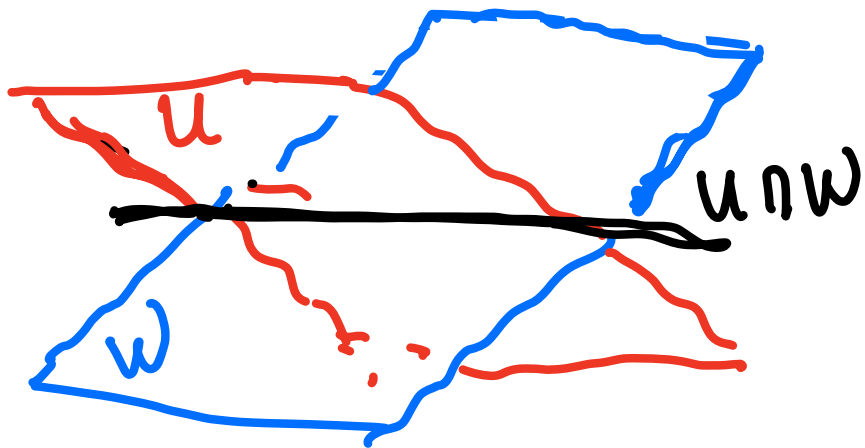# 6. Сума и сечение

I Сечение

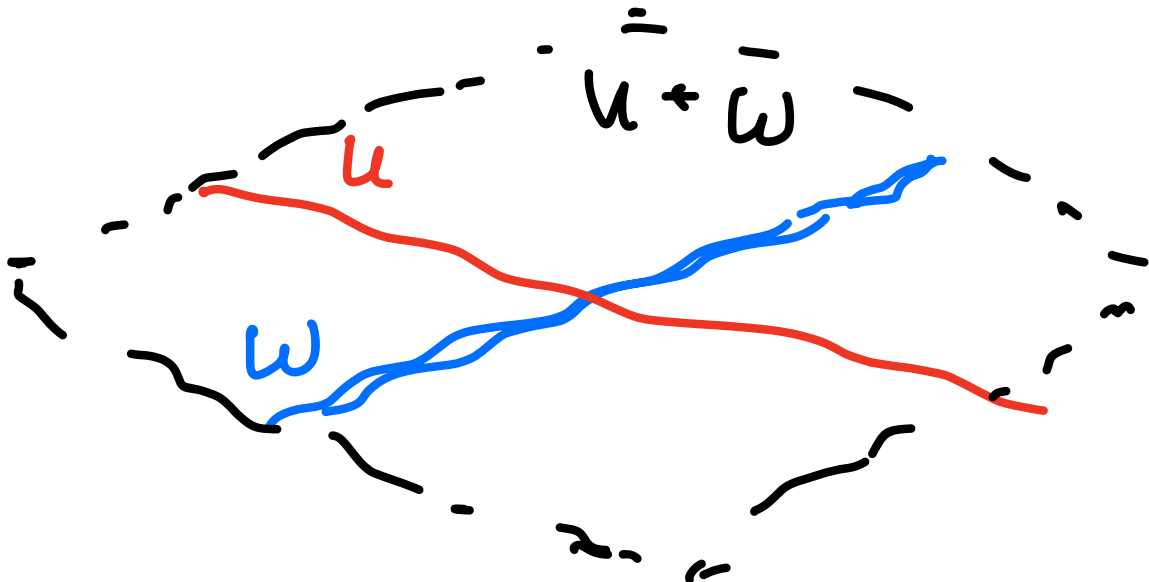$$U \cap W$$

$$U \cap W$$

Работим със системите

II Сума (! не обединение)

Работим с линейните обвивки

$$U + W = \{ u + w \mid u \in U \ \& \ w \in W \}$$

$U + W$

U

W

Зад. Нека $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$ е ЛПП на $\mathbb{R}^4$, където

$a_1 = (1, 2, 1, 1)$
$a_2 = (1, 0, -1, -1)$
$a_3 = (3, 4, 1, 1)$

и нека W - ЛПП на $\mathbb{R}^4$ зададено със системата

$$W: \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{vmatrix}$$

Да се намерят базиси на $U + W$ и $U \cap W$

Реш.: Първо номираме базис на U:

махаме ЛЗ редовете

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} {}^s \\ {}^{(+1)} \\ {}^\downarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} {}^{(\cdot-2)} \\ {}^\downarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} * \\ * \end{matrix}$$

$$^* b_1 = (1,1,0,0) \quad ^* b_2 = (1,0,-1,-1)$$

$b_1, b_2 - \text{ЛНЗ} \Rightarrow \text{базис на } U$

Нека представим W като линейна обвивка:

$\langle \text{коеф. от системата} \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \ell \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

сега имаме $\qquad W : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

$x_1 := p \Rightarrow x_2 = p, \; x_3 = 0, \; x_4 = 0$

$p = 1 : c_1(1, 1, 0, 0)$

$\Rightarrow W = \ell(c_1)$

$U + W : \ell(b_1, b_2, c_1)$

$\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ c_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{U + W : \ell(b_1, b_2)}$

Ника представим U като система:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ \downarrow & & & \uparrow \\ p & & & q \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 = p \\ x_2 = -p \\ x_3 = p - q \\ x_4 = q \end{vmatrix}$

$\Rightarrow p = 1, q = 0 : (1, -1, 1, 0)$

$\quad\ p = 0, q = 1 : (0, 0, -1, 1)$

$$\Rightarrow U: \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad -x_3 + x_4 = 0 \end{vmatrix}$$

$U \cap W:$

$$U \left\{ \quad W \left\{ \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad -x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 \qquad = 0 \\ \qquad x_3 \qquad = 0 \\ \qquad x_4 = 0 \end{vmatrix} \right. \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

вета дос p

$x_1 := p \quad x_2 = p \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0$

$\Rightarrow$ дос p; $(1, 1, 0, 0) = d_1$

$U \cap W = \mathcal{L}(d_1)$

$\dim U = 2 \quad \dim W = 1 \quad \dim U \cap W = 1$

$\boxed{\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W \\ = 2 + 1 - 1 = 2 \Rightarrow \text{Проверка}}$

Зад. За упражнение:

Да се намерят базиси на
$U \cap W$ и $U + W$:

а) $U = \ell(a_1, a_2)$ $a_1 = (1, 9, 2, 2)$
$$a_2 = (1, -1, 2, -2)$$

$$W: \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

б) $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$ $a_1 = (1, 2, 1, 2)$
$$a_2 = (2, 1, 2, 1)$$
$$a_3 = (1, 2, 3, 4)$$

$$W: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

в) $U = \ell(a_1, a_2, a_3, a_4)$ $a_1 = (2, 8, -3, 14)$
$$a_2 = (-1, 2, 3, 5)$$
$$a_3 = (-1, 14, 6, 29)$$
$$a_4 = (0, 12, 3, 24)$$

$$W: \quad 28x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$