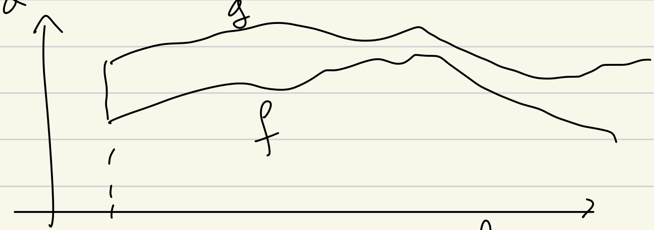
Несобствени интеграли

Принцип за мажориране

Ако $0 \le f(x) \le g(x)$ за $x \in [a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ е сходящ, то и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ



Критерий за сравняване

Ако $f(x) > 0$ за $x \in [a, +\infty)$, $g(x) > 0$ за $x \in [a, +\infty)$

и съществ. $c = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, като $0 < c < +\infty$

то $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ са едновременно сходящи или разходящи

(Горните важат и за $\int_{-\infty}^{b}$; $\int_a^{b}$ (a/b - особена точка))

Основни интеграли, които се използват за сравняване:

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda} dx$ $(a>0)$ и $\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{x^\lambda} dx$ са $\begin{cases} \text{сходящи}, & \lambda > 1 \\ \text{разходящи}, & \lambda \le 1 \end{cases}$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda}dx \text{ и } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\lambda}dx \text{ са } \begin{cases} \text{сходящи}, & \lambda<1 \\ \text{разходящи}, & \lambda\geq 1 \end{cases}$$

Зад. Изследвайте за сходимост:

а) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2}dx \quad = f(x)$

Особена точка -0.

$g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\lambda-1} = \begin{cases} +\infty, & \lambda<1 \\ 1, & \lambda=1 \\ 0, & \lambda>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2}dx \text{ сх} \Leftrightarrow \underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{x}dx}_{\text{разх}} \text{ е сх}$$

$\Rightarrow \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2}dx$ е разх.

б) $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}dx \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\frac{1}{1-x^3}}{\frac{1}{(1-x)^\lambda}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}}{\frac{1}{(1-x)^\lambda}} =$

$g(x) = \frac{1}{(1-x)^\lambda}$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(1-x)^{\lambda-1}}{1+x+x^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{1-x+x^2} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)^{\lambda-1}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)^{\lambda-1} = \begin{cases} +\infty, & \lambda<1 \\ 1/3, & \lambda=1 \\ 0, & \lambda>1 \end{cases}$$

в) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{tg^2 x}\,dx$, 0 - особена точка

$$C = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{\sqrt{x}}{tg^2 x}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^{\lambda+1/2}}{tg^2 x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos^2 x \cdot x^{\lambda-3/2}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \lambda<3/2 \\ 1, & \lambda=3/2 \\ 0, & \lambda>3/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ разх

За упражнение $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}\cdot\sin(\sqrt{x})}\,dx$ Особена точка - 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})\, x^{\lambda}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(1+\sqrt[3]{x^2})\, x^{\lambda-1} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{x^2}} \sqrt[3]{x^2}\, x^{\lambda-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\lambda-\frac{1}{3}} = \begin{cases} +\infty, & \lambda<\frac{1}{3} \\ 1, & \lambda=1/3 \\ 0, & \lambda>1/3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Сходится $\left(\int_0^1 f(x) \sim \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

g) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{x\to\infty} \ln\ln x - \ln\ln 2 = +\infty$

e) $\int_0^1 \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

Особ. т. -0

При $x\in(0,1]$: $0 \le \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ и

$\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-0)^{2/3}}$ ℓ сходящ, $\frac{2}{3}<1$

$\Rightarrow$ сходится

Задачи, които разгледахме:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p \operatorname{arctg} x}{2+x^q}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^\beta\,dx$$

$$\int_2^{+\infty} x^p \ln^q x$$

$$\int_0^1 x^p \ln x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-2x+8)^5}}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+4x+9)^5}}\,dx$$

Задачи от упр. на гл. ас. Александър Александров.

Зад. 1) Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^p\operatorname{arctg}x}{2+x^q}\,dx$ $(p,q\in\mathbb{R},\ q>0)$.

Решение: Особените точки са 0 (защото може $p<0$) и $+\infty$.

$$I=\underbrace{\int\limits_0^1\frac{x^p\operatorname{arctg}x}{2+x^q}\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^p\operatorname{arctg}x}{2+x^q}\,dx}_{I_2}.$$

Понеже $\frac{x^p\operatorname{arctg}x}{2+x^q}>0$ за $x\in(0,+\infty)$, то

I е сходящ $\Longleftrightarrow$ I_1 и I_2 са сходящи (1).

Геометрично тълкуване на (1):

Лицето $S(T)$ е крайно число.

$\Updownarrow$

Лицата $S(T_1)$ и $S(T_2)$ са крайни числа.

I_1: Особената точка е 0.

$$I_1 \sim \int\limits_0^1 x^p\operatorname{arctg}x\,dx \sim \int\limits_0^1 x^{p+1}\,dx=\int\limits_0^1\frac{1}{(x-0)^{-p-1}}\,dx$$

$\frac{1}{2+x^q}\xrightarrow[x\to0]{}\frac12$ (по условие $q>0$) $\qquad$ $\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\xrightarrow[x\to0]{}1$

Така I_1 е сходящ $\Longleftrightarrow -p-1<1$, т.е.

I_1 е сходящ $\Longleftrightarrow p>-2$ (2)

I_2: Особената точка е $+\infty$.

(2)

$$I_2\sim\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^p}{2+x^q}\,dx\sim\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{q-p}}\,dx$$

$\operatorname{arctg}x\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{\frac{x^p}{2+x^q}}{\frac{1}{x^{q-p}}}=\frac{x^q}{2+x^q}=\frac{1}{\frac{2}{x^q}+1}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ (по условие $q>0$)

следователно

I_2 е сходящ $\Longleftrightarrow q-p>1$ (3)

От (1), (2) и (3) получаваме:

Отг. на зад. 1): I е сходящ $\Longleftrightarrow p>-2$ и $q-p>1$.

Зад. 2 Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $I=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}x^{\beta}\,dx$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

Решение: Особените точки са 0 (защото може $\beta<0$) и $+\infty$.

$$I=\underbrace{\int_0^1 e^{-\alpha x}x^{\beta}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}x^{\beta}dx}_{I_2}.$$

Понеже $e^{-\alpha x}x^{\beta}>0$ при $x\in(0,+\infty)$, то

I е сходящ $\Leftrightarrow$ I_1 и I_2 са сходящи (1).

I_1: Особената точка е 0.

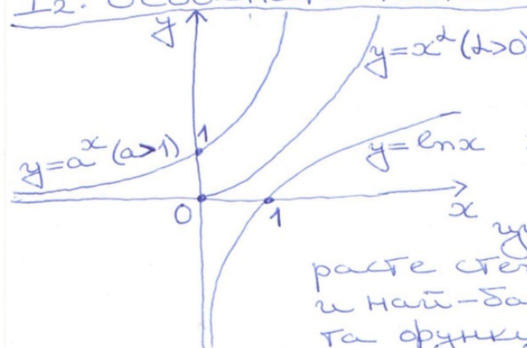
$$I_1 \sim \int_0^1 x^{\beta}dx=\int_0^1 \frac{1}{(x-0)^{-\beta}}dx$$

$$\left(e^{-\alpha x}\xrightarrow[x\to 0]{}1\right)$$

Сл. I_1 е сходящ $\Leftrightarrow$ $-\beta<1$, т.е.

I_1 е сходящ $\Leftrightarrow$ $\beta>-1$ (2).

I_2: Особената точка е $+\infty$.



Факт, доказан на упражненията по ДИС-1 (чрез правилото на Лопитал): При $x\to+\infty$ най-бързо расте показателната функция $y=a^{x}$ $(a>1)$, по-бавно расте степенната функция $y=x^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ и най-бавно расте логаритмичната функция $y=\ln x$. $(*)$

(3) 1сл. $\alpha < 0$

Сега, заради $(*)$, имаме, че

$e^{-\alpha x} x^{\beta} > \frac{1}{x} > 0$ за всички достатъчно големи $x \in (1, +\infty)$.

Понеже $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ е разходящ, то по принципа за мажориране и I_2 също е разходящ.

Сл. I_2 е разходящ за $\alpha < 0$ и $\forall \beta$.

2сл. $\alpha = 0$

Сега $I_2 = \int_1^{+\infty} x^{\beta}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-\beta}}\,dx$ и сл. I_2 е сходящ $\Leftrightarrow -\beta > 1 \Leftrightarrow \beta < -1$.

Сл. I_2 е сходящ при $\alpha = 0$ и $\beta < -1$.

3сл. $\alpha > 0$

Сега, заради $(*)$, имаме, че

$0 < e^{-\alpha x} x^{\beta} < \frac{1}{x^2}$ за всички достатъчно големи $x \in (1, +\infty)$.

Понеже $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ е сходящ, то по принципа за мажориране I_2 също е сходящ.

Сл. I_2 е сходящ при $\alpha > 0$ и $\forall \beta$.

Окончателно: I_2 е сходящ при $\alpha = 0, \beta < -1$ и при $\alpha > 0, \forall \beta$ (3).

т.е. I_2 е сходящ $\Leftrightarrow$ в него показателната функция е в знаменател (т.е. $\alpha > 0$) или изобщо я няма и оставащият интеграл е сходящ (т.е. при $\alpha = 0, \beta < -1$)

От (1), (2) и (3) получаваме:

Отг. на зад. 2: I е сходящ $\Leftrightarrow \alpha > 0, \beta > -1$.

Зад. 3 Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x}\,dx$ $(p, q \in \mathbb{R})$

Упътване: Особената точка е $+\infty$.

Правим смяна на променливата $x = e^t$, $t \in (\ln 2, +\infty)$ и получаваме, че $I = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{e^{pt} t^q}\,de^t = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{e^t}{e^{pt} t^q}\,dt = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{e^{(p-1)t} t^q}\,dt$. Този интеграл е точно като интеграла I_2 от зад. 2 и с абсолютно същите разсъждения като тези от зад. 2 получаваме:

Отг. на зад. 3: I е сходящ $\Leftrightarrow p > 1, q \in \mathbb{R}$ или $p = 1, q > 1$.

(4) Зад. 4 Изследвайте за сходимост несобствения интеграл $I=\int_0^1 x^p \ln x\,dx$ $(p\in\mathbb{R})$.

Упътване: Особената точка е 0. (заради $\ln x$, а и защото може $p<0$)

Правим смяна на променливата $x=e^{-t}$, $t\in(+\infty,0)$ и получаваме, че $I=\int_{+\infty}^{0} e^{-pt}(-t)\,de^{-t} =$

$$=\int_{+\infty}^{0} e^{-pt}(-t)(-e^{-t})\,dt = \int_{+\infty}^{0} e^{-(p+1)t}\,t\,dt = -\int_{0}^{+\infty} e^{-(p+1)t}\,t\,dt \sim$$

$$\sim \int_{0}^{+\infty} e^{-(p+1)t}\,t\,dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{t}{e^{(p+1)t}}\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{0 не е особена точка}}}{\approx} \int_{1}^{+\infty} \frac{t}{e^{(p+1)t}}\,dt$$

Особена точка на последния интеграл е само $+\infty$ и той се изследва точно като интеграла I_2 от зад. 2.

Отг. на зад. 4: I е сходящ $\Leftrightarrow p>-1$.

Отг. на зад. 4: I е сходящ ...

Зад. 5 Пресметнете $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-2x+8)^5}}\,dx.$

Решение: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[(x-1)+1]^2}{\sqrt{[(x-1)^2+7]^5}}\,d(x-1) \overset{t=x-1}{=}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)^2}{\sqrt{(t^2+7)^5}}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t^2+7)+2t-6}{\sqrt{(t^2+7)^5}}\,dt =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(t^2+7)^3}}}_{\text{четна функция}}\,dt + 2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{(t^2+7)^5}}}_{\text{нечетна функция}}\,dt - 6\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(t^2+7)^5}}}_{\text{четна функция}}\,dt =$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(t^2+7)^3}}\,dt + 2.0 - 12\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(t^2+7)^5}}\,dt \overset{t=\sqrt{7}\,tgu}{=}$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(7tg^2u+7)^3}}\,d(\sqrt{7}\,tgu) - 12\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(7tg^2u+7)^5}}\,d(\sqrt{7}\,tgu) =$$

$$= \frac{2}{7}\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(tg^2u+1)^3}}\,d\,tgu - \frac{12}{49}\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(tg^2u+1)^5}}\,d\,tgu =$$

$$= \frac{2}{7}\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2u}\right)^3}}\,d\,tgu - \frac{12}{49}\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2u}\right)^5}}\,d\,tgu =$$

$$= \frac{2}{7}\int_{0}^{\pi/2} \cos^3u \cdot \frac{1}{\cos^2u}\,du - \frac{12}{49}\int_{0}^{\pi/2} \cos^5u \cdot \frac{1}{\cos^2u}\,du =$$

$$= \frac{2}{7}\int_{0}^{\pi/2} \cos u\,du - \frac{12}{49}\int_{0}^{\pi/2} \cos^3u\,du =$$

$$= \frac{2}{7}\sin u\Big|_0^{\pi/2} - \frac{12}{49}\int_{0}^{\pi/2} (1-\sin^2u)\,d\sin u =$$

$$= \frac{2}{7} - \frac{12}{49}\left(\sin u - \frac{\sin^3u}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{7} - \frac{12}{49}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{7} - \frac{8}{49} = \frac{6}{49}.$$

Отг. на зад. 5: $I = \frac{6}{49}.$

⑤ Упражнение: Пресметнете $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+4x+9)^5}}dx$

Отг. $I=\frac{26}{75}$.

Зад. 6 Пресметнете $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3}{e^{|2x-1|}}dx$

Решение: Полагаме $t=2x-1$, т.е. $x=\frac{t+1}{2}$.

$x\in(-\infty,+\infty)\Rightarrow t\in(-\infty,+\infty)$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\frac{t+1}{2}\right)^3}{e^{|t|}}d\frac{t+1}{2}=\frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t+1)^3}{e^{|t|}}d(t+1)=$$

$$=\frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^3+3t^2+3t+1}{e^{|t|}}dt=\frac{1}{16}\Bigg[\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{t^3+3t}{e^{|t|}}}_{\text{нечетна функция}}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{3t^2+1}{e^{|t|}}}_{\text{четна функция}}dt\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{16}\left[0+2\int_0^{+\infty}\frac{3t^2+1}{e^{|t|}}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{3t^2+1}{e^t}dt=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}(3t^2+1)e^{-t}dt=-\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}(3t^2+1)de^{-t}=$$

$$=-\frac{1}{8}\left[\frac{3t^2+1}{e^t}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-t}d(3t^2+1)\right]=-\frac{1}{8}\left[(0-1)-6\int_0^{+\infty}te^{-t}dt\right]=$$

при $t\to+\infty$ показателната функция расте по-бързо от степенната функция

$$=\frac{1}{8}\left[1+6\int_0^{+\infty}te^{-t}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\left[1-6\int_0^{+\infty}t\,de^{-t}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\left[1-6\frac{t}{e^t}\Big|_0^{+\infty}+6\int_0^{+\infty}e^{-t}dt\right]=\frac{1}{8}\left[1-6.(0-0)-6e^{-t}\Big|_0^{+\infty}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\left[1-6(0-1)\right]=\frac{7}{8}.$$ Отг. на зад. 6: $I=\frac{7}{8}$.

Упражнение: Пресметнете $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3}{e^{|3x+2|}}dx$ Отг. $I=-\frac{40}{81}$.

Зад. 7 Пресметнете несобствените интеграли:

а) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2-3}{x^4+9}\,dx$; б) $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx$.

Решение: а) $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}}{x^2+\frac{9}{x^2}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{3}{x}\right)^2-6}\,d\left(x+\frac{3}{x}\right)$.

Да изучим накратко поведението на функцията $f(x) = x + \frac{3}{x}$ при $x \in (0,+\infty)$. Имаме, че при $x \in (0,+\infty)$

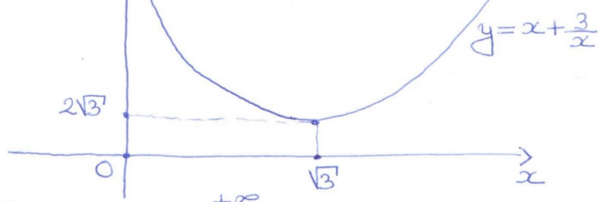
$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2-3}{x^2} = \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x^2}.$$

x	0		$\sqrt{3}$	
f'		$-$		$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

$f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

Освен това $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+}\left(x+\frac{3}{x}\right) = 0 + (+\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+\frac{3}{x}\right) = (+\infty) + 0 = +\infty$.



Тогава $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(x+\frac{3}{x})^2-6}\,d\left(x+\frac{3}{x}\right)=$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{(x+\frac{3}{x})^2-6}\,d\left(x+\frac{3}{x}\right)+\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{1}{(x+\frac{3}{x})^2-6}\,d\left(x+\frac{3}{x}\right)\overset{y=x+\frac{3}{x}}{=}$$

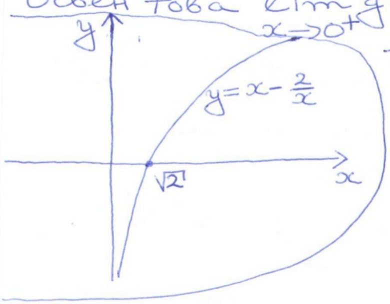
$$=\int\limits_{+\infty}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{y^2-6}\,dy+\int\limits_{2\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{1}{y^2-6}\,dy=$$

$$=-\int\limits_{2\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{1}{y^2-6}\,dy+\int\limits_{2\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{1}{y^2-6}\,dy=0.$$

Отг. на а): $I=0$.

б) $J=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{x^2+\frac{4}{x^2}}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(x-\frac{2}{x})^2+4}\,d\left(x-\frac{2}{x}\right).$

Да изследваме накратко поведението на функцията $g(x)=x-\frac{2}{x}$ при $x\in(0,+\infty)$. Имаме, че при $x\in(0,+\infty)$ $g'(x)=1+\frac{2}{x^2}>0$ и значи $g(x)$ е строго растяща в $(0,+\infty)$. Освен това $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.



Тогава $J=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(x-\frac{2}{x})^2+4}\,d\left(x-\frac{2}{x}\right)\overset{y=x-\frac{2}{x}}{=}$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y^2+4}\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\frac{y}{2})^2+1}\,d\frac{y}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{2}.$$

Отг. на б): $J=\frac{\pi}{2}$.