~ Граматики ~

Деф Безконтекстна граматика наричаме всяко $G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$, където:

* Σ - крайна азбука
* V - крайно мн-во от променливи
* $S \in V$ - начална променлива
* $R \subseteq V \times (\Sigma \cup V)^*$ - крайно мн-во от правила

Примери:

$S \to aSb \mid \varepsilon$:

$$S \to aSb \to aaSbb \to aabb$$

$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L = \{a^n b^m c^{n+m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$V = \{S, M\}$

$R = \{(S, aSb), (S, M) \dots\}$

$S \to aSc$

$S \to M$

$M \to bMc$

$M \to \varepsilon$

$$S \to aSc \to aaScc \to aaMcc \to aabMccc \to aabccc$$

Деф За произв. безк. граматика $G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$ и $\ell \in \mathbb{N}$ дефинираме релацията $\overset{\ell}{\lhd} \subseteq (\Sigma \cup V) \times (\Sigma \cup V)^*$ индуктивно:

* $X \overset{0}{\lhd} X$, $\forall X \in \Sigma \cup V$
* Ако $X \in V$, $X_i \in \Sigma \cup V$, в G имаме правилото $X \to X_1 \dots X_n$ и $X_i \overset{\ell_i}{\lhd} \alpha_i$ за някои $\ell_i \in \mathbb{N}$ и $\alpha_i \in (\Sigma \cup V)^*$, то $X \overset{\ell+1}{\lhd} \alpha_1 \dots \alpha_n$, $\ell = \max\{\ell_1 \dots \ell_n\}$

*Тук се включва и случая ε, т.е. $\max(\emptyset) = 0$, $X \overset{1}{\lhd} \varepsilon$ *

* При нужда (работа с релацията в/у няколко граматики), можем да пишем и името на използваната граматика, например $X \overset{\ell_1}{\lhd}_G \alpha$, $Y \overset{\ell_2}{\lhd}_{G_2} \beta$ *

Ако има $\ell \in \mathbb{N}$ такова, че $X \overset{\ell}{\lhd} \alpha$, то можем да запишем и $X \overset{*}{\lhd} \alpha$

Деф Езици на променлива

Нека $G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$ безк. гр. и $A \in V$.
Тогава езикът на пром. A ще бъде

$$L_G(A) = \{ \alpha \in \Sigma^* \mid A \overset{*}{\underset{G}{\lhd}} \alpha \}$$

думите са само от азбуката

Тогава езикът на граматиката G ще бъде

$$L(G) = L_G(S)$$

началната променлива

Език L наричаме **безконтекстен**, ако същ. безк. граматика G такава, че
$L(G) = L$

Тв Езикът $L = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ е безк.

Д-во: Разгл. граматиката $S \to aSb \mid \varepsilon$

Ще пок, че $L(G) = L$:

1) $L(G) \subseteq L$

Трябва да покажем, че ако

$S \overset{l}{\lhd} \alpha \in \Sigma^*$, то $\alpha \in L$

Индукция по l:

* $l = 0$: $S \overset{0}{\lhd} S \notin \Sigma^*$ ✓

* Нека е изп. за някое $l \in \mathbb{N}$

* Разгл. $S \overset{l+1}{\lhd} \alpha \in \Sigma^*$

Тогава сме приложили едно от правилата:

1 сл.) $S \to \varepsilon$, тогава $\alpha = \varepsilon = a^0 b^0 \in L$

2 сл.) $S \to aSb$, тогава $S \overset{l}{\lhd} \beta$, за някое $\beta \in \Sigma^*$ и $\alpha = a\beta b$

От И.Х. $\beta \in L \Rightarrow \beta = a^n b^n$ и $\alpha = a\beta b =$

$= a a^n b^n b = a^{n+1} b^{n+1} \in L$

$\Rightarrow L(G) \subseteq L$

2) $L \subseteq L(G)$

Ще пок., че за всяко $n \in \mathbb{N}$: $S \overset{n+1}{\lhd} a^n b^n$

т.е., че ако имаме дума $\alpha \in L$, то тя може да бъде генерирана от граматиката

Док. с индукция по n (по дължината на думата, тя обаче е $2n$)

- $S \overset{0}{\triangleleft} S$ и $S \to \varepsilon$, $S \overset{1}{\triangleleft} \varepsilon = a^0 b^0$
- $S \overset{n+1}{\triangleleft} a^n b^n$, и $S \to aSb$, откъдето

И.Х.

$$S \overset{n+2}{\triangleleft} a \cdot a^n \cdot b^n \cdot b = a^{n+1} b^{n+1}$$

Така ако $\alpha \in L$, то понеже $\alpha = a^n b^n$

За упражнение:

Док, че $L_1 = \{ b^n a^n \mid n \in \mathbb{N} \}$,

$L_2 = \{ a^{2n} b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ са б.езици.

Тв] Езикът $L = \{ \alpha \alpha^{rev} \mid \alpha \in \Sigma^* \}$ е безконтекстен:

$$S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon$$

Ще док, че $L(G) = L$:

1) $L(G) \subseteq L$. Ще док, че ако $S \overset{\ell}{\triangleleft} \beta \in \Sigma^*$, то $\beta = \alpha \alpha^{rev}$, инд. по ℓ:

$\forall\ S \overset{0}{\lhd} S \notin \Sigma^*$

$\forall$ Нека $S \overset{l+1}{\lhd} \alpha \in \Sigma^*$, прилонсили сме:

1 сл.) $S \to \varepsilon$. Тогава $\alpha = \varepsilon = \varepsilon\varepsilon^{rev}$

2 сл.) $S \to aSa$, тогава $S \overset{l}{\lhd} \beta$ за някое $\beta \in \Sigma^*$ и $\alpha = a\beta a$

От И.Х. $\beta = \beta\beta^{rev}$ и $\alpha = a\beta\beta^{rev}a =$
$= a\beta(a\beta)^{rev} \Rightarrow \alpha \in L$

3 сл.) $S \to bSb$ - аналог.

2) $L \subseteq L(G)$

Сега обратно, с индукция по α ще пок., че $S \overset{|\alpha|+1}{\lhd} \alpha\alpha^{rev}$:

* $S \overset{0}{\lhd} S$ и при $S \to \varepsilon$: $S \overset{1}{\lhd} \varepsilon = \varepsilon\varepsilon^{rev}$

* $\alpha = x\beta$, от И.Х. $S \overset{|\beta|+1}{\lhd} \beta\beta^{rev}$ и при правилото $S \to xSx$ $(x \in \{a, b\})$ имаме $S \overset{|\alpha|+1}{\lhd} x\beta\beta^{rev}x$

Така ако $\alpha \in L$, то $\alpha = \beta\beta^{rev}$ за някое $\beta \in \Sigma^*$, но за β знаем, че $S \overset{*}{\lhd} \beta\beta^{rev}$, т.е. $\alpha \in L(G)$

За упр: Разгледайте езиците и докажете се са безк.:

$\{a^n b^k c^{n+k} \mid n,k \in \mathbb{N}\}$

$\{a^n b^m a^m b^n \mid n,m \in \mathbb{N}\}$

$\{a^n b^k \mid n > k\}$

$\{a^{k+t+1} b^k \mid k,t \in \mathbb{N}\}$

Операции, запазващи безконтекст-ност:

Нека $G_i = \langle \Sigma, V_i, S_i, R_i \rangle$, $i=1,2$

Обединение:

$G_\cup = \langle \Sigma, V_1 \cup V_2 \cup S, S, R_1 \cup R_2 \cup \{(S,S_1),(S,S_2)\} \rangle$

$S \to S_1 \mid S_2$ → започваме да генерираме думи в един от двата езика

Конкатенация

$G_\cdot = \langle \Sigma, V_1 \cup V_2 \cup S, S, R_1 \cup R_2 \cup \{(S, S_1 S_2)\} \rangle$

$S \to S_1 S_2$

Звезда на Клини

$G_* = \langle \Sigma, V, \cup S, R, \cup \{(S, SS_1), (S, \varepsilon)\} \rangle$

$S \to SS_1 \mid \varepsilon$

За упр. може да док, че

$L(G_\cup) = L(G_1) \cup L(G_2)$

$L(G_\cdot) = L(G_1) \cdot L(G_2)$

$L(G_*) = L(G_1)^*$