

ESCALAS DE DISTANCIAS EN ASTRONOMÍA

DISTANCIAS →

absoluta → magnitud aparente
 $m - M = 5 \left(\log \frac{D}{10 \text{ pc}} - 1 \right)$
 magnitud absoluta

relativa → $\log \frac{D_1}{D_2} = \frac{1}{5} [(m_1 - m_2) - (A_1 - A_2) - (K_1 - K_2)]$

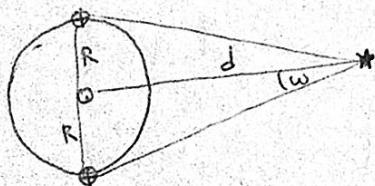
maguitudes extinciones
 (en la banda correspondiente)

"corrección K " (corrección redshift por)

flujos real observado (con redshift)
 sensibilidad del filtro

Métodos absolutos

1. Paralaje [trigonométrico]
2. Moving cluster
3. Baade - Wesselink
4. Retardo temporal
5. Sunyaev - Zel'dovich

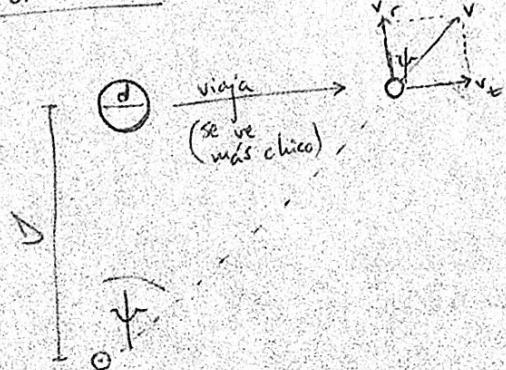
PARALAJE

$$\frac{R}{d} = \tan w \approx w$$

$$\Leftrightarrow d \approx \frac{R}{w[\text{rad}]}$$

(w es el "ángulo de paralaje")

$$\therefore d \approx \frac{206265 \text{ AU}}{w[\text{arcsec}]} \Leftrightarrow 1 \text{ pc} = 206265 \text{ AU}$$

MOVING CLUSTER

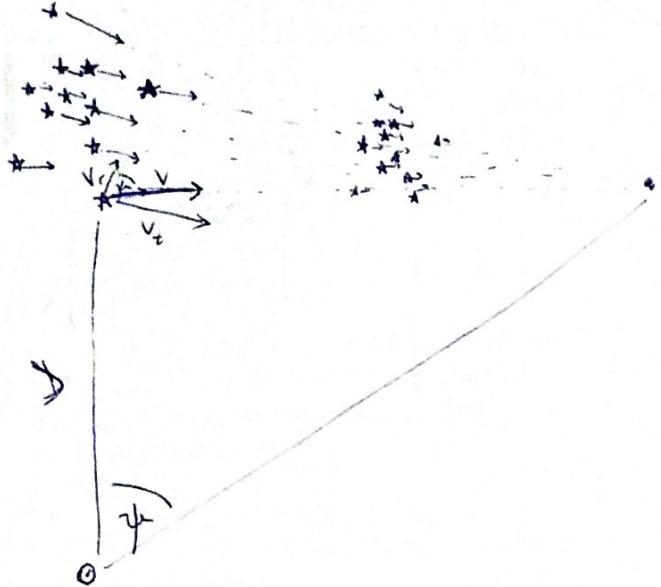
Tamaño angular: $\theta = d/D$, luego

$$\theta = \frac{d\beta - d\bar{\beta}}{D^2} = -\frac{\theta \beta}{D}$$

donde β es la velocidad radial. Despejando D ,

$$D = \frac{-\theta}{\beta} v_r \quad (1)$$

Al fijarse en las estrellas de un cúmulo, el movimiento del cúmulo hace parecer que todas las estrellas vienen de, o van hacia, un punto en el espacio, llamado punto de convergencia. Esto se observa midiendo las velocidades de las estrellas individuales del cúmulo.



Como las estrellas están muy lejos, el ángulo entre la línea de visión y la línea de visión al punto de convergencia será el mismo que entre la velocidad de cada estrella y su componente radial: ϕ .

Luego, con algo de trigonometría, se obtiene fácilmente

$$\begin{cases} v_r = v \cos \phi \\ v_t = v \sin \phi \end{cases} \Leftrightarrow v_t = v_r \tan \phi ;$$

[obs.: A veces este método también sirve para cúmulos galácticos.]

y como v_t se puede observar por el movimiento propio μ de la estrella, según $v_t = \mu D$ (μ [milliarcsecond/year] se mide como la variación angular de la posición en la esfera celeste), entonces $\mu D = v_r \tan \phi \Rightarrow D = \frac{v_r \tan \phi}{\mu}$ (2)

Finalmente, de (1) con (2),

$$\begin{cases} D = \frac{-v_r \theta}{\dot{\theta}} \\ D = \frac{v_r \tan \phi}{\mu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_r = -\frac{D \dot{\theta}}{\theta} \\ D = \frac{v_r \tan \phi}{\mu} \end{cases} \Rightarrow D = \frac{-D \dot{\theta} \tan \phi}{\theta \mu} \therefore D = \frac{\theta \mu}{\theta \mu + \dot{\theta} \tan \phi}$$

Aquí, $\theta, \dot{\theta}, \mu$ y ϕ son observables.

Método de Baade - Wesselink

Relaciona el cambio de tamaño linear de una estrella con el cambio fraccional que ocurre. Para una estrella de radio R_s y temp. ef. T_{eff} , su superficie es $A = 4\pi R_s^2$, y su luminosidad es $L = AF$, donde el flujo viene dado por $F = \sigma T_{eff}^4$. Luego, es posible determinar su magnitud absoluta por

$$L = 4\pi R_s^2 \sigma T_{eff}^4 / -2.5 \log(1)$$

$$\Leftrightarrow M_{abs} = -10 \log T_{eff} - 5 \log R_s + c.$$

Si se trata de una estrella variable, tal que en dos momentos distintos presenta distintas magnitudes m_1, m_2 ; entonces es posible calcular

$$m_1 - m_2 = -10 \log T_{eff,1} - 5 \log(r_1) + 10 \log(T_{eff,2}) + 5 \log r_2$$

Si se observa en 2 momentos en que la estrella presente el mismo color (i.e., $T_{eff,1} = T_{eff,2}$), se sigue que

$$m_1 - m_2 = 5 \log \frac{r_2}{r_2 + \Delta r}$$

$$10^{-\frac{(m_1 - m_2)}{5}} = 1 + \frac{\Delta r}{r_2}$$

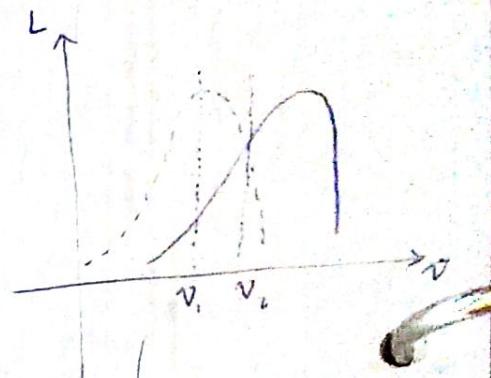
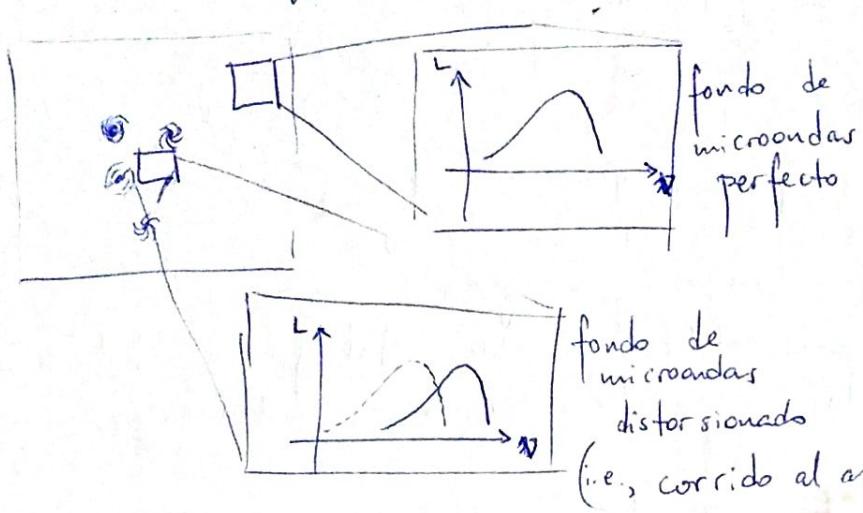
Cuando la estrella crece, la parte que observamos se acerca a nosotros con una velocidad v , durante un tiempo t . Esto genera un corrimiento al rojo periódico, observable en las líneas espectrales. Conociendo estos v y t , se calcula Δr ; con lo que

$$10^{-\frac{(m_1 - m_2)}{5}} = 1 + \frac{\Delta r}{r_2} \Leftrightarrow \left| \frac{\Delta r}{10^{\frac{(m_2 - m_1)/5}{-1}} - 1} = r_2 \right|$$

Habiendo encontrado r_2 , se puede inmediatamente calcular su luminosidad $L = 4\pi R_s^2 \sigma T_{eff}^4 = 4\pi r_2^2 \sigma T_{eff,2}^4$. Esta es la luminosidad absoluta. Comparándola con la luminosidad aparente, la ley del cuadrado inverso de la distancia nos entrega inmediatamente la distancia a la estrella.

Método Sunyaev-Zel'dovich

Cuando fotones provenientes del CMB atraviesan cúmulos de galaxias, sufren dispersión inversa de Compton; esto es, pierden energía por colisiones con los electrones del gas caliente.



En ν_2 , se observan la misma cantidad de fotones en el espectro observado que en el espectro perfecto,

pero en ν_1 se observan muchos menos fotones que los esperados. Así, observando en diferentes bandas se observan hoyos fríos (*) o calientes en frecuencias muy bajas distintas.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagrama de un volumen } ds \text{ con radio } r_c. \\
 & I = I_0 e^{-\tau_{sz}} \text{ intensidad específica} \\
 & P = 1 - e^{-\tau_{sz}} \text{ probabilidad de scattering} \\
 & n_e \text{ densidad electrónica} \\
 & \text{profundidad óptica } \tau_{sz} = \int n_e ds = 2 r_c \sigma_T n_e \Rightarrow n_e^2 = \frac{\tau_{sz}^2}{4 \sigma_T^2 r_c^2} \\
 & \text{sección eficaz de absorbedores} \\
 & \text{emisividad } E(\nu) = A n_e^2 T_x^{-1/2} e^{-h\nu/(kT_x)} \Rightarrow f_x(\nu) = \frac{r_c^3 A}{3 D^2 \sqrt{T_x}} \cdot \frac{\tau_{sz}^2 e^{-h\nu/(kT_x)}}{4 \sigma_T^2 r_c^2} \\
 & D = \frac{2 r_c}{D} \frac{A \tau_{sz}^2}{3 \sqrt{T_x}} f_x \frac{e^{-h\nu/(kT_x)}}{4 \sigma_T^2 r_c^2} \\
 & \therefore D = \frac{A \theta \tau_{sz}^2 e^{-h\nu/(kT_x)}}{24 \sqrt{T_x} f_x \sigma_T^2 (1+z)^2}
 \end{aligned}$$

por el redshift cosmológico producto de la expansión del universo

τ_{sz} → conocido del CMB
 h, k, σ_T → ctes.
 T_x → del espectro en rayos X
 f_x →
 θ → tamaño angular, de (*)

MÉTODO DEL RETARDO TEMPORAL
("ECOS DE LUZ")

Hay fuentes rodeadas de nubes de gas en que se pueden distinguir eventos específicos, por sus variaciones de luminosidad. Algo usual es identificar supernovas, por ejemplo. Al proceso por el que la luz de la fuente es dispersada en el gas para llegar a nosotros se le llama reprocesamiento.

Conociendo el lapso de tiempo entre que nos llega la luz original de un evento y que nos llega la luz reprocesada, es posible calcular la distancia entre la fuente y la nube de gas. Con ello, sabiendo el tamaño angular de la nube de gas, podemos estimar su distancia a nosotros.

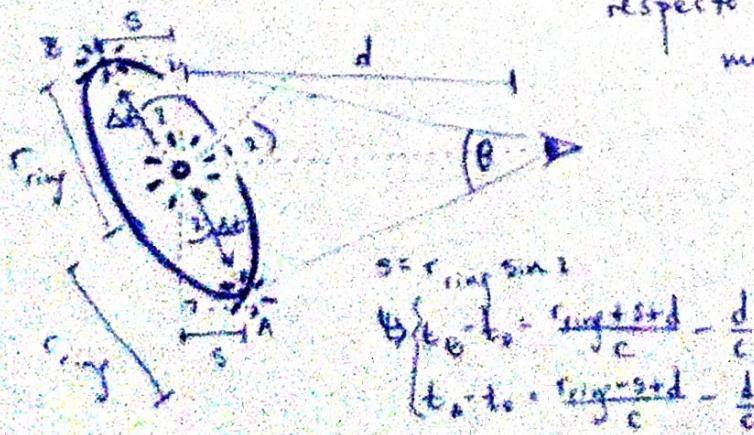
La distancia entre la fuente y la nube de gas es $c\Delta t$, donde Δt es el tiempo de reprocesamiento. Luego, si la nube de gas tiene un tamaño angular θ , entonces se satisfará

$$\theta = \frac{c\Delta t}{d} \Leftrightarrow d = \frac{c\Delta t}{\theta}$$

donde d es la distancia al objeto.

CASO PARTICULAR: GEOMETRÍA DE SUPERNOVAS

Cuando ocurre una supernova, ésta ilumina un disco de gas a su alrededor. Ese disco está inclinado en un ángulo θ respecto de la línea de visión; de modo que desde B la luz debe recorrer una distancia s_{ring} mayor que desde la fuente, mientras que desde A recorre una distancia s_{ring} menor, donde $s_{ring} = c\Delta t$.



Luego,

$$\begin{cases} t_B - t_0 = \frac{r_{ring}}{c} (1 + \sin z) \\ t_A - t_0 = \frac{r_{ring}}{c} (1 - \sin z) \end{cases}$$

pero $\theta = \frac{2\pi r_{ring} \cos z}{d}$, con lo que se forma un sistema de ecuaciones para d y z:

$$\begin{cases} t_B - t_0 = \frac{d\theta}{2c \cos z} (1 + \sin z) \\ t_A - t_0 = \frac{d\theta}{2c \cos z} (1 - \sin z) \end{cases} \Rightarrow (\overbrace{t_B - t_0}^{\delta^B t} + \overbrace{t_A - t_0}^{\delta^A t}) = \frac{d\theta}{c \cos z}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{c}{\theta} (\delta^B t + \delta^A t) \cos z \quad (1)$$

$$(-) \Rightarrow \delta^B t - \delta^A t = \frac{d\theta}{c \cos z} \sin z = \frac{\theta d}{c} \frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}}$$

$$\Leftrightarrow (\delta^B t - \delta^A t)^2 (1 - \sin^2 z) = \frac{\theta^2 d^2}{c^2} \sin^2 z$$

$$\Leftrightarrow (\delta^B t - \delta^A t)^2 = \left[\frac{\theta^2 d^2}{c^2} + (\delta^B t - \delta^A t)^2 \right] \sin^2 z$$

$$\therefore z = \arcsin \sqrt{\frac{(\delta^B t - \delta^A t)^2}{\left(\frac{\theta d}{c} \right)^2 + (\delta^B t - \delta^A t)^2}}$$

$$z = \arcsin \sqrt{\frac{1}{\left[\frac{\theta d}{(\delta^B t - \delta^A t)c} \right]^2 + 1}}$$

De (2) en (1),

$$d = \frac{c(\delta^B t + \delta^A t)}{\theta} \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{\theta d}{(\delta^B t - \delta^A t)c} \right)^2 + 1}} = \frac{\left[\frac{\theta d}{(\delta^B t - \delta^A t)c} \right]^2}{\left(\frac{\theta d}{(\delta^B t - \delta^A t)c} \right)^2 + 1} = \frac{1}{1 + (\delta^B t - \delta^A t)^2/c^2}$$

$$\therefore d = \frac{c(\delta^B t + \delta^A t)}{\theta \sqrt{1 + \left[\frac{(\delta^B t - \delta^A t)c}{\theta d} \right]^2}} \Rightarrow d = \frac{4c^2 \delta^B t \delta^A t}{\theta^2}$$

II. Métodos de distancias relativas

- Luminosidad de estrellas variables + ciclos an. & P.e.
 - Funciones de luminosidad
 - Cúmulos globulares
 - Nebulosas planetarias
 - Novas y supernovas
 - Fluctuaciones de brillo superficial 2.2.3
 - Tully-Fisher y Faber-Jackson → Densidad de galaxias 2.2.2

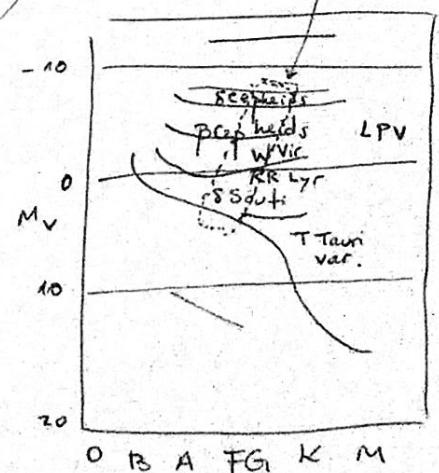
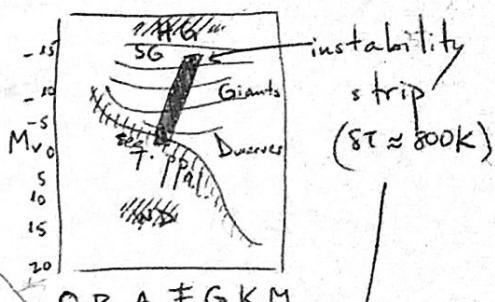
MÉTODO DE LA LUMINOSIDAD DE ESTRELLAS VARIABLES

Existen estrellas cuyo brillo, radio, color y temperatura efectiva varían periódicamente. Ocurren en varios puntos de un diagrama HR, siempre en una banda de $\approx 800K$ de ancho.

En el siglo XX, Henrietta Swan Leavitt descubrió una relación entre las magnitudes absolutas en el visual (M_V) y el período Π (en días) de estas estrellas:

$$\langle M_v \rangle = -2.5 \log\left(\frac{\pi}{A_d}\right) - 1.43 \quad (1)$$

Ella conocía de antemano las magnitudes absolutas de estas estrellas. Por eso es que observando sus períodos calibró (1). Es por esta razón que se considera un método relativo.



Una vez se observa el período, entonces, es fácil, usando (1) y el módulo de la distancia, se obtiene la velocidad.

$$m - M = -5 \log\left(\frac{d}{10 \text{ pc}}\right) , \quad (2)$$

calcular la distancia d a la estrella:

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow m + 2.5 \log\left(\frac{\pi}{d}\right) + 1.43 = -5 \log\left(\frac{d}{10 \text{ pc}}\right)$$

$$\Leftrightarrow m + 1.43 + \log\left[\left(\frac{\pi}{d}\right)^{5/2}\right] = \log\left[\left(\frac{d}{10 \text{ pc}}\right)^{-5}\right] \quad /10^{11}$$

$$\Leftrightarrow 10^{m+1.43} \cdot \left(\frac{\pi}{d}\right)^{5/2} = \left(\frac{10 \text{ pc}}{d}\right)^5 \quad / \sqrt[5]{} \quad /(\cdot)^{-1} \cdot 10 \text{ pc}$$

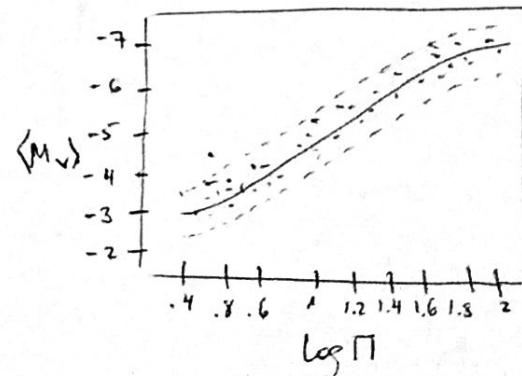
$$\therefore d = 10^{1-\frac{m+1.43}{5}} \sqrt[5]{\pi/d} \text{ pc}$$

Usualmente se mide el período de estas estrellas en la banda B, pues allí es donde las estrellas de este tipo son más brillantes; mientras que para medir la amplitud se suele medir en infrarrojo (banda I), donde hay menor extinción por el polvo interestelar. Puede ser útil conocer la amplitud para integrar $M_V(t)|_{t_0}^{t_0+n}$ y obtener $\langle M_V \rangle$.

Con este método se lograron medir las distancias a las Nubes de Magallanes, observando períodos y magnitudes aparentes de cefeidas en ellas.

pero... por QUÉ LAS ESTRELLAS?
VARIABLES VARIAN

- ↓
- descubra todo esto y MÁS
- en la siguiente
- página
- ., ., ., ., .



Relación $T-L$ encontrada por HSL., con .5 magnitudes de error.

LA RAZÓN DE LA VARIABILIDAD DE ESTAS ESTRELLAS ES EL LLAMADO

MECANISMO κ (kappa)

→ Asume que las pulsaciones se deben a ondas de sonido propagándose desde el interior de la estrella. La ecuación de equilibrio hidrostático para interiores estelares es

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G\rho^2 r}{3} \quad (3)$$

Integrando,

$$P(r) = -\frac{4\pi G\rho^2}{3} \int r dr = -\frac{2\pi G\rho^2 r^2}{3} + C$$

Imponiendo $P(R) = 0$,

$$-\frac{2\pi G\rho^2 R^2}{3} + C = 0 \Rightarrow P(r) = \frac{2\pi G\rho^2 (R^2 - r^2)}{3}$$

Luego, la velocidad del sonido dentro del fluido adiabático que constituye las estrellas es

$$v_s = \sqrt{\frac{dP}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\pi G\rho \gamma (R^2 - r^2)}{3}}$$

$$\begin{aligned} \Pi &= 2 \int_0^R \frac{dr}{v_s} \\ \frac{\Pi}{2} &= \int_0^R \frac{dt}{dr} dr \end{aligned}$$

Ahora, asumiendo que la longitud de onda es $2R$ (i.e., la estrella comienza a contraerse recién cuando la expansión llega a la superficie; y viceversa), se consigue que

$$a = \frac{r}{R} \Rightarrow da = \frac{dr}{R}$$

$$\frac{\Pi}{2} = \int_{r=0}^{r=R} dt = \int_{r=0}^{r=R} \frac{dt}{dr} dr = \int_0^R \frac{dr}{v_s} \Rightarrow \Pi = 2 \int_0^R \left(\frac{2\pi G\rho \gamma (R^2 - r^2)}{3} \right)^{1/2} dr$$

$$\Pi = 2 \sqrt{\frac{3}{2\pi G\rho \gamma}} \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3}{2\pi G\rho \gamma}} \int_0^R \frac{R' da}{\sqrt{1 - a^2}} = 2 \sqrt{\frac{3}{2\pi G\rho \gamma}} \left[\arcsin\left(\frac{r}{R}\right) \right]_0^R$$

$$\Pi = \sqrt{\frac{3\pi}{2G\rho\gamma}}$$

(4)

(9) se conoce como la relación periodo-densidad media.

↳ explica por qué estrellas más densas tienen períodos más cortos (e.g.: WD, δ Scuti), y las menos densas tienen períodos más largos (e.g., δ Cepheids, β Cepheids), consistentemente con (1).

↳ Al conocer el periodo de una estrella variable, ¡(4) permite conocer su densidad!

MÉTODOS DE FUNCIONES DE LUMINOSIDAD

1. para cúmulos globulares.

→ En el halo de toda galaxia* se encuentran orbitando cúmulos globulares de estrellas.

→ La distribución estadística de las magnitudes absolutas de estos cúmulos es la misma gaussiana para todas las galaxias

↳ Estudiando la distribución de magnitudes para una galaxia conocida (incluso para la Vía Láctea), se puede obtener la media de esa gaussiana.

↳ Observando las magnitudes aparentes de los cúmulos, y calculando su promedio, se puede obtener la distancia a la galaxia con el módulo de distancia.

2. para nebulosas planetarias...?

Bueno, p's el profe se
lo saltó -.-

* Sí, incluso de las elípticas.

MÉTODO DEL BRILLO DE LAS NOVAE

→ Una nava se produce cuando en un sistema binario hay una enana blanca y una estrella de secuencia principal, subgigante, o gigante roja. Cuando la estrella MS/SG/RG crece lo suficiente como para que la enana blanca comience a acretarle el material, se produce una nube hueca de gas caliente entre ambas estrellas. Esta nube es termo dinámicamente inestable, por lo que frecuentemente llega un momento en que la nube explota, produciendo una fuente muy brillante en el cielo, cuyo brillo decrece en un intervalo de días a meses. Esta explosión se denomina nava (plural novae, porque está en latín).

→ Hay una relación empírica entre la magnitud absoluta máxima $\max\{M_V(t) | t \in [t_0, \infty)\} \equiv M_{V,0}(t_0)$ y la tasa de crecimiento del brillo (i.e., incremento en la magnitud aparente) durante las primeras dos magnitudes, con el tiempo medido en días

$$M_{V,0}^{\max} \approx -9.96 - 2.31 \log \left(\langle m_i \rangle \right)^{m(t_0)-2}_{m(t_0)} \quad (5)$$

Considerando $\langle m_i \rangle^{m(t_0)-2}_{m(t_0)} = \frac{m(t_0) - (m(t_0) - 2)}{\Delta t / 1 \text{ día}}$, entonces

$$\begin{aligned} M_{V,0}^{\max} &\approx -9.96 - 2.31 \log \left[\frac{2}{(\Delta t / 1 \text{ día})} \right] \\ &= -9.96 + 2.31 \log \left(\frac{\Delta t}{1 \text{ día}} \right)^2 \cdot 2.31 \log 2 \\ \therefore M_{V,0}^{\max} &\approx -10.7 + 2.3 \log \left(\frac{\Delta t}{1 \text{ día}} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

→ Es entonces que, usando (5) ó (6), se puede determinar la distancia usando el módulo de distancia; pues se conoce la magnitud aparente en el máximo.

MÉTODO DE LAS FLUCTUACIONES DE
BRILLO SUPERFICIAL

- Se basa en qué tan fácil es, estadísticamente, resolver estrellas individuales en una galaxia.
- Sea una galaxia a distancia D , con estrellas de luminosidad L , densidad superficial de estrellas n . En una región de tamaño angular $\delta\theta$, habrá aproximadamente $n(D\delta\theta)^2 = N$ estrellas, con lo que el flujo de allí proveniente será $F = Nf = \frac{NL}{4\pi D^2} \triangleq \frac{nL(\delta\theta)^2}{4\pi}$
- En verdad cada celda de tamaño $\delta\theta$ no contiene exactamente N estrellas; sino que el número de estrellas que contiene queda descrito por una distribución de Poisson de media N . Consecuentemente, la desviación estándar de la distribución será $\sigma = \sqrt{N}$; de modo que la desviación estándar para la distribución de flujos en cada celda será

$$\sigma_F = \sqrt{N} f = \frac{\sqrt{N} L}{4\pi D^2} \triangleq \frac{\sqrt{n} \delta\theta L}{4\pi D}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_F}{F} = \frac{\sqrt{n} \delta\theta}{4\pi D} \cdot \frac{4\pi}{n L (\delta\theta)^2} = \frac{1}{\sqrt{n} D \delta\theta}$$

$$\frac{\sigma_F^2}{F^2} = \frac{n (\delta\theta)^2 L^2}{(4\pi)^2 D^2} \cdot \frac{4\pi}{n L (\delta\theta)^2} = \frac{L}{4\pi D^2} \equiv f$$

- Ahora, como σ_F y F son observables entonces bajo el supuesto de que dos galaxias A y B cuenten con estrellas de igual luminosidad $L^A = L^B = L$, entonces

$$\begin{cases} \frac{(\sigma_F^A)^2}{F^A} = \frac{L}{4\pi(D^A)^2} \\ \frac{(\sigma_F^B)^2}{F^B} = \frac{L}{4\pi(D^B)^2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\sigma_F^A}{\sigma_F^B} \right)^2 \frac{F^B}{F^A} = \left(\frac{D^B}{D^A} \right)^2 \quad \therefore \quad D^B = D^A \frac{\sigma_F^A}{\sigma_F^B} \sqrt{\frac{F^B}{F^A}}$$

con lo que se conoce la distancia relativa entre ambas.

LA LEY DE LEMAÎTRE-HUBBLE

- En 1914, Slipher encontró 12 galaxias corridas al rojo. Para 1925 ya eran 40 galaxias. En esa época se les conocía como nebulosas, y Slipher concluyó que se estaban alejando de nosotros.
- En 1925, Hubble encuentra cefideas en la "nebulosa" de Andrómeda a enormes distancias, concluyendo que Andrómeda es una galaxia.
- En 1927, Lemaître resuelve las eqs. de campo de Einstein, y propone $K = v/c$ para la expansión del universo.
- En 1929, Hubble encuentra $v = H_0 d$ observationalmente para 18 galaxias, ¡y no cita a Lemaître! .

LA EXPANSIÓN DEL UNIVERSO

- ¿Será que todas las galaxias se están alejando de nosotros en especial?
 ↴ NO! Tómese un par de galaxias A y B, a distancias \vec{r}_A y \vec{r}_B de nosotros. Por la ley de Lemaître-Hubble, recederán con unas rápidas velocidades \vec{v}_A y \vec{v}_B , tales que

$$\begin{cases} \vec{v}_A = H_0 \vec{r}_A \\ \vec{v}_B = H_0 \vec{r}_B \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_B - \vec{v}_A = H_0 (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Esto basta para mostrar que dos galaxias que se alejan de nosotros están también alejándose entre sí.

∴ EL UNIVERSO SE EXPANDE!

obss. el principio cosmológico: el Universo es
 - homogéneo e
 - isotrópico.

TERCERO

Si el universo se está expandiendo, entonces debe haber habido un momento en que toda la materia estuvo en un mismo punto.

[L'Hypothèse de L'atome
primitif!]

- Lemaitre

Es posible con esto establecer la teoría del Big-Bang; y a través de la ley de Lemaitre-Hubble, calcular la edad del universo asumiendo que siempre se ha expandido a la misma tasa*: si el radio R de un universo esférico corresponde a la distancia que ha recorrido una galaxia en un tiempo t_H igual a la edad del universo, entonces,

$$\begin{cases} R = vt_H \\ R = \frac{v}{H_0} \end{cases} \Rightarrow t_H = \frac{1}{H_0} \rightarrow 10-20 \text{ Gyr} \quad (13.7 \text{ miles de millones de años})$$

EL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA

→ La fuerza con que un objeto es atraído por un cuerpo de masa M a distancia r es, según Newton,

$$\vec{F} = -\frac{GMm_F}{r^2}$$

donde m_F se conoce como la masa gravitatoria del objeto.

→ Por otra parte, si el cuerpo se somete a alguna fuerza \vec{F} , se satisfará la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m_i \vec{a}$$

donde m_i es su masa inercial.

* La cual, por cierto, no es verdad.

En principio, m_1 y m_2 no tienen por qué ser iguales. Afortunadamente, sin embargo, las mejores mediciones entregan $m_1 \approx m_2$. Esto quiere decir que una persona cayendo libremente, y una persona ascendiendo en un ascensor que acelera, no son capaces de diferenciar entre ambas situaciones.

→ Entonces, se dice que un campo gravitacional es equivalente a una aceleración producto de una fuerza.

CURVATURA

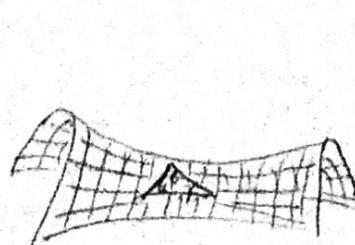
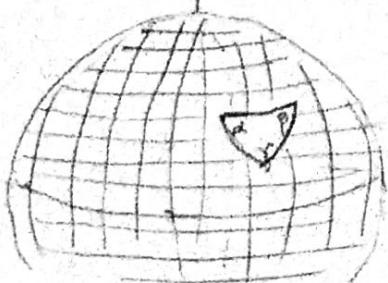
En un espacio euclídeo \mathbb{R}^2 , la suma de los ángulos interiores de un triángulo es π ; y además una distancia ds satisface $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$.

Sin embargo, ello se cumple sólo si el espacio considerado es plano. Si es curvo, lo anterior no corresponde. Por ejemplo, en un espacio constituido por la superficie de una esfera de radio R , la suma de los ángulos interiores de un triángulo será

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2},$$

donde A es el área del triángulo esférico.

En general, para una curvatura positiva (i.e., conteniendo más espacio del que se esperaría) se tiene $\alpha + \beta + \gamma > \pi$; mientras que para una curvatura negativa (i.e., conteniendo menos espacio del que se esperaría) se tiene $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.



} notese que en ambos casos lo que se considera es una superficie 2D. Luego se escalará a 3D.

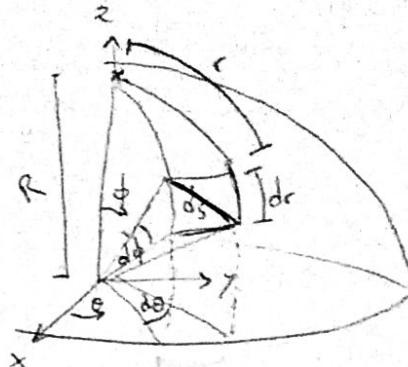
Ahora... quisieramos medir distancias en geometrías curvas. En un espacio esférico, la métrica queda definida como

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2(r/R) d\theta^2$$

Nótese que $r/R \equiv \phi$.

Para una geometría hiperbólica,

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(r/R) d\theta^2$$



Se define una curvatura plana con $k=0$, positiva (e.g., esférica) con $k=+1$, o negativa (e.g., hiperbólica) con $k=-1$.

En tres dimensiones, se consigue

$$\left. \begin{array}{l} \text{universo plano} \\ (k=0) \end{array} \right\} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{esférico} \\ (k=+1) \end{array} \right\} ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2(r/R) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{hiperbólico} \\ (k=-1) \end{array} \right\} ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2(r/R) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Resumiendo, toda métrica tridimensional posible para nuestro universo será de la forma

$$ds^2 = dr^2 + S_k^2(r) d\Omega^2$$

con

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

y S_k dependiendo de la geometría según

$$S_k(r) = \begin{cases} R \sin(r/R) & \Leftrightarrow k=+1 \\ r & \Leftrightarrow k=0 \\ R \sinh(r/R) & \Leftrightarrow k=-1 \end{cases}$$

obs.: para $r \ll R$, es posible aproximar $r/R \approx 0$, con lo que en cualquiera de las tres posibles curvaturas se obtiene un universo plano a pequeña escala, i.e., localmente.

→ Minkowski fue de los primeros en aplicar métricas 4D curvilíneas para medir distancias entre eventos en nuestro universo. Definió la métrica de Minkowski:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

donde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

→ (1) determina un espacio-tiempo plano, con $k=0$. En esta métrica, los fotones siguen las geodésicas nulas:

$$ds^2 = 0 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Si el fotón se aleja o acerca radialmente respecto del origen, i.e., $d\Omega = 0$, entonces

$$-c^2 dt^2 + dr^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\dot{r} = \pm c}$$

lo cual tiene muchísimo sentido. Es más, la geodésica que sigue el fotón es nula porque por cada unidad de tiempo dt el fotón avanza $c dt$ unidades de distancia.

→ Sin embargo, esto funciona sólo para un espacio-tiempo plano. Cuando se añade aunque sea un mínimo de masa, es sabido que el espacio-tiempo se curvará, con lo que la métrica de Minkowski pierde validez.

→ En los años '30, Howard Robertson y Arthur Walker llegaron independientemente a una métrica que asume la expansión del universo. La métrica de Robertson-Walker es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2 (dr^2 + S_k^2 d\Omega^2), \quad (2)$$

donde $S_k(r)$ es un término que depende de la geometría, según

$$S_k(r) = \begin{cases} R \sin(r/k) & \leftrightarrow k \neq 0 \\ r & \leftrightarrow k=0 \\ R \sinh(r/k) & \leftrightarrow k=-1 \end{cases}$$

y $a(t)$ es un factor de escala: un parámetro adimensional que varía conforme el universo se expande. Haciendo el cambio de variable $\chi = S_k(r)$, se consigue

$$\left\{ \begin{array}{l} d\chi|_{k=0} = dr \\ d\chi|_{k \neq 0} = \frac{R \cos(r/k)}{R} dr = \cos(r/k) dr \\ d\chi|_{k=-1} = \frac{R \cosh(r/k)}{R} dr = \cosh(r/k) dr \end{array} \right.$$

de modo que

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2 \left(\frac{d\chi^2}{1 - k\chi^2/R^2} + \chi^2 d\Omega^2 \right) \quad (2')$$

→ En (2) y (2'), t es el tiempo propio, o tiempo cosmológico, que se define como un tiempo universal. También, r , θ y ϕ son llamadas coordenadas comórviles, pues se mueven "con el espacio", midiendo a través del tiempo. Por último, R es el radio de curvatura del universo.

→ Para el factor de escala, se define que en el tiempo presente $a(t_0) = a_0 \stackrel{\Delta}{=} 1$.

DISTANCIA PROPIA

Def.: es la longitud de la geodésica que une dos puntos para el mismo tiempo propio,

$$ds^2 = a^2 \cdot (dr^2 + S_k^2 d\Omega^2)$$

→ En particular, si medimos la distancia radial a algo, i.e., nosotros en el origen, esta distancia cumplirá $ds = a(t) dr$.

lo que al integrar resulta en

$$\int_0^{d_p} ds = \int_0^r a(t) dr \Leftrightarrow d_p(t) = a(t) r$$

Es decir, la distancia propia es una función del tiempo, con $d_p(t_0) = a(t_0)r \stackrel{?}{=} r$. Diferenciando,

$$\dot{d}_p = ar \stackrel{\dot{d}_p = ar}{\Leftrightarrow} \boxed{\dot{d}_p = \frac{\dot{a}}{a} d_p} \quad (3)$$

donde $\dot{d}_p = v(t)$ es la velocidad de recesión de algún objeto en d_p . En particular para $t=t_0$, se tiene

$$\dot{d}_p(t_0) \stackrel{?}{=} v(t_0) = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} d_p(t_0)$$

lo que al comparar con la ley de Hubble resulta en

$$\left\{ \begin{array}{l} v = H_0 d \\ v = \frac{\dot{a}_0}{a_0} d \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0}} = \dot{a}_0 ?? \text{ porque } a(t_0) \stackrel{?}{=} 1 \dots$$

REDSHIFT COSMOLOGICO

→ Sea una fuente radiativa emitiendo luz de longitud de onda λ_e , a distancia propia r de nosotros. Como los fotones siguen geodésicas nulas, entonces para un movimiento radial se tendrá

$$dr = \frac{c}{a} dt \Rightarrow c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} = \int dr \equiv r$$

donde t_e es el tiempo propio en que se emitió el fotón, t_0 es el tiempo propio en que se recibió. Si un segundo fotón se emite en $t_e + \Delta t_e$ y se recibe en $t_0 + \Delta t_0$, entonces

$$c \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a} = \int dr \equiv r$$

Combinando las últimas dos ecuaciones se encuentra

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} = - \int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{dt}{a} + \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a}$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{dt}{a} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a}$$

Asumiendo $a(t)$ constante en $(t_e, t_e + \Delta t_e)$ y $(t_0, t_0 + \Delta t_0)$ (lo cual no es una aproximación ~~mala~~, se sigue que

$$\frac{t}{a} \Big|_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} = \frac{t}{a} \Big|_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)} \stackrel{\Delta}{=} \Delta t_0$$

$$\therefore \frac{\Delta t_e}{a(t_e)} = \Delta t_0 \quad (4)$$

como el universo se expande, entonces $a(t_e) < a(t_0) = 1$, con lo que $\Delta t_e < \Delta t_0$. En otras palabras, el tiempo se dilata!

→ Ahora, si $\Delta t_e = \tau_e$, el período de la luz emitida, se obtendrá (con $t_e = \lambda_e/c$; $\tau_0 = \lambda_0/c$) lo siguiente

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{c} \Leftrightarrow \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{1}{a(t_e)} \right|$$

Sin embargo, el redshift z se define como $z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}$. Luego,

$$\left| 1+z = \frac{1}{a(t_e)} \right| \quad (5)$$

En otras palabras, el redshift indica el parámetro de expansión del universo para cada redshift medido.

- La geometría del universo queda completamente descrita por k , R y a .
- La ecuación de Poisson entrega la relación entre geometría ∇^2 y potencial Φ , en términos de los parámetros de la materia ρ : $\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$
- Para un espaciotiempo curvo, la densidad energética $\epsilon(t)$ queda determinada por k , R y a .
- Sea una esfera llena de polvo, de radio $R_s(t)$, masa constante M_s y densidad $\rho(t)$, expandiéndose. La fuerza gravitacional \vec{F} que ejerce la esfera sobre alguna masa m en su superficie es

$$\vec{F} = -\frac{GM_s m}{R_s^2} \hat{R}_s$$

Luego, de la segunda ley de Newton,

$$(aceleración) \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \ddot{\vec{R}}_s \Rightarrow \frac{d^2 R_s}{dt^2} = -\frac{GM_s}{R_s^2}$$

Integrando,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR_s}{dt} \right)^2 = \frac{GM_s}{R_s} + U$$

pero la masa constante es

$$M = \frac{4\pi R_s^3 \rho}{3}$$

y $R_s = ar_s$. Además se identifican las energías cinética $m \dot{R}_s^2/2$ y potencial $GM_s m/R_s$. Sustituyendo M y R_s en $\dot{R}_s^2/2 = GM_s/R_s + U$, se obtiene

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 r_s^2 = \frac{4\pi G\rho}{3} \frac{a^3 r_s^3}{ar_s} + U \quad / \cdot \frac{2}{a^2 r_s^2}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{2U}{r_s^2 a^2}$$

(1)

→ Esta ecuación se conoce como eq. de Friedmann, en su forma newtoniana. Sin embargo, es necesario corregirla a su forma relativista:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon}{3c^2} - \frac{kc^2}{R^2 a^2}$$

(1')

→ De relatividad especial, la energía de una partícula de masa m es

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Luego, para partículas no relativistas,

$$E = mc^2 \sqrt{1 + (\gamma_c)^2}$$

$$\approx mc^2 + \underbrace{\frac{mv^2}{2}}$$

Taylor a orden 1

$$\Rightarrow \epsilon \stackrel{\Delta}{=} \frac{E}{\cancel{m}} = pc^2 + \frac{p v^2}{2} = pc^2 + \delta$$

Comparando con pc^2 , δ es despreciable.

con lo que

$$\sqrt{1 + (\gamma_c)^2} \approx 1 + \frac{(\gamma_c)^2}{2}$$

$$\approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

Por otra parte, para partículas relativistas,

$$E = pc \equiv h\nu$$

y notese que toda esta energía le da forma al universo.

→ De (1'), usando $H = \dot{a}/a$, se puede escribir

$$H^2 = \frac{8\pi G \epsilon}{3c^2} - \frac{kc^2}{R^2 a^2}$$

(1'')

$$\Rightarrow H_0^2 = \frac{8\pi G \epsilon_0}{3c^2} - \frac{kc^2}{R_0^2}$$

En otras palabras, si se conocen H_0 y ϵ_0 , es posible computar la curvatura y el radio del universo. En el caso límite en que el universo estuviera vacío de materia, se observa $\epsilon=0$, lo que implica necesariamente $k<0$, siendo el único caso posible $k=-1$. En este caso,

$$H^2 = \frac{c^2}{a^2 R^2} \Rightarrow R_0 = \frac{c}{H_0} \approx 4300 \text{ Mpc},$$

lo que corresponde al radio mínimo para un universo con curvatura negativa. Se conoce como el radio de Hubble. Sin embargo, como si hay materia, el radio R de curvatura necesariamente debe ser mayor.

→ En el caso particular de un universo plano,

$$k=0 \Leftrightarrow H^2 = \frac{8\pi G \epsilon}{3c^2} \Leftrightarrow \epsilon_c := \frac{3c^2 H^2}{8\pi G}$$

lo que se define como la densidad energética crítica, dado un valor de H , lo que determina si el universo será curvado positiva o negativamente.

↳ Para mediciones recientes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{c0} \approx (7.8 \pm 0.5) \cdot 10^{-10} \text{ J/m}^3 \\ \rho_0 \approx (1.28 \pm 0.08) \cdot 10^{-10} M_0 / \text{Mpc}^3 \end{array} \right.$$

→ Es común usar el parámetro de densidad del universo:

$$\Omega_0(t) := \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_c(t)}$$

Hoy en día, $0.995 < \Omega_0 < 1.005$, lo que significa que nuestro universo es aproximadamente plano.

→ En términos de Ω_0 , la eq. de Friedmann queda como

$$H^2 = \frac{8\pi G \Omega_0 \epsilon_c}{3c^2} - \frac{k c^2}{R^2 a^2}$$

$$= \frac{8\pi G \Omega_0}{3c^2} \cdot \frac{3c^2 H^2}{8\pi G} - \frac{k c^2}{R^2 a^2}$$

$$\therefore 1 - \Omega_0 = \frac{-k c^2}{R^2 a^2 H^2} \quad (1'')$$

Largo → amplio

Largo → largo

grosso → fino

vacío → vacío

→ Notese que si el signo de ω_m no cambia (i.e., si $\omega_m > 1 \vee \omega_m < 1 \wedge \delta \omega_m = 0$), entonces tampoco cambia el signo de k . En otras palabras, si el signo de ω_m no cambia, entonces tampoco cambia la curvatura del universo.

→ También, si se conoce ω_m entonces se conoce la curvatura del universo.

→ Por último, hoy en día,

$$H^2 R_0^2 = \frac{-k c^2}{R_0^2 H_0^2}$$

Aceleración del universo

1/4/2020

→ Quisiéramos saber cómo se comporta el parámetro $a(t)$. Pero la eq. de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon - \frac{k c^2}{R^2 a^2}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon a^2 - \frac{k c^2}{R^2} \quad (1)$$

es sólo una ecuación, pero con dos incógnitas: a y ϵ . Necesitamos otra ecuación más.

→ De la primera ley de la termodinámica, si la energía se conserva, entonces

$$dQ = dE + P dV$$

→ Y si el universo es perfectamente homogéneo, entonces para un volumen suficientemente grande se estará en presencia de un proceso adiabático, en que $dQ = 0$. Luego,

$$\dot{E} + P \dot{V} = 0 \quad (2)$$

→ En un universo esféricico,

$$V = \frac{4\pi a^3 r_s^3}{3} \rightarrow \dot{V} = \frac{4\pi r_s^3}{3} a^2 \dot{a} \cdot 3 = \frac{4\pi r_s^3 a^3}{3} \cdot \frac{3\dot{a}}{a}$$

$$\therefore \dot{V} = \frac{3\dot{a}}{a} V \quad (3)$$

→ Y por otra parte,

$$E = V \epsilon \Rightarrow \dot{E} = \epsilon \dot{V} + \dot{\epsilon} V$$

$$\Leftrightarrow \dot{E} = \left(\dot{\epsilon} + \frac{3\epsilon \dot{a}}{a} \right) V \quad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2),

$$\left(\dot{\epsilon} + \frac{3\epsilon \dot{a}}{a} \right) V = -P V \frac{3\dot{a}}{a} \quad (\forall V \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\epsilon} + \frac{3\dot{a}}{a} (\epsilon + P) = 0 \quad (5)$$

Esta se conoce como la "ecuación de fluido". Combinando ahora, (1) y (5), se sigue que

$$(1) : \ddot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon a^2 - \frac{kc^2}{R^2} \quad / \frac{d}{dt} (1)$$

$$\Leftrightarrow 2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2} (\dot{\epsilon} a^2 + 2\epsilon \dot{a}) \quad / : (2\dot{a}\ddot{a})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2} \left(\dot{\epsilon} \frac{a}{\dot{a}} + 2\epsilon \right)$$

$$; (5) \Rightarrow \frac{a}{\dot{a}} \dot{\epsilon} = -3(\epsilon + P)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3c^2} (\epsilon + 3P)} \quad (6)$$

Esta es la ecuación de aceleración del universo.

→ Existen 3 casos para esta ecuación de aceleración:

a) $\epsilon > 0 \Rightarrow$ aceleración

b) $\dot{\epsilon} > 0 \Rightarrow$ desaceleración

c) $\epsilon + 3\dot{P} < 0 \Leftrightarrow \dot{P} < -\epsilon/3 \Rightarrow$ presión negativa, con un universo en expansión acelerada.

→ Sin embargo, un gas siempre tiene presión positiva. Por ej., un gas de fotones tiene presión $P = \epsilon/3$, con lo que el universo siempre debería estar desacelerando.

→ En este punto tenemos 3 ecuaciones para modelar los aspectos cinemáticos de nuestro universo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon - \frac{kc^2}{R^2 a^2} \\ \dot{\epsilon} + 3\dot{a}(\epsilon + P)/a \\ \ddot{a}/a = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\epsilon + 3P) \end{array} \right.$$

Sin embargo, sólo 2 de estas 3 eqs. son independientes, lo que es consistente con que hayan 3 incógnitas: P y ϵ y a . Se necesita relacionar P y ϵ por alguna otra eq. $P = P(\epsilon)$ para resolver.

→ En cosmología se puede suponer que la eq. de estado para las especies presentes en el universo tiene la forma $P = w\epsilon$, donde w es un parámetro adimensional.

→ Considerese un gas de partículas masivas no relativistas. Su presión viene dada por la ley de los gases ideales:

$$P = n k_B T = \frac{\rho k_B T}{\mu}$$

donde la energía del gas viene dada por $\epsilon = \rho c^2$ (la densidad de energía en reposo). Luego,

$$P = \frac{k_B T}{\mu c^2} \epsilon$$

→ Para un gas no relativista,

$$3k_B T = \mu \langle v^2 \rangle$$

$$\Rightarrow P = \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \epsilon$$

Sin embargo, $v \approx 500 \text{ m/s} \Rightarrow w \approx 10^{-12} \approx 0$ (7)

→ Por otra parte, para un gas de fotones (i.e., un gas relativista),

$$P = \epsilon / 3 \quad (8)$$

la presión radiativa.

→ Entonces, de (7) y (8), para un gas parcialmente relativista, $0 < w < 1/3$; $P = w\epsilon$.

→ Nótese que la desigualdad anterior se cumple para un universo compuesto únicamente por fotones y materia. Si hubiesen otras especies, ésta no necesariamente se cumple. En particular, para que el universo acelere, se necesita

→ Específicamente, $P < -\epsilon/3 \Leftrightarrow w\epsilon < -\epsilon/3 \Leftrightarrow w < -1/3$. para un universo con energía oscura (i.e., que requiere una constante cosmológica, $w = -1$, y $P = -\epsilon$).

Sobre la constante cosmológica

→ Einstein agrega un término a la eq. de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon}{3c^2} - \frac{kc^2}{R^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1)$$

Esto se demuestra con relatividad general.

→ Esto también significa que las ecuaciones de fluidos y de aceleración quedan como respectivamente como

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon} + \frac{3\dot{a}}{a} (\epsilon + p) = 0 \\ \ddot{a} = \frac{-4\pi G(\epsilon + 3p)}{3c^2} + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon} + \frac{3\dot{a}}{a} (\epsilon + p) = 0 \\ \ddot{a} = \frac{-4\pi G(\epsilon + 3p)}{3c^2} + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \quad (3)$$

Ello

pues

$$(1) \Rightarrow 2\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\dot{\epsilon} a^2 + 2\epsilon \dot{a} \right) + \frac{2\Lambda a \dot{a}}{3} \quad / \cdot \frac{1}{2a\dot{a}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2} \left(\dot{\epsilon} \frac{a}{\dot{a}} + 2\epsilon \right) + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} [3(\epsilon + p) + 2\epsilon] + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\epsilon + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (3)$$

→ Además, usualmente se expresa

$$(1): \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\epsilon + \frac{c^2}{8\pi G} \Lambda \right) - \frac{kc^2}{R^2 a^2}$$

$\underbrace{\quad}_{=: \epsilon_\Lambda}$

donde ϵ_Λ es la densidad de energía para la constante cosmológica Λ , usualmente considerada una constante. Entonces,

$$\stackrel{0}{\cancel{\dot{\epsilon}_\Lambda + \frac{3\dot{a}}{a} (\epsilon_\Lambda + p_\Lambda) = 0}} \Leftrightarrow \underbrace{p_\Lambda}_{=: w} = -\epsilon_\Lambda = -\frac{c^2}{8\pi G} \Lambda$$

$\therefore w = -1$ para la energía oscura.

MODELOS DEL UNIVERSO

para determinar la evolución del universo necesitamos considerar todas las especies que lo componen:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \sum_w E_w \\ P = \sum_w P_w \equiv \sum_w w E_w \end{array} \right. \quad (4)$$

→ Dado que las densidades de energía se comportan de esta manera, la ecuación de fluido es independiente para cada especie:

$$\dot{E}_w + \frac{3\dot{a}}{a} (E_w + P_w) = 0$$

$$\stackrel{(5)}{\Rightarrow} \frac{\dot{E}_w}{E_w} = -\frac{3\dot{a}}{a} (1+w)$$

$$\stackrel{\text{EDO}}{\Leftrightarrow} \frac{dE_w}{E_w} = -3(1+w) \frac{da}{a}$$

$$\stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} \boxed{E_w = E_w^0 a^{-3(1+w)}}$$

La condición inicial se obtiene de evaluar (6) en el momento presente: $E_w|_{t=t_0} = E_w^0 (a|_{t=t_0})^{-3(1+w)} \equiv E_w^0 \triangleq E_w|_{t=t_0}$.

→ Para la materia,

$$E_M = E_M^0 a^{-3}$$

pues $w_M = 0$.

→ Para materia relativista, $w_R = 1/3$

$$\Rightarrow E_R = E_R^0 a^{-4}$$

→ Por último, para la energía oscura, $w_{DE} = 0$

$$\Rightarrow E_{DE} = E_{DE}^0$$

este quiere decir que la energía de los fotones decrece diluye a la misma tasa que la de la materia, pero además la energía de cada foton decrece como $1/a$, i.e.,

$$E_F = \frac{h\nu}{a}$$

8/4/2020

→ Observaciones actuales indican que $\Omega_{\Lambda}^0 \approx \frac{\epsilon_{\Lambda}^0}{\epsilon_m^0} \approx 0.3$, y $\Omega_r^0 \approx \frac{\epsilon_r^0}{\epsilon_m^0} \approx 0.7$. Luego, $\Omega_r^0 / \Omega_{\Lambda}^0 \approx 0.7/0.3 = 2.3$. En otras palabras, la expansión del Universo está dominada en gran medida por la energía oscura (más que por la materia). Es por ello que, usando $\epsilon_c^0 \triangleq \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G_N} = \epsilon_m^0 = \epsilon_r^0$,

$$\dot{T}_0 = -1 \cdot 0.7 \epsilon_c^0 + \frac{1}{3} \cdot 0.3 \epsilon_c^0 = -0.6 \epsilon_c^0 < 0,$$

lo que implica que el Universo se está expandiendo aceleradamente.

→ Sin embargo todo este análisis es válido para el tiempo presente t_0 . Para otras épocas, se ha de considerar

$$\frac{\epsilon_n(a)}{\epsilon_m(a)} = \frac{\epsilon_n^0}{\epsilon_m^0 a^{-3}} = \frac{\epsilon_n^0}{\epsilon_m^0} a^3 \approx 2.3 a^3$$

Un tiempo de especial interés es aquel en que la energía oscura y la materia contribuyeron igualmente al contenido energético del Universo. En ese momento el factor de escala se define como a_m , y como $1+2=\frac{1}{a}$, se puede estudiar a qué redshift ocurrió ese momento:

$$\frac{\epsilon_n^0}{\epsilon_m^0} a_m^3 \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow a_m \approx \sqrt[3]{\frac{1}{2.3}} \approx 0.75 \Leftrightarrow z_m \approx 1/3$$

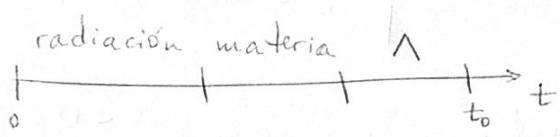
→ Para la radiación, $\Omega_r^0 \approx 8.4 \cdot 10^{-5}$, de observaciones del CMB. De un análisis análogo a los anteriores

$$\frac{\epsilon_m}{\epsilon_r^0} = \frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0} \approx 3600$$

$$a_m \approx 2.8 \cdot 10^{-4} \Leftrightarrow z_m \approx 3600$$

($z_m=3600$ es una época muy temprana en el Universo).

→ Con este tipo de análisis se puede determinar cuál es la especie que domina la expansión del Universo en distintas eras cosmológicas, obteniendo algo así:



→ Ahora tenemos las ^{30:37} ~~herramientas~~ ^{vidas} ~~vidas~~ necesarias para resolver la ecuación de Friedmann! Sin embargo, hay que ir resolviéndola por casos particulares...

II. Un Universo vacío

En este caso, el término ϵ es nulo, con lo que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_w \epsilon_w a^{-3(1+w)} - \frac{kc^2}{R_0^2} / a^2$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_w \epsilon_w a^{-(k+3w)} - \frac{kc^2}{R_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \dot{a}^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2}$$

Aquí dependemos de la geometría del Universo.

1. en un universo plano, $k=0$, con lo que

$$\dot{a}=0 \Leftrightarrow a=a_0$$

Es decir, este universo es plano, vacío y estático. Aquí aplica la geometría de Minkowski.

2. en un universo con $k=-1$, se encuentra

$$\dot{a}^2 = \frac{c^2}{R_0^2} \Leftrightarrow \dot{a} = \pm \frac{c}{R_0}$$

$$da = \pm \frac{c dt}{R_0} \quad / \int$$

$$a = \pm \frac{ct}{R_0} + \gamma \quad |(0)|_{t_0}, \quad |(0)|_{t=0}$$

$$\begin{cases} 1 \hat{=} a_0 = \pm \frac{ct_0}{R_0} + \gamma \\ 0 \hat{=} a(0) = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \pm \frac{R_0}{c} = t_0 \end{cases}$$

Consecuentemente,

$$a = t/t_0$$

Este universo no concuerda con el nuestro, pues sólo contiene curvatura y un poco de materia, i.e. $\Omega_m \ll 1$.
→ ¿Cómo se relaciona este resultado con algún observable?

$$1+z = \frac{1}{a(t_e)} = \frac{t_0}{t_e}$$

Pero

$$H_0 = \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t_0} = \left. \left(\frac{1}{t_0} \cdot \frac{t_0}{t} \right) \right|_{t_0} = \left. \frac{1}{t} \right|_{t_0} = \frac{1}{t_0}$$

con lo que

$$1+z = \frac{H_0^{-1}}{t_e} \Leftrightarrow t_e = \frac{H_0^{-1}}{1+z}$$

Esto nos indica cuál era la edad del Universo cuando un fotón de una galaxia a redshift z fue emitido!

Otro observable que podemos contrastar con la teoría en este universo es la distancia propia. Se sabe que

$$d_p(t_0) = a(t_0) \int dr \equiv r$$

y que un fotón satisface

$$ds^2 = 0 = -c^2 dt^2 + a^2 dr^2 \Rightarrow c dt = adr$$

$$\Rightarrow c \int_{t_0}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr \equiv r$$

Por lo tanto,

$$d_p(t_0) = c \int_{t_0}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

* Nótese que este resultado es válido para todos los universos. En este caso particular, $a(t) = t/t_0$

$$\Rightarrow d_p(t_0) = c \int_{t_0}^{t_0} \frac{t_0 dt}{t} = c t_0 \ln t \Big|_{t_0}^{t_0} = c \ln(t_0/t_0)$$

$$\therefore d_p(t_0) = c \ln(t_0/t_0)$$

Pero como $t_0 = H_0^{-1}/(1+z)$, entonces

$$d_p(t_0) = c \ln[H_0 t_0 (1+z)]$$

$$\therefore d_p(t_0) \equiv c \ln(1+z)$$

Esto es muy útil, pues podemos medir experimentalmente la distancia a galaxias a determinados redshift, porque y luego contrastar las observaciones con este resultado, para determinar si acaso vivimos en un universo como éste o no.

3. El caso $k>1$ no es físicamente posible, pues si así fuese entonces $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

II. Universos planos (i.e. $k=0$) de una componente.

→ Se quiere resolver la ecuación

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \dot{\epsilon}_w^0 a^{-(1+3w)}$$

→ Usando el ansatz $a(t) \propto t^q$,

$$\begin{cases} a^2 \propto (qt^{q-1})^2 \propto t^{2q-2} \\ a^{-(1+3w)} \propto t^{-q-3qw} \end{cases} \Rightarrow 2q-2 = -q-3qw \Leftrightarrow q = \frac{2}{3+3w} \quad |_{w \neq -1}$$

→ Al imponer además $a(t_0)=1$, se concluye

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3+3w}} \quad (1)$$

→ De aquí se puede encontrar la edad de este universo, pues

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a_0} \right) \Big|_{t_0} = \frac{2}{3+3w} t_0^{-1}$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{2 H_0^{-1}}{3(1+w)} \quad (2)$$

Notese que si

- $w < -\frac{1}{3}$, entonces $t_0 > \frac{1}{H_0}$

- $w > -\frac{1}{3}$, entonces $t_0 < \frac{1}{H_0}$

→ Con este resultado, también se puede estudiar la evolución de la densidad energética del universo:

$$\epsilon = \epsilon_0 a^{-3(1+w)} \Rightarrow \epsilon = \epsilon_0 (t/t_0)^{-2} \quad (3)$$

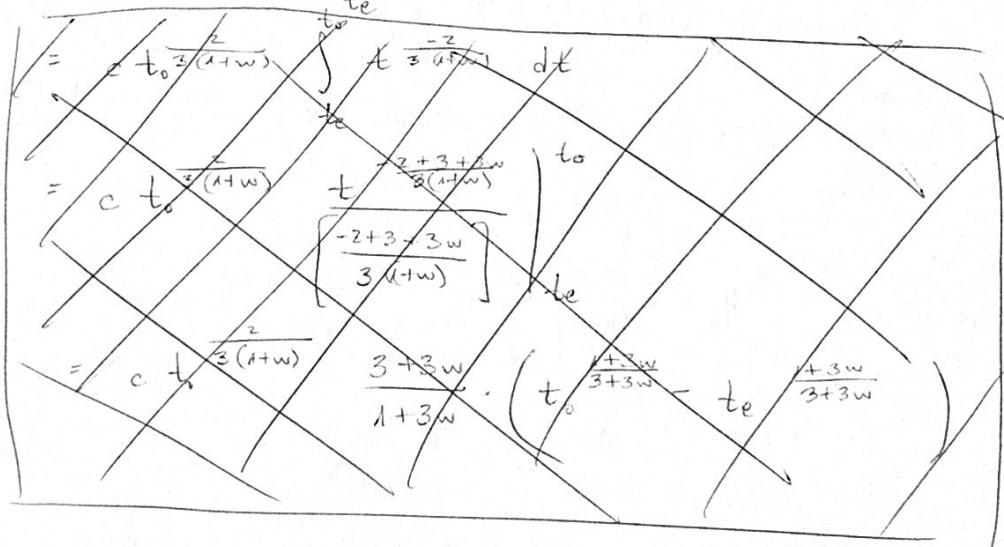
Notese que esto es independiente de w !

→ También se puede relacionar con el redshift:

$$1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \left(\frac{t_0}{t_e}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \Leftrightarrow t_e = \frac{t_0}{(1+z)^{\frac{2}{3(1+w)}}} = \frac{t_0}{z(1+w) H_0} \frac{1}{(1+z)^{\frac{1}{3(1+w)}}} \quad (4)$$

→ Con esto, la distancia propia será

$$d_p(t) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e}^{t_0} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} dt$$



Sea $\alpha = \frac{2}{3(1+w)}$. Luego,

$$d_p(t) = c t_0^\alpha \int_{t_e}^{t_0} t^{-\alpha} dt = \frac{c t_0^\alpha}{1-\alpha} t^{-\alpha+1} \Big|_{t_e}^{t_0} = \frac{c t_0}{1-\alpha} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-\alpha} \Big|_{t_e}^{t_0}$$

$$\therefore d_p(t) = \frac{c t_0}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-\alpha} \right] \quad (5)$$

Evaluando a ,

$$\therefore d_p(t) = ct_0 \frac{3(1+w)}{1+3w} \left[1 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1+3w}{3(1+w)}} \right] \quad \left| w \notin \{1, -\frac{1}{3}\} \right. \quad (5)$$

→ En términos de z y H_0 , recordarse que

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+z) = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \\ t_0 = \frac{2}{3H_0(1+w)} \end{array} \right. \quad (4)$$

Luego,

$$(1+z)^{-\frac{(1+3w)/2}{2}} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1+3w}{3(1+w)}}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} d_p(z) = \frac{c}{H_0} \cdot \frac{z}{3(1+w)} \cdot \frac{3(1+w)}{1+3w} \left[1 - (1+z)^{-\frac{(1+3w)/2}{2}} \right]$$

$$\therefore d_p(z) = \frac{zc}{H_0} \frac{1}{1+3w} \left[1 - (1+z)^{-\frac{(1+3w)/2}{2}} \right] \quad (6)$$

→ Esto ya se puede contrastar con observaciones. Nótese que si $z \rightarrow \infty$, d_p sólo converge si $(1+3w) > 0 \Leftrightarrow w > -\frac{1}{3}$, en cuyo caso

$$d_{hor} := \lim_{z \rightarrow \infty} d_p(z) \Big|_{w>-\frac{1}{3}} = \frac{zc}{H_0} \frac{1}{1+3w} \quad (7)$$

que corresponde a la mayor distancia propia a la cual nos es posible observar algo. Esto se define como el horizonte de partículas. Dos especies satisfacen $w > -\frac{1}{3}$:

↳ la materia, donde $w=0 \Rightarrow d_{hor} = zc/H_0$.

→ la radiación, donde $w=\frac{1}{3} \Rightarrow c/H_0$.

CASOS PARTICULARES

A. Un universo plano que contiene únicamente materia ("universo de Einstein-de Sitter")

$$\rightarrow w=0 \xrightarrow{(2)} t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1}$$

$$\xrightarrow{(7)} d_{hor} = \frac{zc}{H_0}$$

$$\xrightarrow{(1)} a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} = \left(\frac{3tH_0}{2}\right)^{2/3}$$

$$\xrightarrow{(6)} d_p(z) = \frac{zc}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)$$

B. Un universo plano que contiene únicamente radiación

$$\rightarrow w=1/3 \xrightarrow{(2)} t_0 = \frac{1}{2} H_0^{-1}$$

$$\xrightarrow{(7)} d_{hor} = \frac{c}{H_0}$$

$$\xrightarrow{(1)} a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$$

$$\xrightarrow{(6)} d_p(z) = \frac{c}{H_0} \frac{z}{1+z}$$

→ Por último un universo dominado por Λ comprende $w=-1$, lo que no está permitido en todos los casos anteriores.

Para resolverlo, volvemos a la eq. de Friedmann, donde identificamos la constante de Hubble:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G E_\Lambda}{3c^2} a^2 \quad / \sqrt{\frac{8\pi G E_\Lambda}{3c^2}} = H_0$$

$$\Leftrightarrow \dot{a} = aH_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{da}{a} = H_0 dt \Rightarrow \ln a = H_0 t + \eta \Leftrightarrow a = e^{H_0(t+\eta)}$$

Evaluando en $(t_0, 1)$, se encuentra

$$1 = e^{H_0(t_0+\eta)} \Leftrightarrow H_0(t_0+\eta) = 0 \therefore \eta' = -t_0 \Rightarrow a = e^{H_0(t-t_0)} \quad (8)$$

Notese que este universo se expande exponencialmente!

→ La distancia propia se calcula igual que siempre:

$$d_p = c \int_{t_0}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \stackrel{(8)}{=} c \int_{t_0}^{t_0} e^{H_0(t_0-t)} dt = \left[-\frac{c}{H_0} e^{H_0(t_0-t)} \right]_{t_0}^{t_0}$$

$$\therefore d_p = \frac{c}{H_0} [e^{H_0(t_0-t)} - 1],$$

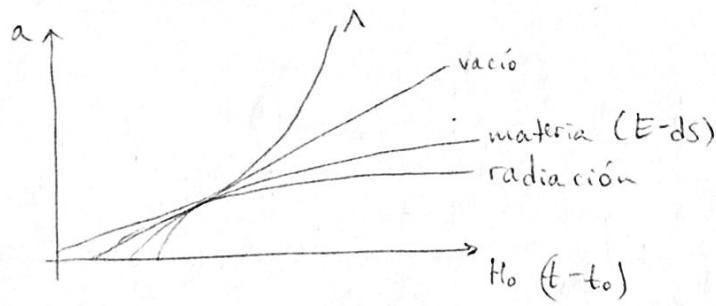
y tomando

$$1+z = \frac{1}{a} = e^{H_0(t_0-t)},$$

entonces

$$d_p = \frac{c z}{H_0} \quad (9)$$

→ Con todos estos resultados se puede comparar la evolución del factor de escala para cada uno de estos modelos de universo:



III. Universos con varias componentes

→ Se puede reescribir la ecuación de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon + \frac{k c^2}{R_0^2 a^2}$$

como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon - \frac{k c^2}{R_0^2 a^2}$$

Para un universo crítico,

$$\epsilon_c = \frac{3c^2}{8\pi G} H^2$$

y como $\Omega_1 \triangleq \epsilon/\epsilon_c$, entonces

$$\epsilon = \Omega_1 \epsilon_c = \Omega_1 \frac{3c^2}{8\pi G} H^2$$

y en la eq. de Friedmann,

$$H^2 = \Omega_1 H^2 - \frac{k c^2}{R_0^2 a^2}$$

$$\Leftrightarrow (1-\Omega_1) H^2 = \frac{-k c^2}{R_0^2 a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{R_0^2} = \frac{H^2 a^2}{c^2} (\Omega_1 - 1)$$

En particular para $t=t_0$,

$$\frac{k}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_{10} - 1)$$

Nuevamente en la eq. de Friedmann,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon - \frac{H_0^2}{a^2} (\Omega_{10} - 1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2 H_0^2} \epsilon - \frac{\Omega_{10} - 1}{a^2}$$

y usando ϵ_c^0 , se sigue que

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_c^0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}$$

Pero $\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_m + \epsilon_n$, y usando los resultados $\epsilon_r = \epsilon_r^0 a^{-4}$, $\epsilon_m = \epsilon_m^0 a^{-3}$ y $\epsilon_n = \epsilon_n^0$, entonces

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\epsilon_r^0}{\epsilon_c^0} a^{-4} + \frac{\epsilon_m^0}{\epsilon_c^0} a^{-3} + \frac{\epsilon_n^0}{\epsilon_c^0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}$$

Identificando cada $\epsilon_w^0 / \epsilon_c^0 = \Omega_w^0$, y usando $\dot{a}^2/a^2 = H^2$, entonces

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \frac{1}{H^2} = \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_n^0 a^2 + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{a}^2}{H^2} = \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_n^0 a^2 + (1 - \Omega_0)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{da}{\sqrt{\Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_n^0 a^2 + (1 - \Omega_0)}} = \int H_0 dt = H_0 t$$

→ y ahora no queda sino resolver esta integral numéricamente usando valores numéricos para Ω_w^0 y $\Omega_0 = \sum_w \Omega_w^0$.

→ Valores usuales son $\Omega_r^0 = 9 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_m^0 = 0.31$, $\Omega_n^0 \approx 0.69$

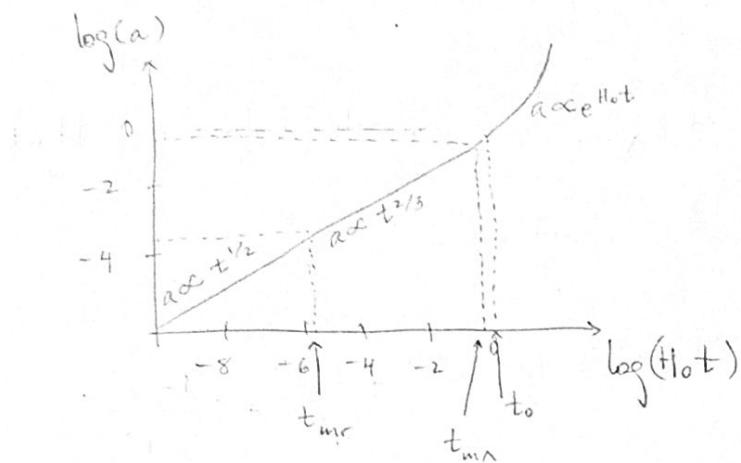
→ Con todo este aparatoaje también se puede calcular

$$k = \frac{H_0^2 R_0^2}{c^2} (\Omega_0 - 1)$$

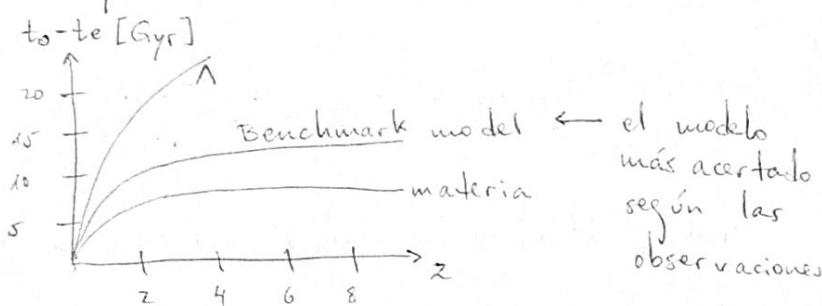
En particular, $\Omega_0 = 1 \Rightarrow k = 0$, lo que describe un espacio-tiempo plano.

→ Un par de gráficos importantes

1) La evolución del factor de escala como función del tiempo:



2) La dependencia en el redshift del lookback time



def. lookback time: el tiempo que ha transcurrido entre un evento específico y hoy.

MIDIENDO PARÁMETROS COSMOLOGICOS

→ Se comienza expandiendo a en una serie de Taylor en torno a t_0 , e identificando $H_0 = (\dot{a}/a)|_{t=t_0}$ y $q_0 = (-\ddot{a}a/\dot{a}^2)|_{t=t_0}$ (el parámetro de desaceleración):

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left. \frac{da}{dt^i} \right|_{t_0} (t-t_0)^i = a_0 + \dot{a}_0(t-t_0) + \frac{\ddot{a}_0}{2} (t-t_0)^2 + \dots \quad /: a_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a_0} = \left[a \approx 1 + H_0(t-t_0) - \frac{q_0 H_0^2}{2} \frac{1}{(t-t_0)^2} \right]$$

→ Notese que como $a, \dot{a} > 0$, entonces cuando $q_0 > 0$ el universo desacelera.

→ Por otra parte, de la eq. de aceleración,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \sum_w \varepsilon_w (1+3w) \quad | \cdot \frac{-1}{H^2}$$

$$\frac{-\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2} \frac{8\pi G}{3c^2 H^2} \sum_w \varepsilon_w (1+3w) \quad | \quad \varepsilon_c = \frac{3c^2}{8\pi G} H^2$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_c} \sum_w \varepsilon_w (1+3w) \quad | \quad H = \frac{\dot{a}}{a} \sim \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_c} = \Omega_w$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2} \sum_w \Omega_w (1+3w)$$

$$\therefore q = \frac{1}{2} \sum_w (1+3w) \Omega_w$$

Evaluando en hoy,

$$q_0 = \frac{1}{2} [\Omega_{r0}^0 (1+3 \cdot \frac{1}{3}) + \Omega_{m0}^0 (1+3 \cdot 0) + \Omega_{\Lambda0}^0 (1+3 \cdot -1)]$$

$$\Leftrightarrow q_0 = \Omega_{r0}^0 + \frac{\Omega_{m0}^0}{2} - \Omega_{\Lambda0}^0$$

De las observaciones para Ω_w , se sigue que $q_0 \approx -0.53$.
Se concluye que el universo está expandiéndose aceleradamente.

Considerando la fórmula para el redshift

$$1+z = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p_i}{i!} \frac{d^i}{dp^i} \left[\sqrt{\frac{1+p}{1-p}} \right]_0 \approx 1+\beta \cdot \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \frac{1-\beta+1+\beta}{(1-\beta)^2} \right]_0$$

$$\therefore z \approx \frac{v/c}{1-\beta} = 1+\beta \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = 1+\beta \cdot \sqrt{1-\frac{2\beta}{1+2\beta}}$$

se toma la ley de Hubble-Lemaître

$$cz = H_0 d$$

para determinar H_0 .

Recuérdese que la distancia propia es

$$d_p = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a}$$

Expandiendo $1/a$ en Taylor en torno a $t=t_0$,

$$\frac{1}{a(t)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^i}{i!} \left. \frac{d^i(1/a(t))}{dt^i} \right|_{t=t_0} \approx \frac{1}{a_0} + \left[\frac{d}{da} \left(\frac{1}{a} \right) \cdot \frac{da}{dt} \right]_{t_0} (t-t_0) + \left. \frac{d^2(1/a)}{dt^2} \right|_{t_0} \frac{(t-t_0)^2}{2}$$

Aquí,

$$\begin{cases} \left. \frac{d(1/a)}{dt} \right|_{t_0} \left(\frac{-1}{a^2} \cdot \dot{a} \right) \Big|_{t_0} = \frac{-\ddot{a}_0}{a_0} \cdot \frac{1}{a_0} = -H_0 \cdot 1 \\ \left. \frac{d^2(1/a)}{dt^2} \right|_{t_0} = \left[\frac{d}{da} \left(\frac{-\ddot{a}}{a^2} \right) \cdot \frac{da}{dt} \right] \Big|_{t_0} = \left(\frac{-\ddot{a}a^2 + 2\dot{a}\dot{a}}{a^4} \cdot \dot{a} \right) \Big|_{t_0} \\ = \left(\frac{-\ddot{a}}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2}{a^3} \right) \Big|_{t_0} = 2 \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\ddot{a}\dot{a}}{\dot{a}^2} + 1 \right) \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{a} \right] \Big|_{t_0} \\ \stackrel{\Delta}{=} (q_0 + 2) H_0^2 \end{cases}$$

Reemplazando en la expansión,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &\approx 1 - H_0(t-t_0) + (q_0 + 2) H_0^2 (t-t_0)^2 \\ &\approx 1 - H_0(t-t_0) \end{aligned}$$

Integrando,

$$d_p = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} \approx c(t_0 - t_e) + \underbrace{\frac{cH_0}{2}(t_0 - t_e)^2}_{\text{corrección por la expansión del universo}}$$

distancia en un universo estático!

corrección por la expansión del universo

Sin embargo, el lookback time ¡no es un observable!, como si lo es el redshift.

Sé puede usar la expansión de $1/a$ para encontrar el redshift

$$z = \frac{1}{a(t_e)} - 1 \approx H_0(t_0 - t_e) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0 - t_e)^2$$

$$\approx H_0(t_0 - t_e)$$

$$\Rightarrow z^2 \approx H_0^2 (t_0 - t_e)^2 \quad (\text{A})$$

$$\Rightarrow z \approx H_0(t_0 - t_e) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 \quad (\text{B})$$

$$\Leftrightarrow t_0 - t_e = \frac{1}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 \right]$$

En la distancia propia,

$$d_p \underset{\substack{\text{de (B)} \\ \text{de (A)}}}{\approx} \frac{c}{H_0} [z - (1 + q_0/2) z^2] + \frac{c H_0}{2} \cdot \frac{z^2}{H_0}$$

$$= \frac{cz}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 \right] + \frac{cz^2}{2 H_0}$$

$$= \frac{cz}{H_0} - \frac{cz}{H_0} \cdot \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z + \frac{cz}{H_0} \cdot \frac{z}{2}$$

$$\therefore d_p \approx \frac{cz}{H_0} \left[1 - \left(\frac{1+q_0}{2}\right) z \right]$$

Con esto ya podemos poner modelos a prueba! Sin embargo, la distancia propia en sí misma no es un observable... Aquellas distancias que sí son observables son, al menos,

1. la distancia luminosa

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}}$$

2. la distancia de paralaje

$$d_R = \frac{1 \text{ pc}}{1 \text{ AU}} \left(\frac{\theta}{1''} \right)^{-1}$$

Pero... ¿cómo se relacionan estas distancias con la distancia propia?

1. Distancia luminosidad:

en la métrica de Robertson-Walker,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2 (dr^2 + s_k^2 d\Omega^2)$$

con

$$s_k = \begin{cases} R \sin(r/R) & \text{si } k=1 \\ r & \text{si } k=0 \\ R \sinh(r/R) & \text{si } k=-1 \end{cases}$$

Además, debido a la dilución de la energía radiativa en el tiempo, la energía E_0 con que se recibe un fotón se relaciona con aquella E_e con que fue emitida como

$$E_0 = \frac{E_e}{1+z}$$

Por último, se debe considerar la dilatación del tiempo: una fuente que emite n fotones en un tiempo δ_{et} , se observará como si emitiese los n fotones en un tiempo δ_{ot} , con

$$\delta_{ot} = \frac{\delta_{et}}{1+z}$$

Con estos tres efectos, el flujo corresponde a

$$f = \frac{L}{4\pi s_k^2 (1+z)^2} = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

$$\Rightarrow d_L = s_k (1+z)$$

En un espacio-tiempo plano, $s_k \approx r$, con lo que

$$d_L = (1+z) r \quad \therefore d_L = (1+z) d_p(t_0)$$

Es decir, los objetos a distancia d_p aparecen a distancia d_L : los objetos aparecen más lejos de lo que realmente están.

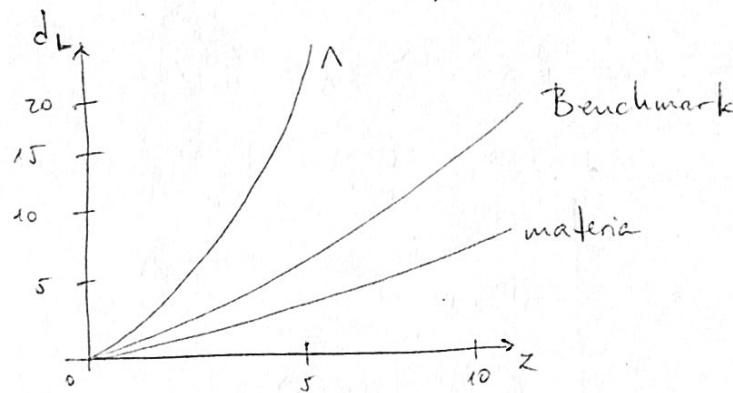
Luego,

$$d_L = \frac{cz(1+z)}{H_0} \left(1 - \frac{1+q_0}{2} z \right)$$

Conservando los términos hasta orden 1 en z ,

$$d_L \approx \frac{cz}{H_0} \left(1 - \frac{1+q_0}{2} z + z \right)$$

$$\therefore d_L \approx \frac{cz}{H_0} \left(1 + \frac{1-q_0}{2} z \right)$$



22/4/2020

2. Distancia angular:

la distancia a la que se encuentra un objeto de diámetro ℓ y que subtende un ángulo θ satisface

$$\theta = \frac{\ell}{d_A} \Rightarrow d_A = \frac{\ell}{\theta}$$

se puede medir el tamaño físico de un objeto ubicado entre (r, θ_1, ϕ) y (r, θ_2, ϕ) usando la métrica de R-W: al momento de la emisión de fotones, el tiempo es el mismo, con lo que $dt=0$. Además, dadas sus coordenadas esféricas, $dr=d\theta=0$! Luego, $ds^2 = a^2 S_k^2 d\theta^2$

Identificando ds como l , se sigue que

$$ds = l = \frac{Sk\theta}{1+z}$$

$$\Rightarrow d_A = \frac{Sk}{1+z}$$

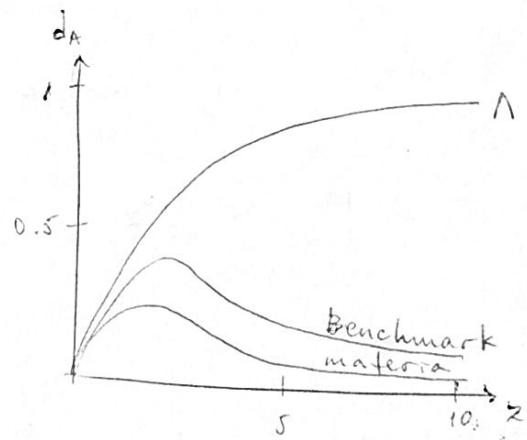
En un espacio tiempo plano, $Sk=r$, y luego

$$d_A = \frac{r}{1+z} = \frac{d_p}{1+z}$$

$$\therefore d_A = \frac{d_p}{1+z}$$

y evaluando en nuestro resultado para la distancia propia,

$$d_p \approx \frac{cz}{H_0} \left(1 - \frac{1+q_0}{2} z\right) \Rightarrow d_A \approx \frac{cz}{H_0(1+z)} \left(1 - \frac{1+q_0}{2} z\right)$$



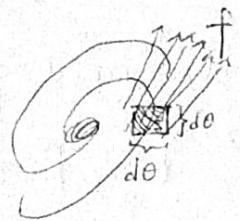
→ Con estos dos resultados, se compara

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}$$

BRILLO SUPERFICIAL

El brillo superficial de una galaxia se define como el flujo por unidad de ángulo sólido:

$$\Sigma := \frac{f}{\theta^2}$$



Evaluando el flujo, se reconocen las distancias luminosa y angular:

$$\begin{cases} f = \frac{L}{4\pi d_L^2} \\ \theta = \frac{D}{d_A} \end{cases} \Rightarrow \Sigma = \frac{L}{4\pi d_L^2} \cdot \frac{d_A^2}{D^2}$$

Evaluando en los resultados anteriores,

$$\begin{cases} d_L = (1+z) d_p \\ d_A = d_p / (1+z) \end{cases} \Rightarrow \Sigma = \frac{L}{4\pi D^2} \cdot \frac{d_p^2 / (1+z)^2}{(1+z)^2 d_p^2}$$

$$\therefore \Sigma = \frac{L}{4\pi D^2} \frac{1}{(1+z)^4}$$

Aquí se puede definir $\Sigma_0 = \frac{L}{4\pi D^2}$, con lo que

$$\Sigma = \frac{\Sigma_0}{(1+z)^4}$$

Esto es conocido como el Efecto Tolman. Describe cómo las galaxias se van volviendo más tenues conforme más lejanas se encuentran de nosotros.

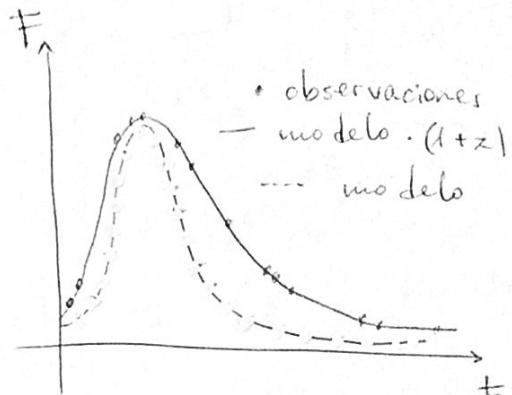
RESULTADOS EN COSMOLOGÍA

→ Hay varias pruebas para mostrar que vivimos en un universo en expansión (y que por lo tanto tuvo algo como un Big Bang).

1. Supernovas (Liebundgut, 1988)

El modelo que predice la curva de luz de una supernova no se ajusta completamente a las observaciones. Si corregimos el modelo

considerando la dilatación cosmológica del tiempo, el nuevo modelo se ajusta perfectamente a los datos.



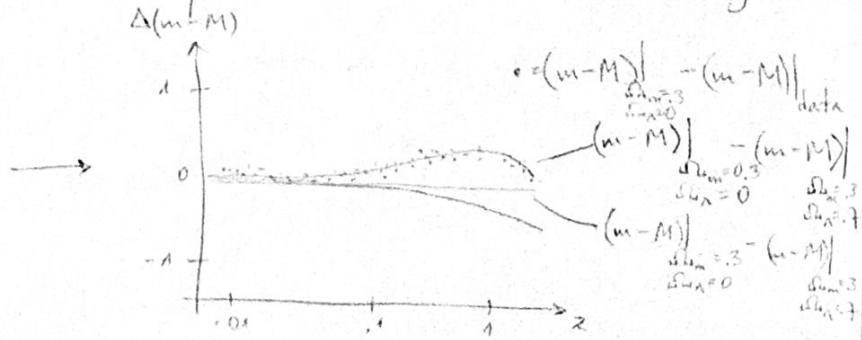
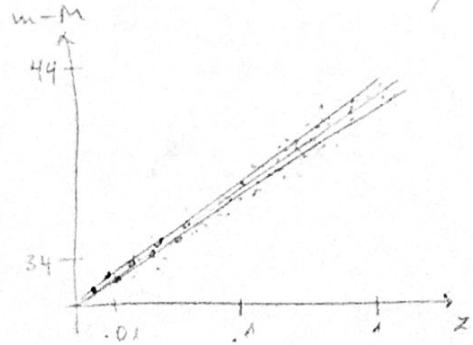
2. Relación redshift-módulo de la distancia (2000):

Sabiendo que la magnitud absoluta de las SNe tipo Ia es aproximadamente la misma, al observar su magnitud aparente se puede calcular el módulo de la distancia

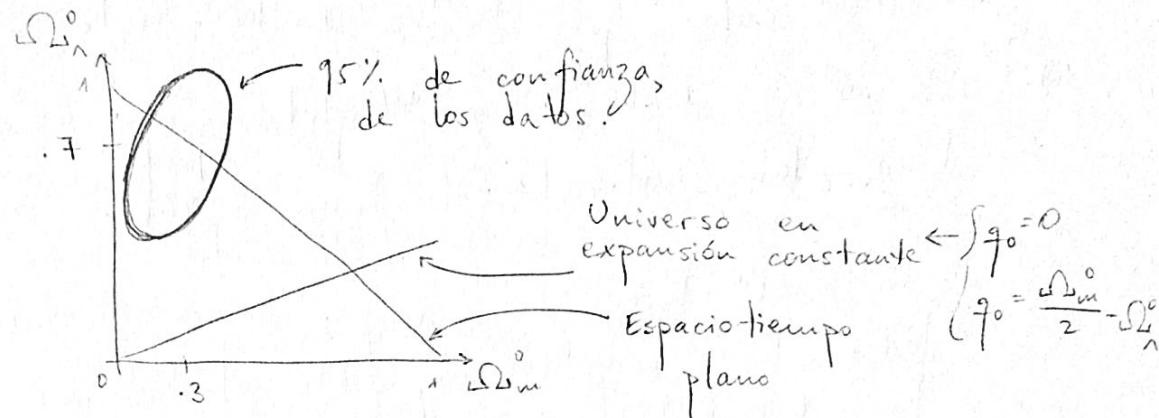
$$m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)$$

y contrastar con el redshift obtenido de espectrometría.

Por otra parte, con los modelos de universo y valores numéricos para D_{LH} , se pueden obtener modelos teóricos para la relación entre z y d_L . Comparando, se encuentra lo siguiente:



Esta investigación fue tan poderosa, que no sólo permitió encontrar g_0 , sino que además entregó valores muy precisos para Ω_m y Ω_Λ . Se le otorgó el Nobel de Física del 2011 a B. Schmidt y S. Perlmutter. Encuentran $g_0 \approx -0.55$. En cuanto a Ω_{de} ,



3. GALAXIAS

LA VÍA LÁCTEA

1609: Galileo nota que la Vía Láctea está compuesta de estrellas.

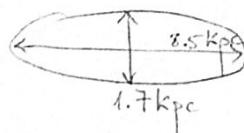
1755: Kant (gr., el filósofo!) y Wright proponen un modelo de disco, del cual el Sol forma parte.

- 1780s:
- Herschel hace un mapa de la Galaxia, asumiendo que todas las estrellas son igualmente luminosas
 - la densidad es constante
 - no hay material que absorba la luz
 - todo la galaxia es visible

Encuentra una elipse en razón entre semiejes $a/b \approx 5$.

1922: Kapteyn rehace los experimentos de Herschel, con placas fotográficas, sobre 200 regiones del cielo. Con esto,

- Confirma el modelo de Herschel
- Midió la Galaxia:



imponiendo que el borde ocurre cuando la densidad cae al 1% del máximo.

• Encuentra que el Sol está a 38 pc por sobre el disco, y a 650 pc del centro.

1919: Shapley usa cefidas para mapear tridimensionalmente cúmulos globulares, y encuentra que no están centrados en el Sol, sino en un punto a una distancia muy específica de nosotros: ~ 15 kpc. Encuentra que los cúmulos más distantes estaban a ~ 55 kpc del centro, con lo que estimó el diámetro de la Vía Láctea en ~ 100 kpc.

→ Hoy en día se sabe que la Vía Láctea está compuesta de un disco, un bulbo y un halo.

↳ el Centro Galáctico está aprox. en la constelación de Sagitario:

$$\text{Sgt A (J2000): } \alpha = 17^{\circ} 45' 40'' \\ \delta = -29^{\circ} 00' 28''$$

↳ la distancia al CG es aprox. $8 \pm 0.5 \text{ kpc}$.

↳ el diámetro del componente de estrellas, gas y polvo está entre los 40 y los 50 kpc.

→ El Disco se compone de dos componentes:

1a. el Disco Delgado, compuesto por estrellas jóvenes, gas y polvo.

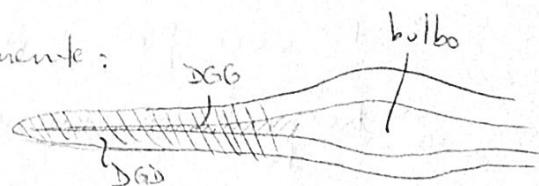
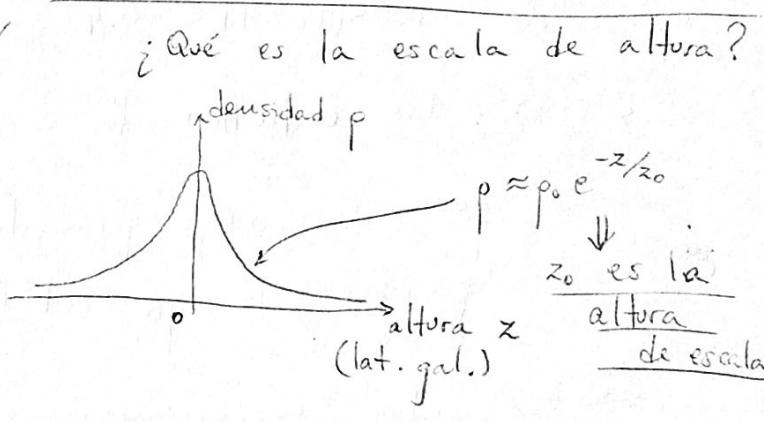
Si su escala de altura es $z_{\text{thin}} \approx 350 \text{ pc}$.

1b. el Disco Delgado Joven, donde hay gas, polvo y algunas estrellas aún más jóvenes. Aquí, $z \approx 35-90 \text{ pc}$.

2. el Disco Grueso, compuesto por estrellas más viejas. Aquí, $z_{\text{thick}} \approx 1 \text{ kpc}$.

→ La densidad estelar varía enormemente:

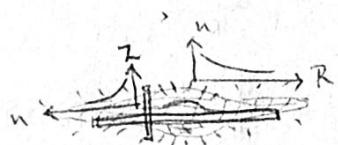
$$\frac{\rho_{\text{thick}}}{\rho_{\text{thin}}} \approx 8.5\%$$



→ El conteo de estrellas se escribe, entonces, como

$$n(z, R) = n_0 (e^{-z/z_{\text{thin}}} + 0.085 e^{-z/z_{\text{thick}}}) e^{-R/h_R}$$

con $h_R \approx 2.25 \text{ kpc}$ y $n_0 \approx 0.02 \text{ stars/pc}^3$.



→ El conteo de estrellas no es lo único que distingue al DGD del DGG. También tienen distintas metallicidades. Recuérdese que la metalicidad se define como

$$[\text{Fe}/\text{H}] := \log\left(\frac{N_{\text{Fe}}}{N_{\text{H}}}\right) - \log\left(\frac{N_{\text{Fe}}}{N_{\text{H}}}\right)_\odot$$

También la metalicidad se puede expresar en términos de

$$Z = \left[\frac{\text{Li}}{\text{H}}\right] + \left[\frac{\text{Be}}{\text{H}}\right] + \left[\frac{\text{B}}{\text{H}}\right] + \dots + \left[\frac{\text{Cr}}{\text{H}}\right] + \left[\frac{\text{Mn}}{\text{H}}\right] + \left[\frac{\text{Fe}}{\text{H}}\right]$$

→ Las estrellas población I son ricas en metales: $Z \approx 0.02$, mientras que las de población II aún son jóvenes: $Z \approx 0.001$.

→ Para el DGD, $-0.5 < [\text{Fe}/\text{H}] < 0.3$, mientras que para el DGG, $-0.6 < [\text{Fe}/\text{H}] < -0.4$

→ OJO: las estrellas de mayor metalicidad son más jóvenes, pues se han formado a partir de nubes de polvo preprocesado por estrellas de generaciones anteriores.

→ De estas observaciones, se encuentra que el DGD comenzó a formar estrellas hace ~ 8 Gyr, y aún continúa; mientras que el DGG formó estrellas a un lookback time entre 10 y 11 Gyr.

→ Respecto a masas,

$$\text{DGD} \rightarrow \text{estrellas: } M_{\text{DGD}}^* \approx 6 \cdot 10^{10} M_\odot$$

$$\rightarrow \text{gas y polvo: } M_{\text{DGD}}^{\text{gas}} \approx 0.5 \cdot 10^{10} M_\odot$$

$$\rightarrow \text{luminosidad: } L_{\text{DGD}}^B \approx 1.8 \cdot 10^{10} L_\odot$$

De aquí se deduce que $M/L \approx 3 M_\odot / L_\odot$, con lo que se puede aproximar la masa promedio de cada estrella del DGD, pues

para una estrella de secuencia principal

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^\alpha \quad (1)$$

con $\alpha \approx 4$ (resultado estudiado en Astrofísica Estelar #uno).

Luego,

$$\frac{M}{L} = 3 \frac{M_\odot}{L_\odot} \Rightarrow \frac{L}{L_\odot} = \frac{1}{3} \frac{M}{M_\odot}$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{3} \frac{M}{M_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^\alpha$$

$$\Leftrightarrow 3^{-1} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{\alpha-1}$$

$$\Leftrightarrow M = 3^{\frac{1}{\alpha-1}} M_\odot \approx 0.7 M_\odot$$

→ En cuanto al DGG,

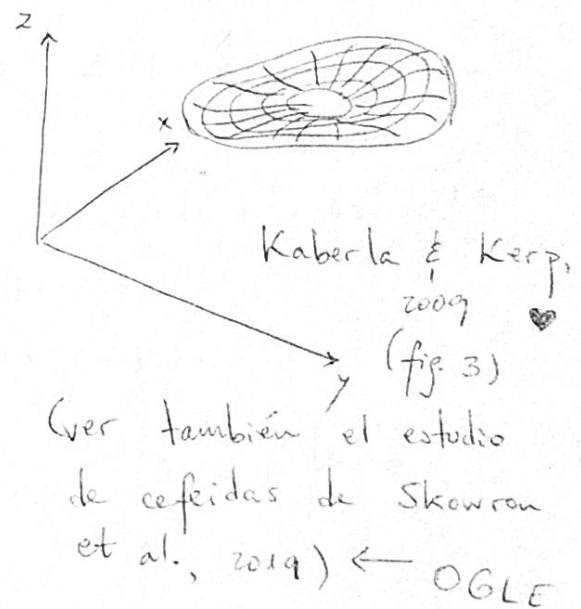
$$\begin{cases} M \approx 3 \cdot 10^9 M_\odot \\ L \approx 2 \cdot 10^8 M_\odot \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{L} = 15 \frac{M_\odot}{L_\odot} \Rightarrow M \approx 0.41 M_\odot$$

Además,

$$\frac{L_{DGG}}{L_{DGB}} = 1\% \quad ; \quad \frac{M_{DGG}}{M_{DGB}} = 3\%$$

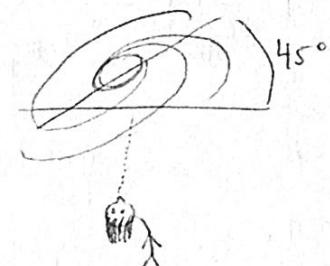
- Usando estrellas O y B, y regiones H II, se puede trazar la estructura espiral de la galaxia; mientras que las estrellas más rojas tienden a distribuirse más homogéneamente en los discos.
- ↳ Esto sugiere que hay ondas de densidad emanando desde el CG, que empujan el gas interestelar generando frentes de onda, en cuyos máximos se dan las condiciones de formación estelar; mientras que las estrellas ya formadas son menos susceptibles a desplazarse con estas ondas. Si a esto se le añade el hecho de que toda la galaxia está girando, se obtiene un lindo modelo teórico para la formación de los brazos espirales.
- El plano del Disco no es exactamente plano, sino que está deformado, probablemente por la interacción con otra galaxia que ya ha sido destrozada.



EL BULBO GALÁCTICO

- Es aproximadamente un elipsode "inclinado" (rotado) en unos 45° respecto de la línea de visión, con razón entre semiejes de $b/a \approx 0.6$, con una escala de ~ 400 pc.
- Su brillo superficial, al medirlo en L_\odot/pc^2 , queda descrito por la "ley r^{-4} ", también conocida como el "perfil de de Vaucouleurs":

$$\log \left[\frac{I(r)}{I_e} \right] = -3.3307 \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{-4} - 1 \right],$$

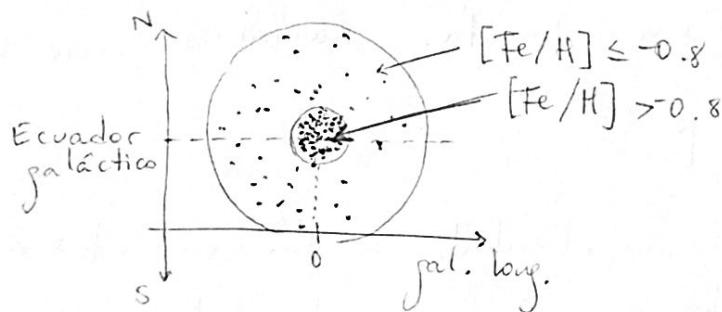


donde r_e es el radio que contiene la mitad de la radiación total de la galaxia e I_e es el brillo superficial en esa isofoto. Mediciones recientes muestran que $r_e \approx 700$ pc

- En cuanto a metalicidad, se ha encontrado $[\text{Fe}/\text{H}] \in (-2, 0.5)$. Esto indica tres generaciones de estrellas: unas menores a 200 Myr, otras entre 200 Myr y 7 Gyr, y otras mayores que 7 Gyr. Estas últimas son las más abundantes y, contrariamente a lo que ocurre en el disco, aquí las más viejas son también las más metálicas. Ello sugiere que en su juventud la VL tuvo una etapa muy intensa de formación estelar, de donde provienen estas estrellas, y luego se formaron paulatinamente las estrellas de las poblaciones I y II.
- Aquí se obtiene $M \approx 10^{10} M_\odot$ y $L \approx 3 \cdot 10^9 L_\odot$, con lo que nuevamente $M \approx 0.7 M_\odot$.

EL HALO ESTELAR (o simplemente "Halo")

- Se cree que tiene una forma aproximadamente esférica. Contiene principalmente cúmulos globulares, y su radio va entre los 35 y los 50 kpc.
- Hay dos poblaciones distinguibles de cúmulos:
 1. Cúmulos viejos y pobres en metales ($[Fe/H] \leq -0.8$), distribuidos en forma esférica.
 2. Cúmulos jóvenes y ricos en metales, asociados gravitacionalmente al DGG.
- Las edades de estos cúmulos van entre 11 y 13 Gyr (i.e., son de los objetos más viejos del Universo!)
- Los cúmulos tienen una interesante distribución de metalicidades:



- La distribución de estrellas en el halo sigue aproximadamente la función

$$n(r) = n_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{-3.5}$$

donde $\frac{n}{n_{\text{obs}}(r=0)} = 0.2\%$ y $a \gg 1 \text{ kpc}$.

- La distribución del brillo superficial sigue una ley de de Vaucouleurs con $r_e \approx 2.7 \text{ kpc}$.

→ En cuanto a masas,

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\text{Halo}} \approx 10^9 M_{\odot} \\ L_{\text{Halo}} \approx 10^9 L_{\odot} \end{array} \right. \Rightarrow M \approx M_{\odot}$$

EL HALO DE MATERIA OSCURA

→ Sumando todas las componentes estelares de la galaxia, se obtiene $L_{\text{MW}}^{\text{bol}} = (2.3 \pm 0.6) \cdot 10^{10} L_{\odot}$. Si se incluye el polvo, $L_{\text{MW}}^{\text{bol}} = 3.6 \cdot 10^{10} L_{\odot}$.

Por otra parte, la masa total es aproximadamente $M = 9 \cdot 10^{10} M_{\odot}$.

→ Esa cantidad de masa es suficiente para explicar los movimientos orbitales en torno al CG, para radios $r < R_0$, donde R_0 es la distancia al CG, desde el Sol. Sin embargo, para $r > R_0$, estos valores no son consistentes con las observaciones.

→ Con estas inconsistencias se infiere la presencia de materia que no interactúa con la radiación (que ha sido llamada Materia Obscura), cuya densidad sigue el siguiente perfil

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2},$$

donde $a \approx 2.8 \text{ kpc}$ y ρ_0 son parámetros que se obtienen de contrastar simulaciones con observaciones.

→ Con este resultado, la materia contenida en radios de

1. 50 kpc es $M \approx 5.4 \cdot 10^{11} M_{\odot}$

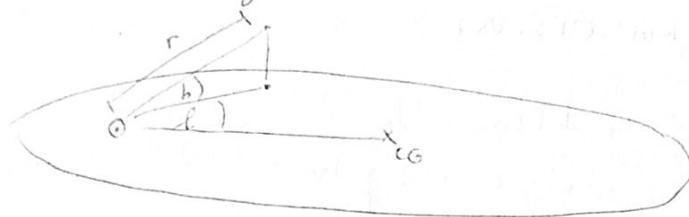
2. 230 kpc es $M \approx 1.9 \cdot 10^{12} M_{\odot}$

lo que significa que la materia oscura forma alrededor del 95% de la masa total de la VL.

CINÉMÁTICA EN LA GALAXIA

→ Hay dos sistemas de coordenadas distintos que se usan:

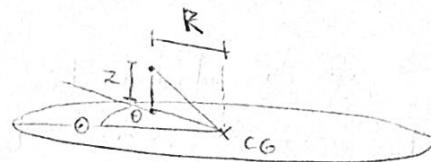
1. Coordenadas galácticas



l: longitud galáctica

b: latitud galáctica

2. Coordenadas galactocéntricas



Como θ se mide en la dirección de rotación de la galaxia, este es un sistema inverso, i.e. si en los sistemas usuales $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$, aquí $\hat{r} \times \hat{\theta} = -\hat{z}$

→ Las velocidades en el sistema galactocéntrico usualmente se denotan por

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{z}$$

→ Se define el LSR (Local standard of Rest) como la vecindad local del Sol, que se move en forma al CG sin cambios. Para este entorno, $\dot{r}_{LSR} = \dot{z}_{LSR} = 0$, y se define $\dot{\theta}_{LSR} = \dot{\theta}_0$.

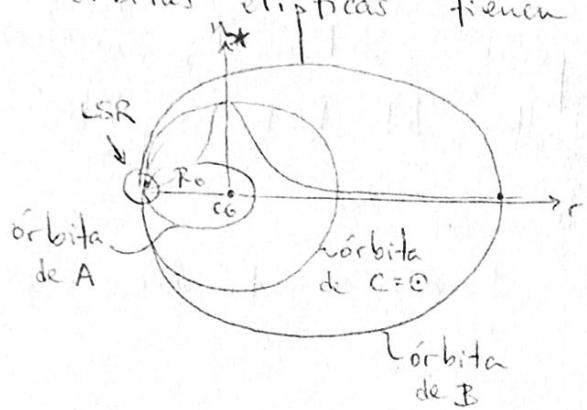
→ Se define la velocidad peculiar de un objeto como la velocidad que tiene respecto del LSR, en las coordenadas galactocéntricas.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{r} - \dot{r}_{LSR} \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_{LSR} \\ \dot{z} - \dot{z}_{LSR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

→ Por la definición de LSR, se esperaría que $\langle \vec{v} \cdot \hat{r} \rangle = \langle \vec{v} \cdot \hat{z} \rangle = 0$ ($\langle u \rangle = \langle w \rangle = 0$)

Sin embargo, el cálculo de $\langle \vec{v} \cdot \hat{\theta} \rangle$ merece algo más de atención.

Sean dos estrellas, A y B, que cumplen con $\vec{V} \cdot \hat{z} = 0$, cuyas órbitas elípticas tienen como focos opuestos al CG.



De la 2^a ley de Kepler,
 $\Theta_A < \Theta_0 < \Theta_B$
 $\Rightarrow \Theta_A - \Theta_0 < 0 < \Theta_B - \Theta_0$
 $\therefore (\vec{V} \cdot \hat{\theta})_A < 0 < (\vec{V} \cdot \hat{\theta})_B$

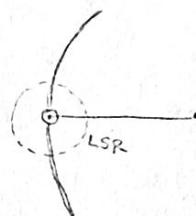
Ahora... dada la distribución de estrellas en torno al CG, hay muchas más estrellas en la posición de A que en la de B, con lo que $\langle \vec{V} \cdot \hat{\theta} \rangle < 0$ 11/5/2020

→ Usando modelos orbitales (que son tan complicados que no se mostrarán aquí), se encuentra que

$$\langle \vec{v} \rangle \propto \sqrt{\sigma_v}$$

con lo que
 $\langle v - v_0 \rangle = C\sqrt{\sigma_v} - v_0$

Dehnen
& Binney,
1998]



} si todas las órbitas fuesen circulares, $\sigma_v = 0$, y también $\langle v \rangle = v_0$;



} En cambio, si hay una dispersión $\sigma \neq 0$, entonces $\langle v \rangle > -v_0$.

→ Se ha encontrado que la velocidad peculiar del Sol, i.e su velocidad respecto al LSR, es

$$\vec{v}_\odot = \begin{bmatrix} -10 \pm 0.4 \\ 5.2 \pm 0.6 \\ 7.2 \pm 0.4 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

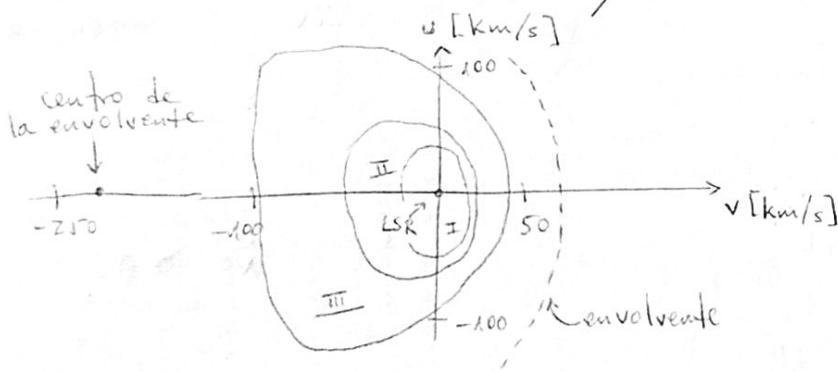
En otras palabras, nos movemos a 13.4 km/s hacia $l=53^\circ$
 $b=25^\circ$

→ Una interpretación de los resultados anteriores es que en las componentes v_x y v_z , las velocidades de las estrellas respecto al Sol simplemente reflejan la velocidad peculiar del Sol; mientras que las velocidades en v_y de las estrellas del LSR respecto al Sol corresponden a $\langle v_{y,LSR} \rangle = C\sqrt{\sigma_v^2} - v_{y,Solar}$.

→ Notese que aquí σ_v no es una desviación estándar, sino que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{std}_v = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum_{i=1}^N (v_i - \langle v \rangle)^2} \\ \sigma_v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \end{array} \right.$$

→ Al estudiar las estrellas del LSR, es posible construir histogramas de v_x y v_z , o v_x y v_z , y se encuentra lo que se han llamado elipsoides de velocidad:



Aquí, los números corresponden a

- I. Estrellas jóvenes y ricas en metales
- II. Una población intermedia
- III. Estrellas viejas y pobres en metales.

Una breve interpretación de esto es que las estrellas más jóvenes tienden a moverse con el LSR, mientras que las más viejas tienden a retrasarse en forma al CG respecto del LSR. Esto es consistente con la idea de ondas acústicas que forman los brazos espirales.

Además, las estrellas más cercanas a la envolvente o a su centro se mueven en órbitas muy distintas del LSR, sugiriendo que forman parte del halo. Asumiendo que en promedio el halo no rota, entonces el promedio de las velocidades de estas estrellas es simplemente el opuesto

de la velocidad del LSR en torno al CG. El promedio de las velocidades de las estrellas del halo debe, geométricamente, coincidir con el centro de la envolvente. Esto resulta en que

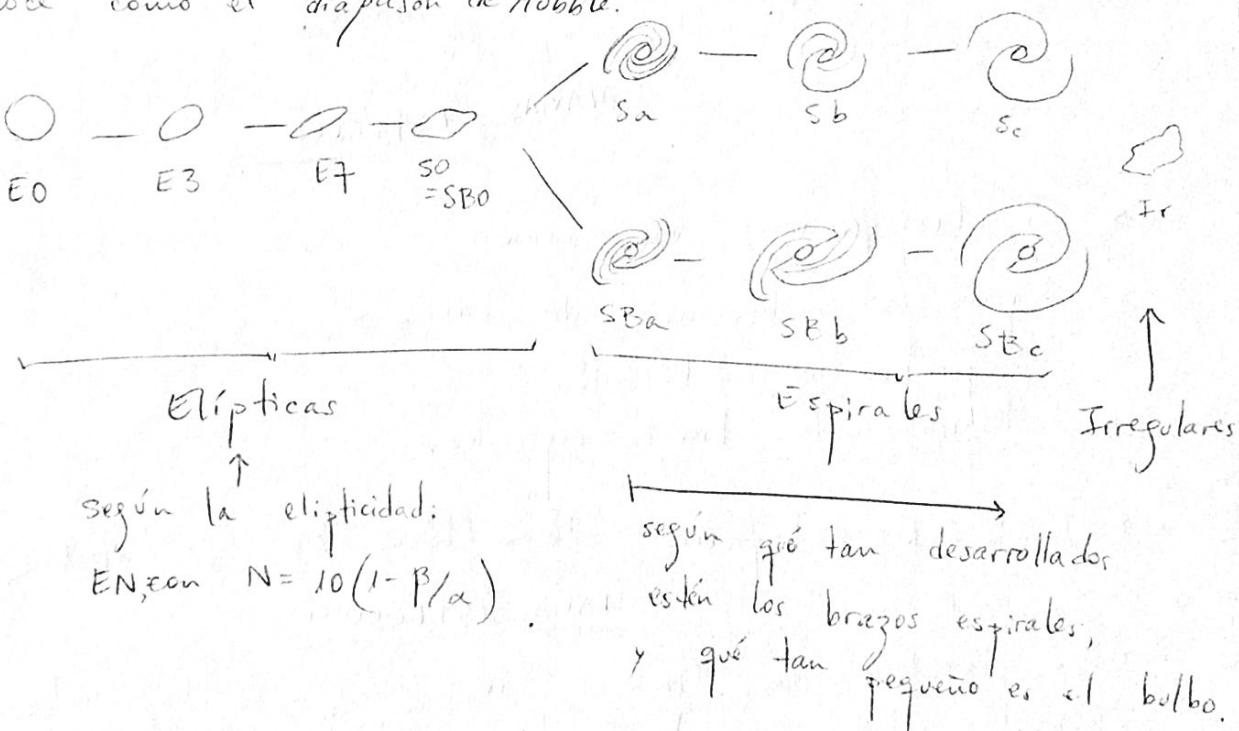
$$\Theta_0 \approx 220 \text{ km/s}$$

valor que al día de hoy está aceptado por la IAU.

→ Ello significa que el período orbital del Sol es $T_0 \text{ CG} = 230 \text{ Myr}$. Usando la tercera ley de Kepler, se calcula que la masa interior al radio orbital del Sol es $M \approx 8.8 \cdot 10^8 M_\odot$.

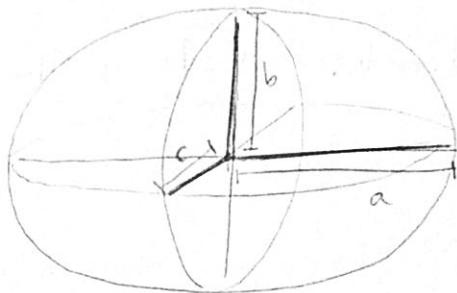
LAS GALAXIAS

- Se comenzó a hablar de otras galaxias aprox. en 1923.
- Hubble desarrolló el primer esquema de clasificación de galaxias, que no sigue una evolución temporal, sino morfológica. Se conoce como el diagrama de Hubble.



GALAXIAS ELÍPTICAS

→ Las galaxias elípticas son triaxiales con semiejes a, b, c , con $a \geq b \geq c$.



Si los semiejes

satisfacen, la galaxia se llama

$$a=b=c$$

esférica



$$a=b>c$$

oblata



$$a>b=c$$

prolata



→ Las galaxias prolatas son como pelotas de rugby, y las oblatas son como sopapillas.

→ La clasificación elíptica de Hubble depende de los semiejes a y b , con $a \geq b$, de la proyección de la galaxia sobre la bóveda celeste.

→ Usualmente satisfacen $-8 < M_B^B < -23$ en luminosidad (magnitudes), y $10^7 < M/M_\odot < 10^{13}$ en masa.

GALAXIAS ESPIRALES

→ Su clasificación va según

- presencia o ausencia de barra
- importancia del bulbo
- desarrollo de brazos espirales.

→ Usualmente satisfacen $-16 < M_B^B < -23$

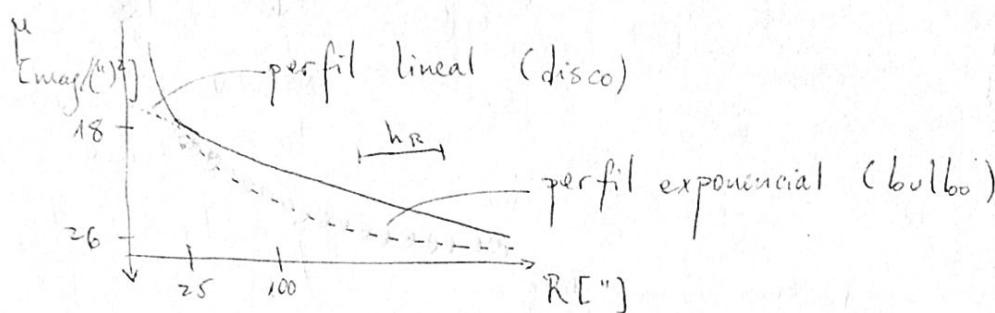
GALAXIAS IRREGULARES

→ Se clasifican en IrrI o IrrII, según si hay indicios de un brazo espiral o no, respectivamente.

→ $-13 < M_B^B < -20$, $10^8 < M/M_\odot < 10^{10}$.

PERFILES DE BRILLO

Las galaxias espirales usualmente exhiben un perfil de brillo, i.e. $\mu_{\text{mag}}(^{\circ})^2$, como el siguiente:



El brillo sigue las siguientes curvas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bulbo} \rightarrow \text{perfil de de Vaucouleurs : } \mu(r) = \mu_e + 8.3268 \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/4} - 1 \right] \\ \text{Disco} \rightarrow \mu(r) = \mu_0 + 1.09 \left(\frac{r}{h} \right) \end{array} \right\}$$

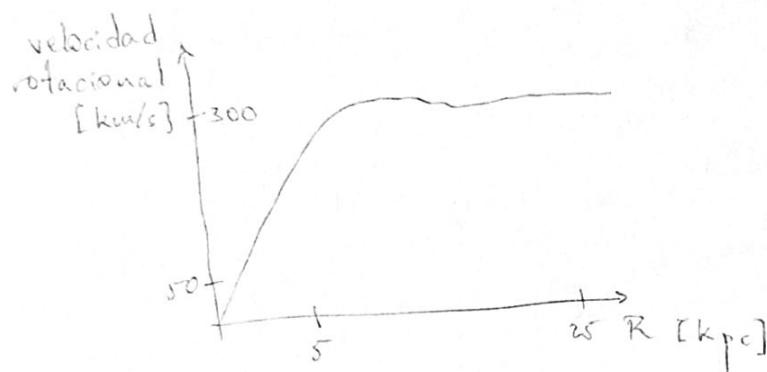
donde μ_e es el brillo de la isofoto al radio efectivo r_e . Recuérdese que el radio efectivo se define como la isofoto que contiene la mitad del brillo de la fuente. Lo anterior se ha generalizado a la ley de Sersic:

$$\mu(r) = \mu_e + 8.3268 \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right]$$

con $n \in [1, 5]$. También, μ_0 es el brillo superficial del centro del disco.

→ Por otra parte, la masa no necesariamente sigue la distribución de los (#darkmatter), así que se debe ocupar otro método para medir el perfil de masa, usualmente las curvas de rotación, promovidas por Vera Rubin en los '70.

Para efectos de estos estudios se fija la atención en el corrimiento al rojo de cada parte del perfil de la galaxia. Se encuentra lo siguiente:



No calza con las observaciones de luminosidad...

/ materia oscura!

→ En la parte central esto se puede modelar como

$$F_g = -\frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{-mv^2}{r}$$

$$\Leftrightarrow M(r) = \frac{v^2 r}{G}$$

y como $v \propto r$ en la zona central de la galaxia, entonces $M \propto r^3$, lo que implica que $\rho = \text{constante}$.

→ Para la zona exterior,

$$M(r) = \frac{v^2 r}{G} \Rightarrow \frac{dM}{dr} = \frac{v^2}{G}$$

En un sistema con geometría esférica,

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Igualando, $\rho \propto r^{-2}$. Es decir, en la zona más externa hay más materia que en zonas más internas. Esta es mayor a la masa obtenida a partir de cálculos desde la luminosidad.

→ Los resultados de Vera Rubin muestran que las curvas de luz de las galaxias más tempranas son más altas, con lo que se espera que tengan más masa. También mostró que la curva de rotación tiene aproximadamente la misma forma.

→ Tully y Fisher encontraron una relación entre el brillo de una galaxia y la velocidad de rotación máxima: mientras más luminosa es la galaxia, mayor es su velocidad de rotación. Es más, $\log(V_{\text{rot}}) \propto M^B$.

→ Con esto ya basta observar la velocidad de rotación de una galaxia, para determinar su distancia (mediante el módulo de la distancia).

→ Recordando que $M = \frac{v_{\text{max}}^2 R}{G}$, asumiendo que la razón masa-luminosidad, así como el brillo superficial, son constantes, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M}{L} = \frac{1}{C_{ML}} \\ C_{SB} = \frac{L}{R^2} \end{array} \right. \Rightarrow L = C_{ML} \frac{v_{\text{max}}^2 R}{G} \Rightarrow L^2 = \frac{C_{ML}^2 v_{\text{max}}^4}{G^2} \cdot R^2$$

$$L = \boxed{\frac{C_{ML}^2 v_{\text{max}}^4}{C_{SB} G^2}}$$

Con esto se puede obtener la magnitud absoluta en términos de la velocidad de rotación máxima:

$$M = -2.5 \log L + C \Rightarrow M = -2.5 \log \frac{C_{ML}^2 v_{\text{max}}^4}{C_{SB} G^2} + C'$$

$$\therefore \boxed{M = -10 \log v_{\text{max}} + C'}$$

PROPIEDADES DE GALAXIAS

→ Se observa que el brillo de las galaxias Sa~Sc está relacionado con el radio R_{25} de la isofoto a $25\text{mag}/(\text{"})^2$:

$$\log R_{25} = -0.249 M_B - 4$$

→ Con esto se puede estimar independientemente la masa y la razón masa-luminosidad (M/L):

$$\langle M/L \rangle \approx \begin{cases} 6 & \text{para Sa} \\ 4.5 & \text{para Sb} \\ 2.6 & \text{para Sc} \end{cases}$$

→ Esto se puede entender pensando que las estrellas de galaxias de tipo tardío ($Sc \sim Sd$) están dominadas por estrellas masivas (i.e., azules), con menor M/L . Esta variación de color se observa!

→ El contenido gaseoso también es función del tipo de Hubble! Se observa que $M_{\text{gas}}/M_\star \approx 0.4$ para Sa, y $M_{\text{gas}}/M_\star \approx 0.25$ para Sc.

Además, $\langle M_{\text{H}_2}/M_H \rangle$ es mayor en tipos tempranos (~ 2.2 para Sa, ~ 1.8 para Sc y ~ 0.3 para Sc~Sd). Es decir, los tipos tempranos están más concentrados, mientras que el gas tiende a dispersarse hacia tipos tardíos.

→ Los gradientes de color muestran que los bulbos de las galaxias espirales tienden a ser más rojos, en comparación con los discos. El color, en estos gradientes, tiene que ver con la edad (diagrama H-R) y la metalicidad (pues los metales tienden a absorber hacia el azul, eurojiciendo el espectro de la estrella).

→ La metalicidad aumenta con la luminosidad.

→ Para un resumen de estas correlaciones empíricas, ver Roberts y Haynes, 1994. En resumen...

- la masa es similar en galaxias de tipos tempranos, y desde S_c decrece monótonamente.
- la concentración de hidrógeno neutro tiene un máximo en Sb ~ Sbc, pero es aprox. independiente del tipo de Hubble.
- la densidad superficial dentro de un radio característico disminuye con el tipo de Hubble. La densidad superficial de H I aumenta con el tipo de Hubble.
- el color depende del tipo de Hubble.

→ Estas correlaciones tienen que ver con las diferentes tasas de formación estelar (SFR) para galaxias de distintos tipos, a lo largo de sus vidas, e.g.

- 1) la función de luminosidad de regiones HII tiene que ver con la SFR actual.
- 2) la fracción de HI indica las SFR futuras.

* Ver Stratova et al., 2001.

→ Una galaxia que forma sus estrellas en un cierto período de tiempo, apenas la formación termine presentará líneas de emisión de gas ionizado muy marcadas, que irán desvaneciéndose conforme avanza el tiempo y se siguen formando estrellas que consuman el gas. Conforme avance el tiempo, también las estrellas se irán volviendo más rojas y tenues, lo que se refleja también en el espectro de la galaxia.

Morfología y propiedades de galaxias elípticas

→ En sus espectros tienden a ser intrínsecamente más rojos que los de las galaxias espirales.

→ Tienen muchas líneas de absorción, y prácticamente no hay líneas de emisión.

→ Hay galaxias elípticas gigantes (CD en la clasificación de Yerkes), con tamaños de hasta 1 Mpc. Tipicamente hay una barra central, usualmente al centro.

$$-22 > M_B > -25$$

$$10^{13} < M/M_\odot < 10^{14}$$

→ Las normales tienden a tener tamaños de hasta 200 kpc.

$$-15 > M_B > -23$$

$$10^8 < M/M_\odot < 10^{13}$$

→ Hay dwarf Ellipticals (dE), de tamaños entre 1 y 10 kpc

$$-13 > M_B > -19$$

$$10^7 < M/M_\odot < 10^9$$

→ También hay dwarf spheroidals (dSph). Usualmente se pueden observar sólo en el entorno local (por lo pequeñas)

$$-8 > M_B > -15$$

$$10^7 < M/M_\odot < 10^{10}$$

→ Por último, las BCD (Blue Compact Dwarves) tienen formación estelar activa

$$-14 > M_B > -17$$

$$M \approx 10^9 M_\odot$$

→ La curva de luz de las galaxias elípticas sigue un perfil de de Vaucouleurs.

- Tienen gas y polvo en menor cantidad que las espirales, y tienden a ser más rojas hacia el centro.
- Hay una correlación entre la dispersión de velocidades y la luminosidad: la relación de Faber-Jackson:

$$\log \sigma_0 = -0.1 M_B + c_0$$

→ Estas leyes se entienden en forma similar a Tully-Fisher, asumiendo que la galaxia es un sistema de estrellas virializado.

$$-2 \langle K \rangle = \langle U \rangle \Rightarrow -2 \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = U$$

→ Asumiendo ahora que todas las estrellas son iguales,

$$\frac{U}{N} = -\frac{m}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 \Rightarrow \boxed{\frac{-U}{N} = m \langle v^2 \rangle}$$

Pero

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_r^2 \rangle + \langle v_\theta^2 \rangle + \langle v_\phi^2 \rangle = 3 \langle v_r^2 \rangle = 3 \sigma_r^2$$

asumiendo que el campo de velocidades es isotrópico

Luego,

$$\frac{-U}{N} = 3m \sigma_r^2 \Rightarrow -U = 3mN \sigma_r^2$$

Para una masa esférica y uniforme, el potencial gravitatorio

$$U \approx \frac{-3M^2 G}{5R}$$

y la masa de este sistema es $M = mN$. Luego,

$$M \approx \frac{5R}{6} \sigma_r^2$$

Teniendo la masa y la ~~luminosidad~~ dispersión de velocidades asumiendo como en Tully - Fisher

$$\frac{M}{L} = \frac{1}{C_{ML}} \Rightarrow L = C_{ML} \frac{5R\sigma_r^2}{G}$$

y también

$$C_{SB} = \frac{L}{R^2} \Rightarrow L^2 = C_{ML}^2 \cdot \frac{25R^2\sigma_r^4}{G^2} = \frac{25\sigma_r^4 L}{G^2 C_{SB}} C_{ML}^2$$

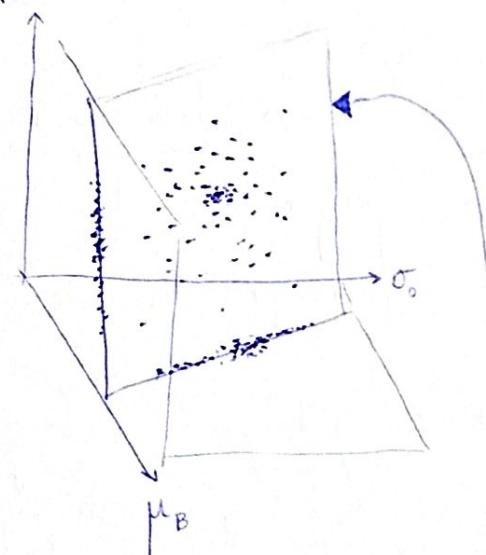
$$\therefore \boxed{L = \frac{C_{ML}^2}{C_{SB}} \frac{25\sigma_r^4}{G^2}}$$

$-2.5 \log()$

$$\Leftrightarrow M_B + c = -10 \log \sigma_r + c' \quad | : 10 - \frac{c'}{10}$$

$$\therefore \boxed{\log \sigma_r = -0.1 M_B + c_0} \quad \text{Faber-Jackson}$$

→ También hay una relación entre el tamaño de una galaxia elíptica y su luminosidad: la relación de Kormendy.



Combinando las relaciones de Kormendy y de Faber - Jackson se encuentra que todas las galaxias caen en lo que se ha denominado como el plano fundamental.

- Las galaxias elípticas más luminosas presentan velocidades de rotación que son menores que la dispersión de velocidades estelares. Consecuentemente, la forma de la galaxia está dominada por la anisotropía de las velocidades.
- Se define V/σ como la razón de velocidad de rotación a la dispersión de velocidades.
 - ↪ Si $V/\sigma > 0.7$, se dice que la galaxia está "soportada rotacionalmente".
 - ↪ Si $V/\sigma < 0.7$, la galaxia está "soportada por presión".
- Las galaxias gigantes están ~~soportadas~~ por presión. Esto también pasa con galaxias difusas y enanas.
- Pero para las galaxias con magnitudes $M_B \in [-20.5, -18]$, $V/\sigma \approx 0.9$
- ¡Lo mismo ocurre con bulbos de galaxias espirales!
- Las galaxias más masivas (y más luminosas) tienden a ser más rojas. Esto pasa porque en las galaxias menores masivas el gas está ligado gravitacionalmente a la galaxia en una medida mucho menor que para las galaxias más masivas. En consecuencia, el gas que escapa de las galaxias masivas tiende a volver a la galaxia (como no ocurre en las galaxias más vivianas), permitiendo nuevos episodios de formación estelar. Consecuentemente eurojetiendo la galaxia.

→ Dressler, 1980: en los cúmulos galácticos más densos predominan las galaxias elípticas, mientras que en los cúmulos menos densos predominan las galaxias espirales ("relación densidad-morfología").

CÚMULOS DE GALAXIAS

- Son de los objetos ligados gravitacionalmente más masivos del Universo ($M \sim 10^{15} M_\odot$), con una dispersión de velocidades de $\sim 800 \text{ km/s}$.
- Emiten en rayos X debido al gas caliente intergaláctico.
- Definen un laboratorio natural para estudiar evolución de galaxias, el medio intergaláctico, y la naturaleza de la materia oscura.
- George Abell (~1950) catalogó cúmulos galácticos en los primeros surveys, compuestos por placas fotográficas.
- → Encontró 4073 cúmulos que cumplieron con
 1. Riqueza: hay por lo menos 50 miembros más brillantes que $m_3 + 2$, donde m_3 es la tercera galaxia más brillante.
 2. Concentración: las galaxias se encuentran en un radio de $1.5 \text{ Mpc}/h$. Esto significa un radio angular de $1.7\frac{1}{2}$, donde z se estima a partir de la magnitud aparente de la décima galaxia y h satisface $H_0 = 100 h \text{ km/s/Mpc}$.
 3. Distancia: los cúmulos con $z < 0.02$ son más grandes que una placa fotográfica. Esto define la distancia mínima. La distancia máxima está determinada por el límite de magnitud de la placa ($m \approx 20$) $\Rightarrow m_3 < 17.5$ entre en la muestra. Conduce a un límite práctico de $z < 0.2$.
- Los cúmulos así definidos siguen una distribución dependiente de la magnitud:

$$\log N(< m) = 0.6m + C \rightarrow \text{dist. uniforme}$$

→ Para los cúmulos de riqueza 1 ó superior, la densidad es

$$N_{\text{cl}}(R \geq 1) = 10^{-5} h^3 / \text{Mpc}^3$$

La distancia típica entre cúmulos es de $\sim 50 \text{ Mpc}/h$, cuando la distancia típica entre galaxias es $5 \text{ Mpc}/h$.

→ Los cúmulos se clasifican en

→ Cúmulos regulares (simetría esférica), dominados por galaxias elípticas o SO. Algunos tienen más de 1000 galaxias.

→ Cúmulos irregulares, menos simétricos.

→ Oemler distingue 3 tipos según el contenido galáctico:

→ cD o regulares: una (o dos) galaxia(s) dominante(s), con razones $E:SO:S \approx 3:4:2$. Ricos en galaxias tempranas.

→ Ricos en espirales: con razones $E:SO:S \approx 1:2:3$.

→ Pobres en espirales: el resto de los cúmulos. Típicamente $E:SO:S \approx 1:2:1$.

→ Oemler también encontró distribuciones del contenido:

→ Cúmulos cD son más simétricos, con densidad que aumenta hacia el centro. En otros tipos, la dist. es más uniforme.

→ La dist. radial de los tipos galácticos es uniforme en los ricos en espirales. En cD y pobres en espirales, las espirales disminuyen hacia el centro.

→ La estimación de la masa se hace usando el teo. del virial:

$$T = \frac{1}{2} V \Rightarrow M_{\text{vir}} = \frac{3 \langle v_{\parallel} \rangle R_{\text{cúmulo}}}{G}$$

Antes, sin embargo, necesitamos verificar que el sistema está en equilibrio virial. Para esto se estudia el "tiempo de cruce", que debe

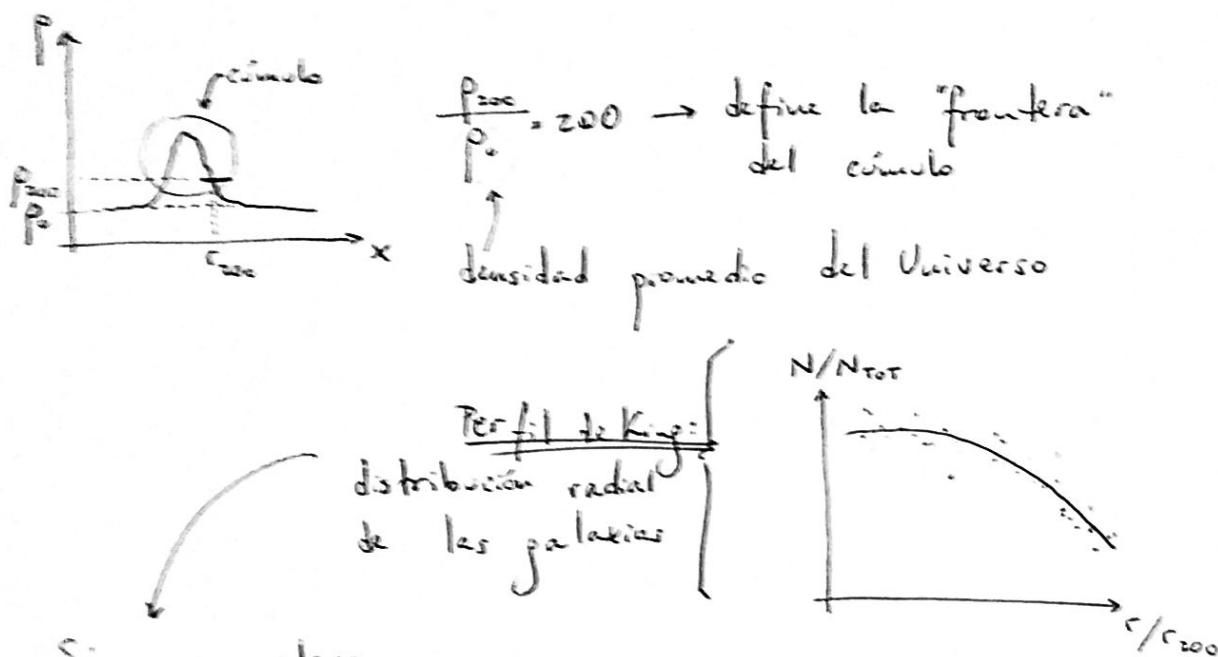
ser una fracción pequeña de la edad del Universo:

$$t_{\text{cr}} = \frac{\text{Radio}}{\langle v \rangle} \approx 2 \cdot 10^9 \text{ yr}$$

→ ¿Cómo se encuentra un cúmulo?

- ① Se hace espectroscopía multiobjetivo en una región del cielo.
- ② Se estudia la distribución de redshifts
- ③ Si hay muchas fuentes aproximadamente al mismo redshift, se concluye que forman parte de un cúmulo.

→ El tamaño de los cúmulos se mide en un factor r_{200} :



Si se considera

sólo esto, se obtiene
que las galaxias deberían
orbitar el centro del
cúmulo a una cierta
velocidad

pero experimentalmente
se encuentra que hay
aprox. 20 veces más masa
de la que vemos, para
explicar el movimiento
real observado de las
galaxias

→ \rightarrow Materia Obscura - \rightarrow

→ Se ha encontrado que los rayos X que emiten los cúmulos se deben a radiación de Bremsstrahlung (i.e., ef. Compton inverso) que proviene del gas caliente.

→ En general, se distribuye la masa de la siguiente forma:

- ↳ 5% en galaxias
- ↳ 10~30% en gas caliente (el plasma radiante en rayos X)
- ↳ el resto en materia oscura.

EL MEDIO INTRA-CÚMULO: una primera caracterización.

- Los cúmulos más ricos tienen gas intergaláctico, a $\sim 10^8 K$ (emite en rayos X)
- Parte del gas es primordial, y otra parte es expulsado por las galaxias.
- La radiación NO es de cuerpo negro. Es rad. de Bremsstrahlung.
- La temperatura es suficientemente alta como para que todo esté ionizado.
- La distribución de las galaxias y el gas en un cúmulo es prácticamente la misma.
- La distribución de masas típicamente es la siguiente:
 - ↳ 5% masa luminosa
 - ↳ 10~30% gas caliente
 - ↳ el resto es materia oscura
 típicamente $M \approx (5 \sim 50) \cdot 10^{14} M_\odot$
- La densidad del gas es aprox. 1000 veces menor que en el medio interestelar de la MW: $n_e \approx 10^{-3} / \text{cm}^3$.

\uparrow
densidad electrónica

Propiedades:

1. ¿Está en equilibrio térmico?

→ El camino libre medio para un electrón en un plasma de densidad n a temperatura T es

$$\lambda = \frac{3^{3/2} (kT)^2}{4\sqrt{\pi} n e^4 \ln \Lambda}$$

donde $\ln \Lambda$ es la razón entre el parámetro de impacto mayor y menor en la estructura. Evaluando para el medio intracúmulo,

$$\lambda \approx 23 \left(\frac{T}{10^8 K} \right)^2 \left(\frac{n}{10^{-3} / \text{cm}^3} \right)^{-1} \text{kpc}$$

lo que quiere decir que el camino libre medio en un cúmulo típico es $\sim 23 \text{kpc}$, es decir, el tamaño de una galaxia común.

→ De modo que el tiempo que demora una partícula en colisionar (i.e., el tiempo que se demora en intercambiar su energía) es

$$t_{eq} = \frac{\lambda}{\langle v_{rms} \rangle} \quad | \quad \langle v_{rms} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$\therefore t_{eq} = 1.4 \cdot 10^7 \left(\frac{T}{10^8 K} \right)^{3/2} \left(\frac{n}{10^{-3} / cm^3} \right)^{-1} \text{ yr} \quad \leftarrow \text{para el protón}$$

→ Para el electrón, con $m_e \ll m_p$, se satisfará $t_{eq} \ll t_{eq}^+$.

→ De cualquier modo, $t_{eq} \ll t_0$, con lo que si asumimos que (al menos en parte) el gas es primordial, entonces ya ha transcurrido suficiente tiempo como para que las partículas hayan intercambiado su energía entre sí; y por lo tanto se concluye que el gas intracúmulo está en equilibrio térmico.

2.6 Cuánto se demora el gas en enfriarse?

→ Existen 3 procesos distintos por los que se enfria el gas:

A. Enfriamiento colisional: un electrón a alta velocidad impacta un átomo, entregando energía a un electrón. Cuando éste vuelve a su estado no-excitado, libera un fotón. Así, la energía cinética/térmica se transforma en luz.

↳ Sin embargo, dado que la mayoría de los átomos en el medio intracúmulo ya están ionizados, este tipo de colisiones son poco probables. Por lo tanto, este proceso no es muy representativo del enfriamiento global del gas.

B. Radiación de recombinación electrónica: Al ser capturado un electrón por un cation, el electrón acelera, y eso emite un fotón. Dado que la densidad de átomos es baja, este proceso es poco probable y por tanto no predominante.

C. Radiación de ~~Bremsstrahlung~~ Bremssstrahlung: dos electrones pasan cerca el uno del otro y aceleran, por potenciales coulombianos, emitiendo fotones. Esto se conoce como emisión free-free, o Bremssstrahlung térmico. A pesar de ser poco denso el gas, éste es el proceso que domina sobre los otros dos.

→ La energía irradiada por Bremsstrahlung térmico es

$$\epsilon_{\text{ff}} = \frac{32\pi e^6}{3hmc^3} \sqrt{\frac{2\pi k}{3me}} g\sqrt{T} n_e \sum_i n_i Z_i^2$$

siendo ϵ_{ff} la energía por unidad de volumen y tiempo que emana del gas, g el factor de Gaunt (adimensional) y Z_i : el número atómico de los iones en el plasma.
Numéricamente,

$$\epsilon_{\text{ff}} = 3 \cdot 10^{-27} \sqrt{T} n_e \frac{\text{erg}}{\text{s cm}^3} \quad (1)$$

Considerando un gas ideal,

$$E = \frac{3n k T}{2}$$

Luego,

$$\epsilon_{\text{ff}} = \dot{E} = \frac{3}{2} n k \frac{dT}{dt} \quad (2)$$

Con esto ya se puede estimar un tiempo de enfriamiento

$$t_{\text{enfr}} = \frac{T}{dT/dt} = \left(\frac{d \ln T}{dt} \right)^{-1} \quad (3)$$

Substituyendo (1) y (2) en (3), y evaluando en los valores típicos, se encuentra

$$t_{\text{enfr}} = \frac{k\sqrt{T}}{2 \cdot 10^{-27} n_e} \approx 22 \cdot 10^{10} \sqrt{\frac{T}{10^8 \text{K}}} \left(\frac{n_e}{10^{-3} \text{cm}^{-3}} \right)^{-1} \text{yr}$$

En un cúmulo común, deberán pasar $22 \cdot 10^9 \text{ yr} > 13.7 \cdot 10^9 \text{ yr} \approx$ to caliente.

3. ¿Está el gas en equilibrio hidrostático?

→ Esto equivale a preguntarnos por el tiempo que tarda el gas en recuperar su equilibrio de presiones, una vez perturbado.

→ Simplemente necesitamos saber cuánto tarda en propagarse una onda de presión (i.e. el sonido) en propagarse por el gas.

→ Para un gas ideal, la velocidad del sonido es

$$v = \sqrt{\gamma P} \quad | \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma k T}{\mu m_H}}$$

→ Evaluando, el tiempo típico que demorará una onda de presión en recorrer el cúmulo entero de diámetro D será

$$t_p = \frac{D}{v} \approx 6.5 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{T}{10^8 K}} \left(\frac{D}{1 \text{ Mpc}} \right) \text{ yr}$$

Para un cúmulo común, $t_p \approx 6.5 \cdot 10^8 \text{ yr} \gg t_0$, por lo que es una buena idea asumir que los cúmulos están en equilibrio hidrostático.

MASA de cúmulos

→ ¡Se puede medir a partir de su temperatura y densidad!

En un fluido estático, se cumple

$$\frac{dp}{dp} = -gp \Rightarrow \frac{dp}{dp} = -\frac{GM\rho}{r^2} \quad \forall r \leq R \quad (4)$$

Además, de la ley de los gases ideales,

$$P = \frac{\rho}{\mu m_H} kT \quad (5)$$

Luego,

$$(5) \Rightarrow \frac{dp}{dr} = \frac{k}{\mu m_H} \left(\frac{dp}{dr} T + \frac{dT}{dr} \rho \right) = \frac{k\rho T}{\mu m_H} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right) \stackrel{(4)}{=} -\frac{GM\rho}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{kT}{\mu m_H} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{GM}{r^2} \quad (6)$$

Entonces, se sigue con que

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{d \ln \rho}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d \ln \rho}{\frac{1}{r} dr} = \frac{1}{r} \frac{d \ln \rho}{d \ln r}$$

Similamente $\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d \ln T}{d \ln r}$, y luego

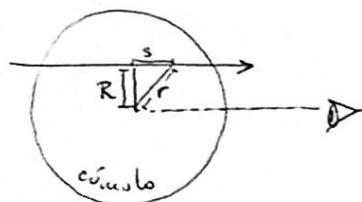
$$\frac{kT}{\mu m_H} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right) = \frac{kT}{\mu m_H r} \left(\frac{d \ln \rho}{d \ln r} + \frac{d \ln T}{d \ln r} \right) \stackrel{(6)}{=} -\frac{GM}{r^2}$$

$$\therefore M = \frac{-kTr}{\mu m_H G} \left(\frac{d \ln \rho}{d \ln r} + \frac{d \ln T}{d \ln r} \right)$$

Ésta es la masa contenida en un radio r dentro del cúmulo. Nótese que queda completamente determinada por los gradientes de temperatura y presión.

Sin embargo, por lo general ρ y T no son observables. Lo que sí es observable es la emisión en rayos X $I(R)$ del cúmulo. Si $\epsilon(s) = \epsilon(r)$ es la emisividad del cúmulo en Rx., entonces

$$I(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(s) ds = \int_0^{\infty} \epsilon(s) ds$$



Substituyendo $s = \sqrt{r^2 - R^2}$, se obtiene

$$I(R) = \int_R^{\infty} \frac{\epsilon(r) dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}$$

Usando una técnica matemática llamada integración de Abel, se puede invertir la integral:

$$\epsilon(r) = \frac{-1}{2\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^{\infty} \frac{I(R) R dR}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

→ Conociendo ϵ , de (1) bastará conocer ρ para estimar M .

→ En general, la emisividad depende de n_e , por lo que se espera que las regiones más densas se enfrien más rápidamente. Como los cúmulos (como todo en astronomía, la verdad...) son más densos al centro, se espera que al centro haya menor temperatura.

Del pavo-naruto, ello significa que hay menos presión en el centro. Entonces se esperaría que la diferencia de presiones empuje material hacia el centro de los cúmulos. Esto se conoce como *cooling flows*: los cúmulos pueden (o no) tener cool/erar. En caso de que los tengan, ocurrirán los *cooling flows*.