Дефинираме "отрез на дума"

$\alpha = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$

$\alpha[i] = a_i$

$\alpha[i:j] = \begin{cases} a_i \dots a_{m-1}, & i<j \ \& \ m = \min\{j, |\alpha|\} \\ \varepsilon, & \text{иначе} \end{cases}$

$\alpha[i:] = \alpha[i:|\alpha|]$

(стр. 24, Записки ЕАИ 23)

$\alpha[:i] = \alpha[0:i]$

Зад. Нека L - рег. език. Док, че

$L_1 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid (\exists i)[\alpha[:i] \in L]\}$ е рег.

Д-во: $L_1 = L . \Sigma^*$

дума от езика

неясно произволно "продължение"

$L_1 \subseteq L . \Sigma^*$:

нека $w \in L_1$, тогава $\exists i : w[:i] \in L$

Тогава $w = \alpha\beta$, $\alpha \in L$, β - произв.

$\Rightarrow \beta \in \Sigma^*$ и $w \in L . \Sigma^*$

$L . \Sigma^* \subseteq L_1$

Нека $\omega \in L . \Sigma^*$, $\omega = \alpha\beta$ $\alpha \in L, \beta \in \Sigma^*$

Нека $|\alpha| = k$. В сила е, че $\omega[:k] \in L$

Тогава $\omega \in L_1$

Зад. L - рег., док, че

$$L_2 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid (\forall i)(\forall j)[i < j \Rightarrow \alpha[i:j] \in L]\}$$

Съвети:

1) Когато в деф. на език имаме предикат $p \Rightarrow q$ е удобно да разгл. $\neg p \vee q$

$(p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$; $p \Leftrightarrow q \equiv \neg p \Leftrightarrow \neg q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

удобни преобразувания

2) Когато имаме кванторы $\forall$ е удобно да разгледаме допълнението на езика и да работим със $\exists$

Д-во: $L_2 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid (\forall i)(\forall j)[i \geq j \vee \alpha[i:j] \in L]\}$

$$\overline{L_2} = \{\alpha \in \Sigma^* \mid (\exists i)(\exists j)[i < j \wedge \underline{\underline{\alpha[i:j] \in \overline{L}}}]\}$$

Сега разсъждаваме за структурата на $\overline{L_2}$:

отрез, в който има дума от $\overline{L}$

$$\overline{L_2} = \Sigma^* . \underline{\underline{\overline{L}}} . \Sigma^* \quad \text{и}$$

произволни думи

$L_2 = \overline{\Sigma^* . \overline{L} . \Sigma^*}$, доказваме $\subseteq$, $\supseteq$...

$L_1 \triangle L_2 = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L_1 \;\&\; \beta \in L_2 \;\&\; |\alpha| = |\beta|\}$

Вярно ли е, че, ако:

а) L_1, L_2 - рег, то $L_1 \triangle L_2$ - рег?

$L_1 = \{a\}^*$, $L_2 = \{b\}^*$

$L_1 \triangle L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \to$ не е рег.

(при нужда го доказваме, т.е. ако не е език, разгледан на упражнения)

$w \in L_1 \triangle L_2 \iff w = \alpha.\beta \;\&\; |\alpha| = |\beta| \;\&\; \alpha \in \{a\}^* \;\&\; \beta \in \{b\}^*$

$\iff \exists n: w = a^n b^n$

б) L_1, L_2 - рег, то $L_1 \Delta L_2$ - безк.? - да

Д-во: разгл. $A_1(\Sigma, Q_1, s_1, \delta_1, F_1)$ ← ДКА

$A_2(\Sigma, Q_2, s_2, \delta_2, F_2)$ $L(A_1) = L_1$, $L(A_2) = L_2$

Строим граматика $G = (V, \Sigma, S, R)$

R: $[p_1, q_1] \to a[p_2, q_2]b$, $\delta_1(p_1, a) = p_2$

$[f, s_2] \to \varepsilon$ $f \in F_1$ $\delta_2(q_2, b) = q_1$

$S \to [s_1, f]$, $\forall f \in F_2$

Д-во: Ще пок, че

$[p_1, p_2] \overset{*}{\lhd} \alpha[q_1, q_2]\beta \iff$

$\delta_1^*(p_1, \alpha) = q_1$ & $\delta_2^*(q_2, \beta) = p_2$ & $|\alpha| = |\beta|$

Инд. по височината на извода: $\Rightarrow$)

$n = 0$:

$[p_1, p_2] \overset{0}{\lhd} [p_1, p_2] = \varepsilon[p_1, p_2]\varepsilon$

и е в сила, че $\delta_1^*(p_1, \varepsilon) = p_1$, $\delta_2^*(p_2, \varepsilon) = p_2$

И.Х: нека е в сила за $n=k$

И.С: $n=k+1$ $\alpha = \alpha_1 x$ $\beta = y\beta_1$

$[p_1, p_2] \overset{k+1}{\triangleleft} \alpha[q_1, q_2]\beta$ и на предходна стъпка сме имали

$[p_1, p_2] \overset{k}{\triangleleft} \alpha_1 [q_1', q_2']\beta_1 \overset{\text{И.Х.}}{\Longrightarrow}$

$\delta_1^*(p_1, \alpha_1) = q_1'$ и $|\alpha_1| = |\beta_1|$,

$\delta_2^*(q_2', \beta_1) = p_2$ и т.н. имаме преход (от деф. на граматиката)

$[q_1', q_2'] \longrightarrow x[q_1, q_2]y$, $\delta_1(q_1', x) = q_1$

$\delta_2(q_2, y) = q_2'$

То $|\alpha_1 x| = |\alpha| = |\beta| = |\beta_1 y|$ и

$[p_1, p_2] \overset{k+1}{\triangleleft} \alpha[q_1, q_2]\beta \Longrightarrow$

и $\delta_1^*(p_1, \alpha) = \delta_1(\delta_1^*(p_1, \alpha_1), x) = q_1$

$\delta_2^*(q_2, \beta) = \delta_2^*(\delta_2(q_2, y), \beta_1) = q_2$

$\Leftarrow$) Инд по дълж на думата

База:

$\delta_1(p_1, \varepsilon) = p_1$ & $\delta_2(q_2, \varepsilon) = q_2$ $|\varepsilon| = |\varepsilon|$

и имаме, че $[p_1, q_2] \overset{\circ}{\triangleleft} \varepsilon [p_1, q_2] \varepsilon$ ✓

И.Х: ✓ $n \leq k$

И.С: Нека $|\alpha| = |\beta| = k+1$

$\alpha_1 x = \alpha$, $\beta_1 y = \beta$ и от И.Х.

$\delta_1^*(p_1, \alpha_1) = q_1'$ и $|\alpha_1| = |\beta_1|$

$\delta_2^*(q_2', \beta_1) = p_2 \Rightarrow [p_1, p_2] \overset{*}{\triangleleft} \alpha_1 [q_1', q_2'] \beta_1$

и

$\delta_1(q_1', x) = q_1$ $\delta_2(q_2, y) = q_2'$ и от

деф на гр. имаме преход

$[q_1', q_2'] \to x [q_1, q_2] y$

$\Rightarrow [p_1, p_2] \overset{*}{\triangleleft} \alpha_1 x [q_1, q_2] y \beta_1$ ✓

Сега имаме, че

$\rho \in L \iff \rho = \alpha\beta, \quad |\alpha| = |\beta|, \alpha \in L_1, \beta \in L_2$

$\iff \rho = \alpha\beta, |\alpha| = |\beta|, \delta_1^*(s_1, \alpha) \in F_1, \delta_2^*(s_2, \beta) \in F_2$
$(= f_1)$ $(= f_2)$

$\iff [s_1, f_2] \overset{*}{\lhd} \alpha[f_1, s_2]\beta \iff$

$\iff S \to [s_1, f_2] \overset{*}{\lhd} \alpha[f_1, s_2]\beta \to \alpha\beta$
$([f_1, s_2] \to \varepsilon)$

$\iff \alpha\beta = \rho \in L(G)$

$\iff \rho \in L(G)$

в) L_1, L_2 - безк., то $L_1 \Delta L_2$ - безк.?

$L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad L_2 = \{c^n d^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L_1 \Delta L_2 = \{a^n b^n c^n d^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

↳ аналог. доказване