Бжозовски

Във. следната операция за а-произв. буква

$a^{-1}(L) = \{ \omega \in \Sigma^* \mid a.\omega \in L \}$

$$\boxed{\varepsilon(L) = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & \varepsilon \in L \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}}$$

Деф. $Q_L = \{ \alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^* \}$

Тв.) Ако Q_L – крайно, то L е рег.

Д-во: Нека Q_L – крайно

Строим автомат на Бжозовски за L

$\mathcal{B}_L = \langle \Sigma, Q_L, L, \delta, F \rangle$

$\delta(M, x) = x^{-1}(M)$, $M \in Q_L$, $x \in \Sigma$

$F = \{ M \in Q_L \mid \varepsilon \in M \}$

Тв.) $\forall M \in Q_L : \delta^*(M, \alpha) = \alpha^{-1}(M)$ (д-во: инд. по $|\alpha|$)

$\Rightarrow$ $\alpha \in L \Leftrightarrow \varepsilon \in \alpha^{-1}(L) \Leftrightarrow \varepsilon \in \delta^*(L, \alpha)$

$\Leftrightarrow \delta^*(L, \alpha) \in F \Leftrightarrow \alpha \in L(\mathcal{B})$

$\Rightarrow$ L е рег. $\Leftrightarrow$ Q_L – крайно

Тв.) Авт. на Бжозовски е минимален

Д-во: в края на файла

Зад. Да се построи автомат по метода на Бжозовски за р.е. $L[a^*b^*]$

Нач. състояние: $L_0 = L[a^*b^*] = L[a^+b^* + b^*] = L[a.a^*b^* + b^+ + \varepsilon] = L[a.a^*b^* + b.b^* + \varepsilon]$

$\delta(L_0, a) = a^{-1}(L[a.a^*b^* \cup b.b^* \cup \varepsilon]) = L[a^*b^*] = L_0$

$\delta(L_0, b) = b^{-1}(L[a.a^*b^* \cup b.b^* \cup \varepsilon]) = L[b^*] \overset{= L_0}{=} L_1$

$\neq L_0$, тъй като $a \in L_0$, $a \notin L_1$

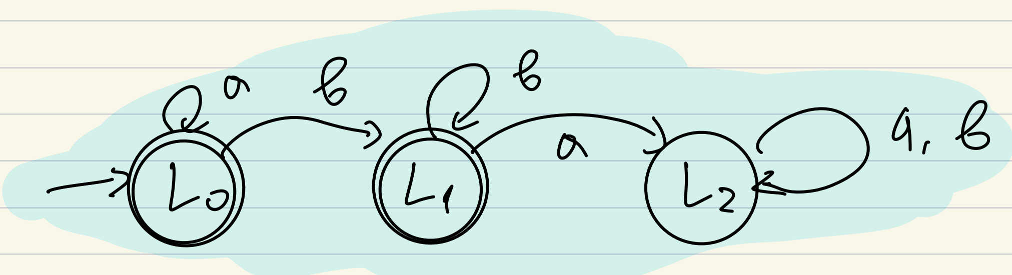
$\delta(L_1, a) = a^{-1}(L[b^*]) = a^{-1}(L[b.b^* \cup \varepsilon]) = L[\emptyset] = L_2$

$\delta(L_1, b) = b^{-1}(L[b.b^* \cup \varepsilon]) = L[b^*] = L_1$

$\delta(L_2, a) = a^{-1}(\emptyset) = \emptyset = L_2$

$\delta(L_2, b) = b^{-1}(\emptyset) = \emptyset = L_2$

$\varepsilon \in L_0, L_1 \Rightarrow$ финални



Зад. Да се построи автомат по метода на Бжозовски за езика $L[((a+b)^+.a)^+]$

$L_0 = L$

$r^* = r.r^* + \varepsilon$

$L_0 = L[((a+b)^+.a)\underbrace{((a+b)^+.a)^*}_{l_0} + \varepsilon] =$

$r^+ = r.r^*$

$= L[((a+b)(a+b)^*.a)\, l_0 + \varepsilon] =$

$= L[a(a+b)^*.a l_0 + \varepsilon + b(a+b)^*.a\, l_0]$

$\delta(L_0, a) = a^{-1}(L_0) = L[(a+b)^*.a.l_0] = L_1$

$(L_1 \neq L_0 \quad \varepsilon \in L_0, \ \varepsilon \notin L_1)$

$\delta(L_0, b) = b^{-1}(L_0) = L[(a+b)^*.a.l_0] = L_1$

$r^* = r.r^* + \varepsilon$

$L_1 = L[(a+b)^*.a.l_0] = L[((a+b)(a+b)^* + \varepsilon).a l_0]$

$= L[(a(a+b)^* + b(a+b)^* + \varepsilon).a.l_0] =$

$= L[a(a+b)^*.a.l_0 + a.l_0 + b(a+b)^*.a.l_0]$

$\delta(L_1, a) = a^{-1}(L_1) = L[(a+b)^*.a.l_0 + l_0] =$

$= L_2 \ (L_1 \neq L_2, \ \varepsilon \in L_2, \varepsilon \notin L_1, L_0 \neq L_2, a \notin L_0, a \in L_2)$

$\delta(L_1, b) = b^{-1}(L_1) = L[(a+b)^*.a.l_0] = L_1$

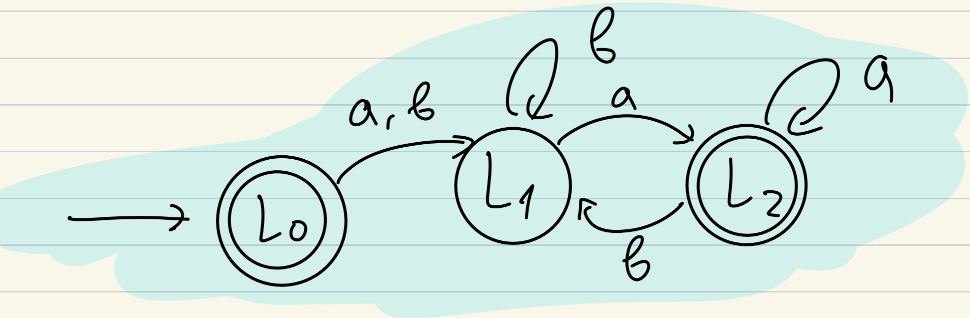
(вижте горе.)

$L_2 = [((a+b)(a+b)^* + \varepsilon)a.l_0] =$

$= L[a(a+b)^* a\, l_0 + a.\, l_0 + b.(a+b)^*.\, a\, l_0]$

$\delta(L_2, a) = a^{-1}(L_2) = L[(a+b)^*.a.\, l_0 + l_0] = L_2$

$\delta(L_2, b) = b^{-1}(L_2) = L[(a+b)^*.\, a.\, l_0] = L_1$



B_L

$\varepsilon \in L_0$, $\varepsilon \in L_2$

Полезни свойства

$L[r^+] = L[r.r^*]$

$L[r^*] = L[r^+ + \varepsilon]$

$L[r_1 + r_2] = L[r_2 + r_1]$

$L[r(r_1 + r_2)] = L[r.r_1 + r.r_2]$

За упражнение:

* $L[a.(a+b)^*.b]$
* $L[(ba.(b^* + ba))^*]$
* $L[((ab)^* + (ba)^*)^*]$
* $L[(b(bb)^* + a^*).a]$

Д-во, че автоматът на Бжозовски е миним:
Нека L е регулярен с автомат $A = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$

Б.О.О., нека всички състояния в A са достижими и нека $Q = \{1 .. n\}$.
Нека $\alpha_i \in \Sigma^*$ е такава дума, че $\delta^*(s, \alpha) = q_i$

Деф. ф-ята $f : Q \to Q_L$:

$f(q_i) = \alpha^{-1}(L)$

Ще покажем, че f е сюрективна, откъдето $|Q_L| \leq |Q|$

Нека $M \in Q_L$.
Тогава има $\alpha \in \Sigma^*$: $M = \alpha^{-1}(L)$
Знаем, че $\delta^*(s, \alpha) = q_i$ за някое $i \in \{1 \ldots n\}$

$\beta \in M \Leftrightarrow \beta \in \alpha^{-1}(L) \Leftrightarrow \alpha\beta \in L \Leftrightarrow \delta^*(s, \alpha\beta) \in F$

$\Leftrightarrow \delta^*(\delta^*(s, \alpha), \beta) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q_i, \beta) \in F \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \delta^*(\delta^*(s, \alpha_i), \beta) \in F \Leftrightarrow \delta^*(s, \alpha_i\beta) \in F$

$\Leftrightarrow \alpha_i\beta \in L \Leftrightarrow \beta \in \alpha_i^{-1}(L) \Leftrightarrow \beta \in f(q_i)$

Така $f(q_i) = M$

Накрая понеже f е сюрективна, $Dom(f) = Q$
$Rng(f) = Q_L$, $|Q_L| \leq |Q|$

Credits за доказателството: Тодор Дуков

$L' = \{ \alpha \# c^n \mid \alpha^n \in L \}$

$\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$, където

$Q = \{1, \dots, n\}$, $|Q| = n$, $1 = s$

$\mathcal{A}' = \langle \Sigma \cup \{\#, c\}, Q', s', \delta', F' \rangle$

$Q' = Q^{n+1} \times \{0, 1\}$ $(Q \times Q^n \times \{0,1\})$

$s' = (s, \underset{i}{1}, 2 .., n, 0)$

$x \in \Sigma: \delta'((1, p_1, .., p_n, 0), x) =$

$= (1, \delta(p_1, x), \delta(p_2, x) .., \delta(p_n, x), 0)$

$x = \#$:

$\delta'((1, p_1, p_2, .., p_n, 0), \#) = (1, p_1, .., p_n, 1)$

$\delta'((i, p_1, p_2, .., p_n, 1), c) = (p_i, p_1, p_2 .., p_n, 1)$

Идея: с всеки такъв "слой" изчитаме по една 'α', местейки се с едно 'c'

$F' = F \times Q^n \times \{1\}$

Тв) $\delta'^*(s', \alpha) = (s, \delta^*(1, \alpha), .., \delta(n, \alpha), 0)$

(2) $\delta'^*(s', \alpha \# c^n) = (\delta^*(s, \alpha^n), .. , 1)$

(1) Д-во: индукция по $|\alpha|$

$|\alpha| = 0$ $(\alpha = \varepsilon)$

$\delta^*(s', \varepsilon) = s' = (s, \delta^*(1, \varepsilon) .., \delta^*(n, \alpha), 0)$

$= (s, 1, 2, .. n, 0)$

Нека за $|\alpha| = n$ тв. (1) е в сила

Разгл. $|\alpha| = n+1$, $\alpha = \mu . a$, $|\mu| = n$

$\delta^*(s', \alpha) = \delta^*(s', \mu c) = \delta(\delta^*(s', \mu), c) =$

$= \delta((s, \delta^*(1, \mu), \ldots, \delta^*(n, \mu)), c) =$

$\overset{\text{деф } \delta}{=} (s, \delta(\delta^*(1, \mu), c) .., \delta(\delta^*(n, \mu), c) =$

$= (s, \delta^*(1, \mu c), \; .., \delta^*(n, \mu c))$

---

(2) Д-во: индукция по n, $\beta = \alpha \# c^n$

$n = 0$, $\beta = \# = \varepsilon \# c^0$

$\delta^*(s', \#) = \delta((s, 1 .., n, 0), \#) \overset{\text{деф}}{=} (s, 1, .., n, 1)$

$= (\delta^*(s, \varepsilon^0), \; .., 1)$

Нека тв е изп. за някое n

Разгл. $n+1$

$\beta = \alpha \# c^{n+1}$ $\qquad$ $\alpha^{n+1} \in L$

$\delta^*(s', \alpha \# c^{n+1}) = \delta(\delta^*(s', \alpha \# c^n), c) =$

$= \delta(\delta^*(s', \alpha^n), \dots, p_{n,1}), c) =$

$= \delta^*(s', \alpha^{n+1}, \dots, p_n, 1))$