Тв Q_L е крайно $\Leftrightarrow$ L е регулярен

1 $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Ще докажем, че Q_L е безкрайно, търсим безкрайно подмножество (напр. $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$)

Разглеждаме езиците от вида $(a^n)^{-1}(L)$

Ще покажем, че те са два по два разл., т.е. ако $n \neq k$, то

$(a^n)^{-1}(L) \neq (a^k)^{-1}(L)$

Търсим дума μ, такава, че

$\mu \in (a^n)^{-1}(L)$ и $\mu \notin (a^k)^{-1}(L)$

или

$\mu \notin (a^n)^{-1}(L)$ и $\mu \in (a^n)^{-1}(L)$

$\Updownarrow$

$a^n . \mu \in L$ и $a^k . \mu \notin L$

или

$a^n . \mu \notin L$ и $a^k . \mu \in L$

Нека $n \neq k$

$a^n b^n \in L$, $a^k b^n \notin L \Rightarrow b^n \in (a^n)^{-1} L$

$b^n \notin (a^k)^{-1} L$

$\Rightarrow (a^n)^{-1}(L) \neq (a^k)^{-1}(L)$

Такова мн-вото

$\{(a^n)^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Q_L$ е безкрайно

$\Rightarrow$ L не е регулярен

* $\overline{L}$ също не е рег.

* $\overline{L_1}$ - също не е регулярен

$L_1 = \{\alpha \mid \text{има } n \in \mathbb{N} : \alpha = a^n b^n\}$

$\overline{L_1} = \{\alpha \mid \text{няма } n \in \mathbb{N} : \alpha = a^n b^n\} = \{a^n b^k \mid n \neq k\} \cup \overline{\{a\}^* \cdot \{b\}^*}$

L е регулярен $\iff$ $\overline{L}$ е регулярен

Вярно ли е, че:

* Ако L_1 и L_2 са нерегулярни

X * $L_1 \cdot L_2 \to (L_1 \cup \{\varepsilon\}) \cdot (\overline{L_1} \cup \{\varepsilon\}) = \Sigma^*$ - рег.

X * $L_1 \cup L_2 \to \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \overline{\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}} = \Sigma^*$ рег.

X * $L_1 \cap L_2 \to \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \overline{\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}} = \emptyset$ рег

X * $L_1^* \to (L_1 \cup \Sigma)^* = L_1^* \cup \Sigma^* = \Sigma^*$ рег

X * $L_1 \setminus L_2$ ...

не запазват нерегулярност

(крайните езици са рег.)

Тв. | Нека L_1 е краен, тогава L е регулярен $\iff$ $L \cup L_1$ е регулярен

пример: $L = \varepsilon \cup ab \cup a^2b^2 \cup \dots \cup a^n b^n \cup \dots = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L = (L \cup L_1) \setminus (L \cap L_1)$

$L_1, L_2, \dots, L_n$ - рег.
тогава $L_1 \cup L_2 \dots \cup L_n$ - рег

$(L_n)_{n<0}$, L_n - р.е. за вс. n
$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ не е регулярен

Зад. $L_2 = \{a^n b^k \mid n \neq k\}$ // $(a^n)^{-1}(L)$ за $n \in \mathbb{N}$

$n \neq k$

$a^k b^k \in L \Rightarrow b^k \in (a^k)^{-1} L$

$a^n b^k \notin L \quad b^k \notin (a^n)^{-1} L \quad \Rightarrow (a^k)^{-1} \neq (a^n)^{-1} L$

Да допуснем, че L_2 е регулярен, т.е. $\overline{L_2}$ е рег.

$\overline{L_2} = L_1 \cup \overline{\{a\}^* . \{b\}^*}$

$\underbrace{\overline{L_2} \cap \overline{\{a\}^* \{b\}^*}}_{\text{регулярен}} = L_1$ е регулярен $\Downarrow$ противоречие

$L_3 = \{\alpha \mid |\alpha|_a = |\alpha|_b\} \rightarrow$ допускаме, че L_3 е рег, изразяваме L_1 чрез L_3

Зад. $L_4 = \{a^n b^k \mid n < k\}$ - рег. ли е?

(Упр: $n > k$, $n \geq k$, $n \leq k$

Разглеждаме езиците от вида $(a^n)^{-1}(L)$

$n_1 \neq n_2$, Б.О.О. $n_1 < n_2$, $n_1 + 1 \leq n_2$

$a^{n_1} \underline{\quad b^{n_1+1} \quad} \in L_4$	$a^{n_1} \underline{\quad b^{n_2} \quad} \in L_4$
$a^{n_2} \underline{\quad b^{n_1+1} \quad} \notin L_4$	$a^{n_2} \underline{\quad b^{n_2} \quad} \notin L_4$

$\Rightarrow (a^{n_1})^{-1} L \neq (a^{n_2})^{-1} L \Rightarrow$ не е рег.

Зад. $L_5 = \{\alpha.\alpha \mid \alpha \in \Sigma^*\}$

* ако $\Sigma = \{a\}$, $L_5 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ е р.е

* ако $\Sigma = \{a, b\}$, L_5 не е р.е.

Грешен подход: | $\alpha^{-1}(L)$ не работи

$\alpha_1 \neq \alpha_2$ $\quad \alpha_1 \underline{\ \alpha_1\ } \in L$

$\alpha_2 \underline{\ \alpha_1\ } \notin L$

Правилен подход: | Разглеждаме прости думи като $a^n b$, $a^n b^n$

Разгл. езици от вида $(a^n b)^{-1}(L)$ $n \neq k$

$a^n b \underline{\ a^n b\ } \in L \Rightarrow (a^n b)^{-1} L = (a^k b)^{-1} L$

$a^k b \underline{\ a^n b\ } \notin L$ $\quad$ или

$L \cap \{a\}^* b \{a\}^* b = \{a^n b a^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$

Упр: $L_6 = \{\alpha.\alpha^{rev} \mid \alpha \in \Sigma^*\}$

$L = \{\alpha\alpha\alpha \mid \alpha \in \Sigma^*\}$ $\quad L = \{\alpha\alpha^{rev}\alpha \mid \alpha \in \Sigma^*\}$

Зад. $L_7 = \{a^n b^{n.k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

разгл. $(a^n)^{-1}(L)$ $\quad n \neq k$, $n < k$

$a^n \underline{\ b^n\ } \in L$ $\quad a^k \underline{\ b^n\ } \notin L$

Зад. $L_8 = \{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

$L_8 \cap \{a\}^* \{c\}^* = \{a^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Зад. $L_g = \{a^n b^k c^{n.k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

$L_g \cap \{a\}^* . \{b\} . \{c\}^* = \{a^n b c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Зад $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Нека $n, k \in \mathbb{N}$ $n \neq k$, Б.О.О. $k < n$

$a^n . a^{n^2+n+1} = a^{(n+1)^2} \in L$, откъдето

$a^{n^2+n+1} \in (a^n)^{-1}(L)$

$n^2 < n^2 + n + k + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

$\Rightarrow a^k . a^{n^2+n+1} \notin L$, откъдето

$a^{n^2+n+1} \notin (a^k)^{-1}(L) \Rightarrow (a^k)^{-1} \neq (a^n)^{-1} L$

За езици от вида $\{a^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$

f - строго растяща ($f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$)

Ако $f(n) < x < f(n+1)$, то x няма как да бъде от езика

Упр:

$L = \{a^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L = \{a^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L = \{a^{1+\dots+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Зад. $L_g = \{a^n b^k c^{n.k} \mid n,k \in \mathbb{N}\}$

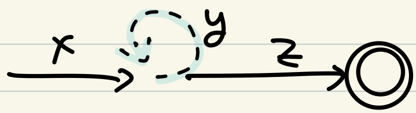
$L_g \cap \{a\}^*.\{b\}.\{c\}^* = \{a^n b c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Зад. $L = \{a^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Ако $f(n)$ расте твърде бързо, L е нерегулярен

Пример: $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$xy^n z \in L$



$(a^{2^n})^{-1}(L)$ $n \neq k, n < k$

$a^{2^n} \underline{\quad a^{2^n} \quad} = a^{2^{n+1}} \in L$

$a^{2^k} \underline{\quad a^{2^n} \quad} = a^{2^n + 2^k} \notin L$

Тв/ Нека $L \subseteq \{a\}^*$ и

$L = \{a^{n_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$, n_i - редица от дължини на думи

Ако $\{n_{i+1} - n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ е неограничено $\Rightarrow L$ е нерег.

$L = \{a^n \mid n$ е просто$\}$ $Pr = \{n \mid n$ е просто$\}$

$Pr(k) =$ k-то просто число, дали има дупка с дължина поне b?

$\{pr(k+1) - pr(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$

Лема за покачването

Нека L е регулярен език. Тогава

$(\exists p \geq 1)$

$(\forall \alpha \in L, |\alpha| \geq 1)$

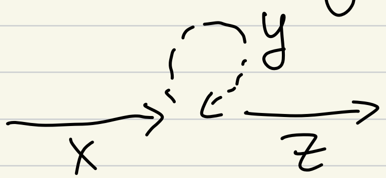
$(\exists x, y, z \in \Sigma^*, xyz = \alpha, |xy| \leq p, |y| \geq 1)$

$(\forall i \in \mathbb{N})[xy^iz \in L]$

Интуиция: Полагаме $p = |Q|$ и $|\alpha| \geq p$

$\Rightarrow$ някое състояние се повтаря при образуването на думата

$\Rightarrow$ имаме цикъл в автомата



можем да повтаряме този цикъл

$\Rightarrow xy^iz \in L$

Контрапозиция на лемата за покачването

Ако е изпълнено, че

$(\forall p \geq 1)$

$(\exists \alpha \in L, |\alpha| \geq 1)$

$(\forall x, y, z \in \Sigma^*, xyz = \alpha, |xy| \leq p, |y| \geq 1)$

$(\exists i \in \mathbb{N})[xy^iz \notin L]$

то L не е регулярен

|Достатъчно условие за нерегулярност|

Зад. Да се док, че $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен

Реш: "Играем игра" срещу лемата, наш ред е на кванторa $\exists$

Избираме думата α:

Нека $\alpha = a^p b^p = xyz$

$|xy| \leq p \Rightarrow xy = a^k, \ k \leq p$

Тогава $y = a^s, \ s \leq k$

Тогава $xy^2z = a^{p+s} b^s \notin L \Rightarrow L$ не е рег.

Зад. $L = \{a^n b^m \mid n < 3m\}$

Реш: Нека $\alpha = a^{3p} b^{p+1}$

Тогава $\alpha = xyz, \ |xy| \leq p \Rightarrow xy = a^k$ $k \leq p$

$|y| \geq 1 \Rightarrow y = a^s \quad s \leq k$

Тогава $xy^4z = a^{3p+3s} b^{p+1}$

и $n = 3p+3s, \ m = p+1, \ 3p+3s < 3p+3$ $\underset{s \geq 1}{}$ $\lightning$