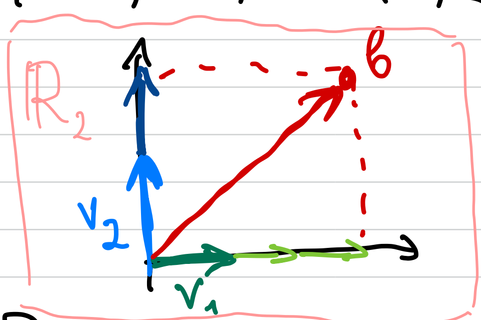
4. Линейна зависимост и независимост. Ранг

① Деф/ Нека V – л.п. над $\mathbb{R}$.
Нека $v_1, .., v_k \in V$, и $\lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{R}$
Векторът $v = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_k v_k$
наричаме линейна комбинация
на векторите $v_1, .., v_k$ с
коефициенти $\lambda_1, .., \lambda_k$

Примери: 1) Нека $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 2)$
(разгл. Л.П. $\mathbb{R}^2$)
Тогава за $b = (3, 4)$



$b = 3v_1 + 2 \cdot v_2$
b е линейна комб. на v_1 и v_2

2) Нека $a_1 = (3,-1,0)$, $a_2 = (-4,7,5)$
$a_3 = (4,0,-3)$ (разгл. л. п. $\mathbb{R}^3$)
Тогава $b = 2a_1 + a_2 - 3a_3 =$
$= (6,-2,0) + (-4,7,5) - (12,0,-9)$
$= (-10, 5, 14)$ е тяхна
линейна комбинация

представете си го геометрично, ако помага

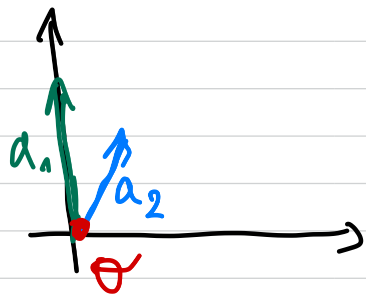
② Кога θ (нулевият вектор)
е лин. комбинация на вект.
$v_1, \dots, v_k$?

– Ако $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, то
$0v_1 + \dots + 0v_k = \theta$
$\Rightarrow$ за произволни $v_1, \dots, v_k$
θ е тяхна линейна комбинация

* тоест, от каквото и да е вектори, винаги имаме поне един начин да изкараме нулевия *

Пример: Нека отново разгл. л.п. $\mathbb{R}^2$ и $a_1 = (3,0)$, $a_2 = (1,2)$

Ами, няма друг начин да получим $(0,0)$ с лин. комб. освен $0.a_1 + 0.a_2$



Да проверим все пак:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \theta \iff$$

$$\lambda_1 (3,0) + \lambda_2 (1,2) = (0,0)$$

$$\iff \begin{cases} 3.\lambda_1 + 1.\lambda_2 = 0 \\ 0.\lambda_1 + 2.\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

└ хомогенна система

$$(:2)\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ |\cdot(-1)| \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (:3) \\ 2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right.$$, нямаме друго реш.

* за хомог. с-ма винаги имаме поне едно решение, само нули *

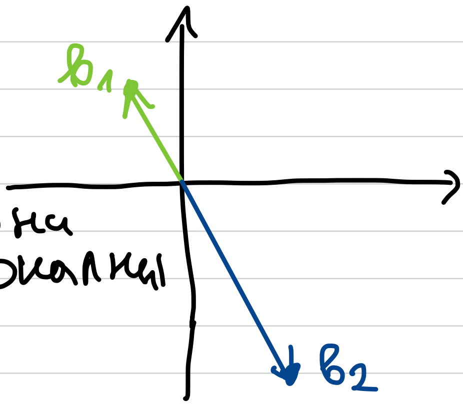
За такива вектори (a_1, a_2) казваме, че са линейно независими

Или формално:

3. Векторите $v_1, \dots, v_k$ от л.п. V над $\mathbb{R}$ нар. лин. независими, ако единствената тяхна линейна комбинация, равна на θ е тази с коефициенти нули

Пример 2: Нека отново разгл. $\mathbb{R}^2$ и $b_1 = (-1, 2)$, $b_2 = (2, -4)$

Да де обаче забелязваме, че са колинеарни или пропорционални т.е. $b_2 = -2 \cdot b_1$



Това значи, че освен

$\theta = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2$ имаме и

$\theta = b_2 + 2b_1 = b_2 - b_2$, също така

$\theta = 2b_2 + 4b_1$ ... и т.н.

Повече от едно представяне на нулата

Такива вектори наричаме **линейно зависими**

Или формално:

(4) Векторите $v_1, \dots, v_k$ от л.п. V над $\mathbb{R}$ нар. лин. зависими, ако има числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, не всички равни на нула, такива, че

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \theta$$

Отново можем със система да проверим, че имаме безброй представяния:

$$\theta = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 (-1, 2) + \lambda_2 (2, -4) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1)\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2 \cdot \lambda_1 + (-4)\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} (2) \\ \leftarrow \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = p \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 2p \\ \lambda_2 = p \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2p \cdot b_1 + p \cdot b_2 = \theta \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

Така решаваме и задачите...

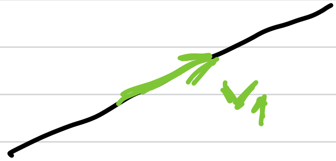
(5) Линейна обвивка на векторите $v_1, \ldots, v_k$ е мн-вото от всички техни линейни комбинации

отбележим с ℓ

$$\ell(v_1, \ldots, v_k) = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

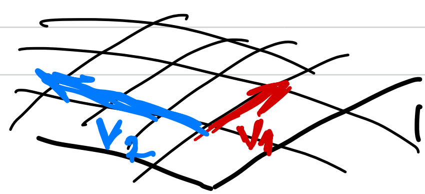
Геометрично:

$\ell(v_1)$ - права



(1)

$\ell(v_1, v_2)$ - равнина

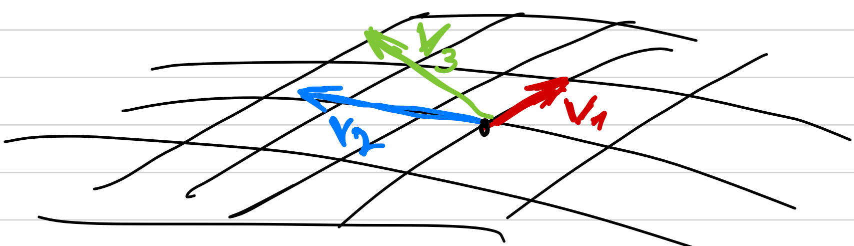


(2)

[Тв] Линейната обвивка на вектори от л.п. също е л.п.
Това се вижда в геометр. примери
(1) е като $\mathbb{R}$
(2) е като $\mathbb{R}^2$

Видяхме, че два ЛНЗ вектора са ни достатъчни да покрием цялата равнина (линейната им обвивка)

Ако добавим трети v_3



То със сигурност v_1, v_2, v_3 – ЛЗ
(v_3 ще е линейна комб. на v_1 и v_2)

⑥ Основна лема на линейната алгебра

Нека V - л.п. над $\mathbb{R}$ и

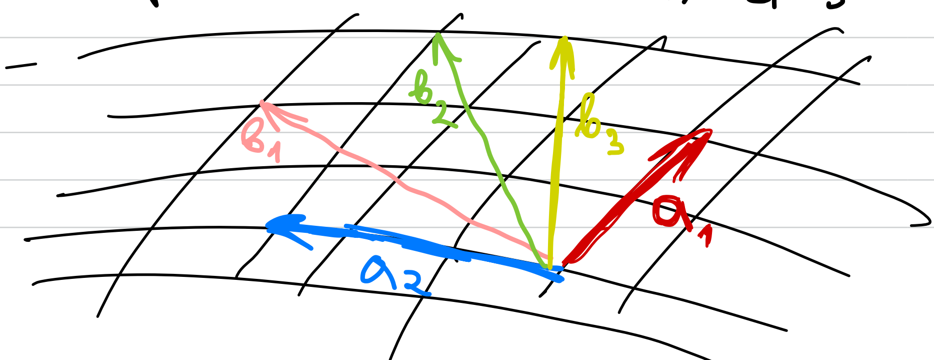
$a_1, .., a_k, b_1, .., b_n \in V$

Ако $b_1, .., b_n \in \ell(a_1, .., a_k)$ и $n > k$, то

$b_1, .., b_n$ са линейно зависими

Тоест, ако повече на брой вектори са линейни комбинации на по-малко на брой вектори, тогава повечето на брой вектори са линейно зависими.

Геометрично: Нека $b_1, b_2, b_3 \in \ell(a_1, a_2)$



Забелязваме, че, щом можем да изразим b_1, b_2, b_3 чрез 2 вектора, то те (b_1, b_2, b_3) са лин. зав. помежду си.

Това е основната идея

Ранг на система вектора $v_1, \dots v_k$
е максималния брой ЛНЗ вектора от тях

Рангът не се мени при елементарни преобразувания
* ред по λ + друг
* ред по $\lambda \neq 0$
* смяна на редове

! считаме по редове

Пример: $r(a_1, a_2, a_3) = ?$

$a_1 = (2, 1, -4)$ $a_2 = (3, 5, -7)$

$a_3 = (4, -5, -6)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-5)\ (5) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -7 & 0 & 13 \\ 14 & 0 & -26 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (2) \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -7 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -7 & \boxed{0} & 13 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(a_1, a_2, a_3) = 2$

Това са записи за схва-щане на идеите, не всичко в тях е точно :)