TS6 Transformada Z y respuesta en frecuencia

Ejercicio 1:

Hallar $T(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

a) $y(n) = x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n)$

$Y(z) = X(z)\left(z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1\right)$

$\Rightarrow T(z) = z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1$

q' para facilitar cuentas puede escribirse como: (saco FC z^{-3})

$$T(z) = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^3}$$

$\rightarrow$ orden 3 $\Rightarrow$ 3 polos en 0.

b) $y(n) = x(n-4) + x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n)$

$Y(z) = X(z)\left(z^{-4} + z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1\right)$

$\Rightarrow T(z) = z^{-4} + z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1$

$$T(z) = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^4}$$

c) $y(n) = x(n) - x(n-1)$

$Y(z) = X(z)\left(1 - z^{-1}\right)$

$\Rightarrow T(z) = 1 - z^{-1}$

$$T(z) = \frac{z-1}{z}$$

d) $y(n) = x(n) - x(n-2)$

$T(z) = 1 - z^{-2}$

$$T(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2}$$

EJERCICIO (2)

Calcular respuesta en frecuencia de módulo y fase

A) $T(z) = \dfrac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^3}$

para calcular su respuesta tengo q' evaluarlo en $z = 1e^{j\Omega}$

$\Rightarrow T(z)\Big|_{z=1e^{j\Omega}} = \dfrac{e^{j3\Omega} + e^{j2\Omega} + e^{j\Omega} + 1}{e^{j3\Omega}}$ busco en punto medio y lo saco como FC (en este caso: 3/2)

$\Rightarrow T(e^{j\Omega}) = \dfrac{e^{j3/2\Omega}\left(e^{j3/2\Omega} + e^{j1/2\Omega} + e^{-j1/2\Omega} + e^{-j3/2\Omega}\right)}{e^{j3\Omega}}$

$\Rightarrow T(e^{j\Omega}) = e^{-j3/2\Omega}\left(e^{j3/2} + e^{j1/2\Omega} + e^{-j1/2\Omega} + e^{-3/2\Omega}\right)$ def. coseno: $e^{-j\Omega} + e^{j\Omega} = 2\cos(\Omega)$

$\Rightarrow T(e^{j\Omega}) = \underbrace{\left(2\cos(3/2\,\Omega) + 2\cos(1/2\,\Omega)\right)}_{T_R(\Omega)}\underbrace{e^{-j3/2\Omega}}_{\text{fase}}$

función $\mathbb{R}$ ← $T_R(\Omega)$

fase recta con pendiente $-3/2$

$T\measuredangle$

→ $|T_R(\Omega)| = |T(z)|$

→ Obs: aquellos puntos en donde la función $T_R(\Omega)$ pase a valores negativos no serán representados en el módulo

↳ se verán saltos en la fase en aquellos puntos donde el módulo sea 0.

⇒ Grafico respuesta frecuencia de módulo y fase (aprox.)

Evalúo $|T_R(\Omega)|$ en puntos convenientes y sencillos.

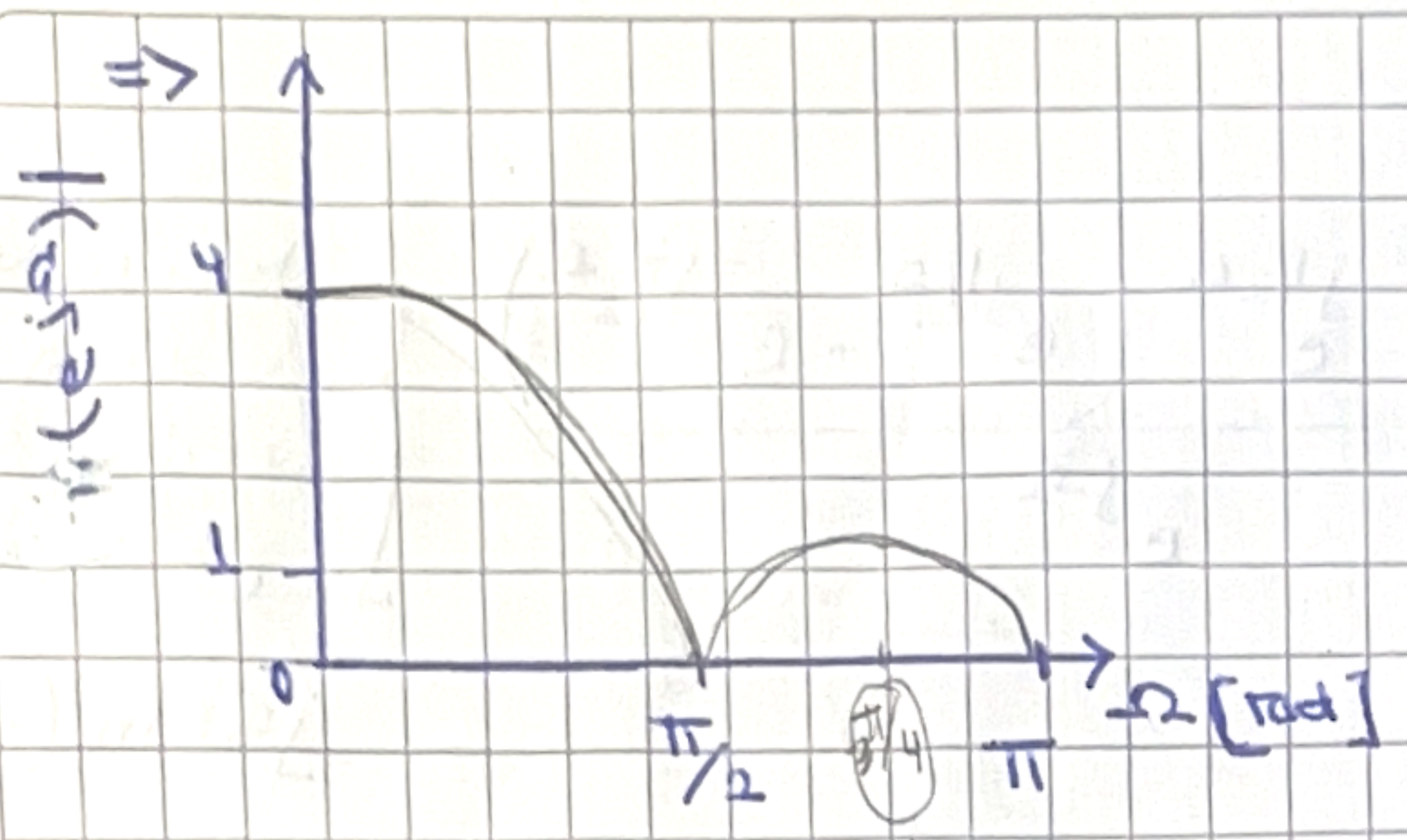
$|T_R(0)| = |T(0)| = 2\cos(0) + 2\cos(0) = 4$

$|T_R(\frac{\pi}{2})| = |T(\pi/2)| = 2\cos(3/4\pi) + 2\cos(\pi/4) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$

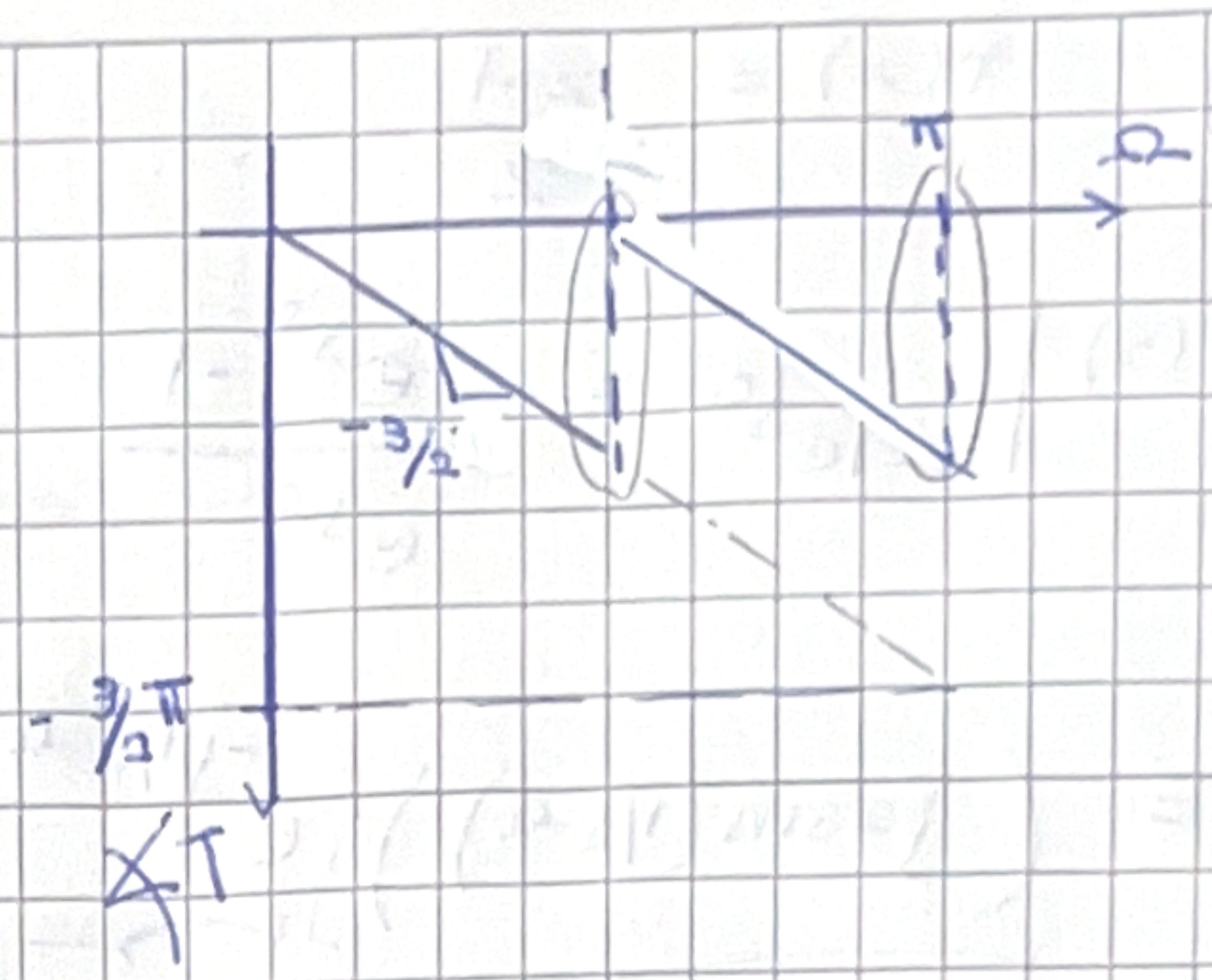
$|T_R(\pi)| = |T(\pi)| = \underbrace{2\cos(3/2\pi)}_{=0} + \underbrace{2\cos(\pi/2)}_{=0} = 0$

ceros en $\pi/2$ y π

respuesta en frecuencia acotada de $[0;\pi]$ xq representas de 0 a Nyquist!



$\hookrightarrow T(\pi/4) \approx 1{,}07$



Saltos en donde vale 0 el módulo

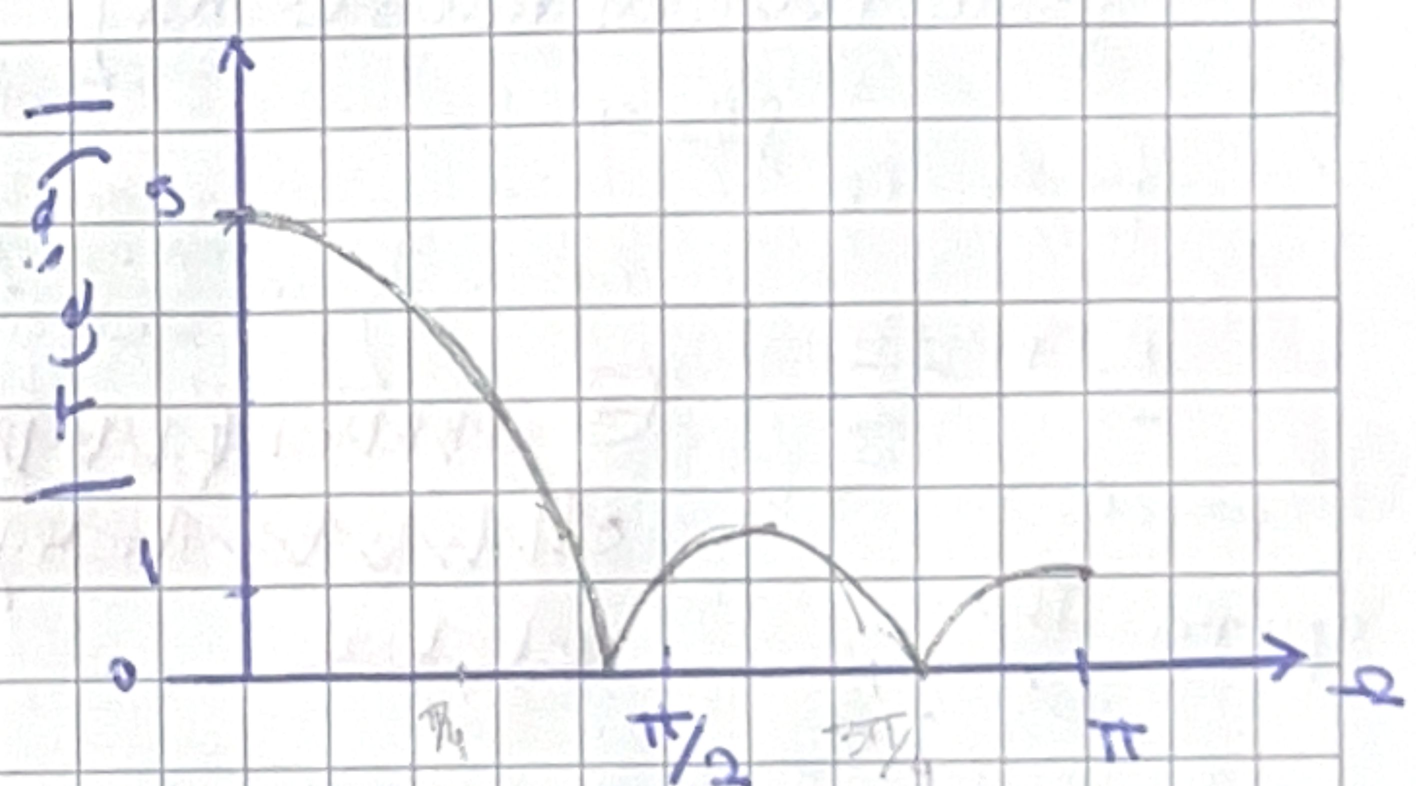
B) $T(z) = \dfrac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^4}$ (mismo procedimiento q' caso anterior)

$$T(z)\Big|_{z=1e^{j\Omega}} = \frac{e^{j4\Omega} + e^{j3\Omega} + e^{j2\Omega} + e^{j\Omega} + 1}{e^{j4\Omega}} = \frac{e^{j2\Omega}\left(e^{j2\Omega} + e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega}\right)}{e^{j4\Omega}}$$

$$= \underbrace{\left(2\cos(2\Omega) + 2\cos(\Omega) + 1\right)}_{T_R(\Omega)} \underbrace{e^{-j2\Omega}}_{\measuredangle T(e^{j\Omega})}$$

$$|T_R(\Omega)| = |T(z)|$$

→ Gráfico



(evalúo puntos claves):

$|T(0)| = 2 + 2 + 1 = 5$

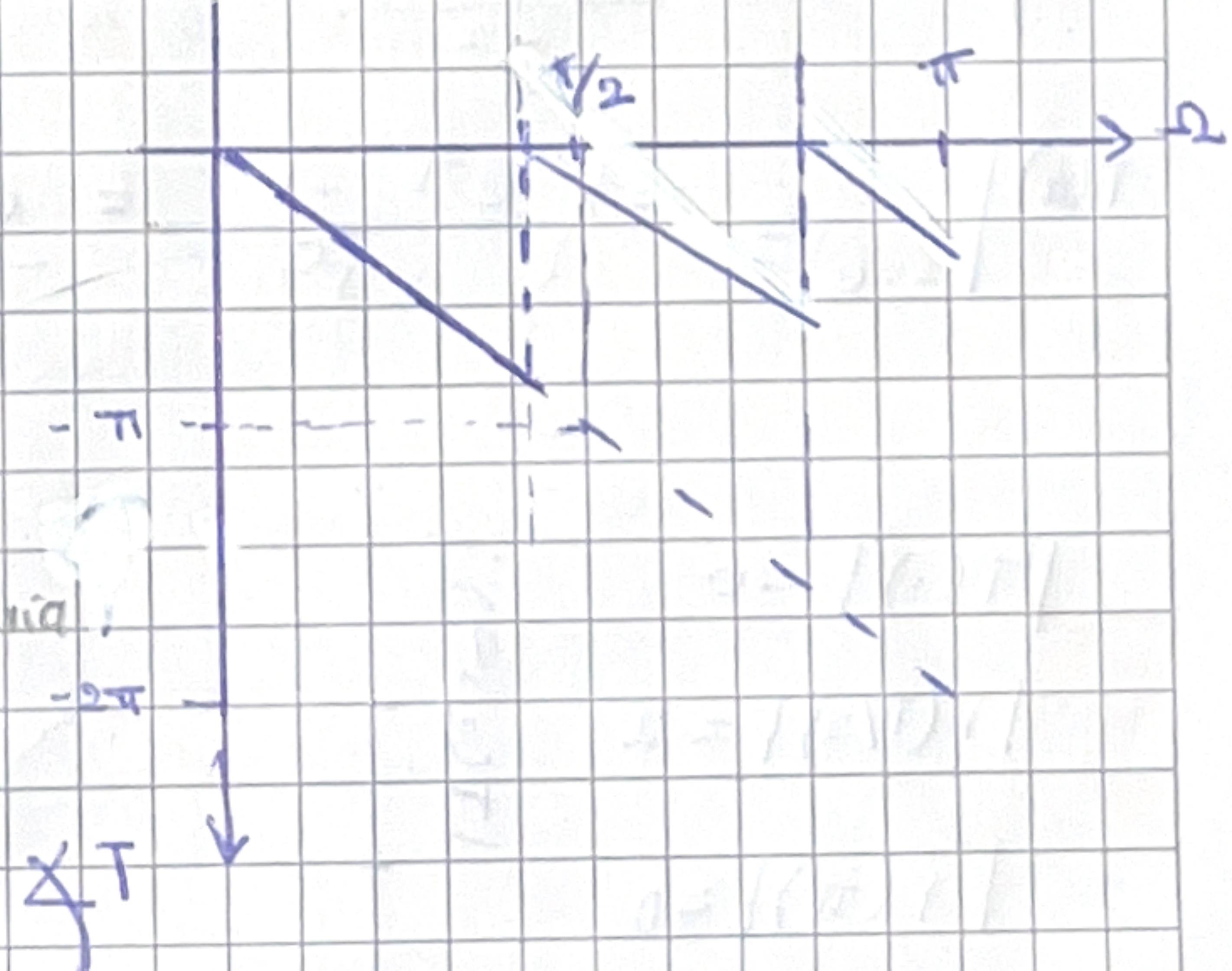
$|T(\pi/2)| = |\underbrace{2\cos(\pi)}_{-2} + \underbrace{\cancel{2\cos(\tfrac{\pi}{2})}}_{=0} + 1| = 1$

$|T(\pi)| = |2\cos(2\pi) + 2\cos(\pi) + 1| = 1$

$2\cos(2\Omega) + 2\cos(\Omega) + 1 = 0$

$\Omega_1 \simeq 1{,}25 \to < \pi/2$ $\quad \Omega_2 \approx 2{,}51$

$|T(3\pi/4)| \approx 0{,}41$



respuesta lineal q' debería tener sin los saltos

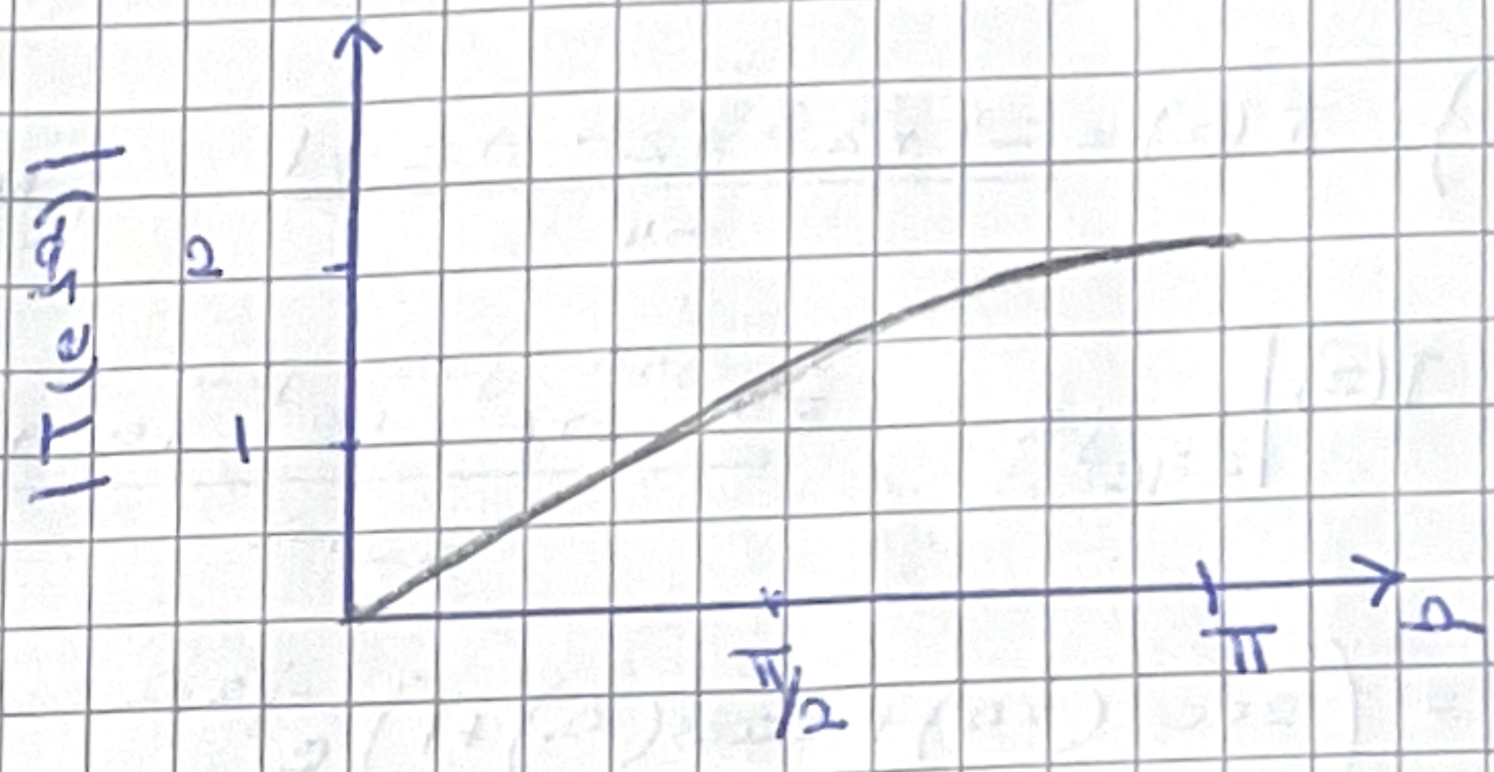
c) $T(z) = \dfrac{z-1}{z}$

$T(z)\Big|_{z=1e^{j\Omega}} = \dfrac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}} = \dfrac{e^{j\frac{1}{2}\Omega}\left(e^{j\frac{1}{2}\Omega} - e^{-j\frac{1}{2}\Omega}\right)}{e^{j\Omega}}$ } ahora en lugar de ser un cos será un seno! $e^{j\Omega} - e^{-j\Omega} = j2\sin(\Omega)$

$= \underbrace{\left(2\sin(\tfrac{1}{2}\Omega)\right)}_{T_c(\Omega)}\, j e^{-j\frac{1}{2}\Omega} \rightarrow \angle T(e^{j\Omega})$

ahora tengo parte imaginaria q' contribuye $\pi/2$ a la fase (*)

$|T_c(\Omega)| = |T(z)|$



$\Rightarrow |T(0)| = |j2\sin(0)| = 0$

$|T(\pi/2)| = |j2\sin(\pi/4)| = \sqrt{2}$

$|T(\pi)| = |j2\sin(\pi/2)| = 2$

$j2\sin(\tfrac{1}{2}\Omega) = 0$

$\hookrightarrow \Omega = 0$

(solo 1 cero en rango $[0, \pi]$)

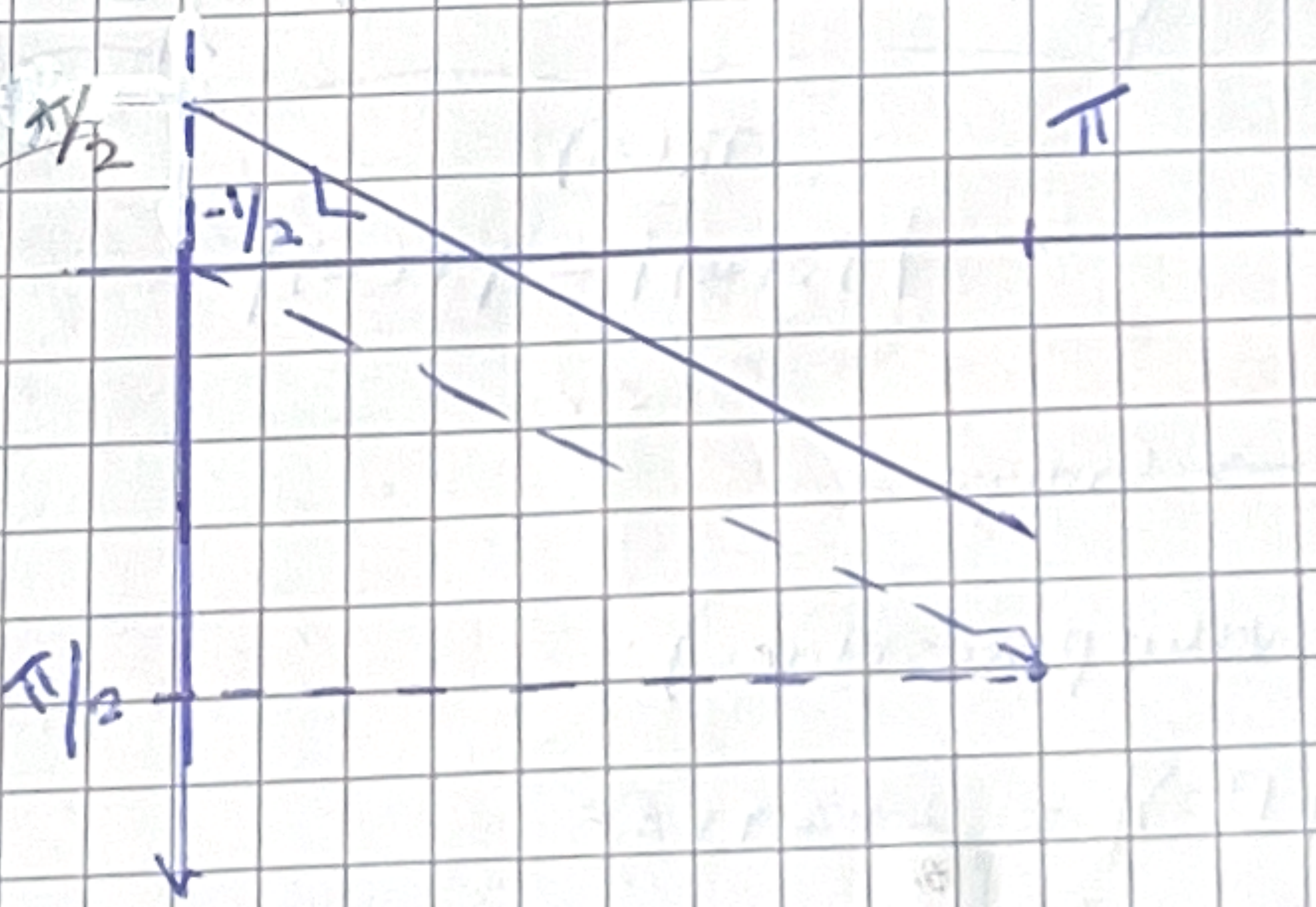
fase: $je^{-j\frac{1}{2}\Omega}$

$\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\Omega}{2}$ } " en este caso el salto está en 0

cuando $\Omega \to 0$

apunta: $\pi/2$

~~ahora q' tengo este ... de $\pi/2$ a la fase~~



d) $T(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2}$

$T(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \dfrac{e^{2j\Omega}-1}{e^{2j\Omega}} = \dfrac{e^{j\Omega}\left(e^{j\Omega}-e^{-j\Omega}\right)}{e^{2j\Omega}} = \underbrace{\left(2\sin(\Omega)\right)}\, je^{-j\Omega} \rightarrow \angle T(e^{j\Omega})$

$|T(0)| = 0$

$|T(\pi/2)| = 2$

$|T(\pi)| = 0$