Смяна на базис

Дуални пространства

Зад. Нека $V = \mathbb{R}^2$ с базис e_1, e_2

Нека $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = -2e_1 - e_2$

$\varphi : V \to V$ - оператор, опр. чрез

$\varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 e_1 + (-x_1 + 2x_2) e_2$

Пок., че φ е л.оп., и че f_1, f_2 е базис на V. ? матр. на φ спрямо базиса f_1, f_2

Реш: Матрица на φ спр. e_1, e_2:

$\left.\begin{aligned} \varphi(e_1) &= e_1 - e_2 \\ \varphi(e_2) &= 2e_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ матр. на φ е $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\dim V = 2$, f_1, f_2 базис $\Leftrightarrow$ f_1, f_2 - ЛНЗ ✓

$\varphi(f_1) = \varphi(e_1 + e_2) = e_1 + e_2 = f_1 = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2$

$\varphi(f_2) = \varphi(-2e_1 - e_2) = -2e_1 = a(e_1 + e_2) + b(-2e_1 - e_2)$

$\begin{cases} -2 = a - 2b \\ 0 = a - b \end{cases} \Rightarrow a = b = 2$

$-2e_1 = 2\underbrace{(e_1 + e_2)}_{f_1} + 2\underbrace{(-2e_1 - e_2)}_{f_2} = 2f_1 + 2f_2$ $\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1 Смяна на базис

Матрица на прехода:

<u>Опр.</u> Нека V - крайномерно линейно пространство над полето F, $\dim V = n$

$e_1, \ldots, e_n$ - един базис на V

$f_1, \ldots, f_n$ - друг базис на V

$$f_1 = \tau_{11} e_1 + \tau_{21} e_2 + \ldots + \tau_{n1} e_n$$
$$f_2 = \tau_{12} e_1 + \tau_{22} e_2 + \ldots + \tau_{n2} e_n$$
$$\vdots$$
$$f_n = \tau_{1n} e_1 + \tau_{2n} e_2 + \ldots + \tau_{nn} e_n$$

$(\tau_{ij} \in F,\ i,j = 1, \ldots, n)$

Тогава матрицата на прехода от базиса **e** към базиса **f** има вида:

! записваме коорд на $f_1, \ldots, f_n$ спрямо $e_1, \ldots, e_n$ по стълбове!

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \cdots & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

Промяна на коорд. на в-р при смяна на базиса:

Нека V - КМЛП над полето F

$\dim V = n$

Нека $e_1, .., e_n$ - един базис на V

$f_1, .., f_n$ - друг базис на V

координати в единия базис

Нека $v = \underline{x_1 e_1 + .. + x_n e_n} =$

$= \underline{y_1 f_1 + .. + y_n f_n}$

$(x_i, y_i \in F,\ i = 1..,n)$

в другия базис

? Връзка между $(x_1, .., x_n)$ и $(y_1, .., y_n)$?

$$T_{e\to f}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ (T. нови коорд. = стари коорд.)

Hint: Как да запомним кое към кое е, ако имаме $T_{e\to f}$, v_e, v_f, то

v_e – коорд. спр. e; v_f – коорд. спр. f

$T_{e\to f} \cdot v_f = v_e \qquad v_e T_{e\to f} = v_f$

буквите трябва да са еднакви по редицата

ако имаме $T_{f\to e}$

$T_{f\to e} \cdot v_e = v_f$

Пример: V – 1-мерно пр-во, базис e

$f = 1000 \cdot e = e \cdot (1000) \quad (f = e \cdot T)$

матрица (1000)

и $v = x \cdot e = y \cdot f$

x – дълж. в метри

y – дълж. в километри

$\Big\} \Rightarrow 1000\, y = x$

$T y = x$

Промяна на базиса на лин. изображение при смяна на базиса

$\varphi: V \to V$ – лин. оператор

$e_1, \dots, e_n$ – базис

$f_1, \dots, f_n$ – нов базис с матр. на прехода от e към f – $T_{e \to f}$

φ – матр. A спрямо $e_1, \dots, e_n$

? Каква е матр. на φ спрямо $f_1, \dots, f_n$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "A", "\varphi"'] & A.x \text{ (стар базис)} \arrow[d, "T^{-1}\ (T_{f \to e})"] \\
y \arrow[u, "T_{e \to f}"] \arrow[r, "\varphi"] & B.y \text{ (нов базис)}
\end{tikzcd}$$

$T^{-1} A T y = B y$

$\Rightarrow B = T^{-1} A T$

Зад Нека $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е оператор, определен чрез

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3,$
$2x_1 - x_2)$

Нека $a_1 = (1, 2, 1)$ $a_2 = (-1, 1, 1)$ $a_3 = (2, -1, -1)$

Пок, че φ е л.оп., и че a_1, a_2, a_3 е базис на $\mathbb{R}^3$. Нам. матр. на φ спр. a

Реш: a_1, a_2, a_3 - базис $\Leftrightarrow$ $rk = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \dots \quad r = 3 \Rightarrow \text{базис}$$

Матр. на φ спр. станд. базис

$$\left.\begin{aligned} \varphi(1,0,0) &= (2\ 1\ 2) \\ \varphi(0,1,0) &= (-1\ 1\ 1) \\ \varphi(0,0,1) &= (1, -2, 0) \end{aligned}\right\} = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\leftarrow$} & & \rotatebox{90}{$\leftarrow$} \\ \varphi(e_1) & & \varphi(e_3) \end{array}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

$$\begin{matrix} \underbrace{}_{a_1} & \underbrace{}_{a_2} & \underbrace{}_{a_3} \end{matrix}$$

$(T \mid E) \sim \ldots \sim (E \mid T^{-1})$ или

$(T \mid AT) \sim \ldots \sim (E \mid \underbrace{T^{-1}AT}_{B})$

$$AT = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -3 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -4 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -1 & 0 & -1 & 8 & -14 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & -8 & 14 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right) \begin{matrix} (-3) \; (-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & 1 & -2 \\ & 1 & & -2 & -11 & 20 \\ & & 1 & -1 & -7 & 13 \end{array}\right) \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -11 & 20 \\ -1 & -7 & 13 \end{pmatrix}$$

Проверка: Следа на квадр. матр. - сума от диаг. елем.

$$tr(A) = tr(T^{-1} A T)$$

$$1 + 2 + 0 = 1 + (-11) + 13$$

Зад. Нека $a_1 = (1, 2, 1)$ $a_2 = (2, 0, 1)$ $a_3 = (1, 0, 1)$ и $b_1 = (4, 2, 5)$ $b_2 = (1, 1, 0)$ $b_3 = (0, 0, 1)$

Док, че a_1, a_2, a_3 обр. базис на $\mathbb{R}^3$ и ? матр на φ, определен чрез $\varphi(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, 3$ спр. станд. базис

Реш: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - ЛНЗ $\Rightarrow$ базис

сигма

Нека φ, σ - линейни оператори

$$\begin{tikzcd}
 & e \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\
a \arrow[rr, "\varphi"'] & & b
\end{tikzcd}$$

$\psi(e_i) = a_i$

$\sigma(e_i) = b_i$

$\sigma(e_i) = b_i = \varphi(a_i) =$

$= \varphi(\psi(e_i)) =$

$= (\varphi \circ \psi)(e_i)$

$$\sigma = \varphi \circ \psi$$

$$\left.\begin{aligned} &A \text{ - матр. на } \psi \\ &B \text{ - матр на } \sigma \\ &C \text{ - матр. на } \varphi \end{aligned}\right\} \text{спр. базиса } e_1, e_2, e_3 \Rightarrow B = C.A$$

$B = C.A \Rightarrow B^t = (CA)^t = A^t . C^t$

$\Rightarrow (A^t \mid B^t) \sim \dots \sim (E \mid C^t)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_5 \quad (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

C^t

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Зад. Нека $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ е лин. изобр, за което $g(1,0,0) = 1$, $g(1,1,0) = 3$, $g(1,1,1) = 7$

Намерете $g(1,2,4)$

$g(0,1,0) = g(1,1,0) - g(1,0,0)$..

$g(0,0,1) = g(1,1,1) - g(1,0,0)$ - ..

$g(1,2,4) = 1 \cdot g(1,0,0) + 2\,g(0,2,0)$ ...

2. Дуални пространства

Деф / Дуално пр-во:

V - л.п. над $\mathbb{R}$

$V^* = \{ f: V \to \mathbb{R} \mid f$ - лин. изобр $\}$

$\hookrightarrow$ дуално пространство

елементите на V^* наричаме линейни функционали

формални дефиниции:

Нека V - л.п. над полето F

Тогава $V^* = Hom(V, F)$ е дуалното пр-во на V

Нека V - л.п. над полето F

f е линеен функционал $\Leftrightarrow f \in V^*$

Пр.: $V = \mathbb{R}^n$, $V^* = \{ f(x_1, .., x_n) = a_1x_1 + .. + a_nx_n \mid a_1, .., a_n \in \mathbb{R} \}$

Тв Ако $\dim V = n$, то $\dim V^* = n$

Дуален базис: $e_1, \dots, e_n$ - базис на V, $f_1, \dots, f_n \in V^*$ наричаме дуален базис на $e_1, \dots, e_n$, ако

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Пр: $(1\ 0 \dots 0), (0\ 1 \dots 0) \dots (0, \dots, 1)$ - станд. базис на V

Дуален базис: $f_1(x_1, \dots, x_n) =$

$= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$

$f(1\ 0 \dots 0) = 1$ $\quad f(0\ 1 \dots 0) = 0 \dots = f(0 \dots 1)$

$(a_{11} = 1)$ $\quad (a_{12} = 0 = a_{13} \dots)$

$f_1(x_1, \dots, x_n) = x_1$

$f_2(x_1, x_2 \dots x_n) = x_2, \dots f_n(x_1, \dots, x_n) = x_n$

$f_1(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1 \overbrace{f_1(e_1)}^{1} + \dots + x_n \overbrace{f_1(e_n)}^{0}$

$= x_1$

Зад. Нека $v_1 = (1, 1, -3)$ $v_2 = (0, 1, -1)$ $v_3 = (0, 3, -2)$. Док, че v_1, v_2, v_3 обр. базис на тримерното пр-во V. ? дуален базис на v_1, v_2, v_3

Реш: v_1, v_2, v_3 ЛНЗ => базис

Дуален базис: f_1, f_2, f_3

$f_1(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$

$f_2(x_1, x_2, x_3) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$

$f_3(x_1, x_2, x_3) = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ \underbrace{a_{13}}_{f_1} & \underbrace{a_{23}}_{f_2} & \underbrace{a_{33}}_{f_3} \end{pmatrix}$$

f_1, f_2, f_3 - дуален базис на v_1, v_2, v_3 за числата a_{ij}

$1 = f_1(v_1) = f_1(1, 1, -3) = a_{11} + a_{12} - 3a_{13}$

$0 = f_2(v_2) = f_2(0, 1, -1) = \quad a_{12} - a_{13}$

$0 = f_3(v_3) = f_3(0, 3, -2) = \quad 3a_{12} - 2a_{13}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{система за } f_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-1)\,(-3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) (1)\,(2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1 \\ f_2(x_1,x_2,x_3)=-7x_1-2x_2-3x_3 \\ f_3(x_1,x_2,x_3)=2x_1+x_2+x_3 \end{cases}$$

дуален базис на V

Зад. Нека $V=\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ и за всяко $\alpha\in\mathbb{R}$ и всяко $f\in V$ определяме

$\varphi_\alpha(f)=f(\alpha)$

Док, че $\varphi_\alpha\in V^*$ и намерете коорд. на φ_α спрямо базиса на V^*, дуален на $1, x, x^2$

$\varphi_\alpha : V\to\mathbb{R}$. Остава да пров. линейност: $f,g\in V$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$\varphi_\alpha(f+g)=(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)$

$=\varphi_\alpha(f)+\varphi_\alpha(g)$

$\varphi_\alpha(\lambda f) = (\lambda f)(\alpha) = \lambda \cdot f(\alpha) = \lambda \varphi_\alpha(f)$

$\Rightarrow \varphi_\alpha$ - лин. изобр. $\Rightarrow \varphi_\alpha \in V^*$

$1, x, x^2$ - базис на V

Дуален базис:

$g_0(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = b_0$

$g_1(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = b_1$

$g_2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) b_2$

$\varphi_\alpha(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = b_0 + b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 =$

$= g_0(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) + \alpha g_1(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$

$+ \alpha^2 g_2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$

$\varphi_\alpha(f) = g_0(f) + \alpha \cdot g_1(f) + \alpha^2 g_2(f)$

за всяко f

$\varphi_\alpha(f) = 1 \cdot g_0 + \alpha \cdot g_1 + \alpha^2 \cdot g_2$

$\Rightarrow$ коорд. на φ_α спр. базиса

g_0, g_1, g_2 са $1, \alpha, \alpha^2$

Зад. Нека V е л.п., а U – негово подм-во. Док, че $U^\circ = \{f \in V^* \mid \forall u \in U : f(u) = 0\}$ е л.п. ? базис на U°, ако

$U = \ell\{(1, 0, -1, 2), (2, 3, 1, 1)\}$

Реш: U° – анихилатор на U

$f, g \in U^\circ, \lambda \in \mathbb{R}$. Искаме $f+g \in U^\circ$

$\lambda f \in U^\circ$

$f, g \in V^*$ и $\forall u \in U$ $f(u) = 0 = g(u)$

$f+g \in V^*, u \in U : (f+g)(u) = \underbrace{f(u) + g(u)}_{=0}$

$\Rightarrow \forall u \in U$ $(f+g)u = 0 \Rightarrow f+g \in U^\circ$

$\lambda f \in V^*, \forall u \in U : (\lambda f)(u) = \lambda f(u) = 0$

$\Rightarrow$ л. п.

Кога $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 \cdot \overset{?}{\in} U^\circ$

$f(1, 0, 1, -2) = f(2, 3, 1, 1) = 0$

Условието $f \in U^\circ$ е следната с-ма

$a_1 - a_3 + 2a_4 = 0 = 2a_1 + 3a_2 + a_3 + a_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & b-2c \\ & \ddots & & -b+c \\ & & 1 & b \\ & & & c \end{array}\right)$$

$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \{(b-2c, -b+c, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \{b(1,-1,1,0) + c(-2,1,0,1) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$

U^0 има базис: $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 - x_2 + x_3$

$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = -2x_1 + x_2 + x_4$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{реш. са точно } U$$

Опр./ Нека V – л.п. над F

Нека $\emptyset \neq U \subseteq V$.

$$U^0 = \{ f \in V^* \mid \forall u \in U \; f(u) = 0 \}$$

се нарича анихилатор на U

Опр./ Нека V – л.п. над F

Нека $\emptyset \neq U \subseteq V^*$

$$U_0 = \{ v \in V \mid \forall u^* \in U \; u^*(v) = 0 \}$$

се нарича анулатор на U