Зад. Пресметнете $I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx$ и $J_m = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \, dx$, $m \in \mathbb{N}$

Реш: Имаме, че $I_m \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\pi/2}^{0} \sin^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right) d\left(\frac{\pi}{2}-t\right) =$

$= \int_0^{\pi/2} \cos^m t \, dt = J_m$

Сл. $I_m = J_m$

При $m \geq 2$ имаме

$\int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x \cdot \sin x \, dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x \, d\cos x \overset{\text{по части}}{=} \underbrace{-\sin^{m-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2}}_{0}$

$+ \int_0^{\pi/2} \cos x \, d\sin^{m-1} x = (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x \, dx =$

$= (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cdot (1-\sin^2 x) \, dx = (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m$

$\Rightarrow I_m = (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m$

$\Rightarrow I_m = \frac{(m-1)}{m} I_{m-2}$ за $m \geq 2$

ако $m = 2n$, то $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} =$

$= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \ldots =$

$$= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$\left(I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\right)$$

(по определение: $(2n)!! = 2n.(2n-2)(2n-4)\ldots 6.4.2$
$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1) \ldots 5.3.1$)

Ако $m = 2n+1$, то $I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} =$

$$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3} I_1$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \qquad \left(I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \cos x \Big|_{\pi/2}^{0} = 1-0 = 1\right)$$

Значи $I_m = J_m = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi}{2}, & m\text{-четно} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, & m\text{-нечетно} \end{cases}$

Зад.

а) $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin(nx)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$

б) $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos(nx)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$

Реш.: а) $I_n = \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin(nx)\,d(nx) = \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, d\cos(nx)$

$$= -\frac{1}{n}\left(\cos^n x \cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos(nx)\, d\cos^n x =$$

$$= -\frac{1}{n}(0-1) + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos(nx) \,.\, n \,.\, \cos^{n-1} x \,.\, (-\sin x)\, dx$$

$$= \frac{1}{n} - \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \,.\, \cos nx \,.\, \sin x \, dx \quad (*)$$

Събираме I_n с $(*)$ и

$$2I_n = \frac{1}{n} + \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \,(\underbrace{\sin(nx)\cos x - \sin x \cos(nx)}_{\sin((n-1)x)})\, dx$$

$$= \frac{1}{n} + \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \,.\, \sin(n-1)x \, dx = \frac{1}{n} + I_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + I_{n-1}\right)$$

Значи $I_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + I_{n-2}\right)\right) =$

$$= \frac{1}{2^2}\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n-1} + I_{n-2}\right) = \frac{1}{2^3}\left(\frac{2^2}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n-2} + I_{n-3}\right)$$

$$\ldots = \frac{1}{2^n}\left(\frac{2^{n-1}}{n} + \frac{2^{n-2}}{n-1} + \frac{2^{n-3}}{n-2} + \ldots + \frac{1}{1} + \overset{0}{I_0}\right)$$

Отг. $I_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{n-1} + \frac{2^n}{n}\right)$

б) За упражнение

Hints: Изразете J_n по втора начин, както в а)

Отг: $J_n = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

Зад. За упражнение

Намерете лицето на фигурата, заградена от параболата $y = x^2$ и правата $x + y = 2$

Зад. Нека m е общата допирателна към параболите $f(x) = x^2 + 4x$ и $g(x) = x^2 - 8x$

Намерете лицето на фигурата, заградена от двете параболи и правата m.

Реш: Допирателната към $f(x)$ в $(x_1, f(x_1))$ е $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$

т.е. $y = (x_1^2 + 4x_1) + (2x_1 + 4)(x - x_1)$

$y_1 = (2x_1 + 4)x - x_1^2$

към $g(x)$ в $(x_2, g(x_2))$ е

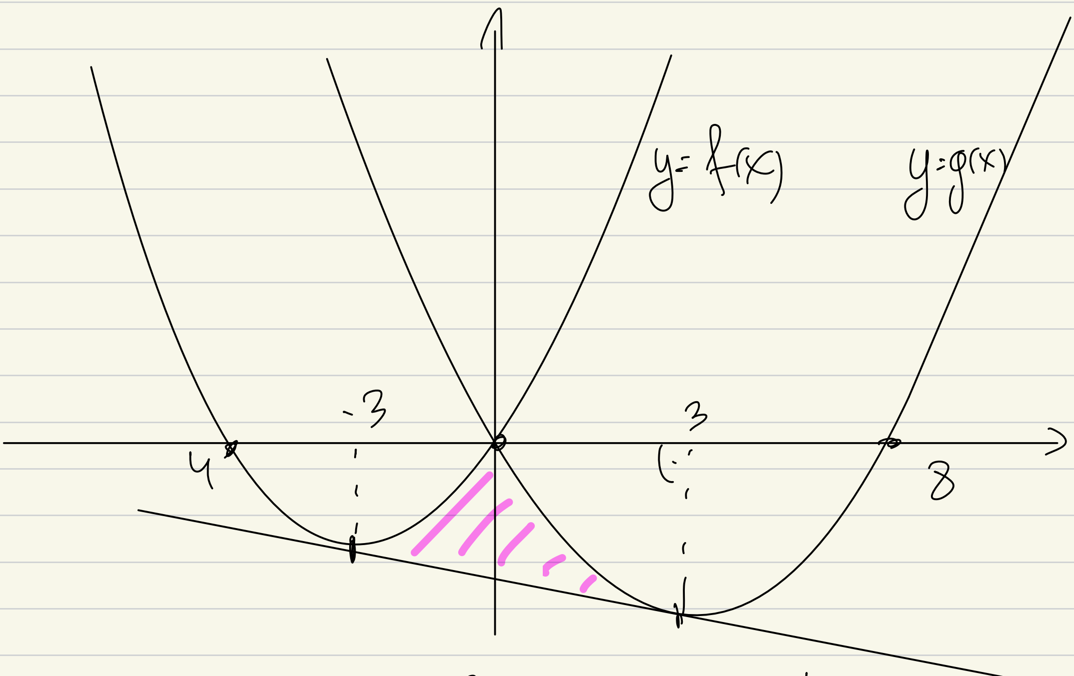
$y = g(x_2) + g'(x_2)(x - x_2)$, т.е.

$y_2 = (2x_2 - 8)x - x_2^2$

Сега искаме те да съвпадат, например с $y_1(0) = y_2(0)$ и $y_1(1) = y_2(1)$ имаме

$$\begin{cases} x_1^2 = x_2^2 \\ 2x_1 + 4 = 2x_2 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 2x_1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \; y = -2x - 9$



$$S(T) = \int_{-3}^{0} f(x) - m\,dx + \int_{0}^{3} g(x) - m\,dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} (x^2+4x)-(-2x-9)\,dx + \int_{0}^{3} (x^2-8x)-(-2x-9)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{0} (x+3)^2\,d(x+3) + \int_{0}^{3} (x-3)^2\,d(x-3) =$$

$$= \frac{1}{3}(x+3)^3\Big|_{-3}^{0} + \frac{1}{3}(x-3)^3\Big|_{0}^{3} =$$

$$= \frac{3^3}{3} + \frac{3^3}{3} = 18$$

Зад. Да се намери лицето и дължината на границата на фигурата, ограничена от кривите

$y = 2|x|$ и $y = 3-x^2$

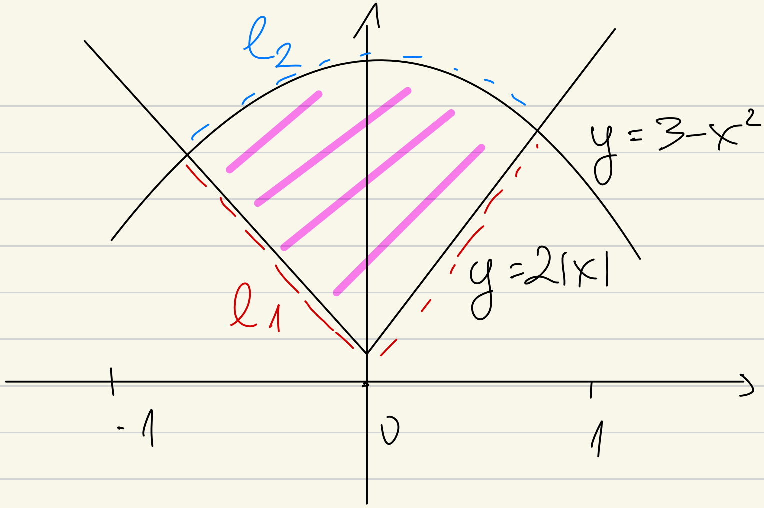
Реш: 1) намиране пресечни точки:

1) $x \geq 0: x^2+2x-3=0 \Rightarrow x_1=-3,\ x_2=1 \Rightarrow x=1$

2) $x \leq 0: x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_1=3,\ x_2=-1 \Rightarrow x=-1$

$$S = \int_{-1}^{1} |2|x|-(3-x^2)|\,dx = \int_{-1}^{1} (\underbrace{3-x^2-2|x|}_{\text{четна}})\,dx =$$

$$= 2\int_{0}^{1} (3-x^2-2x)\,dx = \frac{10}{3}$$



За дължината, намираме l_1 и l_2

с формулата $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

$l_1: y=2|x| \quad y' = 2\,\mathrm{sign}(x)$

$$l_1 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(2\,\mathrm{sign}(x))^2} = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+4}\,dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{5}\,dx = 2\sqrt{5}$$

$l_2: \ y = 3-x^2 = y' = -2x$

$$l_2: \int_{-1}^{1}\sqrt{1+(2x)^2}\,dx = 2\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx \overset{x=2y}{=} \int_0^2\sqrt{1+y^2}\,dy$$

$$= y\sqrt{1+y^2}\,\Big|_0^2 - \int_0^2 y\, d\sqrt{1+y^2} =$$

$$= 2\sqrt{5} - \int_0^2 y\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = 2\sqrt{5} - 2\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy$$

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^2$$

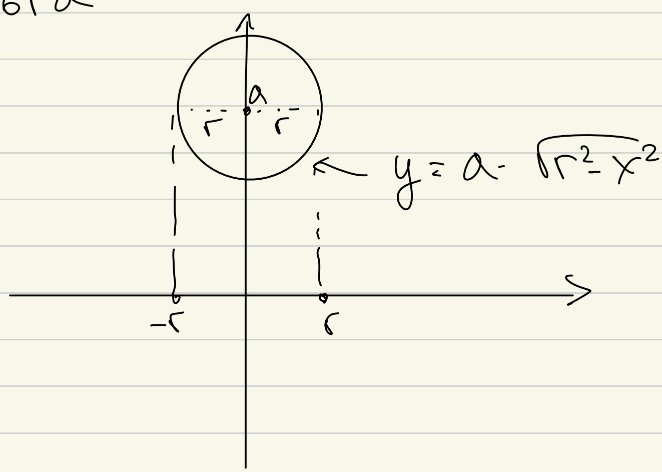
$$= 2\sqrt{5} - 2\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

$$\left(\int \frac{1}{\sqrt{1+ax^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\sqrt{a}\,x+\sqrt{1+ax^2}\right)\right)$$

Зад. За упражнение? дължината на кривата, която правата $y=8$ отсича от параболата $y=x^2+2x$

Зад. Намерете обема на тялото, което се получава като завъртим кръг с радиус r около ос, лежаща в равнината на кръга и намираща се на разстояние a $(a>r)$ от центъра на кръга

Реш:



Тялото се нарича тор (поничка, автомобилна гума)

Формула: $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

Окр. има у-е $(x-0)^2 + (y-a)^2 = r^2$

$x^2 + (y-a)^2 = r^2 \Leftrightarrow (y-a)^2 = r^2 - x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2} \qquad x \in [-r, r]$

$V(B) = \pi \int_{-r}^{r} \left(a - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx + \pi \int_{-r}^{r} \left(a + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$

$= 4a\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2 \cdot 4a\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx =$

$x = r\sin t$

$= 8a\pi r \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\; d\sin t = 8a\pi r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}$

$= 8a\pi r^2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{|\cos t| \cos t}_{}\, dt = 4a\pi r^2 \int_0^{\pi/2} 1 + \cos 2t\, dt$

$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$

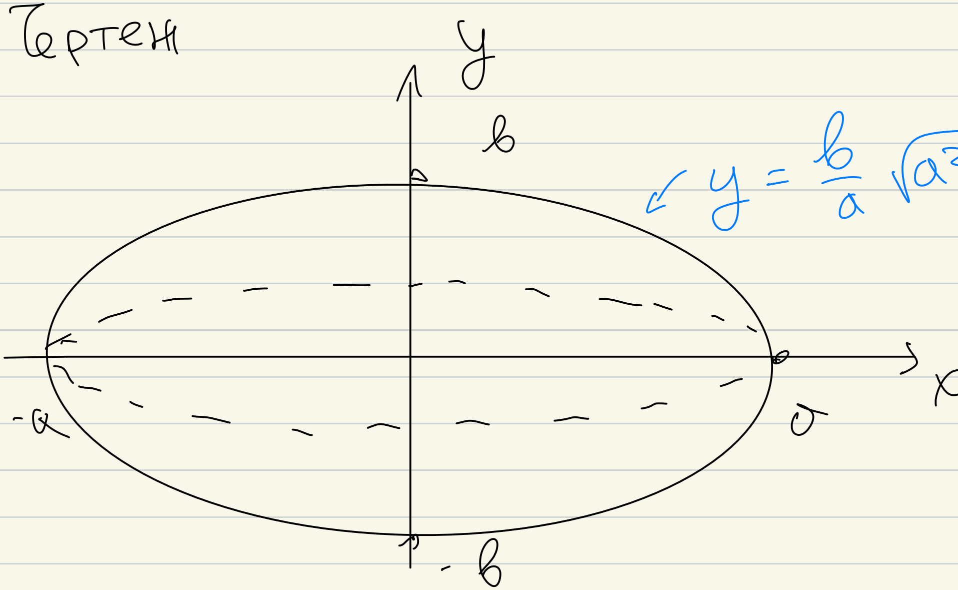
$= 4a\pi r^2 \int_0^{\pi/2} 1\,dt + 2a\pi r \int_0^{\pi/2} \cos 2t\; d(2t)$

$$= 4a\pi r^2 \left(t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\underbrace{\sin 2t \Big|_0^{\pi/2}}_{0} \right) =$$

$$= 2a\pi^2 r^2$$

За упражнение: Намерете обема на елипсоида, получен при въртенето на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ около абсцисната ос

Чертеж



$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Отг: $\frac{4}{3}\pi a b^2$