Обратни матрици

* Събиране

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* Умн с число

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

* Умн на матр.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = C_{m\times k}$$

$$C := \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} \right)_{i,j=1}^{m,k} = M_{n\times k}(\mathbb{R})$$

"ред по стълб"

! не е комут

$$AB \neq BA$$

$(AB)C = A(BC)$

$(A+B)C = AC+BC$

$A(B+C) = AB+AC$

Зад (2.1, б)) ? произв.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -18 & 21 \\ -2 & 6 & -7 \\ 4 & -12 & 14 \end{pmatrix}$$

в)

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \end{pmatrix}$$

2.2 ? степента

б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$

Умнож. няколко пъти, докато забележим зависимост

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

забие $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

Док с индукция по n

база: $n = 2$ ✓

И.Х.: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$

И.С.: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ доказано

г) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2 - \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n =$$

$$\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \to$$ индукция..

g) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{31607}$

Buffigame, te

$6 \cdot 5267 + 5$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{31607\pi}{3} & \dots \\ & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{3} & \dots \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Обратни матр.

Една кв. матр. нар. обр

$A \in M_n(\mathbb{R})$ ако

$\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ т.че $AB = BA = E_n$

озн $B = A^{-1}$

ако $A \in M_n(\mathbb{R})$ обратима, то

A^{-1} е обр и $(A^{-1})^{-1} = A$

Не всяка матр. - обр $\Rightarrow$

$\Theta_{n \times n} B = \Theta_{n \times n} \neq E_n$

Намиране на обр. матр

$(A \mid E) \sim \ldots \sim (E \mid A^{-1})$

ел. преобр. по редове

2.15 a) ? odp

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

(-3)

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & & \\ & 1 & & & 1/5 & \\ & & 1 & & & 1/6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \ldots \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/5 & \\ & & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (-1) \\ (1) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$(-2)\,(3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(E \,\middle|\, \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \ldots \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \ldots \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{(-4)(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & \underline{2} & \underline{-3} & \underline{1} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ не е обр.

? обратка

$$\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix} \to (2)\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&-1&1&0&0\\2&-1&2&0&1&0\\-1&2&2&0&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&-1&1&0&0\\6&3&0&2&1&0\\3&6&0&2&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ /:3\\ /:3\end{matrix} \quad (-2)\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&-1&1&0&0\\2&1&0&2/3&1/3&0\\1&2&0&2/3&0&1/3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&-1&1&0&0\\2&1&0&2/3&1/3&0\\-3&0&0&-2/3&-2/3&1/3\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ :3\end{matrix}\ (-2) \sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&-1&1&0&0\\0&1&0&2/9&-1/9&2/9\\1&0&0&2/9&2/9&-1/9\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&-1/9&2/9&2/9\\0&1&0&2/9&-1/9&2/9\\1&0&0&2/9&2/9&-1/9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2/9&2/9&-1/9\\0&1&0&2/9&-1/9&2/9\\0&0&1&-1/9&2/9&2/9\end{array}\right)$$

не забравеме в какъв вид требва да е левата страна

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$$

Матр. ур-е

Уравнение от вида: $A_{m\times n} X = B_{m\times p}$

ако $AX = E$, то X - обр. $\to X = A^{-1}$

тогава

$$(A \mid E) \sim \ldots \sim (E \mid A^{-1})$$

иначе $(AX = B)$

$$(A \mid B) \sim \ldots (E \mid X)$$

елементарни преобр. по редове

ако $A \in M_n(\mathbb{R})$ - обратима $\to X = A^{-1}B$

Зад. $\underbrace{\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}}_{2\times2} X_{2\times3} = \underbrace{\begin{pmatrix}3&0&3\\0&3&0\end{pmatrix}}_{2\times3}$

$$(-2)\left(\begin{array}{cc|ccc}2&1&3&0&3\\1&2&0&3&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc}0&-3&3&-6&3\\1&2&0&3&0\end{array}\right) \sim$$

$$(-2)\ \sim\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&-1&2&-1\\1&2&0&3&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&-1&2&-1\\1&0&2&-1&2\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&2&-1&2\\0&1&-1&2&-1\end{array}\right) \qquad X = \begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}$$

Зад. $\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&-1\\1&3&-5\end{pmatrix}}_{3\times3} Y_{3\times2} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\0&3\end{pmatrix}}_{3\times2}$

$$(-1)(-3)\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&2&1&-1\\3&1&-1&2&1\\1&3&-5&0&3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&2&1&-1\\0&4&-7&-1&4\\0&4&-7&-1&4\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&2&1&-1\\0&4&-7&-1&4\\0&0&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&2&1&-1\\0&4&-7&-1&4\\0&0&1&p&q\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & p & q \end{array}\right) \sim$$

Ако има изцяло нулев ред, добавяме по 1 пар. за всеки стълб

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3/4 - \frac{1}{4}p & -\frac{1}{4}q \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}p & 1 + 7/4\,p \\ 0 & 0 & 1 & p & q \end{array}\right)$$

Ако отляво има нулев ред, а отдясно - поне 1 ненулево число - н.р.

$\forall$ (p, q - произв)

Транспониране: A^t - редовете стават стълбове

Пример: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$XA = B$? $\rightarrow (XA)^t = B^t$

$\rightarrow A^t X^t = B^t$

Зад. (2.17 б)) ?X

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ (1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} \\ (\cdot 1) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} | : 2 \\ \sim \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A X B = C \; ?$$

1) $XB := Y \to AY = C$

2) с нам $Y \to XB = Y$

3) $(XB)^t = Y^t \to B^t X^t = Y^t$

4) нам X^t

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{X \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B}}_{Y := XB} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}}_{C}$$

$AY = C$, търсим Y

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 2 & 18 & 12 & 9 \\ 5 & -7 & 3 & 23 & 15 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2)\,(-3) \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ -1 & 2 & 0 & 17 & 15 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{l} (3) \\ (-2) \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 44 & 36 & 37 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ -1 & 0 & 0 & -11 & -9 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 22 & 18 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 11 & 9 & 9 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Y = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

$$XB = Y \qquad B^t X^t = Y^t$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ (-1) \end{array} \overbrace{\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{B^t} \overbrace{\begin{pmatrix} 11 & 14 & 12 \\ 9 & 12 & 18 \\ 9 & 13 & 19 \end{pmatrix}}^{Y^t} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 & 9 & 13 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1) \\ (+2) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 9 & 11 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{l} /:2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 9 & 11 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1)\,(-8) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad X^T$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Бонус (пробвайте се вкъщи)

Зад1. ? обратната на

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Зад2. ? обратната на

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Зад. 3 ? X

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Зад. 4 ? X

$$X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

Зад5. Да се намерят X и Y:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} (X+Y) = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 12 \\ -6 & -9 & -10 \\ -5 & -12 & -15 \end{pmatrix} \\[2em] (X-Y) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 5 \\ 10 & -15 & -8 \\ 12 & -10 & -15 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Отговори, решения, хинтове:

Зад.1: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Зад.2: $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Зад.3: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hint: отново записваме двете матрици една до друга и джуркаме

Зад. 4 : $X = \begin{pmatrix} 2-p & p & 2-p \\ -q & q & -q \\ 6-s & s & 6-s \end{pmatrix}$

Зад. 5

Hint: $\begin{cases} A(X+Y) = B \\ (X-Y)C = D \end{cases}$

$\begin{cases} (X+Y) = A^{-1}B \\ (X-Y) = DC^{-1} \end{cases}$

! умнож с A^{-1} двете страни отляво !

! умнож. отдясно !

оттук

$\begin{cases} 2X = A^{-1}B + DC^{-1} \\ 2Y = A^{-1}B - DC^{-1} \end{cases}$

Зад. 4 - решение:

$$XA = B \iff A^t X^t = B^t$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 6 & 0 & 18 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 0 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ [2), (3) \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ A^t не е обратима,

но сведохме уравнението

до

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

което е еквивалентно на системата

$$\begin{cases} -x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} = 4 \\ x_{12} + x_{13} = 2 \\ -x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} = 0 \\ x_{22} + x_{23} = 0 \\ -x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} = 12 \\ x_{32} + x_{33} = 6 \end{cases}$$

полагаме
$$x_{12} := p$$
$$x_{22} := q$$
$$x_{32} := s$$

изразяваме останалите и получаваме

$$X = \begin{pmatrix} 2-p & p & 2-p \\ -q & q & -q \\ 6-s & s & 6-s \end{pmatrix}.$$