3. Линейни пространства

Припомняме си дефиницията:
Нека F-поле и $V \neq \emptyset$ (непр. мн-во), в което са въведени следните операции:

$$+ : V \times V \to V, \ (u, v) \mapsto u+v \in V$$

и

$$\cdot : F \times V \to V, \ (\lambda, v) \mapsto \lambda v \in V$$

Казваме, че V е линейно пространство над (полето) F, ако са изпълнени свойствата:

1) $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$ (комутативност)

2) $(u+v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V$

3) $\exists \theta \in V : u + \theta = u$ (нулев ел.)
(съществува)

4) $\forall v \in V \ \exists -v \in V$ т.че (за всяко)
$v + (-v) = \theta$ (противоположен ел.)

5) $1v = v$, $1 \in F$ $v \in V$

6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$, $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in F$

7) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu . u$, $\forall \mu, \lambda \in F$, $\forall u \in V$

8) $(\lambda.\mu)u = \lambda(\mu u)$, $\forall \lambda, \mu \in F$, $\forall u \in V$

Примери:

1) $V = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ - всички функции над $\mathbb{R}$

с дефинирани операции:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$(\lambda f)(x) = \lambda . f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Проверяваме аксиомите:

Нека $f, g, h \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$
$= (g+f)(x)$

2) $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x)$
$= f(x) + g(x) + h(x) = f(x) + (g+h)(x) =$

$= (f+(g+h))(x)$

3) $\theta \equiv \theta(x)$ т.че: $\theta(x) = 0, \forall x$

$(f+\theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x)$

4) $-f \equiv (-f)(x)$ т.че: $(-f)(x) = -f(x)$

$(f+(-f))(x) = f(x) + (-f)(x) =$

$= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x)$ ← нулевият елемент

5) $1 \equiv 1 \in \mathbb{R}$:

$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$

6) $((\lambda+\mu)f)(x) = (\lambda+\mu)f(x) =$

$= \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f + \mu f)(x)$

7) $(\lambda(f+g))(x) = \lambda(f+g)(x) =$

$= \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f + \lambda g)(x)$

8) $\lambda \cdot (\mu f)(x) = \lambda \mu \cdot f(x) =$

$= (\lambda \mu) f(x)$

2) $V = \mathbb{C}$, знаем, че е дефинирана сума (и произведение) на комплексни числа.

За това при $\lambda \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{C}$ имаме $\lambda z \in \mathbb{C}$

Аналогично и при $\lambda \in \mathbb{Q}$ или $\lambda \in \mathbb{C}$ (тоест ако сменим полето)

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ е л.п. над $\mathbb{Q}$

$\mathbb{C}$ е л.п. над $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ е л.п. над $\mathbb{C}$

Зад. Нека $V = \mathbb{R}^+$, $F = \mathbb{R}$ с деф операции $\boxplus$ и $\boxdot$:

$x \boxplus y = xy + 1$

$\lambda \boxdot x = \lambda^2 x$

$\forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Док, че V не е л.п. над $\mathbb{R}$

(припомняне - $\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

Д-во: Пак пробваме аксиоми, да "стъпим" някоя от тях

Аз си харесах тази:

2) $(x \boxplus y) \boxplus z = (xy+1) \boxplus z =$
$= (xy+1)z + 1 = xyz + z + 1$, но
$x \boxplus (y \boxplus z) = x \boxplus (yz+1) =$
$= x(yz+1) + 1 = xyz + x + 1$

противоречие

$(x \boxplus y) \boxplus z \neq x \boxplus (y \boxplus z)$

$\Rightarrow V$ не е линейно пространство

може да го покажете и с други свойства, а понякога и с дефиницията на операцията, ако например $a+b$ ни изпраща извън V за някакви стойности

Подпространство:

Нека V - л.п. над F и $W \subseteq V$. (подмножество)

Ако за $\forall u, v \in W$ и $\forall \lambda \in F$ е изп, че $u + v \in W$ и $\lambda . u \in W$, то W е л.п. Казваме че W е подпространство на V и бележим с

$W \leq V$

Когато нещо е подмн-во на линейно пространство, няма нужда да доказваме аксиомите!

Зад. Нека $V = \{ f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

и $W_1, W_2 \subseteq V$:

$W_1 = \{ f \mid f(1) + f(2) + f(3) = 0 \}$

$W_2 = \{ f \mid f(1) + f(2) + f(3) = 1 \}$

кои от тях (W_1, W_2) са л.п?

Реш: Нека $f, g \in W_1$, т.е.

$f(1) + f(2) + f(3) = 0$

$g(1) + g(2) + g(3) = 0$

Тогава за $f+g$ имаме

$(f+g)(1) + (f+g)(2) + (f+g)(3) =$

$\underbrace{f(1) + f(2) + f(3)}_{0} + \underbrace{g(1) + g(2) + g(3)}_{0} =$

$= 0 \Rightarrow f+g \in W_1$

Нека $\lambda \in \mathbb{R}$:

λf : $\lambda f(1) + \lambda f(2) + \lambda f(3) =$

$= \lambda (f(1) + f(2) + f(3)) = 0$

$\Rightarrow \lambda f \in W_1$

$\Rightarrow W_1$ е л.п.

Сега нека $f, g \in W_2$:

$f(1)+f(2)+f(3)=1$

$g(1)+g(2)+g(3)=1$

$f+g$: $f(1)+f(2)+f(3)+$

$+g(1)+g(2)+g(3)=1+1=2$ ↯

$\Rightarrow f+g \notin W_2$

$\Rightarrow W_2$ не е л.п.

За упражнение:

Л.П. ли са подмн-вата на $\mathbb{Q}^2$? (л.п. над полето $\mathbb{Q}$):

1) $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x = 2y\}$

2) $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x = 2y, 2x = y\}$

3) $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x = 2y+1\}$

4) $M_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid xy = 0\}$

Hint: може и с контрапример да покажете, че нещо не е Л.П., напр. $(0,1) + (1,0)$ (за едно от тези е контрапример)

За пръстени:

Деф/ Нека $M \neq \emptyset$ и "+" и "·" са бинарни операции в M.
Казваме, че M е пръстен, ако:

1) M е абелева (комутативна) група относно събирането, т.е. за $\forall a, b \in M$:

* $a + b = b + a$
* $(a+b)+c = a+(b+c)$
* $\exists \theta \in M : a + \theta = \theta + a = a$
* $\forall a, \exists b : a + b = \theta$

2) асоциативност на умножението, т.е за $\forall a, b, c \in M$

$*$ $(ab)c = a(bc)$

3) дистрибутивност, т.е за $\forall a, b, c \in M$

$*$ $a(b+c) = ab + ac$

$*$ $(a+b)c = ac + bc$

Комутативен пръстен:

Нека M е пръстен.

Ако $ab = ba$, $\forall a, b \in M \Rightarrow M$ е комут. пр.

Пръстен с единица

Нека M е пръстен

Ако $\exists e \in M : ae = ea = a$, $\forall a \in M \Rightarrow M$ е пр. с 1

Примери:

* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ са комут. пръстени с 1

* $M_n(\mathbb{R})$ ← квадратни матрици е пръстен с 1

* $\mathbb{R}[x]$ е пръстен
вс. полиноми с реални коеф

* $6\mathbb{Z} = \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ е пръстен
$6n \cdot 1 = 6n$, но $1 \notin 6\mathbb{Z}$
$\Rightarrow 6\mathbb{Z}$ е пръстен без единица