② - изп.

И.С.: $h(T) = n+1$

② кога $root(T) = X$

I сл. $X \to \varepsilon$ и $word(T) = \varepsilon = \varepsilon\varepsilon^{rev} \in L_X$

T: 

II сл. T:  и $word(T) = a.word(T')a$ $= aw_2a$

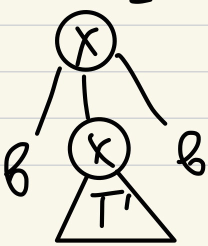
от И.Х.

$X \to aXa$

където $w_2 \in L_X$ от И.Х.

$w_2 = p.p^{rev}$, $p \in \Sigma^*$

$\Rightarrow a p p^{rev} a = (ap)(ap)^{rev} \in L_X$

III сл. T: 

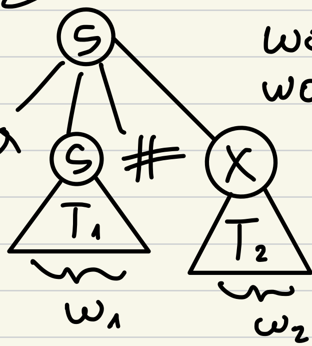
$X \to bXb$

- аналогично

① root(T) = S

I сл. T:  $\varepsilon \in L'$ (при $h(T) = 0$)

$S \to \varepsilon$

II сл. T: 

word(T_1) = $w_1 \in L'$ от И.Х.

word(T_2) = $w_2 \in L_X$ от И.Х.

$S \to aS\#X$

word(T) = $a\, w_1 \# w_2$

$w_1 = a^{k-1} \# p_1 p_1^{rev} \# \ldots \# p_{k-1} p_{k-1}^{rev}$

$w_2 = p_k p_k^{rev}$

$\Rightarrow$ word(T) = $a^k \# p_1 p_1^{rev} \# \ldots \# p_k p_k^{rev} \in L'$

За упражнение:

Да се док., че са безк.: $\Sigma = \{a, b\}$

$L = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geq |w|_b\}$

$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b + 1\}$

$L = \{a^n b^k c^k a^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

$L = \{\alpha \# \beta \mid \alpha, \beta \in \Sigma^*$ & α^{rev} – поддума на $\beta\}$

$L = \{w_1 \# \ldots \# w_n \mid w_i \in \Sigma^*$ & $|w_i| = |w_{n+1-i}|\}$