Допълнително

$a_1=(3,1,5,4)$ $a_2=(12,-7,4,11)$ $a_3=(2,-3,-2,1)$

$v=(8,-1,\lambda+6,\lambda+7)$ $\lambda\in\mathbb{Q}$

За кои стойности на λ v може да се представи по повече от един начин като лин. комбинация на в-рите a_1, a_2 и a_3?

Реш: Искаме с-мата

$$\begin{cases} 3x_1+12x_2+2x_3=8 \\ x_1-7x_2-3x_3=-1 \\ \vdots \end{cases}$$

да бъде неопределена

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 12 & 2 & 8 \\ 1 & -7 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & \lambda+6 \\ 4 & 11 & 1 & \lambda+7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 33 & 11 & 11 \\ 1 & -7 & -3 & -1 \\ 0 & 39 & 13 & \lambda+11 \\ 0 & 39 & 13 & \lambda+11 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:11 \\ \\ |:13 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & \frac{\lambda+11}{13} \end{array}\right) \begin{array}{l} (3)\ (-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda-2}{13} \end{array}\right)$$

съвместима $\Leftrightarrow$ $\frac{\lambda-2}{13}=0$

(и неопределена)

$\Rightarrow \lambda=2$

λ=2: търсим решения (трябва да покажем 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & p \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) 5 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 2-2p \\ & 1 & & p \\ & & 1 & 1-3p \end{array}\right) \Rightarrow (2-2p, p, 1-3p)$$

$\forall p \in \mathbb{Q}$

полето е $\mathbb{Q}$

Примерни реш: $p=0$, $p=1$

$(2, 0, 1)$

$(0, 1, -2)$

Неравенство на триъгълника

$$|u+v| \leq |u| + |v|$$

Д-во:

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v \rangle =$$

$$= \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle =$$

$$= |u|^2 + \underbrace{2\langle u,v \rangle}_{\leq 2|u||v| \text{ Коши-Шварц}} + |v|^2 \leq$$

$$\leq |u|^2 + 2|u|.|v| + |v|^2$$

Неравенство на Коши-Шварц

$|\langle u,v\rangle| \leq |u|\cdot|v|$

Д-во:

$$\Gamma\begin{vmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow |u|^2|v|^2 - |\langle u,v\rangle|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow |u|^2|v|^2 \geq |\langle u,v\rangle|^2$$

$$|u|\cdot|v| \geq |\langle u,v\rangle|$$

Малко теория:

* Обратими линейни изображения

Опр.| Нека V, W - л.п. над полето F и $\varphi: V \to W$ (или $\varphi \in Hom(V,W)$)

φ е обратимо лин. из., ако

$\exists \psi: W \to V$: $\varphi\cdot\psi = id_W$, $\psi\cdot\varphi = id_V$

За теоретични задачи с ЛЗ/ЛНЗ директно използваме дефиницията за ЛЗ/ЛНЗ

6.2 ЛЗ или ЛНЗ са образите на ЛНЗ вектори при обратимо лин. изобр. ?

Реш: Нека V, W – л.п. над F, $\dim V = n$

$\varphi : V \to W$ – обратимо

Нека $k \in \mathbb{N} : k \leq n$ и нека

$v_1, \dots, v_k \in V$ – ЛНЗ

Допускаме, че образите им са ЛЗ, т.е.

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in F : (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0)$

$\lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2) + \dots + \lambda_k \varphi(v_k) = \theta \; / \varphi^{-1}$

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \theta \Rightarrow v_1, \dots, v_k$ ЛЗ

противоречие

$\Rightarrow \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)$ – ЛНЗ

(*) $\operatorname{Ker} \varphi = \{\theta\} \Leftrightarrow \varphi$ – инективно

$\Rightarrow$ Нека $u, v \in V : \varphi(u) = \varphi(v)$

$\Rightarrow \theta = \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi(u - v)$

$\Rightarrow u - v = \theta \Rightarrow u = v \Rightarrow \varphi$ – инекция

② $\{\theta\} \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$ $(\theta \in \mathrm{Ker}\,\varphi)$

Нека $v \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow \varphi(v) = \theta = \varphi(\theta)$

но φ - инекция $\Rightarrow$ $v = \theta$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi = \{\theta\}$

6.1 ЛЗ или ЛНЗ са образите на ЛЗ в-ри при обр. лин изобр. ?

Допускаме, че са ЛНЗ

$\forall \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k : (\lambda_1, .., \lambda_k) \neq (0, .., 0)$

$\lambda_1 \varphi(v_1) + .. + \lambda_k \varphi(v_k) \neq \theta$ $/ \varphi^{-1}$

$\lambda_1 v_1 + .. + \lambda_1 v_k \neq \theta \Rightarrow v_1, .. v_k$ ЛНЗ ↯

$\Rightarrow \varphi(v_1), .., \varphi(v_k)$ - ЛЗ

6.3 - като 6.2 (ЛНЗ са)

6.4 обратима

6.5 $\{\theta\}$

6.6 ако $\dim V = n$ $(\varphi : V \to W) \Rightarrow r = n$

6.7 0

6.8 V

* Детерминанти

3.1 нека $a'_s = a_{s1} + a_{s2}$

$$\det(A) = \det(a_1, \ldots, a'_s, \ldots, a_n) =$$
$$= \det(a_1, \ldots, a_{s1} + a_{s2}, \ldots a_n) =$$
$$= \det(a_1, \ldots, a_{s1}, \ldots a_n) + \det(a_1, \ldots, a_{s2}, \ldots a_n)$$

полилинейност

3.2

$$A' = \{ a'_s = \lambda a_s \}$$

$$\det(A') = \det(a_1, \ldots, a'_s, \ldots a_n) =$$
$$= \det(a_1, \ldots, a'_s, \ldots, a_n) =$$
$$= \det(a_1, \ldots, \lambda a_s, \ldots, a_n) =$$

= полилинейност

$$= \lambda \det(a_1, \ldots, a_s, \ldots, a_n) =$$
$$= \lambda \det(A)$$

3.7 $a_s = \lambda a_k + \mu a_p$

$$\det(A) = \det(a_1, \ldots a_k, \lambda a_k, \ldots a_n) + \underbrace{\det(a_1, \ldots, \mu a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n)}_{=0 \text{ (от антисиметричност)}} = 0$$

(*) Адюнктирано количество

$A_{ji} = (-1)^{j+i} \Delta_{ji}$

Т-ма) $\det A = a_{j1} A_{j1} + a_{j2} A_{j2} + \dots + a_{jn} A_{jn}$

Д-во: имаме, че

$a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}) = (a_{j1}, 0, \dots, 0) +$
$+ (a_{j2}, 0 \dots 0) + (0, 0, \dots, a_{jn})$

Да положим

$x_1 = (a_{j1}, 0, \dots, 0)$
$x_2 = (0, a_{j2}, \dots, 0)$
$\vdots$
$x_n = (0, 0, \dots, a_{jn})$

и от полилинейност

$\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) =$
$= \det(a_1, \dots, x_1 + \dots + x_n, \dots, a_n) =$
$= \det(a_1, \dots, x_1, \dots, a_n) + \dots + \det(a_1, \dots, x_n, \dots a_n)$
$= a_{j1} A_{j1} + \dots + a_{jn} A_{jn}$

фалшиво развитие

$$a_{i1}A_{s1} + \dots + a_{in}A_{sn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{in} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$