Евклидови пространства
Ортогонализация по метода на Грам-Шмид

1 Евклидови пространства

Деф] Евклидово пр-во е линейно пр-во V над $\mathbb{R}$, в което е дефинирана операция

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

такава, че:

* $\langle u, v \rangle \geq 0 \quad (\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = \theta)$

* $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V$

* $\langle v, \lambda u_1 + \mu u_2 \rangle = \lambda \langle v, u_1 \rangle + \mu \langle v, u_2 \rangle$
$\forall v, u_1, u_2 \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ наричаме скаларно произведение

Примери:

1) $V = \mathbb{R}^2 : \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$

2) $V = \mathbb{R}^n : \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle =$
$= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

* Дължина на вектор и ъгъл м/у вектори

Нека V - евкл. пр-во, $v \in V$

$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ - дължина на вектор

$\langle v, u \rangle = |v| . |u| . \cos \measuredangle (u, v)$

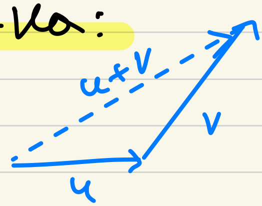
$\cos \measuredangle (u, v) = \dfrac{\langle u, v \rangle}{|u| . |v|}$ - $\measuredangle (u, v)$ - ъгъл м/у (ненулеви) вектори

Неравенство на Коши-Шварц:

$$|\langle u, v \rangle| \le |u| . |v|$$

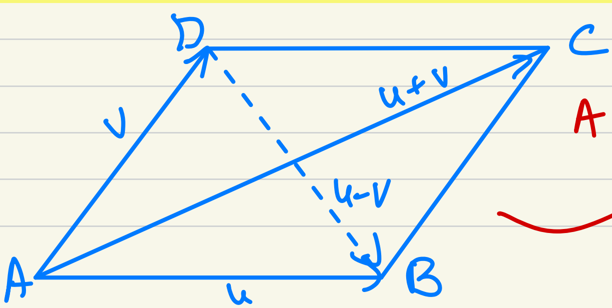
Неравенство на триъгълника:

$$|u + v| \le |u| + |v|$$



Зад. V - ев. пр-во, за произв $u, v \in V$ док., че:

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$ → неравенство на успоредника



$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

Д-во: $|u+v|^2 + |u-v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + \cancel{\langle u,v\rangle} + \cancel{\langle v,u\rangle} + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle + \cancel{\langle u,-v\rangle} + \cancel{\langle -v,u\rangle} + \langle -v,-v\rangle =$

$= 2(\langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle) = 2(|u|^2 + |v|^2)$

Зад. Да се намери ъгълът м/у векторите

а) $a = (1,2,2,3)$, $b = (3,1,5,1)$

$$\cos\measuredangle(a,b) = \frac{\langle a,b\rangle}{|a|.|b|} = \frac{1.3+2.1+2.5+3.1}{\sqrt{1+2^2+2^2+3^2}\sqrt{3^2+1^2+5^2+1^2}}$$

$$= \frac{3+2+10+3}{\sqrt{18}\,\sqrt{36}} = \frac{18}{18\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \measuredangle(a,b) = \frac{\pi}{4}$$

б) $a = (1,1,1,2)$ $b = (3,1,-1,0)$

$$\cos\measuredangle(a,b) = \frac{3}{\sqrt{7}\,\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{77}}$$

$$\Rightarrow \measuredangle(a,b) = \arccos\frac{3}{\sqrt{77}}$$

* Ортогонален и ортонормиран базис

Нека V - евкл. пр-во, $v_1, .., v_n$ - базис

Казваме, че базисът е ортогонален, ако $\langle v_i, v_j\rangle = 0$, $i \neq j$ ($v_i \perp v_j$ )

Казваме, че базисът е ортонормиран,
ако е ортогонален и $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \ \forall i$
(всеки в-р е с дължина 1)

Зад. Проверете, че дадените вектори са ортогонални и допълнете до ортогонален базис

$$a_1 = (1,2,2), \quad a_2 = (2,1,-2)$$

Реш: $\langle a_1, a_2 \rangle = 1+2-4 = 0 \Rightarrow a_1 \perp a_2$

$\Rightarrow$ ортогонални

искаме a_3, такова че $\langle a_1, a_3 \rangle = 0$ $\langle a_2, a_3 \rangle = 0$
и a_1, a_2, a_3 - базис

$a_3 = (x, y, z)$

$0 = \langle a_1, a_3 \rangle = x + 2y + 2z$

$0 = \langle a_2, a_3 \rangle = 2x + y - 2z$

Решаваме хомогенна система:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_2 = p \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = -p \\ x_2 = p \\ x_3 = -\frac{p}{2} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow a_3 = (2, -2, 1)$

2. Метод на Грам-Шмид за ортогонализация

$U = \ell(a_1, \dots, a_n)$

Търсим ортогонален базис на U

* $b_1 = a_1$
* $b_2 = a_2 + \lambda_{21} b_1$, като λ_{21} т.че $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$
* $b_3 = a_3 + \lambda_{31} b_1 + \lambda_{32} b_2$, като λ_{31} и λ_{32} са т.че $\langle b_1, b_3 \rangle = \langle b_2, b_3 \rangle = 0$

$\vdots$

* $b_k = a_k + \lambda_{k1} b_1 + \dots + \lambda_{k,k-1} b_{k-1}$

$$\boxed{\lambda_{kj} = - \frac{\langle a_k, b_j \rangle}{\langle b_j, b_j \rangle}}$$

Зад. Докажете, че в-рите обр. базис на $\mathbb{R}^3$ и намерете ортогонален базис по метода на Грам-Шмид, където $a_1 = (1, -2, 1)$, $a_2 = (4, -5, 4)$, $a_3 = (-1, -8, -3)$

Реш: Търсим ортог. базис на $\ell(a_1, a_2, a_3)$

$b_1 = a_1$

$\lambda_{21} = -\frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = \frac{-18}{6} = -3$

$b_2 = a_2 + \lambda_{21} b_1 = a_2 - 3b_1 =$

$= (4, -5, 4) - (3, -6, 3) = (1, 1, 1)$

$b_3 = a_3 + \lambda_{31} b_1 + \lambda_{32} b_2$

$\lambda_{31} = -\frac{\langle a_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = -\frac{12}{6} = -2$

$\lambda_{32} = -\frac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} = -\frac{-12}{3} = 4$

$b_3 = a_3 - 2b_1 + 4b_2 = (1, 0, -1)$

$\ell(a_1, a_2, a_3) = \ell(b_1, b_2, b_3)$

b_1, b_2, b_3 – ЛН З

$r(a_1, a_2, a_3) = \dim \ell(a_1, a_2, a_3) = 3$

$\Rightarrow$ базис

Зад. Постройте ортогонален базис на линейната обвивка на векторите $v_1 = (2,1,3,-1)$ $v_2 = (7,4,3,-3)$ $v_3 = (1,1,-6,0)$ $v_4 = (5,7,7,8)$

$$\boxed{\lambda_{kj} = \frac{-\langle a_k, b_j\rangle}{\langle b_j, b_j\rangle}}$$

Реш:

$b_1 = (2,1,3,-1) = v_1$

$$b_2 = v_2 - \lambda_{21} v_1 = v_2 - \frac{14+4+9+3}{4+1+9+1} b_1 = v_2 - 2b_1 =$$
$$= (3,2,-3,-1)$$

$$b_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle v_3, b_2\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 =$$
$$= v_3 - \frac{-15}{15} b_1 - \frac{23}{23} b_2 = v_3 + b_1 - b_2 = \underline{\theta}$$

пропускаме b_3

$$b_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle v_4, b_2\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 =$$
$$= v_4 - \frac{30}{15} b_1 - \frac{0}{23} b_2 = v_4 - 2b_1 = (1,5,1,10)$$

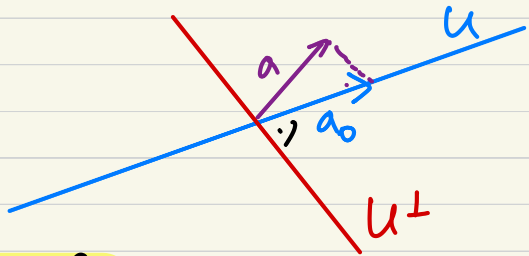
$$\Rightarrow l(a_1, a_2, a_3, a_4) = l(b_1, b_2, b_3) =$$
$$= l((2,1,3,-1), (3,2,-3,-1), (1,5,1,10))$$

$(r(a_1 \ldots a_4) = 3$, т.е. $\Lambda 3)$

3. Ортогонално допълнение

V – евкл. пр-во, $U < V$ (подпр-во)

$U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U : \langle u, v\rangle = 0\}$



$U^\perp$ – лин. пр-во

ако $\dim V < \infty$, $(U^\perp)^\perp = U$

$V = U \oplus U^\perp$ ($\forall a \in V$ има единствени $a_0 \in U$, $h \in U^\perp$: $a = a_0 + h$)

$\dim V = \dim U + \dim U^\perp$, т.е. $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$

Зад. Нека $U = \ell((1,2,0,1),(3,2,1,2),(1,-2,1,0))$. ? ортонормиран базис на $U^\perp$

$U = \ell(a_1, a_2, a_3)$? $U^\perp$

$U^\perp = \{v \mid \forall u \in U, \langle u, v\rangle = 0\} =$
$= \{v \mid \langle v, a_1\rangle = \langle v, a_2\rangle = \langle v, a_3\rangle = 0\}$

$\Rightarrow v$ е решение на системата

$$\begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ \cancel{-2} & \cancel{-4} & \cancel{0} & \cancel{-2} & | & \cancel{0} \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & q \\ 1 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & & & | & p \\ & 1 & & & | & q \\ & & 1 & & | & -p+2q \\ & & & 1 & | & -p-2q \end{pmatrix}$$

$$U^{\perp} = \ell\big(\underbrace{(1, 0, -1, -1)}_{f_1}, \underbrace{(0, 1, 2, -2)}_{f_2}\big)$$

f_1, f_2 – базис на $U^{\perp}$

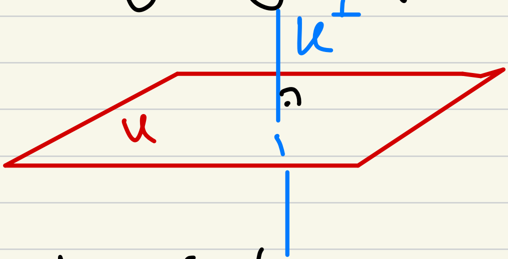
$\langle f_1, f_2 \rangle = -2 + 2 = 0 \Rightarrow$ ортогонални

Ортонормирана ще получим като разделим всеки вектор на дължината му:

$$g_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad g_2 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

*Проекция и перпендикуляр

$V = U \oplus U^{\perp}$



$a = a_0 + h, \; a_0 \in U, \; h \in U^{\perp}$

a_0 - проекция на a в/у U

h - перпендикуляр от a към U

Ако $u_1, u_2, \dots, u_k$ - базис на U

$a_0 = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$

$h = a - a_0 = a - \lambda_1 u_1 - \dots - \lambda_k u_k$

$\langle h, u_1 \rangle = \langle h, u_2 \rangle \dots = \langle h, u_k \rangle = 0$

$\langle a - \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_k u_k, u_j \rangle = 0$

$j = 1, 2, \dots k$

k неравенства, k неизвестни

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ еднозначно определят

a_0 и h

Зад. Нека $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$.

? Ортог. проекция a_0 и перпендикулярът h спуснат от a към U, където:

$a = (1,2,3,4)$, $a_1 = (1,2,1,1)$, $a_2 = (1,3,1,2)$

$a_3 = (2,5,3,3)$

Търсим базис на U

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} - c_1 \\ - c_2 \\ - c_3 \end{matrix}$$

$a = a_0 + h$; $a_0 \in U = \ell(c_1, c_2, c_3)$

; $a_0 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3$

$h = a - a_0$; $\langle h, c_i \rangle = 0$; $i = 1, 2, 3$

$$h = a - a_0 = a - \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 - \lambda_3 c_3 =$$

$$= (1,2,3,4) - \lambda_1 (1,0,0,-1) - \lambda_2 (0,1,0,1)$$

$$- \lambda_3 (0,0,1,0) =$$

$$= (1-\lambda_1,\ 2-\lambda_2,\ 3-\lambda_3,\ 4+\lambda_1-\lambda_2)$$

$$\langle h, c_1 \rangle = 0 : \ 1 - \lambda_1 - 4 - \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\langle h, c_2 \rangle = 0 : \ 2 - \lambda_2 + 4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\langle h, c_3 \rangle = 0 : \ 3 - \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 3 \end{array} \right.$$

$$a_0 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 3(c_2 + c_3) =$$
$$= (0, 3, 3, 3)$$

$$h = a - a_0 = (1, 2, 3, 4) - (0, 3, 3, 3) =$$
$$= (1, -1, 0, 1)$$