1) $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ · не е безк.
PL: избираме $a^p b^p c^p d^p$

Зад. Винаги ли е вярно, че ако L - безк., то $\#(L) = \{\beta \mid \beta\beta \in L\}$ е безк?

Реш: Разгл. езика
$L = \{a^n b^k c^n a^l b^m c^m \mid m, n, k, l \in \mathbb{N}\}$
L е безк.
Но тогава $\#(L) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ↯

Зад. Ако L - безк, то
$Cyc_{rev}(L) = \{\alpha^{rev}\beta \mid \beta\alpha \in L\}$ - безк.?
Реш: Доп, че $Cyc_{rev}(L)$ - безк.
за $L = \{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
Тогава
$Cyc_{rev}(L) \cap \{\{d\}^* \cdot \underbrace{\{c\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{a\}^*}_{\text{рег.}}\} =$
$= \{d^n c^m a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ е безк. ↯

Зад. Нека L_1 и L_2 - бези.

Док, че $L = \{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L_1$ и $\exists \beta \in L_2 : |\beta| = n\}$

Д-во (Идея): Нека $G_1 = \langle \Sigma, V, S_1, R_1 \rangle$ (в НФЧ),
$G_2 = \langle \Sigma, V, S_2, R_2 \rangle$, $L(G_1) = L_1$, $L(G_2) = L_2$

за всяко правило
$X \to YZ$ в R_1, в G прибавяме
$X_1 \to Y_1 Z_1$ в R

аналог. за $R_2 \to X_2 \to Y_2 Z_2$ в R

За всяко правило $X \to \sigma$ в R_1,
прибавяме $X_1 \to \sigma$ и за $X \to \varepsilon$,
$X_1 \to \varepsilon$

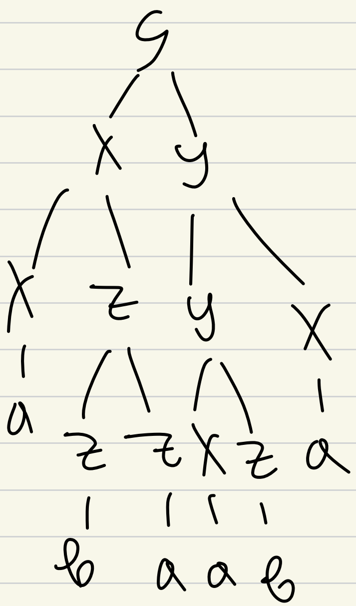
За всяко правило $X \to \sigma$ в R_2,
прибавяме $X_2 \to S_1$ и за $X \to \varepsilon$,
$X_2 \to \varepsilon$

! началното на G_1

Зад. Нека L_1 - безк. Док., че

$L = \{ a^{|\alpha|} a \, b^{|\beta|} b \mid \alpha\beta \in L_1 \}$ е безк.

Д-во: (идея) Отново разгл. G_1 в НФЧ дърво в L_1



Възможни разделения (някои)

spl1: $ab \mid abaa \in L_1$

$a\,b \in L$

spl2: $ababa \mid a \in L_1$

$aaa\varepsilon \in L_1$

Променливи в G_1:

$\forall$ пром. X в G добавяме пром.

X_A, X_B, X_{mid}

X_A - в цялото поддърво пазим a

X_B - в цялото поддърво пазим b

X_{mid} - търси разделение

За вс. правило $X \to YZ$ в G:

$X_A \to Y_A Z_A \quad X_B \to Y_B Z_B$

$X_{mid} \to Y_{mid} Z_B \mid Y_A Z_{mid} \mid Y_A Z_B$

За вс. правило $X \to a$ в G:

$X_A \to a \quad X_B \to \varepsilon$

—//— $X \to b$

$X_A \to \varepsilon \quad X_B \to b$

Нова начална пром.

$S \to S_{mid} \mid S_A \mid S_B$

Зад. Деф: $diff: \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$:

$diff(\alpha, \varepsilon) = 0$

$diff(\varepsilon, \beta) = 0$

$$diff(a.\alpha, b.\beta) = \begin{cases} diff(\alpha, \beta), & a = b \\ diff(\alpha, \beta), & a \neq b \end{cases}$$

Безк. ли са езиците:

а) $L = \{\alpha \# \beta \mid \alpha, \beta \in \Sigma^*, |\alpha| = |\beta|, diff(\alpha, \beta^{rev}) = 1\}$

Да: $S \to aSa \mid bSb \mid aMb \mid bMa$

$M \to aMa \mid bMb \mid \#$

б) $L = \{\alpha \# \beta \mid \alpha, \beta \in \Sigma^*, |\alpha| = |\beta|, diff(\alpha, \beta^{rev}) \geq 1\}$

Да: $S \to aSa \mid bSb \mid aMb \mid bMa$

$M \to aMa \mid bMb \mid aMb \mid bMa \mid \#$

г) $\{\alpha\beta \mid \alpha, \beta \in \Sigma^*, |\alpha| = |\beta|, diff(\alpha, \beta) \geq 1\}$

Да: (ж $XaYVbW$)

$S \to YZ \mid ZY$

$Y \to aYa \mid bYb \mid aYb \mid bYa \mid a$

$Z \to aZa \mid bZb \mid aZb \mid bZa \mid b$

Идея: за всяка дума $\in \{\{a,b\}^2\}^*$, която не е $\alpha\alpha$

Винаги можем да разделим на две думи с нечетни дължини, чиито центрове са различни

Д-во: Разгл. $w = x_1 x_2 \ldots x_{2n}$ $(\neq \alpha\alpha)$

Тогава $\exists\, i$, за което $x_{n+i} \neq x_i$

Тогава $u = x_1 \ldots x_{2i-1}$, $v = x_{2i} \ldots x_{2n}$

ще бъде желаното разбиване

д) $\{\alpha\beta \mid \alpha, \beta \in \Sigma^*, |\alpha| = |\beta|, diff(\alpha, \beta) = 1\}$

Не: $a^p b^p a\, a^p b^p b$

Зад. $M \subseteq \Sigma^*$ – рег. и $\# \notin \Sigma$

Док, че

$L = \{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \# \beta_1 \ldots \beta_n \mid n \in \mathbb{N} \ \& \ \forall i \in \{1..n\} \cdot (\alpha_i \beta_{n-i+1} \in M)\}$

$A = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$

Реш: Разгл. преходи от вида

$[p_1, q_1] \to x[p_2, q_2]y$, $\delta(p_1, x) = p_2$

$[q, q] \to [s, f]$ $\qquad \delta^{-1}(q_1, y) = q_2$

нач. пром.: $[s, f]$

G:

$[s, f] \to [s, q]y \mid x[p, f]$

където $\delta(s, x) = p$, $\delta^{-1}(f, y) = q$

$[q, q] \to \# \mid [s, f] \qquad \forall q \in Q$

$L(G) = L$:

$L \subseteq L(G)$:

$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall \alpha \in \Sigma^* \ |\alpha| = n$:

ако $\alpha \in L$, то $\alpha \in L(G)$ $(L([s, f]))$

индукция по n: (по броя генерирани думи

$L([s,f]) \subseteq L$:

Индукция по $h(T)$, че ако $root(T) = [s,f]$, то $word(T)$ $(\in \Sigma^*)$ $\in L$

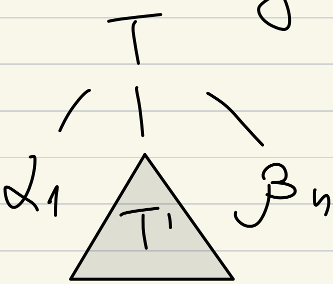
Индукция по n:

База: $h(T) = 0$ ✓

И.Х: ако $h(T) \leq n$, то - изп.

И.С: $h(T) = n+1$ и $word(T) \in \Sigma^*$

T има вида



където $h(T') = n$

$\Rightarrow word(T') \in L$

и т.к. $\alpha_1 \beta_n \in L_1$, то

$\alpha_1 \, word(T') \, \beta_n \in L$

$[s,f] \to \alpha[q,q]\beta \iff \delta^*(s,\alpha) = q,$

$\delta^{-1*}(f,\beta) = q$

$\iff \alpha\beta \in L_1$