Диагонализация на симетрична матрица

Зад. Диагонализирайте матрицата $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Какво забелязвате за собствените ѝ стойности?

Реш:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & -3 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -3 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 1-x & -3 \\ -3 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)\left((x-1)^2-(-3)^2\right) =$$

$$= (2-x)(x-4)(x+2)$$

$$x=4: \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_1 = (1, 0, -1)$$

$$x=2: \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = (0, 1, 0)$$

$$x=-2: \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_3 = (1, 0, 1)$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= 0 \\ \langle v_1, v_3 \rangle &= 0 \\ \langle v_2, v_3 \rangle &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ v_1, v_2, v_3 - ортогонален базис

Ортонормиран базис от собствени вектори:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} v_1, \quad v_2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} v_3$$

Симетрични оператори и матрици

Деф| V - евкл. пр-во, $\varphi \in \operatorname{Hom} V$

Казваме, че φ - симетричен, ако

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle \quad \forall u, v \in V$$

Деф| Симетрична матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ е такава, че $A = A^t$

Т-ма| V - евклидово, $\varphi \in \operatorname{Hom} V$

φ - симетричен $\Leftrightarrow$ матр. му в някой ортонормиран базис е симетрична

Т-ма| φ - симетричен, то φ се диагонализира. Може да се избере ортонормиран базис, спрямо който матрицата на φ е диагонална

Схема на Хорнер

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 =$$

$$= x(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3) + a_4 =$$

$$= x.(x.(\ldots(a_0x + a_1) + a_2) + a_3) + a_4$$

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
x	a_0	a_0x+a_1	$x(a_0x+a_1)+a_2$		$f(x)$

Ако $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}$ и $a_0 \neq \pm 1$, то целите корени на полинома са от вида $\pm d$, d дели a_4

Зад. Нека φ линеен оператор в евкл. пр-во V с матр. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Спр. ортонорм. базис на V.

? ортонормиран базис, спрямо който матрицата на φ е диагонална

$$|A - xE| = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 2 & 1-x & 2 \\ 2 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3 + 8 + 8 \ldots$$

$$= -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$$

целите корени са ± 1 или ± 5

	1	-3	-9	-5
1	1	-2	-11	-16
5	1	2	1	0

$$\Rightarrow = (x-5)(x^2+2x+1)$$
$$= (x-5)(x+1)^2$$

$$x = 5: \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{-6} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = (1, 1, 1)$$

$x=-1:\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim (1\ 1\ 1 \mid 0)$

$\Rightarrow\ v_2=(1,-1,0)$

$v_3=(1,0,-1)$

$\langle v_1, v_3\rangle = \langle v_1, v_2\rangle = 0 \neq \langle v_2, v_3\rangle$

Намираме u_1, u_3 - ортогонален базис на $\ell(v_2, v_3)$ - Грам - Шмид

$u_2 = v_2 = (1,-1,0)$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}\cdot v_2 = v_3 - \frac{1}{2}v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ v_1, u_2, u_3 - ортогонален базис

$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}v_1$; $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}u_2$; $f_3 = \frac{1}{\sqrt{3/2}}u_3$ - ортонормиран базис

В базиса f_1, f_2, f_3 φ има матр. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Зад. В евкл. пр-во $\mathbb{R}^3$ линейният оп. ψ е определен с

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 2x_2 + 4x_3,\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3,\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3)$$

Диагонализирайте ψ и док., че $\psi^3 + 9\psi^2 = 108\varepsilon$

Реш: Матр. на ψ в стандартния базис е $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ - симетр. матрица

$$\begin{vmatrix} -2-x & 2 & 4 \\ 2 & -5-x & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}(6+x) = (6+x)\begin{vmatrix} 2-x & 2 & 4 \\ 4 & -5-x & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot(6+x)\cdot(-10+3x+x^2-8) =$$

$$= -(x+1)(x^2+3x-18) \to -(x+6)^2(x-3)$$

$$\to -(x^3+9x^2-108)$$

$x=3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 9 & 0 \\ 18 & 0 & -18 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$x=-6$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \to v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, -2, 0)$

Може да се намери ортонормиран базис (първо Грам-Шмидт за v_2, v_3 и после нормиране)

$D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -6 & \\ & & -6 \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $D = T^{-1}AT$

Трябва да покажем, че $\varphi^3 - 9\varphi = 108\varepsilon$

или $A^3 + 9A^2 = 108E$

целим $-A^3 - 9A^2 + 108E = 0$

$D = T^{-1}AT \Rightarrow TDT^{-1} = A$

$\Rightarrow TDT^{-1}TDT^{-1} = TD^2T^{-1} = A^2$

$A^3 = TD^3T^{-1}$

$-A^3 - 9A^2 + 108E = -TD^3T^{-1} - 9TD^2T^{-1} + 108E$

$= T.(-D^3)T^{-1} + T(-9D^2)T^{-1} + T(108E)T^{-1}$

$= T(-D^3 - 9D^2 + 108E).T^{-1}$

Достатъчно е $D^3 + 9D^2 = 108E$

$\hookrightarrow$ проверяваме

Т-ма 1 (Хамилтън - Кейли): Ако f_A е характеристичния полином на матрицата A, то $f_A(A) = \theta$ $(A \in M_n(\mathbb{R}))$

Зад. В 4-мерно пр-во е фиксиран ортонорм. базис. Спр. него линеен оператор φ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

? базиси на $\ker\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$, $\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$ и $\ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi$

? Собств ст-сти и ортонормирани собств. в-ри на φ

Първо ще намерим собствени ст-сти и в-ри

$$|A - xE| = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3-x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3-x & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 & -1 \\ 4-x & 4-x & 0 & 0 \\ 4-x & 0 & 4-x & 1 \\ x-4 & 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = (4-x)^3 \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -x & & 0 & \\ & 1 & & \\ x & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} (4-x)^3 = -x(4-x)^3 =$$

$$= x(x-4)^3$$

$$x = 4: \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{array} \right)$$

Три ортог. в-ра, реш. на тази с-ма са

$v_1(1,1,1,1)$

$v_2(1,1,-1,-1)$

$v_3(1,-1,1,-1)$

$x = 0: \langle v_4, v_1 \rangle = \langle v_4, v_2 \rangle = \langle v_4, v_3 \rangle = 0$

$\Rightarrow v_4$ е в-рът от системата, реш на която са v_1, v_2, v_3

Вместо $(-1,1,1,-1)$ избираме неговия противоположен: $v_4=(1,-1,-1,1)$

Така $D = \begin{pmatrix} 4 & & \Theta & \\ & 4 & & \\ \Theta & & 4 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, за ортонорм. базис делим всеки v_i на дължина му (2)

Така $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker}\varphi = \{v \mid Av = \Theta\} = \{v \mid Av = 0.v\}$ се състои от собств. в-ри, отг. на $x=0$ т.е.

$\operatorname{Ker}\varphi = \ell(1,-1,-1,1)$

$\operatorname{Im}\varphi$: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \ell(1\,1\,0\,0,\ 1\,0\,1\,0,\ -1\,0\,0\,1)$

Нека $u \in \operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$. Тогава за някои $\mu, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$: $u = \mu\underbrace{(1,-1,-1,1)}_{u_1} =$

$= \lambda_2 \underbrace{(1\ 1\ 0\ 0)}_{u_2} + \lambda_3 \underbrace{(1\ 0\ 1\ 0)}_{u_3} + \lambda_4 (-1\ 0\ 0\ 1)$

Умн. скаларно с u_1

$$\mu \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{4} = \lambda_2 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{0} + \lambda_3 \overbrace{\langle u_3, u_1 \rangle}^{0} + \lambda_4 \underbrace{\langle u_4, u_1 \rangle}_{0}$$

$\Rightarrow 4\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow u = \theta$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\theta\}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi$ е цялото пр-во и за базис може да изберем например стандартния

Зад. Сим. матр. $A \in M_3(\mathbb{R})$ има дет. 6 собств. числа са $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ със собств. ст-сти $v_1 = (1,0,3)$ и $v_2 = (0,1,0)$

? λ_3 и v_3

Реш: хар. полином $= \begin{vmatrix} \cdot\cdot & -x & & \\ & & -x & \\ & & & \ddots \\ & & & -x \end{vmatrix} =$

$= -x^3 + ax^2 + bx + c = -(x^3 - ax^2 - bx - c) =$

$= -(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$

$x=0$: $c=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = f_A(0) = \det(A-0.E)$
$= \det A \Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det A$
$\Rightarrow 6 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 3$

$\lambda_1 \neq \lambda_3$ и $\lambda_2 \neq \lambda_3 \Rightarrow \langle v_1, v_3\rangle = \langle v_2, v_3\rangle = 0$

$\left(\begin{array}{c|c} -v_1- & 0 \\ -v_2- & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \Rightarrow v_3 = (-3, 0, 1)$

Зад. 7 φ - симетр. оп. в евкл. пр-во V
Док., че $V = \ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi$

$\varphi \to A$. $\ker\varphi$: $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right) \to$ реш. на хомог. с-ма

$\operatorname{Im}\varphi$: $(A^t) \sim (A)$ - обвивка на редовете

($A = A^t$ от A - симетрична)

Имаме, че $\ker\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ са ортогонални допълнения едно на друго

$(\ker\varphi)^\perp = \operatorname{Im}\varphi$

Но за всяко подпр-во U, $U \oplus U^\perp = V$

В частност за $U = \ker\varphi$

$V = \ker\varphi \oplus (\ker\varphi)^\perp = \ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi$

Зад. Нека $a=(1,0,-2)$ $b=(1,-1,0)$,
$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, опр. от
$\varphi(v) = \langle a, v\rangle b - \langle b, v\rangle a =$
$= (a \times b) \times v$

Док, че φ е лин. оп., а φ^2 е сим. оп.

Диаг. φ^2 и пресм. φ^{2024}

Реш: $\varphi(u+v) = \langle a, u+v\rangle b - \langle b, u+v\rangle a$
$= \langle a,u\rangle b + \langle a,v\rangle b - \langle b,u\rangle a -$
$- \langle b,v\rangle . a = \varphi(u)+\varphi(v)$

$\varphi(\lambda v) = \langle a, \lambda v\rangle b - \langle b, \lambda v\rangle a =$
$= \lambda(\langle a,v\rangle b - \langle b,v\rangle a) = \lambda\varphi(v)$

$\Rightarrow$ φ – линеен оператор

$\varphi(1,0,0) = 1.b - 1a = b-a = (0,-1,2)$
$\varphi(0,1,0) = 0.b-(-1).a = a = (1,0,-2)$
$\varphi(0,0,1) = -2b - 0.a = -2b = (-2,2,0)$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

φ^2 има матрица $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$

A^2 - симетрична $\Rightarrow \varphi$ - симетричен

$\begin{vmatrix} -5-x & 4 & 2 \\ 4 & -5-x & 2 \\ 2 & 2 & -8-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5-x & 4 & 2 \\ 9+x & -9-x & 0 \\ 2 & 2 & -8-x \end{vmatrix} = (9+x) \begin{vmatrix} -5-x & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -8-x \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1-x & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -8-x \end{vmatrix} (9+x) = -(9+x)(x^2+9x+8-8)$

$= (-1) \cdot x \cdot (x+9)^2$

$x = -9: \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $v_2(2, -1, -2)$

искаме $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

$v_2: \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $v_2 : (1, -2, 2)$

$x = 0 \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right)$ v_3 - ортог. на v_1 и v_2

$v_3 = (2, 2, 1)$

Проверка: $A v_3 = \mathcal{O} = 0 \cdot v_3$, т.е. v_3 - собств. в-р за $x = 0$

$$D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \to A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - xE| = \begin{vmatrix} -x & 1 & -2 \\ -1 & -x & 2 \\ 2 & -2 & -x \end{vmatrix} = (-x)^3 + 4 - 4 - (4x + 4x + x) = -x^3 - 9x$$

По т-мата на Хамилтън-Кейли:

$-\varphi^3 - 9\varphi = \mathcal{O}$

$\varphi^3 = -9\varphi; \; \varphi^5 = \varphi^2 \cdot \varphi^3 = \varphi^2 \cdot (-9\varphi) = -9\varphi^3$

$= -9(-9\varphi) = 81\varphi$

$\varphi^{2k+1} = (-9)^k \cdot \varphi$ (индукция, $k \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow \varphi^{2024} = \varphi^{2(1011)+1+1} = (-9)^{1011}\varphi \cdot \varphi =$

$= -3^{2022}\varphi^2$