Собствени стойности

Диагонализация

Нека φ - линеен оператор

$$\varphi \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$
$$\varphi(e_1) \quad \dots \quad \varphi(e_n)$$

спр. базиса $e_1, \dots, e_n$ има матр. A

Искаме спрямо нов базис $f_1, \dots, f_n$ матр. на φ да бъде диагонална:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \Theta \\ & \ddots & \\ \Theta & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \downarrow & \dots & & \downarrow \\ f_1 & & & f_n \end{pmatrix}$$ - матрица на прехода

$B = T^{-1} A T$, как да изберем T?

Искаме $B . f_i = \lambda_i . f_i$

$B f_i = \lambda_i E f_i \Rightarrow B f_i - \lambda_i E f_i = \theta$

$(B - \lambda_i E) f_i = \theta$ $\}$ хомог. с-ма за f_i

Кога има ненулево реш?

$\Leftrightarrow \det(B - \lambda_i E) = 0$

$\det(T^{-1} A T - T^{-1} (\lambda_i E) T) = 0$

$\det(T^{-1} (A - \lambda_i E) T) = 0$

$\det(T^{-1}) \det(A - \lambda_i E) \det T = 0$

$\det(T^{-1}) \to \dfrac{1}{\det T}$

$$\det(A - \lambda_i E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22}-\lambda_i & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}-\lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

<u>Деф</u>| Нека $A \in M_n(\mathbb{R})$. Характеристичен полином на A наричаме полинома $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$

Собствени стойности на A наричаме реалните корени на $f_A(\lambda)$

Собствен вектор на A е ненулев вектор v, т.че $Av = \lambda v$

Зад. Намерете характеристичен полином, собств. ст-сти и в-ри на матриците:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$f_A(\lambda) = \det|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (4-\lambda)(-1-\lambda) + 6 = -4 - 4\lambda + \lambda + \lambda^2 + 6$

$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$

$* \lambda_1 = 1 \to \left(\begin{array}{cc|c} 4-1 & -2 & 0 \\ 3 & -1-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & p \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -\frac{3p}{2} \end{array}\right) \Rightarrow v_1(2, -3)$

$* \lambda_2 = 2 \to \left(\begin{array}{cc|c} 4-2 & -2 & 0 \\ 3 & -1-2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) \Rightarrow v_2(1, 1)$

$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A = T^{-1} D T$

б) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad f_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$

$= \lambda^2 + 1 \Rightarrow$ няма собств. ст-сти
и в-ри

в) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad f_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$

* $\lambda = 1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow v(0,1)$ е собств. в-р

Диагонализация

Ако $A \in M_n(\mathbb{R})$ има n различни реални собствени стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то има обратима матрица T т.че

$$T^{-1}AT = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ е диаг

Зад. Спр. базис e_1, e_2, e_3 на $\mathbb{R}^3$ лин. оператор φ има матрица

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ? базис на $\mathbb{R}^3$, спр. който матр. D на φ е диагонална

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) & (\lambda-1) \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ (1-\lambda)(\lambda-1)+1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda \\ (1-\lambda)(\lambda-1)+1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda(-\lambda^2 + 2\lambda - 1 + 1)$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-\lambda^2 + 2\lambda) = \lambda^2 + \lambda^2(2-\lambda) = \lambda^2(3-\lambda)$$

$\lambda_1 = 3$ $$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) & (2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ \cancel{-3} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & p \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & -p \\ 0 & 1 & 0 & | & p \\ 0 & 0 & 1 & | & p \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(E_3 \;\middle|\; \begin{matrix} p \\ p \\ p \end{matrix} \right) \Rightarrow v_1(1,1,1)$$

$$\lambda_2 = 0: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & p \\ 0 & 0 & 1 & | & q \end{pmatrix} \sim$$

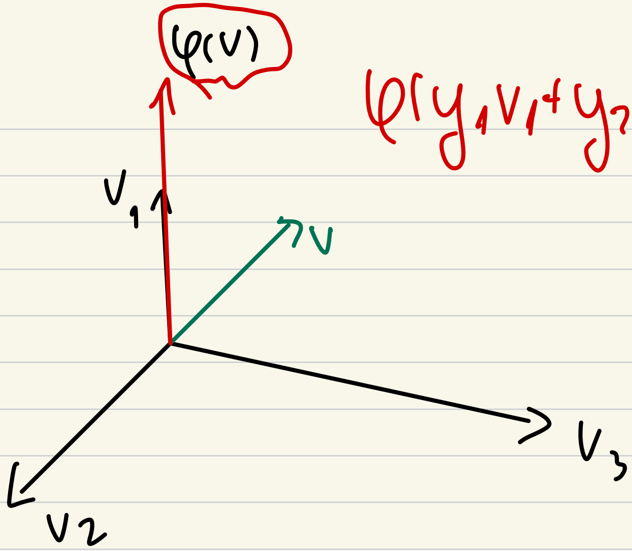
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -p-q \\ 0 & 1 & 0 & | & p \\ 0 & 0 & 1 & | & q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_2(1,-1,0) \\ v_3(1,0,-1) \end{matrix}$$

Новият базис е
$$v_1 = e_1 + e_2 + e_3$$
$$v_2 = e_1 - e_2$$
$$v_3 = e_1 \qquad - e_3$$

Матр. на прехода от e към v:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \underbrace{}_{v_1} & \underbrace{}_{v_2} & \underbrace{}_{v_3} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \underbrace{}_{\lambda_1} & \underbrace{}_{\lambda_2} \end{matrix}$$



$$\varphi(y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3)=3y_1v_1$$

Зад. Нека $\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ е опр. от

$$\psi(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)=x_3e_1+x_2e_2+x_1e_3$$

? Собств. в-ри и собств. ст-сти на ψ

$$\psi \rightsquigarrow A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}\overset{(\lambda)}{=}\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1-\lambda^2&0&0\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0&1-\lambda\\1-\lambda^2&0\end{vmatrix}=(\lambda-1)(1-\lambda^2)\qquad \lambda=1,-1$$

$\lambda_1 = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & q \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & q \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & q \\ & 1 & & p \\ & & 1 & q \end{array}\right)$ $\quad v_1(1, 0, 1)$
$v_2(0, 1, 0)$

$\lambda_2 = -1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right) \Rightarrow v_3(1, 0, -1)$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$\quad\ v_1 \quad v_2 \quad v_3$

матр. на прехода към v_1, v_2, v_3

Спр. v_1, v_2, v_3 φ има матр. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

0 е собств. число $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow A$ - необр.
на A

Проверка: $tr(A) = tr(D)$ сумата от ел. по диаг

Зад. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

? Ядрото и образа на $\varphi \rightsquigarrow A$

? D - диаг, подобна на A

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

(1)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -\lambda \\ -2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)$$

$$= (-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(1+\lambda)(1-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_1 (2, -1, 1)$$

$$\lambda = -1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right) \Rightarrow V_2 (1, 1, 1)$$

$$\lambda = 0 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ldots \Rightarrow V_3 (1, 0, 1)$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\ker A = \{v \mid A\cdot v = \theta\} = \{v \mid Av = 0\cdot v\}$

собств в-ри съотв на 0

$\ker A = \ell(v_3) = \ell(1,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Im} A =$$

$= \ell((1,1,1),(1,-2,0))$

Зад. Диагонализирайте

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & & \theta & \\ & -\lambda & & \\ 1 & 0 & -\lambda & \\ & & & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= (1-\lambda)^2 \cdot \lambda^2$

$$\lambda = 1: \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = (1,0,1,0)$$

$v_2 = (0,0,0,1)$

$v_3 = (0,1,0,0)$

$$\lambda = 0: \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_4 = (0,0,1,0)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ & & | & | \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \end{array}$$

Зад. ?

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$$

Идея: $D = T^{-1} A T$, умнож. по T отляво и T^{-1} отдясно

$$T D T^{-1} = \cancel{T T^{-1}} A \cancel{T T^{-1}} = A$$

$$A^2 = T D \cancel{T^{-1} T} D T^{-1} = T D^2 T^{-1}$$

$$A^3 = T D^2 \cancel{T^{-1} T} D T^{-1} = T D^3 T^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = T D^n T^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \longrightarrow$$

$$A=\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}\quad T=\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&5^n\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3.5^n\\-1&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3.5^n+1&3.5^n-3\\5^n-1&5^n+3\end{pmatrix}$$

Ако $k_n=\dfrac{5^n-1}{4}$, то $A^n=\begin{pmatrix}3k_n+1&3k_n\\k_n&k_n+1\end{pmatrix}$

Проверка: за $n=2$ ...

Зад. Нека $\varphi(a)=2a-b \quad \varphi(b)=-a+2b$

и $a+b+c$ – собств. в-р за собств. ст-ст 1

? φ^8 спр. дадения базис a,b,c

$\varphi(c)=\varphi(a+b+c)-\varphi(a)-\varphi(b)=$

$=1.(a+b+c)-(2a-b)-(-a+2b)=c$

Матр. на φ спр. a, b, c е: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

$\underbrace{}_{\varphi(a)}\ \underbrace{}_{\varphi(b)}\ \underbrace{}_{\varphi(c)}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((\lambda-2)^2-1) = $$
$$= -(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

$\lambda = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots V_1 = (1, 1, 0)$

$V_2 = (0, 0, 1)$

$\lambda = 3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots V_3 (1, -1, 0)$

$D = T^{-1}AT \Rightarrow A = TDT^{-1}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$$A^8 = TD^8T^{-1} = T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3^8\end{pmatrix}T^{-1} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^8+1 & 1-3^8 & 0\\ -3^8+1 & 1+3^8 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Зад. Нека λ - собств. число за матр. A (и лин. оп φ). Док, че $\lambda^2+5\lambda$ е собств число за A^2+5A (и съотв. $\varphi^2+3\varphi$)

Реш: Нека разсъждаваме за матрици, има ненулев вектор v:

$Av = \lambda \cdot v \quad / \cdot A$ (отляво)

$A^2 v = A(\lambda v) = \lambda \cdot Av = \lambda \cdot \lambda v = \lambda^2 v$

$(5A)v = 5\lambda v = 5\lambda \cdot v$

$A^2 v + 5Av = (A^2 + 5A)v = (\lambda^2 + 5\lambda) v$

По деф, $\lambda^2 + 5\lambda$ е собств число за $A^2 + 3A$

Нека f - полином, λ - собств. число за A. Тогава $f(\lambda)$ - собств. число за $f(A)$