Bayes-päättely
Työterveyslaitos
8.-9.2.2018

Ville Hyvönen

3. Posteriorijakauman kuvailu & ennustaminen

1. Posteriorijakauma päättelyn lopputuloksena
2. Tunnusluvut
3. Uskottavuusvälit
4. Hypoteesin testaaminen
5. Selittäminen vs. ennustaminen
6. Posteriorienennustejakauma

Posteriorijakauma päättelyn lopputuloksena

- Posteriorijakauma sisältää jo itsessään kaiken aineistosta saadun informaation parametrin todennäköisistä arvoista.

Posteriorijakauma päättelyn lopputuloksena

- Posteriorijakauma sisältää jo itsessään kaiken aineistosta saadun informaation parametrin todennäköisistä arvoista.
- Kuvat (reuna)-posteriorijakaumasta usein erittäin informatiivisia.

Posteriorijakauma päättelyn lopputuloksena

- Posteriorijakauma sisältää jo itsessään kaiken aineistosta saadun informaation parametrin todennäköisistä arvoista.
- Kuvat (reuna)-posteriorijakaumasta usein erittäin informatiivisia.
- Kuitenkin varsinkin korkeaulotteisen parametrin tapauksessa posteriorijakauman informaatiota halutaan usein tiivistää
  - Tunnusluvut

Posteriorijakauma päättelyn lopputuloksena

- Posteriorijakauma sisältää jo itsessään kaiken aineistosta saadun informaation parametrin todennäköisistä arvoista.
- Kuvat (reuna)-posteriorijakaumasta usein erittäin informatiivisia.
- Kuitenkin varsinkin korkeaulotteisen parametrin tapauksessa posteriorijakauman informaatiota halutaan usein tiivistää
  - Tunnusluvut
  - Uskottavuusvälit

Posteriorijakauma päättelyn lopputuloksena

- Posteriorijakauma sisältää jo itsessään kaiken aineistosta saadun informaation parametrin todennäköisistä arvoista.
- Kuvat (reuna)-posteriorijakaumasta usein erittäin informatiivisia.
- Kuitenkin varsinkin korkeaulotteisen parametrin tapauksessa posteriorijakauman informaatiota halutaan usein tiivistää
  - Tunnusluvut
  - Uskottavuusvälit
  - Todennäköisyydet parametrien arvoille

Uskottavuusvälit

- 95% **uskottavuusväliksi** (credible interval) kutsutaan väliä, joka sisältää 95% posteriorijakauman todennäköisyysmassasta.

Uskottavuusvälit

- 95% **uskottavuusväliksi** (credible interval) kutsutaan väliä, joka sisältää 95% posteriorijakauman todennäköisyysmassasta.
- Yleisesti uskottavuustason α uskottavuusväliksi kutsutaan väliä joka sisältää osuuden $(1 - \alpha)$ posteriorijakauman todennäköisyysmassasta.

Uskottavuusvälit

- 95% **uskottavuusväliksi** (credible interval) kutsutaan väliä, joka sisältää 95% posteriorijakauman todennäköisyysmassasta.
- Yleisesti uskottavuustason α uskottavuusväliksi kutsutaan väliä joka sisältää osuuden $(1 - \alpha)$ posteriorijakauman todennäköisyysmassasta.
- "Bayesiläinen luottamusväli".

Uskottavuusvälit

- 95% **uskottavuusväliksi** (credible interval) kutsutaan väliä, joka sisältää 95% posteriorijakauman todennäköisyysmassasta.
- Yleisesti uskottavuustason α uskottavuusväliksi kutsutaan väliä joka sisältää osuuden $(1 - \alpha)$ posteriorijakauman todennäköisyysmassasta.
- "Bayesiläinen luottamusväli".
  - Suoraviivainen tulkinta: parametrin arvo sijaitsee 95% todennäköisyydellä tällä välillä.

Uskottavuusvälit

- 95% **uskottavuusväliksi** (credible interval) kutsutaan väliä, joka sisältää 95% posteriorijakauman todennäköisyysmassasta.
- Yleisesti uskottavuustason α uskottavuusväliksi kutsutaan väliä joka sisältää osuuden $(1 - \alpha)$ posteriorijakauman todennäköisyysmassasta.
- "Bayesiläinen luottamusväli".
  - Suoraviivainen tulkinta: parametrin arvo sijaitsee 95% todennäköisyydellä tällä välillä.
  - Ei vastaavaa frekvenssitulkintaa kuin frekventistisillä luottamusväleillä: keskimäärin 95% frekventistisistä 95% luottamusväleistä sisältää parametrin todellisen arvon.

Uskottavuusvälit

- 95% uskottavuusväli voidaan valita äärettömän monella eri tavalla.

Uskottavuusvälit

- 95% uskottavuusväli voidaan valita äärettömän monella eri tavalla.
- Yleensä käytetään toista kahdesta eri periaatteesta:
  - Symmetrinen uskottavuusväli

Uskottavuusvälit

- 95% uskottavuusväli voidaan valita äärettömän monella eri tavalla.
- Yleensä käytetään toista kahdesta eri periaateesta:
  - Symmetrinen uskottavuusväli
  - HPD (highest posterior density)- uskottavuusväli

Symmetrinen uskottavuusväli

- 95% **symmetrisellä uskottavuusvälillä** (equal-tailed credible interval) tarkoitetaan väliä

$$[q_{0.025}, q_{0.975}],$$

missä q_z on posteriorijakauman z-kvantiili.

Symmetrinen uskottavuusväli

- 95% **symmetrisellä uskottavuusvälillä** (equal-tailed credible interval) tarkoitetaan väliä

$$[q_{0.025}, q_{0.975}],$$

missä q_z on posteriorijakauman z-kvantiili.

- Jos posteriorijakauman moodi on määrittelyjoukon reunalla, tai posteriori on monihuippuinen, ei välttämättä paras valinta, kts. esimerkit

HPD-uskottavuusväli

- 95% HPD-uskottavuusvälillä (HPD interval, eli highest posterior density interval) tarkoitetaan lyhintä mahdollista väliä (tai itse asiassa mahdollisesti välien yhdistettä), joka sisältää 95% posteriorijakauman todennäköisyysmassasta.

HPD-uskottavuusväli

- 95% HPD-uskottavuusvälillä (HPD interval, eli highest posterior density interval) tarkoitetaan lyhintä mahdollista väliä (tai itse asiassa mahdollisesti välien yhdistettä), joka sisältää 95% posteriorijakauman todennäköisyysmassasta.
- Jokaisessa HPD-uskottavuusvälin pisteessä posteriorijakauman tiheys on suurempi kuin missään pisteessä sen ulkopuolella.

HPD-uskottavuusväli

- 95% HPD-uskottavuusvälillä (HPD interval, eli highest posterior density interval) tarkoitetaan lyhintä mahdollista väliä (tai itse asiassa mahdollisesti välien yhdistettä), joka sisältää 95% posteriorijakauman todennäköisyysmassasta.
- Jokaisessa HPD-uskottavuusvälin pisteessä posteriorijakauman tiheys on suurempi kuin missään pisteessä sen ulkopuolella.
- Monihuippuisille jakaumille kuvaa paremmin parametrin todennäköisimpiä arvoja, kts. esimerkki.

Hypoteesintestaus

- Ei varsinaista vastinetta merkitsevyystesteille.

Hypoteesintestaus

- Ei varsinaista vastinetta merkitsevyystesteille.
- Ei-pisteittäisten hypoteesien, esim. $\theta > 0.5$, tarkastelu helppoa: lasketaan vain posteriorijakaumasta todennäköisyys $p(\theta > 0.5|\mathbf{y})$!

Hypoteesintestaus

- Ei varsinaista vastinetta merkitsevyystesteille.
- Ei-pisteittäisten hypoteesien, esim. $\theta > 0.5$, tarkastelu helppoa: lasketaan vain posteriorijakaumasta todennäköisyys $p(\theta > 0.5|\mathbf{y})$!
- kts. esimerkki

Pistehypoteesien testaus

- Pistehypoteesit, kuten $H_0 : \theta = 0.5$ hankalampia.

Pistehypoteesien testaus

- Pistehypoteesit, kuten $H_0 : \theta = 0.5$ hankalampia.
  - Jatkuvalle parametrille $p(\theta = 0.5|\mathbf{y}) = 0$.

Pistehypoteesien testaus

- Pistehypoteesit, kuten $H_0 : \theta = 0.5$ hankalampia.
  - Jatkuvalle parametrille $p(\theta = 0.5|\mathbf{y}) = 0$.
- Yksi tapa: Bayes-faktori (Bayes factor).

Pistehypoteesien testaus

- Pistehypoteesit, kuten $H_0 : \theta = 0.5$ hankalampia.
  - Jatkuvalle parametrille $p(\theta = 0.5|\mathbf{y}) = 0$.
- Yksi tapa: Bayes-faktori (Bayes factor).
  - Voivat olla erittäin sensitiivisiä priorin valinnalle jopa kaikkein yksinkertaisemmissakin malleissa.

Pistehypoteesien testaus

- Pistehypoteesit, kuten $H_0 : \theta = 0.5$ hankalampia.
  - Jatkuvalle parametrille $p(\theta = 0.5|\mathbf{y}) = 0$.
- Yksi tapa: Bayes-faktori (Bayes factor).
  - Voivat olla erittäin sensitiivisiä priorin valinnalle jopa kaikkein yksinkertaisemmissakin malleissa.
  - Asetetaan positiivinen todennäköisyys pistehypoteesille $\rightarrow$ yäk!

Pistehypoteesien testaus

- Pistehypoteesit, kuten $H_0 : \theta = 0.5$ hankalampia.
  - Jatkuvalle parametrille $p(\theta = 0.5|\mathbf{y}) = 0$.
- Yksi tapa: Bayes-faktori (Bayes factor).
  - Voivat olla erittäin sensitiivisiä priorin valinnalle jopa kaikkein yksinkertaisemmissakin malleissa.
  - Asetetaan positiivinen todennäköisyys pistehypoteesille $\rightarrow$ yäk!
  - Jos parametrin arvo todella voi olla tasan 0.5 tai 0, voi olla Bayes-faktoreita voi olla perusteltua käyttää, mutta muuten kannattaa suhtautua varauksella (huom. kirjoittajan subjektiivinen mielipide, mutta myöskään Bayesian data analysis tai Doing Bayesian data analysis eivät suosittele Bayes-faktorien käyttöä yleisessä tapauksessa).

Pistehypoteesien testaus

- Jos haluaa "testata" pistehypoteesiä, esimerkiksi $p(\theta = 0.5)$ voi yksinkertaisesti katsoa, kuuluuko arvo $\theta = 0.5$ parametrin 95% uskottavuusvälille.

Pistehypoteesien testaus

- Jos haluaa "testata" pistehypoteesiä, esimerkiksi $p(\theta = 0.5)$ voi yksinkertaisesti katsoa, kuuluuko arvo $\theta = 0.5$ parametrin 95% uskottavuusvälille.
- Tällöin priorin on syytä olla suhteellisen epäinformatiivinen.

Pistehypoteesien testaus

HELSINKI INSTITUTE FOR INFORMATION TECHNOLOGY

- Jos haluaa "testata" pistehypoteesiä, esimerkiksi $p(\theta = 0.5)$ voi yksinkertaisesti katsoa, kuuluuko arvo $\theta = 0.5$ parametrin 95% uskottavuusvälille.
- Tällöin priorin on syytä olla suhteellisen epäinformatiivinen.
- Kts. esimerkki.

Ennustaminen

- Posterioriennustejakauma uudelle havainnolle $\tilde{y}$ samasta jakaumasta kuin alkuperäiset havainnot $y_1, \ldots, y_n$ saadaan integroimalla parametriavaruuden yli:

$$p(\tilde{y}|\mathbf{y}) = \int_{\Omega} p(\tilde{y}|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}.$$

Ennustaminen

- Posterioriennustejakauma uudelle havainnolle $\tilde{y}$ samasta jakaumasta kuin alkuperäiset havainnot $y_1, \ldots, y_n$ saadaan integroimalla parametriavaruuden yli:

$$p(\tilde{y}|\mathbf{y}) = \int_{\Omega} p(\tilde{y}|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}.$$

- Ottaa huomioon koko posteriorijakauman.

Ennustaminen

- Posterioriennustejakauma uudelle havainnolle $\tilde{y}$ samasta jakaumasta kuin alkuperäiset havainnot $y_1, \ldots, y_n$ saadaan integroimalla parametriavaruuden yli:

$$p(\tilde{y}|\mathbf{y}) = \int_\Omega p(\tilde{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}.$$

- Ottaa huomioon koko posteriorijakauman.
- Vrt. "plug-in-estimaatti": $p(\tilde{y}|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MLE}})$

Ennustaminen

- Posterioriennustejakauma uudelle havainnolle $\tilde{y}$ samasta jakaumasta kuin alkuperäiset havainnot $y_1, \ldots, y_n$ saadaan integroimalla parametriavaruuden yli:

$$p(\tilde{y}|\mathbf{y}) = \int_\Omega p(\tilde{y}|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}.$$

- Ottaa huomioon koko posteriorijakauman.
- Vrt. "plug-in-estimaatti": $p(\tilde{y}|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MLE}})$
- Kts. esimerkki.