1. Увод

Контакти:
violetakastreva@gmail.com
fb: Виолета Кастрева

отучване - след 2 седмици отсъствам, ще отучим след тях

11 март (пон) 12-14 - зала 04

Оценяване? (ще бъде накрая в курса)

30т. - 15/15 (зад/теория)

70т. - изпит 35/35 (зад теория) + тестове в мудъл

41т. - 3,00
⋮
86т. - 6,00

Значки ♡ / стикери - за редовно пращани домашни

! Всяка решена задачка от упр./дом. ви носи бонус за стикери

~ Терминология ~

Деф | **Азбука** - непразно крайно множество от неделими елементи - озн. с Σ

Деф | **Букви** - елементи на азбуките - озн. с латински букви $a, b, c..$

Пример: $\Sigma_1 = \{a, b\}$ $\Sigma_2 = \{0, 1\}$

$\Sigma_3 = \{a, b, c\}$

Деф | **Дума** над азбуката Σ - всяка крайна последователност от букви
- озн с гръцки букви $\alpha, \beta, \gamma...$
- празната дума бележим с ε

Пример: Нека $\Sigma = \{a, b\}$

$\alpha = aaabb$, $\beta = baba$, $\alpha = \varepsilon$

Деф | **Дължина на дума** - броят елементи в редицата - озн с $|\alpha|$

Пример: $|aab| = 3$, $|ab| = 2$, $|\varepsilon| = 0$

Деф | **Множеството от всички думи** над азбуката Σ ще озн. с Σ^*

Пример: $\Sigma = \{a, b\}$, $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, ab...\}$

Деф| **Език** над Σ наричаме всяко $L \subseteq \Sigma^*$
- озн. с L

Пример: $\Sigma = \{a, b\}$

$L_1 = \Sigma^*$, $L_2 = \emptyset$, $L_3 = \{aba, aa, \varepsilon, baaa\}$

$L_4 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha| \text{ е нечетно}\}$

$L_5 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha$ започва с ab, завършва с ba, не съдържа подниз $bbb\}$

~ Операции над езици ~

* **Булеви операции** над мн-ва: $\cap, \cup, \setminus, \overline{}$

Пример: $L' = \Sigma^* \setminus L$, $L' = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha \notin L\}$

$L_1 = \{\alpha \mid \alpha$ има четна дълж.$\}$ $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ $L_1 \cup L_2 = \Sigma^*$
$L_2 = \{\alpha \mid \alpha$ има неч. дълж.$\}$ "и" "или"

* **Конкатенация**

- конкатенация на думите α и β
озн с. $\alpha . \beta$ / $\alpha \circ \beta$

думата, която се получ. като запишем β вдясно от α

Пример: $\alpha = bba$, $\beta = abba$, $\alpha . \beta = bbaabba$

$\alpha = \varepsilon$, $\beta = ab$, $\alpha . \beta = ab$

$\alpha . \beta \neq \beta . \alpha$ (в общия случай)

– конкатенация на езиците L_1 и L_2

$$L_1 \cdot L_2 \overset{def}{=} \{\alpha.\beta \mid \alpha \in L_1, \beta \in L_2\}$$

Пример: Въведен низ е валиден имейл?

потреб. име @ домейн

$L_1 = \{\alpha \mid \alpha$ е валидно потр. име$\}$

$L_2 = \{\beta \mid \beta$ е валиден домейн$\}$

$L = L_1 \cdot \{@\} \cdot L_2$ } валиден имейл

regex

Пример:

* $L_1 = \{b\}$, $L_2 = \Sigma^*$

  $L_1 . L_2 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha$ започва с $b\}$

* $L_1 = \{\alpha \mid \alpha$ има четна дължина$\}$

  $L_2 = \{\alpha \mid \alpha$ има нечетна дължина$\}$

$L_1 \cdot L_2 = L_2$ -> показваме $L_1 . L_2 \subseteq L_2$ и $L_2 \subseteq L_1 . L_2$

Д-во: ($\Rightarrow$) Нека $\gamma \in L_1 \cdot L_2$

Тогава $\exists \alpha \in L_1, \beta \in L_2 : \gamma = \alpha . \beta$

$|\alpha|$ е четна
$|\beta|$ е нечетна $\Big\}$ $|\gamma| = |\alpha| + |\beta|$

$\Rightarrow \gamma \in L_2$ ($|\gamma|$ е нечетна)

$\Rightarrow L_1 . L_2 \subseteq L_2$ (1)

$\Leftarrow$ Нека $\gamma \in L_2$

Искаме да представим $\gamma = \alpha . \beta$ т.че $\alpha \in L_1$, $\beta \in L_2$

Нека $\alpha = \varepsilon$, $|\varepsilon| = 0 \Rightarrow \alpha \in L_1$
$\beta = \gamma$; но $\gamma \in L_2$ $\Big\}$ $\Rightarrow \alpha . \beta = \varepsilon . \gamma \in L_1 . L_2$

$\Rightarrow L_2 \subseteq L_1 . L_2$ (2)

от (1) и (2) $\Rightarrow L_1 . L_2 = L_2$

За упражнение:

$L_2 . L_1 = L_2$

$L_1 . L_1 = L_1$

$L_2 . L_2 = \{\alpha \in L_1 \mid |\alpha| \geq 2\} = L_1 \setminus \{\varepsilon\}$

Операция

Нека L е език, $L^* = \{\alpha_1 . \alpha_2 \ldots . \alpha_n \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in L\}$

$\rho \in L^*$, ρ: $\boxed{\in L}\boxed{\in L}\boxed{\quad \dots \quad}\boxed{\in L}$

Пример: $L = \{a, b\}$ $\quad L^* = \Sigma^*$

$L = \{ab\}$ $\quad L^* = \{\varepsilon, ab, abab, ababab, \dots\}$

! Винаги $\varepsilon \in L^*$, независимо от L !

$\emptyset^* = \{\varepsilon\}$, $\varepsilon \in L^*$, $\{\varepsilon\} \neq \emptyset$

$L^* = (L^*)^*$

Д-во: ① $L^* \subseteq (L^*)^*$

Нека $\rho \in L^*$, за произв език M, $M \subseteq M^*$

$\Rightarrow \rho \in (L^*)^*$

② $(L^*)^* \subseteq L^*$

Нека $\rho \in (L^*)^*$, тогава $\rho = \alpha_1 . \alpha_2 \dots \alpha_k$,

където $\alpha_i \in L^*$ $\forall i: 1 \leq i \leq k$

$\alpha_i \in L^* \Rightarrow \alpha_i$ има вида $\alpha_i = \beta^i_1 \dots \beta^i_n$

където $\beta^i_1, \dots, \beta^i_n \in L$

Тогава $\rho = (\beta^1_1 \dots \beta^1_n).(\beta^2_1 \dots \beta^2_n) \dots (\beta^k_1 \dots \beta^k_n)$

и $\beta^i_1 \dots \beta^i_n \in L$ $\forall i: 1 \leq i \leq k \Rightarrow \rho \in L^*$

* Полезни означения

Нека $n \in \mathbb{N}$:

* $\alpha^n = \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{n \text{ пъти}}$ $\quad \alpha^0 = \varepsilon$

* $L^n = \underbrace{L \dots L}_{n \text{ пъти}}$ $\quad L^0 = \{\varepsilon\}$

* $L^* = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} L^n = \{\alpha \mid \text{има } n \in \mathbb{N}, \text{ за което } \alpha \in L^n\}$

$L_n = \{\alpha^n \mid n \in \mathbb{N}, \alpha \in L\}$

в общия случай $L_n \neq L^n$

помислете за конкретен език, за който това е вярно

За домашно:

Да се докаже, че $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

Да се докаже, че $(\alpha^n)^m = \alpha^{nm}$

Да се докаже, че $(\alpha \cdot \beta)^{rev} = \beta^{rev} \cdot \alpha^{rev}$

Hint: индукция по: γ, m, β

Да се докаже, че $(L_1 \cdot L_2)^{rev} = L_2^{rev} \cdot L_1^{rev}$

Hint: В общия случай, за да докажем, че $L_1 = L_2$ доказваме съответно $L_1 \subseteq L_2$ и $L_2 \subseteq L_1$

02. KDA

~ Краен детерминиран автомат ~

Интуитивно: КДА е програма, използваща константно количество памет

Пример:

Задача

Вход: дума α

Изход:
да, ако $|\alpha|$ е четно
не, ако $|\alpha|$ е нечетно

```
string str;
cin >> str;

cout<<str.length%2==0;
```

Не използва константна памет

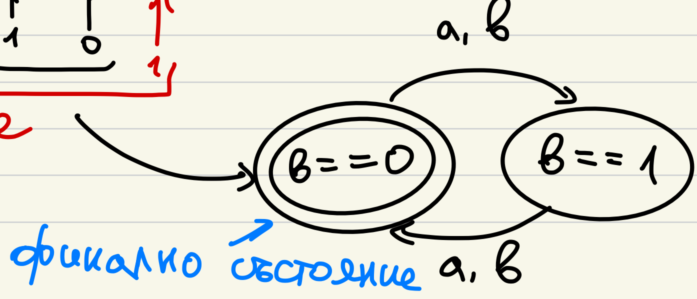
```
char c; bool b=0;      //counter=0
while (cin >> c) {
    b != b;            //counter++
}
cout << b==0;          //counter%2==0
```

вход: $\alpha = a\;b\;a\;a\;b$

b = 0 1 0 1 0 1

да

не



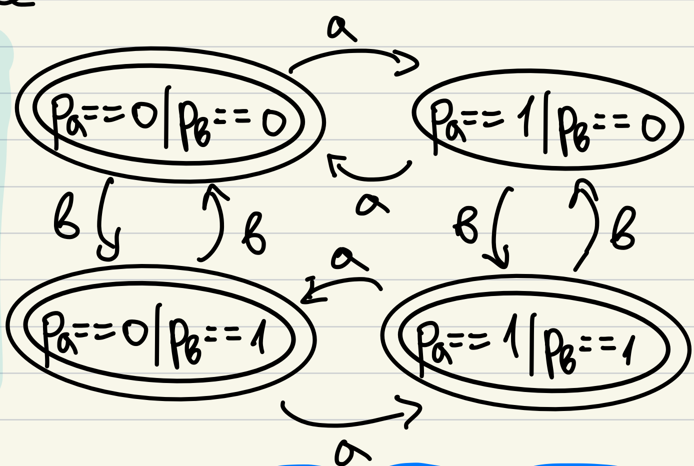
Задача 2:

вход: дума α

изход: да, ако бр. a е четно или бр. на b е нечетно

не, иначе

```
char c; bool pa=0, pb=0;
while (cin>>c){
  if(c=='a') pa=!pa;
  else pb!=pb
}
cout <<..<
```



Def Краен детерминиран автомат наричаме $A: \langle \Sigma, Q, s, F, \delta \rangle$, където:

* Σ - крайна азбука
* Q - крайно мн-во от състояния
* $s \in Q$ - начално състояние
* $F \subseteq Q$ - мн-во от финални състояния (даващи отг. да)
* δ - функция на преходите $\delta: Q \times \Sigma \to Q$

Пример: (задача 2)

$\Sigma = \{a, b\}$

$Q = \{(0|0), (0|1), (1|0), (0|1)\}$

$S = \{(0|0)\}$

$F = \{(0|0), (0|1), (1|1)\}$

$\delta((0|0), a) = (1|0)$

$\delta((0|0), b) = (0|1)$

$\delta((0|1), a) = (1|1)$

$\delta((0|1), b) = (0|0)$

$\vdots$

Деф| Език на автомат $\mathcal{A}$

$L(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid$ пътят, опр. от думата α и започващ от нач. състояние, приключва във финално състояние$\}$

$aaababb \in L$, $aaababba \notin L$

до тук взехме материала

дефинираме: $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$

индуктивна дефиниция по дълж. на α

за $\delta^*(p, \alpha)$, за всяко състояние $p \in Q$

* База: $|\alpha| = 0$, $\alpha = \varepsilon$, тогава деф

$\delta^*(p, \varepsilon) \overset{def}{=} p \quad \forall p \in Q$

* И.Х.: нека сме деф $\delta^*(p, \alpha)$ $\forall \alpha$, $|\alpha| = n$
* И.С.: ще деф $\delta^*(p, \alpha)$ за $|\alpha| = n+1$