

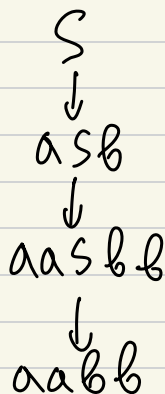
~ Граматикни ~

Дефиниция: Безконтекстна граматика наричаме всяко $OG = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$, където:

- * Σ - крайна азбука
- * V - крайно мн-во от променливи
- * $S \in V$ - начална променлива
- * $R \subseteq V \times (\Sigma \cup V)^*$ - крайно мн-во от правила

Примери:

$S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$:



$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L = \{a^n b^m c^{n+m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$S \rightarrow aSc$

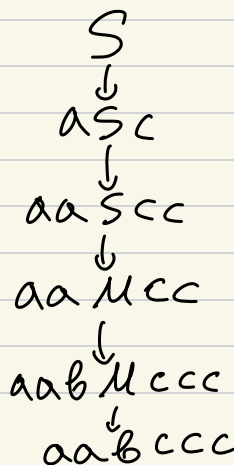
$V = \{S, M\}$

$S \rightarrow M$

$R = \{(S, aSb), (S, M), \dots\}$

$M \rightarrow bMc$

$M \rightarrow \varepsilon$



Defo] За произв. безк. граматика
 $G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$ и $l \in \mathbb{N}$ дефинираме
 релацията $\triangle^l \subseteq (\Sigma \cup V) \times (\Sigma \cup V)^*$ индуктивно:
 * $X \triangle^0 X, \forall X \in \Sigma \cup V$

* Ако $X \in V, X_i \in \Sigma \cup V$, в G имаме
 правилото $X \rightarrow X_1 \dots X_n$ и $X_i \triangle^{l_i} \alpha_i$ за
 некои $l_i \in \mathbb{N}$ и $\alpha_i \in (\Sigma \cup V)^*$, то
 $X \triangle^{l+1} \alpha_1 \dots \alpha_n, l = \max\{l_1, \dots, l_n\}$

* Тук се въвежда и случая ε , т.е.
 $\max(\emptyset) = 0, X \triangle^1 \varepsilon$

* При кукда работа с релацията в/у
 некои граматики, можем да пишем
 и името на използваната граматика,
 например $X \triangle_{G_1}^l \alpha, Y \triangle_{G_2}^l \beta$

Ако има $l \in \mathbb{N}$ такова, че $X \triangle^l \alpha$, то
 можем да запишем и $X \triangle^* \alpha$

Def Езики на променлива

Нека $G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$ бези. гр. и $A \in V$.
Тогато езикът на пром. A ще бъде

$$L_G(A) = \{ \alpha \in \Sigma^* \mid A \xrightarrow{*}_G \alpha \}$$

душите са само от азбуката

Тогато езикът на граматиката G ще бъде

$$L(G) = L_G(S)$$

каталната променлива

Езики L наричаме безконтекстен ако
свщ. бези. граматика G такова, че
 $L(G) = L$

Тв Езикът $L = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ е бези.

Д-во: Разгл. граматиката $S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$

Ще пок, че $L(G) = L$:

$$1) L(G) \subseteq L$$

Требва да покажем, че ако

$S \stackrel{L}{\triangleleft} \alpha \in \Sigma^*$, то $\alpha \in L$

Индукция по L :

* $L = \emptyset$: $S \stackrel{\emptyset}{\triangleleft} S \notin \Sigma^* \quad \checkmark$

* Нема е изг. за некое $L \in \mathbb{N}$

* Разгн. $S \stackrel{L+1}{\triangleleft} \alpha \in \Sigma^*$

Тогавя сме приложим едно от правилата:

1 сл. $S \rightarrow \varepsilon$, тогава $\alpha = \varepsilon = a^0 b^0 \in L$

2 сл. $S \rightarrow a S b$, тогава $S \stackrel{L}{\triangleleft} \beta$, за некое $\beta \in \Sigma^*$ и $\alpha = a \beta b$

От и.к. $\beta \in L \Rightarrow \beta = a^n b^n$ и $\alpha = a \beta b =$
 $= a a^n b^n b = a^{n+1} b^{n+1} \in L$
 $\Rightarrow L(G) \subseteq L$

2) $L \subseteq L(G)$

Ще поч. че за всемо $n \in \mathbb{N}$: $S \stackrel{n+1}{\triangleleft} a^n b^n$
т.е., че ако имаме дума $\alpha \in L$,
то тя може да бъде генерирана
от граматиката

Дои. с индукция по n (по дължината на думата), че обхвата е $2n$

$$\bullet S \overset{0}{\triangleleft} S \text{ и } S \rightarrow \varepsilon, S \overset{1}{\triangleleft} \varepsilon = a^0 b^0$$

$$\bullet S \overset{n+1}{\triangleleft} a^n b^n, \text{ и } S \rightarrow a S b, \text{ откъдето}$$

и.х.

$$S \overset{n+2}{\triangleleft} a \cdot a^n b^n b = a^{n+1} b^{n+1}$$

Така ако $\alpha \in L$, то покрива $\alpha = a^n b^n$

За упражнение:

Дои, че $L_1 = \{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

$L_2 = \{a^{2^n} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ са безни.

ТВ] Езиковт $L = \{\alpha \alpha^{\text{rev}} \mid \alpha \in \Sigma^*\}$ е

безмюрктемстен:

$$S \rightarrow a S a \mid b S b \mid \varepsilon$$

Ще покажем, че $L(G) = L$:

1) $L(G) \subseteq L$. Ще покажем, че ако

$S \overset{k}{\triangleleft} \beta \in \Sigma^*$, то $\beta = \alpha \alpha^{\text{rev}}$, инд. по k :

$$4 \quad S \triangleleft S \notin \Sigma^*$$

4. Имам $S \triangleleft^{l+1} \alpha \in \Sigma^*$, приложим сме:

1 сл.) $S \rightarrow \varepsilon$. Тогава $\alpha = \varepsilon = \varepsilon \varepsilon^{\text{rev}}$

2 сл.) $S \rightarrow aSa$, тогава $S \triangleleft^l p$ за некое $p \in \Sigma^*$ и $\alpha = ap a$

$$\text{От у.к. } p = \beta \beta^{\text{rev}} \text{ и } \alpha = a \beta \beta^{\text{rev}} a = \\ = a \beta (a \beta)^{\text{rev}} \Rightarrow \alpha \in L$$

3 сл.) $S \rightarrow bSb$ - аналог.

$$2) L \subseteq L(G)$$

Сега обратно, L индукция по l
 ще покаже, че $S \triangleleft^{l+1} \alpha \in L$:

* $S \triangleleft S$ и при $S \rightarrow \varepsilon$: $S \triangleleft^1 \varepsilon = \varepsilon \varepsilon^{\text{rev}}$

* $\alpha = x\beta$, от у.к. $S \triangleleft^{|\beta|+1} \beta \beta^{\text{rev}}$ и

при правилото $S \rightarrow xSx$ ($x \in \{a, b\}$)
 имаме $S \triangleleft^{|\alpha|+1} x\beta \beta^{\text{rev}} x$

Така ако $\alpha \in L$, то $\alpha = \beta \beta^{\text{rev}}$ за некое $\beta \in \Sigma^*$, но за β знаем, че $S \triangleleft^* \beta \beta^{\text{rev}}$,
 т.е. $\alpha \in L(G)$

За упр: Разгледайте езиките и докажете че са безк:

$$\{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$$

$$\{a^n b^m a^m b^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$\{a^n b^k \mid n > k\}$$

$$\{a^{k+t+1} b^k \mid k, t \in \mathbb{N}\}$$

Операции, за позващи безкителност:

$$\text{Нека } G_i = \langle \Sigma, V_i, S_i, R_i \rangle, i=1,2$$

Обединение:

$$G_U = \langle \Sigma, V_1 \cup V_2 \cup S, S, R_1 \cup R_2 \cup \{(S, S_1), (S, S_2)\} \rangle$$

$S \rightarrow S_1 \mid S_2 \rightarrow$ *запозваме да генерираме
думи в едни от двата
езика*

Конкатенация

$$G_{\cdot} = \langle \Sigma, V_1 \cup V_2 \cup S, S, R_1 \cup R_2 \cup \{(S, S_1 S_2)\} \rangle$$

$$S \rightarrow S_1 S_2$$

Звезда на Чирки

$$G_* = \langle \Sigma, V, VS, R, V\{S, SS_1\}, (S, \varepsilon) \rangle$$

$$S \rightarrow SS_1 \mid \varepsilon$$

За упр. може да год, те

$$L(G_0) = L(G_1) \cup L(G_2)$$

$$L(G_0) = L(G_1) \cdot L(G_2)$$

$$L(G_*) = L(G_1)^*$$