2. Системи линейни уравнения

системи

- съвместими (имат реш.)
  - определени (точно 1 реш.)

    $$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$$

  - неопределени (повече от 1 реш.)

    $$\begin{cases} 6x - y = 11 \\ 12x - 2y - 22 = 0 \end{cases}$$

- несъвместими (нямат реш.)

  $$\begin{cases} y = -3x + 9 \\ y = -3 - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Разглеждаме $n+1 \times n+1$ система ($n \in \mathbb{N}$ - естествено)

0.20

$$\begin{cases} x_n + x_{n+1} = b_1 \\ x_{n-1} + x_{n+1} = b_2 \\ \quad \vdots \\ x_1 + x_{n+1} = b_n \\ a(x_1 + \dots + x_n) - x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & & 0 & 1 & b_n \\ a & a & \dots & & a & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-a) \\ (-a) \\ (-a) \\ \vdots \\ (-a) \\ \end{array}$$

искаме да разкараме тези

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \dots & 0 & & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & & 0 & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & -1-na & -a\sum_{i=1}^{n} b_i \end{array}\right)$$

1 сл. $a = -\frac{1}{n}$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \end{array}\right)$$

заместваме със стойността на a

1.1 сл. $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$ ($\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$ е цялото, но $\frac{1}{n}$ няма как да е 0)

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{нулев ред}}$$

$\Rightarrow$ системата е неопределена

$\Rightarrow$ ще положим параметър

$x_{n+1} := p$

$$\begin{cases} x_n + x_{n+1} = b_1 \\ x_{n-1} + x_{n+1} = b_2 \\ \\ x_1 + x_{n+1} = b_n \\ x_{n+1} = p \end{cases}$$

изразяваме останалите чрез p.

$\Rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$= (b_n - p, \dots, b_1 - p, p)$

1.2 $\sum_{i=1}^{n} b_i \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & & 1 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & S \end{array}\right) \qquad S := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

$\Rightarrow$ системата е несъвместима

2 сл. $a \neq -1/n$ (за да можем да разделим на $-1-na$)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & & 1 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & -1-na & -a\sum_{i=1}^{n} b_i \end{array}\right) \quad 1:(-1-na)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & & 1 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & \frac{-a}{-1-na}\sum_{i=1}^{n} b_i \end{array}\right) \qquad = \frac{a}{1+na}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

полагаме $S := \dfrac{a}{1+na}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & S \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ (-1) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & & 1 & 0 & b_1 - S \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 - S \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & b_n - S \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & S \end{array}\right)$$

определена система

$\Rightarrow (x_1, \dots, x_{n+1}) = (b_n - S, \dots$

$\dots b_1 - S, S)$

по-трудна от тази едва ли ще видите ;)