Консултация

23.11

№3

Консултация - К3
23.11

Зад. 1

Нека $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$, където

$a_1 = (1, 2, 3, 4)$ $a_2 = (4, 3, 2, 1)$

$a_3 = (3, 1, -1, -3)$ и

$$W: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

? базиси на U, W, $U \cap W$, $U + W$

Реш: ? базис на U

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-4), (-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ \cancel{0} & \cancel{-5} & \cancel{-10} & \cancel{-15} \end{pmatrix} (:-5) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} a_1 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to b_1 \end{matrix} \Rightarrow a_1, b_1 \text{ — базис на } U$$

? базис на W ! ФСР

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \swarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

I начин

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left| \begin{aligned} x_1 &= p \\ x_2 &= p \\ x_3 &= q \\ x_4 &= q \end{aligned} \right.$$

* директно заместване и изразяване

II начин

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \\ \swarrow \\ (1) \\ \swarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & p \\ & 1 & & & p \\ & & 1 & & q \\ & & & 1 & q \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $p = 1,\ q = 0 :\ (1, 1, 0, 0) = c_1$

$p = 0,\ q = 1 :\ (0, 0, 1, 1) = c_2$

$\Rightarrow c_1, c_2$ – базис на W

? $U + W$ – линейни обвивки

$$U + W = \ell(\underbrace{a_1, b_1}_{U}, \underbrace{c_1, c_2}_{W})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ (-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{array} \Rightarrow \text{базис на } U+W:$$

$$d_1, d_2, d_3$$

! Правим проверка, искаме:

$$\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

$$3 = 2 + 2 - \dim U \cap W$$

$\Rightarrow$ искаме $\dim U \cap W = 1$

$U \cap W$? – **системи**

предст. U като система:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 5 \\ (-2) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = p + 2q \\ x_2 = -2p - 3q \\ x_3 = p \\ x_4 = q \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} p = 1, q = 0 \\ (1, -2, 1, 0) \\ p = 0, q = 1 \\ (2, -3, 0, 1) \end{array}$$

$$U: \left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} U\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ W\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (-2) \; (-1) \\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} -x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = p \\ x_2 = p \\ x_3 = p \\ x_4 = p \end{array} \right. \Rightarrow$$ базис на $U \cap W$

$p = 1 : \; (1, 1, 1, 1)$

Зад. 2

Нека $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

разгл. $\varphi : M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$, опр. с

$$\varphi(X) = AX + XB$$

пок, че φ е линеен оператор и намерете матр. му спр. станд. базис $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$

Реш: Нека $Y, X \in M_2(\mathbb{Q})$

$$\varphi(X+Y) = A(X+Y) + (X+Y)B$$

$$= \underbrace{AX} + \underbrace{AY} + \underbrace{XB} + \underbrace{YB} =$$

$$= \varphi(X) + \varphi(Y)$$

Нека $\lambda \in \mathbb{Q}$

$$\varphi(\lambda X) = A(\lambda X) + (\lambda X)B =$$

$$\lambda AX + \lambda XB = \lambda(AX + XB) = \lambda\varphi(X)$$

$\Rightarrow \varphi$ е лин. оп.

? базис

$$\varphi(E_{11}) = AE_{11} + E_{11}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(E_{12}) = AE_{12} + E_{12}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

за матрицата, изписваме по стълбове:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \text{матрица на } \varphi$$

Зад. 3

Л. оп. φ има матр $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}$$

? базиси на $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi$

Реш: имаме $a_1 = (-1, 0, 1, -1)$
$a_2 = (-2, 0, 2, -2)$
$a_3 = (-3, 1, 2, -2)$
$a_4 = (-2, 1, 1, 1)$

$\operatorname{Im}\varphi$)

$$\varphi(V) = \operatorname{Im}\varphi = \ell(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (-2) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (-3)\,(-2) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}$$

a_1, a_3, a_4 – базис на $\operatorname{Im}\varphi$

$\operatorname{Ker}\varphi$ ⤵

реш хомог. с-ма $Ax = \mathbb{O}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) & (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (-1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi : \left| \begin{array}{l} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = -2p \\ x_2 = p \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} p = 1 \\ (-2, 1, 0, 0) = d_1^{\varphi} \end{array}$$

↳ базис на $\operatorname{Ker}\varphi$

? $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$ – трябва ни $\operatorname{Im}\varphi$ като система (ФСР)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (-1)\ (1) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (1)\ (-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(1, 1, 1, 0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi : \begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ няма $\Rightarrow$ дефφ

$\Rightarrow \ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\theta\}$

$\Rightarrow \ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi = V$

(от т-мата за ранга и дефекта)

$$d(\varphi) + r(\varphi) = \dim V$$

$\quad\; \overset{\shortparallel}{\dim \ker\varphi}$

все пак да проверим – искаме $\ker\varphi$ като линейна обвивка

$$\begin{array}{c} d_1 \\ * \\ * \\ * \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (-1)\ (1) \end{array} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi = \ell(\alpha_1, \ldots) = V$$

Успех!