Задачи за упражнение:

Да се решат системите линейни уравнения:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_4 = -3 \end{cases}$

в) $\begin{cases} -2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -2 \\ 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

Да се реши системата в зависимост от стойността на параметрите λ ("ламбда") и μ ("мю")

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 = \lambda \\ (3+\mu)x_1 + 4x_2 - 19x_4 = 2\lambda - 4 \end{cases}$$

Припомняме преобразуванията:

1) умн. на i-ти ред с число:

$R_i' = p \cdot R_i \ (p \neq 0)$

2) умн. на i-ти ред с число и прибавяне към j-ти:

$R_j' = R_j + p \cdot R_i$

3) размяна на редове: $R_i \leftrightarrow R_j$

Решение на горната задача

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right) \begin{matrix} (1) \\ \downarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} (-3) \\ \swarrow \\ \\ \end{matrix}$$

$\sim$ (вдясно, а не равно)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & \textcircled{-1} & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (-10) \\ \swarrow \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array}\right) /:(-52) \quad \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_2 + 5x_3 = 9 \\ x_3 = 2 \end{array}\right.$$

$-x_2 + 5 \cdot 2 = 9 \Rightarrow -x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = 1$

$x_1 + 1 + 2 \cdot 2 = 8 \Rightarrow x_1 = 3$

$\Rightarrow$ С-мата е определена

$(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 2)$

об)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \quad /:(-3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ \textcircled{-1} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ (-1)\ (2)\ (1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (:(-1) \\ (:(-2) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2 ур-я
4 неизвест.
$\Rightarrow 4 - 2 = 2$

/ параметра

$$\rightarrow \begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 = 1 - x_4 \\ x_3 := p \\ x_4 := q \end{cases}$$

полагаме

$$\begin{cases} -x_2 + 2p = 0 \Rightarrow x_2 = 2p \\ -x_1 = 1 - q \Rightarrow x_1 = q - 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ с-мата е неопределена

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (q-1, 2p, p, q)$

$\forall p \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}$

б)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 3 & 1 \\ \textcircled{3} & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right) (-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{array}\right) \sim \quad /:3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{-2} & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow 0x_1+0x_2+0x_3=2$$

$\Rightarrow$ с-мата е несъвместена

(няма решение)

Реш на зад. с парам: !стремим се да не "разнокалибрим" λ и μ!

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & \boxed{-1} & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -8 & \lambda \\ 3+\mu & 4 & 0 & -19 & 2\lambda-4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} (1) \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} (1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & 14 & 6 \\ -4 & 1 & 0 & -5 & \lambda+1 \\ 3+\mu & 4 & 0 & -19 & 2\lambda-4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (1) \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & 14 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 1 & 0 & -5 & \lambda+1 \\ 2+\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{array}\right)$$

забелязваме ред с параметри, които могат да повлияят на вида на системата

1 сл. $2+\mu=0 \quad (\mu=-2)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & 14 & 6 \\ -4 & 1 & 0 & -5 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{array}\right)$$

1.1 сл. $\lambda+1 \neq 0 \quad (\lambda \neq -1)$

$\Rightarrow$ с-мата е несъвместима

1.2 сл. $\lambda+1=0 \quad (\lambda=-1)$

$\Rightarrow$ нулев ред

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & 14 & 6 \\ -4 & \textcircled{1} & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \curvearrowleft \end{matrix} \sim \quad (3)\ (1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 6 & -1 & -2 & 1 \\ -17 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ -4 & 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$x_4 := p$

$x_1 = \frac{6+p}{\ldots}$

$\cdots = -17$

$$x_2 = 4x_1 + 5x_4 = -\frac{6-p}{17} + 5p = -\frac{6+84p}{17}$$

$$x_3 = 1 + 2x_4 + 3x_1 =$$

$$= 1 + 2p - \frac{5}{17}(6+p) =$$

$$= \frac{29-13p}{17}$$

$\Rightarrow$ неопределена

$$\left(-\frac{6+p}{17}, -\frac{6+84p}{17}, \frac{29-13p}{17}, p\right)$$

2 сл. $\mu \neq 2$ $\Rightarrow$ можем да разделим на $\mu+2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \\ & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda+1}{\mu+2} \end{array}\right)$$

Системата няма решение ...

в този случай системата е определена