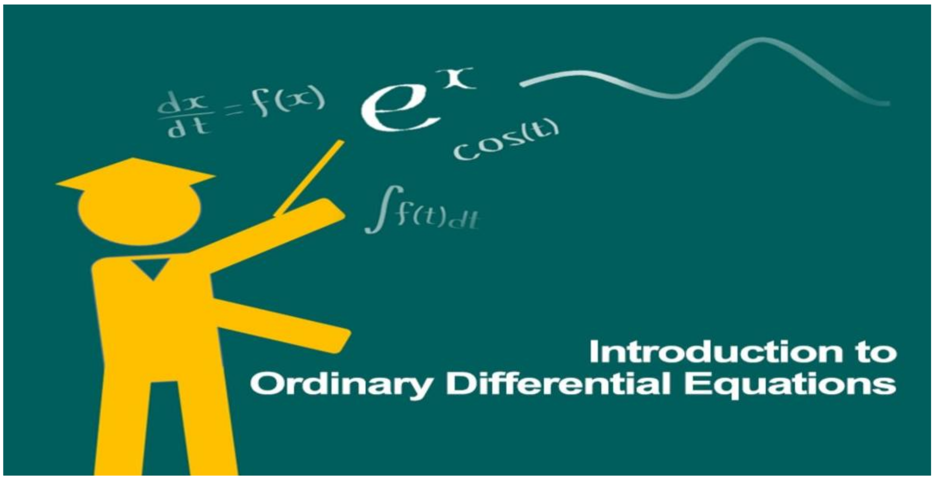
រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ

First-Order Ordinary Differential Equation



ឈាវ ផារុន

នាយកដ្ឋានគណិតវិទ្យា និង ស្ថិតិ

វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រ និង បច្ចេកវិទ្យា

រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

២០២០

មាតិកា

ទំព័រ

ជំពូក២
សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ

ជំពូក៣
ការអនុវត្តសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ

អារម្ភកថា

ដោយហេតុថា តម្រូវការរបស់មនុស្ស ពីមួយថ្ងៃទៅមួយថ្ងៃ កាន់តែកើនឡើងឥតឈប់ឈរនោះ មនុស្សតែងតែខិតខំប្រឹងប្រែងរិះរកគ្រប់វិធីទាំងអស់ ដើម្បីធ្វើយ៉ាងណាបំពេញអោយខានតែបាននូវ តម្រូវការទាំងអស់នោះ។ ជាក់ស្តែងមនុស្សបានបង្កើតឡើងនូវមធ្យោបាយ ឧបករណ៍ សម្ភារៈប្រើប្រាស់ផ្សេងៗជាច្រើនយ៉ាងទំនើបកម្ម សម្បូរបែប តាមលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។ ទាំងអស់នេះគឺវាកើតចេញមកពីការគិត ការពិចារណា ការគណនាយ៉ាងល្អិតល្អន់របស់មនុស្សពោលគឺការសិក្សាស្រាវជ្រាវនេះឯង។ កត្តាមួយក្នុងចំណោមកត្តាជាច្រើន ដែលធ្វើអោយវិទ្យាសាស្ត្រលើពិភពលោក មានការប្រែប្រួលរីកចំរើនឡើងយ៉ាងលឿនបែបនេះគឺគណិតវិទ្យា ព្រោះថា គណិតវិទ្យាជួយដោះស្រាយបញ្ហាជាច្រើន លើគ្រប់ផ្នែកទាំងអស់ដែលទាក់ទងនឹងការគណនាដូចជា ផ្នែកវិស្វករ ព័ត៌មានវិទ្យា សេដ្ឋកិច្ចឧស្សាហកម្ម និង គ្រប់គ្រង។ល។ យើងសង្កេតឃើញថា បញ្ហាជាច្រើនក្នុងរូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា និង បច្ចេកវិទ្យាជាច្រើន ជាប់ទាក់ទងយ៉ាងជិតស្និតនឹងការប្រើប្រាស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ។ ក្នុងករណីនីមួយៗ មានការកំណត់នូវខ្សែកោងកែងនឹងខ្សែកោងដែលអោយ ការកើនឡើង និង ការថយចុះ ការកើតមាននូវកាបូន ការលាយសារជាតិគីមី និង ការព្យាករណ៍ចំនួនប្រជាជនជាដើម។ ទាំងអស់នេះបង្ហាញអោយឃើញថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ ដើរតួយ៉ាងសំខាន់នៅក្នុងដំណោះស្រាយបញ្ហាទាំអស់នេះ។

ឆ្លងតាមបុព្វហេតុហេតុនៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវខាងលើ យើងឃើញយ៉ាងច្បាស់ នូវភាពចាំបាច់ នៃការប្រើប្រាស់ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ។ ហេតុនេះ ក្នុងនាមខ្ញុំជាអ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវម្នាក់ ក៏បានចូលរួមចំណែកក្នុងបញ្ហានេះផងដែរ ដោយបានលើកឡើងនូវប្រធានបទមួយ ដែលទាក់ទងនឹងសមីការឌីផរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ មកធ្វើការសិក្សាស្រាវជ្រាវ ក្នុងពេលនេះ។ តើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ មានដំណោះស្រាយយ៉ាង

ដូចម្ដេចសម្រាប់ប្រភេទនីមួយៗ? ហើយបញ្ហាទាំងឡាយ ដែលទាក់ទងនឹងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ ត្រូវបានដោះស្រាយ យ៉ាងដូចម្ដេចដែរ?

ជំពូក១
ទ្រឹស្តីដែលទាក់ទង

១.១. ដេរីវេ

១.១.១. និយមន័យ

$f(x)$ ជាអនុគមន៍មួយកំណត់នៅក្នុងចន្លោះបើក $]a,b[$ ហើយ $x_0 \in]a,b[$ ។ គេថា $f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ចំណុច x_0 ដែលគេសរសេរ $f'(x_0)$ គឺកំណត់ដោយ៖

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

គេអាចសរសេរដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ក្នុងទម្រង់៖

$$f'(x) = y'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

តាមនិយមន័យ ដើម្បីគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំណុច x_0 គេត្រូវ៖

1) បង្កើតផលចែកឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2) សម្រួលផលចែកដោយលប់ Δx បើអាច។

3) គណនាដេរីវេ $f'(x_0)$ ដោយអនុវត្តន៍លីមីតចំពោះផលចែក។ បើលីមីតមាននោះគេថា អនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ចំណុច x_0 ។

ឧទាហរណ៍

ដោយប្រើនិយមន័យ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=\frac{1}{x}$?

ចម្លើយ

តាមនិយមន័យដេរីវេគេបាន៖

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x)x}=-\frac{1}{x^2}$$

ដូចនេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=\frac{1}{x}$ គឺ៖

$$y'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

ឧទាហរណ៍

ដោយប្រើនិយមន័យ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=\sqrt{x}$?

ចម្លើយ

តាមនិយមន័យដេរីវេគេបាន៖

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}.$$

$$\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2=x+\Delta x-x=\Delta x.$$

$$\begin{aligned}y'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

ដូចនេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=\sqrt{x}$ គឺ៖

$$y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

១.១.២. លក្ខណៈគ្រឹះនៃដេរីវេ

អនុគមន៍ថេរ

បើ $f(x)=C$ ជាអនុគមន៍ថេរនោះគេបាន៖

$$f'(x)=C'=0.$$

ផលគុណអនុគមន៍ និង ចំនួនថេរ

បើ k ជាចំនួនថេរ ហើយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេនោះ $kf(x)$ ក៏ជាអនុគមន៍មានដេរីវេដែរ ហើយគេបាន៖

$$\left(kf(x)\right)'=kf'(x).$$

ផលបូកអនុគមន៍

បើ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេនោះផលបូកនៃអនុគមន៍ $f(x)+g(x)$ ក៏ជាអនុគមន៍មានដេរីវេដែរ ហើយគេបាន៖

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x).$$

ករណីទូទៅ

បើ n អនុគមន៍ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេនោះផលបូកនៃ n អនុគមន៍ $f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$ ក៏ជាអនុគមន៍មានដេរីវេដែរ ហើយគេបាន៖

$$\left[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)\right]' = f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_n'(x).$$

បន្សំលីនេអ៊ែ

បើ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ និង a និង b ជាចំនួនពិតនោះបន្សំលីនេអ៊ែ $h(x)=af(x)+bg(x)$ ក៏ជាអនុគមន៍មានដេរីវេដែរ ហើយគេបាន៖

$$h'(x)=af'(x)+bg'(x).$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=\dfrac{ax+b}{a+b}$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ?

ចម្លើយ

គេបាន៖

$$y'(x)=\left(\frac{ax+b}{a+b}\right)'=\frac{1}{a+b}\cdot(ax+b)'=\frac{a}{a+b}.$$

ដូចនេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=\dfrac{ax+b}{a+b}$ គឺ៖

$$y'(x)=\frac{a}{a+b}$$

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x+|x^2-8|$ គណនាដេរីវេនៃអុគមន៍ត្រង់ចំណុច $x=3$?

ចម្លើយ

ដោយ $3^2-8=1>0$ អនុគមន៍ត្រង់ចំណុច $x=3$ សមមូលទៅនឹង៖

$$f(x)=x+x^2-8.$$

គេបាន៖

$$f'(x)=(x+x^2-8)'=x'+(x^2)'-8'=1+2x+0=2x+1.$$

ត្រង់ចំណុច $x=3$ នាំឱ្យ៖

$$f'(3)=2\cdot3+1=7.$$

ដូចនេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=x+|x^2-8|$ ត្រង់ចំណុច $x=3$ គឺ៖

$$f'(3)=7$$

ផលគុណ និង ផលចែកនៃអនុគមន៍

ផលគុណនៃអនុគមន៍

បើ $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ នោះផលគុណ $u(x)v(x)$ ក៏ជាអនុគមន៍មានដេរីវេដែរ ហើយគេបាន៖

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

ផលចែកនៃអនុគមន៍

បើ $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ ដែល $v(x) \neq 0$ នោះផលចែក $\frac{u(x)}{v(x)}$ ក៏ជាអនុគមន៍មានដេរីវេដែរ ហើយគេបាន៖

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x) = x^{-n}$?

ចម្លើយ

យើងអាចសរសេរអនុគមន៍ជាទម្រង់ $y(x) = \frac{1}{x^n}$ គេបាន៖

$$y'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot \left(x^n\right)'}{\left(x^n\right)^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{2n-n+1}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

ដូចនេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x) = \frac{1}{x^n}$ គឺ៖

$$y'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=\sin^2 x$?

ចម្លើយ

យើងអាចសរសេរអនុគមន៍ជាទម្រង់ $y(x)=\sin x\sin x$ គេបាន៖

$$y'(x)=(\sin x\sin x)'=(\sin x)'\sin x+\sin x(\sin x)'.$$

$$(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x$$

$$y'(x)=\cos x\sin x+\sin x\cos x=2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

ដូចនេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=\sin^2 x$ គឺ៖

$$y'(x)=\sin 2x$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃផលគុណបីអនុគមន៍ $f(x)=u(x)v(x)w(x)$?

ចម្លើយ

អនុវត្តន៍តាមផលគុណពីរអនុគមន៍គេបាន៖

$$f'(x)=(u(x)v(x)w(x))'=[u(x)v(x)]'w(x)+[u(x)v(x)]w(x)'.$$

$$[u(x)v(x)]'=u'v+uv'$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$f'(x)=(uvw)'=(u'v+uv')w+uvw'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

១.១.៣. ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

បើ $f(x)$ និង $v(g)$ ជាអនុគមន៍ពីរមានឌីផេរ៉ង់ស្យែល នោះគេបាន អនុគមន៍បណ្ដាក់៖

$$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(u),$$
មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែរ ហើយគេបាន៖
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(f\circ g)(x)=\frac{d}{dx}f(g(x))g'(x)=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=3^{\cos x}$?

ចម្លើយ

យើងមាន៖
$$\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$$
ដោយប្រើដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់គេបាន៖
$$y'(x)=\left(3^{\cos x}\right)'=3^{\cos x}\cdot(\cos x)'=-\sin x\cdot 3^{\cos x}.$$
ដូចនេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=3^{\cos x}$ គឺ៖
$$y'(x)=-\sin x3^{\cos x}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$?

ចម្លើយ

ដោយប្រើដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ និង ផលចែកគេបាន៖

$$f'(x)=\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]'=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'$$

$$=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{x^2-1}$$

ដូចនេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ គឺ៖

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2-1}$$

១.១.៤. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

1) $(\sin x)'=\cos x,\ -\infty<x<\infty$

2) $(\cos x)'=-\sin x,\ -\infty<x<\infty$

3) $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

4) $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$

5) $(\sec x)'=\tan x\sec x$

6) $(\csc x)'=-\cot x\csc x$

7) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$

8) $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$

9) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\ -\infty<x<\infty$

10) $(\operatorname{arccot} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$

11) $(\operatorname{arcsec} x)' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

12) $(\operatorname{arccsc} x)' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x) = \sin^2\sqrt{x}$?

ចម្លើយ

ដោយប្រើដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់គេបាន៖

$$y'(x) = \left(\sin^2\sqrt{x}\right)' = 2\sin\sqrt{x}\cdot\left(\sin\sqrt{x}\right)' = 2\sin\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'.$$

$$\sin 2\sqrt{x} = 2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}.$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$y'(x) = \sin 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$?

ចម្លើយ

ដោយប្រើរូបមន្តផលបូក និង ស្វ័យគុណគេបាន៖

$$y'(x) = (\sin^3 x + \cos^3 x)' = (\sin^3 x)' + (\cos^3 x)'$$
$$= 3\sin^2 x \cos x - 3\cos^2 x \sin x$$
$$= 3\sin x \cos x(\sin x - \cos x)$$
$$= \frac{3}{2}\sin 2x(\sin x - \cos x)$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$y'(x) = \frac{3}{2}\sin 2x(\sin x - \cos x)$$

១.១.៥. ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង លោការីត

- បើ a ជាចំនួនពិតមួយដែល $a > 0, a \neq 1$ នោះគេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y = a^x$ ដែល a ជាគោលកំណត់ដោយ៖

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

បើ $a = e,\ e = 2.718281828\ldots$ គេបាន៖

$$(e^x)' = e^x.$$

- ដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីត $y = \log_a x$ កំណត់ដោយ៖

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

បើ $a = e,\ e = 2.718281828\ldots$ គេបាន៖

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x) = \pi^{\frac{1}{x}}$?

ចម្លើយ

ដោយប្រើរូបមន្តបណ្ដាក់គេបាន៖

$$y'(x)=\left(\pi^{\frac{1}{x}}\right)'=\pi^{\frac{1}{x}}.\ln\pi\left(\frac{1}{x}\right)'=\pi^{\frac{1}{x}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln\pi=-\frac{\pi^{\frac{1}{x}}.\ln\pi}{x^2}$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$y'(x)=-\frac{\pi^{\frac{1}{x}}.\ln\pi}{x^2}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$?

ចម្លើយ

តាមរូបមន្តបណ្ដាក់គេបាន៖

$$y'(x)=\left(\ln\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\left(\tan\frac{x}{2}\right)'.$$

$$y'(x)=\cot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}.$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$y'(x)=\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x.$$

១.១.៦. ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក

គេមានអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីក៖

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍នេះគឺ៖

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលីកផ្សេងទៀត៖

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x,$$

$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x,$$

$$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x,$$

$$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x, \ x \neq 0,$$

ឧទាហរណ៍

ចូរបង្ហាញសមភាពកត់សម្គាល់ខាងក្រោម៖

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

ចម្លើយ

ដោយធ្វើដេរីវេអង្គទាំងពីរនៃសមភាពគេបាន៖

$$\left[\operatorname{arsinh} x\right]' = \left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]',$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយៈ

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

ដេរីវេលោការីត

គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$។ ដោយបំពាក់លោការីតនេពែរលើអង្គទាំងពីរគេបានៈ

$$\ln y = \ln f(x).$$

$$(\ln y)' = (\ln f(x))',$$

$$\frac{1}{y}y'(x) = (\ln f(x))'.$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយៈ

$$y' = y(\ln f(x))'.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=x^{\ln x}$?

ចម្លើយ

ដោយប្រើដេរីវេលោការីតគេបាន៖

$$\ln y=\ln\left(x^{\ln x}\right),$$

$$\ln y=\ln x\ln x=\ln^2 x,$$

$$(\ln y)'=\left(\ln^2 x\right)',$$

$$\frac{y'}{y}=2\ln x(\ln x)',$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2\ln x}{x},$$

$$y'=\frac{2y\ln x}{x},$$

$$y'=\frac{2x^{\ln x}\ln x}{x}=2x^{\ln x-1}\ln x.$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$y'=2x^{\ln x-1}\ln x$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y(x)=(\sin x)^{\cos x}$?

ចម្លើយ

ដោយប្រើដេរីវេលោការីតគេបាន៖

$$\ln y = \ln\left(\sin x^{\cos x}\right),$$

$$\ln y = \cos x \ln \sin x,$$

$$(\ln y)' = (\cos x \ln \sin x)',$$

$$\frac{y'}{y} = (\cos x)' \ln \sin x + \cos x (\ln \sin x)',$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x,$$

$$y' = y(\cot x \cos x - \sin x \ln \sin x),$$

$$y' = (\sin x)^{\cos x}(\cot x \cos x - \sin x \ln \sin x).$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$y'(x) = (\sin x)^{\cos x}\left(\cot x \cos x - \sin x . \ln(\sin x)\right)$$

១.១.៧. ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីមព្លីស៊ីត

ដើម្បីគណនាដេរីវេ $y'(x)$ នៃអនុគមន៍អ៊ីមព្លីស៊ីត $f(x,y) = C$ គេត្រូវ

- ដេរីវេអង្គទាំងពីរនៃសមីការធៀបនឹងអថេរ x
- ដោះស្រាយសមីការដែលបានសម្រាប់ $y'(x)$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = \cos(x+y)$?

ចម្លើយ

ដេរីវេអង្គទាំងពីរធៀបនឹងអថេរ x គេបាន៖

$$y' = -\sin(x+y)\cdot(1+y'),$$
$$y' = -\sin(x+y) - y'\sin(x+y),$$
$$y'(1+\sin(x+y)) = -\sin(x+y),$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$y' = -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ៖

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$$

ចម្លើយ

ដេរីវេអង្គទាំងពីរធៀបនឹងអថេរ x គេបាន៖

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 2xy + 2y^2\right) = \frac{d}{dx}(1)$$
$$2x + 2(y + xy') + 4yy' = 0,$$
$$x + y + xy' + 2yy' = 0.$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$y' = -\frac{x+y}{x+2y}$$

១.១.៨. ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

- បើ $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេតាងដោយ $f'(x)$ នោះដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f'(x)$ ហៅថា ដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ៖

$$f'' = (f')' = \left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

- ដូចគ្នាដែរបើ f'' មានដេរីវេ នោះគេអាចកំណត់ដេរីវេទី៣នៃ f ដោយ៖

$$f''' = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''.$$

- ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់នៃ f (បើមាន) កំណត់ដោយ៖

$$f^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)} = \left(f^{(3)}\right)',$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)},$$

$$(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)},\ C = const,$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)} \quad \text{(Leibnitz's formula)}$$

លក្ខណៈនៃដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ករណីពិសេស

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y(x)=\frac{1}{x}$?

ចម្លើយ

យើងបាន៖

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

$$y'' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -1\cdot\left(x^{-2}\right)' = -1\cdot(-2)\cdot x^{-3} = \frac{(-1)^2 2}{x^3},$$

$$y''' = \left(\frac{(-1)^2 2}{x^3}\right)' = (-1)^2\cdot 2\cdot\left(x^{-3}\right)' = (-1)^3\cdot 2\cdot 3\cdot x^{-4} = \frac{(-1)^3 2\cdot 3}{x^4},$$

$$y^{IV} = \left(\frac{(-1)^3 2\cdot 3}{x^4}\right)' = (-1)^3 2\cdot 3\cdot\left(x^{-4}\right)' = (-1)^4 (4!)\, x^{-5} = \frac{(-1)^4 (4!)}{x^5}.$$

ដូចនេះ តាមលំនាំគំរូខាងលើគេបានដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ y គឺ៖

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n (n!)}{x^{n+1}}.$$

ឧទាហរណ៍

គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y(x)=e^x x^2$?

ចម្លើយ

តាង $u = e^x$ និង $v = x^2$ យើងបាន៖

$$u' = \left(e^x\right)' = e^x, \quad v' = \left(x^2\right)' = 2x,$$
$$u'' = \left(e^x\right)' = e^x, \quad v'' = \left(2x\right)' = 2.$$
ករណីទូទៅគឺ៖
$$u^{(n)} = e^x, \quad v''' = v^{IV} = \ldots = v^{(n)} = 0.$$
ដោយប្រើរូបមន្តលេបនីត (Leibnitz's formula) គេបាន៖
$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)},$$
$$y^{(n)} = e^x x^2 + ne^x \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}e^x \cdot 2, \quad \text{or}$$
$$y^{(n)} = e^x\left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right).$$
ដូចនេះ គេបានដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ y គឺ៖
$$y^{(n)} = e^x\left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right)$$

១.២. សញ្ញាណនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ

១.២.១. និយមន័យ

S ជាផ្នែកមួយនៃ $\mathbb{R}^n$ ដែល $\mathbb{R}$ ជាសំណុំនៃចំនួនពិត។ អនុគមន៍ f ពី S ទៅ $\mathbb{R}$ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពី S ទៅ $\mathbb{R}$ ដែលចំពោះគ្រប់ធាតុ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S$ គេអាចកំណត់ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ នៃ $\mathbb{R}$ តែមួយយ៉ាងច្រើន។ គេកំណត់សរសេរ៖

$$f: \quad S \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ឧទាហរណ៍

ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ច្រើនអថេរ៖

1) $f(x, y) = x^4 y + x - y$

2) $f(x,y)=\dfrac{x^4y+x-y}{x^2+y^2-4}$

3) $f(x,y,z)=\log_2\left(x^2+y^2+z^2-15\right)$

4) $f(x,y)=xe^{-y}$

១.២.២. ដែនកំណត់

ដែនកំណត់ $\mathscr{D}$ នៃអនុគមន៍ f មួយជាសំណុំនៃធាតុសំណុំដើម $x=\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n\right)\in S$ ដែល $f\left(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n\right)$ មានន័យ។ គេកំណត់សរសេរ៖

$$\mathscr{D}_f=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S\,/\,f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\text{មានន័យ}\}$$

ឧទាហរណ៍

ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1) $f(x,y)=x^4y+x-y$

2) $f(x,y)=\dfrac{x^4y+x-y}{x^2+y^2-4}$

3) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$

១.២.៣. ដេរីវេដោយផ្នែក និង ឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប

១.២.៣.១. និយមន័យដេរីវេដោយផ្នែក(Definition of Partial Derivative)

$f\left(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n\right)$ ជាអនុគមន៍មាន n អថេរ។ ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ f ធៀបនឹង x_i កំណត់ដោយ៖

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=f_{x_i}^{'}\left(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n\right)$$

$$=\lim_{h_i\to 0}\frac{f\left(x_1,...,x_{i-1},x_i+h_i,x_{i+1},...,x_n\right)-f\left(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n\right)}{h_i}$$

ឧទាហរណ៍

ចូរគណនាដេរីវេដោយផ្នែក ធៀបនឹងអថេរនីមួយៗ នៃអនុគមន៍ដែលគេអោយខាងក្រោម៖

1) $f(x,y)=x^4y+x-y$

2) $f(x,y,z)=\log_2\left(x^2+y^2+z^2-15\right)$

3) $f(x,y)=xe^{-y}$

១.២.៣.២. ឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប(Total Differential)

$Z=f\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n\right)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេដោយផ្នែកត្រង់ x_i ចំពោះគ្រប់ $i=\{1,2,\ldots,n\}$ ។ គេហៅ $dZ=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Z}{\partial x_i}dx_i$ ថាជា **ឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប** នៃអនុគមន៍ f ។

ឧទាហរណ៍

ចូររកឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៍ដែលគេអោយខាងក្រោមនេះ៖

1) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$

2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4x_3+x_2-x_3x_1^3$

3) $f(x,y)=x^2+2y^4$

១.២.៣.៣. ដេរីវេដោយផ្នែកលំដាប់ខ្ពស់(Higher Partial Derivatives)

គេហៅ $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$, $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, . . . ថាជា **ដេរីវេដោយផ្នែកលំដាប់ខ្ពស់** នៃអនុគមន៍ f ។

ករណីពិសេស

គេតាងដេរីវេដោយផ្នែកលំដាប់ពីរនៃអនុគមន៍ $Z=f(x,y)$ ដូចខាងក្រោម៖

- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)$

- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)$
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$

ឧទាហរណ៍

ចូរគណនា $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x_1\partial x_2^2\partial x_3}$ នៃអនុគមន៍បីអថេរពិតខាងក្រោម៖

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4x_3+x_2+x_1x_2x_3$$

១.៣. អាំងតេក្រាល

១.៣.១. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

១.៣.១.១. និយមន័យ

$F(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើសំណុំ I និង $f(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់ក្នុងសំណុំ I ។ គេថា $F(x)$ ជា **ព្រីមីទីវ** មួយនៃ $f(x)$ ក្នុងសំណុំ I កាលណា៖

$$F'(x)=f(x),\forall x\in I$$

១.៣.១.២. ទ្រឹស្តីបទ

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះ $G(x)=F(x)+c$ (ដែល c ជាចំនួនថេរ) ក៏ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ដែរ។

១.៣.១.៣. និយមន័យ

សំណុំនៃព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $f(x)$ ហៅថា **អាំងតេក្រាលមិនកំណត់** នៃអនុគមន៍ $f(x)$ តាងដោយ $\int f(x)dx$។ បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះ $\int f(x)dx=F(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ។

ឧទាហរណ៍

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $\int(3x^2-x+4)dx$?

ចម្លើយ

គេបាន៖

$$\int(3x^2-x+4)dx=x^3-\frac{1}{2}x^2+4x+c$$

១.៣.១.៤. លក្ខណៈ

1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx,$ ដែល k ជាចំនួនថេរ

2) $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

3) $\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+c,$ ដែល $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

4) $\int udv=uv-\int vdu$ (រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

5) បើតាង $x=g(t)$ នោះ $\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$ (រូបមន្តប្តូរអថេរ)

១.៣.១.៥. រូបមន្តគ្រឹះខ្លះៗ

1) $\int adx=ax+C$

2) $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$

3) $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

4) $\int b^xdx=\frac{b^x}{\ln b}+C$

5) $\int\cos xdx=\sin x+C$

6) $\int\cot xdx=\ln|\sin x|+C$

7) $\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

8) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

9) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

10) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

11) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

13) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arcsec}|x| + C$

14) $\int \cosh x dx = \sinh x + C$

15) $\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + C$

16) $\int \operatorname{csch} x \coth x dx = -\operatorname{csch} x + C$

17) $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

18) $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$

19) $\int e^x dx = e^x + C$

20) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

21) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

22) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

23) $\int \sec x dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

24) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

25) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

26) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

27) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

28) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

29) $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

30) $\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$

31) $\int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + C$

32) $\int \tanh x\, dx = \ln \cosh x + C$

ឧទាហរណ៍

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$$

ចម្លើយ

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\frac{3dx}{\sqrt[3]{x}} + \int\frac{2dx}{\sqrt{x}} = 3\int x^{-\frac{1}{3}}dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 3\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{9x^{\frac{2}{3}}}{2} + 4x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} + 4\sqrt{x} + C.$$

យើងបាន៖

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2}+4\sqrt{x}+C$$

ឧទាហរណ៍

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$$

ចម្លើយ

យើងតាង៖

$u=1+\cos^2 x,$

$du=\left(1+\cos^2 x\right)' dx=2\cos x\cdot\left(-\sin x\right)dx=-\sin 2xdx$

យើងបាន៖

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=\int\frac{-du}{\sqrt{u}}=-2\int\frac{du}{2\sqrt{u}}=-2\sqrt{u}+C=-2\sqrt{1+\cos^2 x}+C.$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=-2\sqrt{1+\cos^2 x}+C$$

ឧទាហរណ៍

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\int x\sin\left(3x-2\right)dx$$

ចម្លើយ

យើងតាង៖

$$u = x \Leftrightarrow du = dx$$

$$dv = \sin(3x-2)dx \Leftrightarrow v = -\frac{1}{3}\cos(3x-2)$$

ប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int udv = uv - \int vdu$ គេបាន៖

$$\begin{aligned}\int x\sin(3x-2)\,dx &= -\frac{x}{3}\cos(3x-2) - \int\left(-\frac{1}{3}\cos(3x-2)\right)dx \\ &= -\frac{x}{3}\cos(3x-2) + \frac{1}{3}\int\cos(3x-2)dx \\ &= -\frac{x}{3}\cos(3x-2) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin(3x-2) + C \\ &= \frac{1}{9}\sin(3x-2) - \frac{x}{3}\cos(3x-2) + C.\end{aligned}$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$\int x\sin(3x-2)dx = \frac{1}{9}\sin(3x-2) - \frac{x}{3}\cos(3x-2) + C$$

១.៣.២. អាំងតេក្រាលកំណត់

១.៣.២.១. និយមន័យ

យក $f(x)$ ជាអនុគមន៍មានអាំងតេក្រាលក្នុងចន្លោះបិទ $[a;b]$។ គេហៅ $\int_a^b f(x)dx$ ថាជា **អាំងតេក្រាលកំណត់** នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ក្នុងចន្លោះបិទ $[a;b]$ ហើយកំណត់ដោយ៖

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \quad (\text{បើលីមីតនេះមាន})$$

ដែល៖

- $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ និង $x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$

១.៣.២.២. ទ្រឹស្តីបទ Newton-Leibniz

បើ $f(x)$ ជាប់ក្នុងចន្លោះ $[a;b]$ ហើយ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះគេបាន៖

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

១.៣.២.៣. លក្ខណៈ

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

5) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

6) $\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$ (រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

7) បើ $f(x) \geq 0$ ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ នោះគេបាន $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

ឧទាហរណ៍

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\int_0^1 \frac{x}{(3x^2-1)^4} dx$$

ចម្លើយ

ដោយប្រើវិធីជំនួសយើងបាន៖

$$t = 3x^2 - 1, \quad \Rightarrow \quad dt = 6xdx, \quad xdx = dt/6.$$

នាំឱ្យ៖

$$\int_0^1 \frac{x}{\left(3x^2-1\right)^4}dx = \int_{-1}^{2} \frac{dt/6}{t^4} = \frac{1}{6}\int_{-1}^{2} t^{-4}dt = \frac{1}{6}\left(\frac{t^{-3}}{-3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = -\frac{1}{18}\left(\frac{1}{8}-1\right) = \frac{7}{144}.$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយ៖

$$\int_0^1 \frac{x}{\left(3x^2-1\right)^4}dx = \frac{7}{144}$$

ជំពូក២
សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ

២.១. ទម្រង់ទូទៅ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយជាសមីការដែលមានទម្រង់៖

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ ឬ } \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ឧទាហរណ៍

សមីការខាងក្រោមជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ៖

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2,\ \frac{dy}{dx} = e^{-0.01xy^2},\ \frac{dy}{dx} = 0.2x^2 + y$$

២.២. សមីការញែកអថេរ(Separable Variables)

២.២.១. និយមន័យ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញដែលមានទម្រង់៖

- $\dfrac{dy}{dx} = g(x)$ ឬ $\dfrac{dy}{dx} = h(y)$ (1)
- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ ឬ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{h(y)}{g(x)}$ (2)

ហៅថា **សមីការញែកអថេរ**។

២.២.២. ចម្លើយតាមអាំងតេក្រាល(Solution by Integrating)

1) បើ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលគេឱ្យ ហើយជាប់ នោះសមីការលំដាប់មួយទម្រង់៖

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad (1)$$

អាចត្រូវបានដោះស្រាយដោយប្រើអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$y=\int g(x)dx+c$$

2) សមីការ $\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)}$ (2) អាចត្រូវបានដោះស្រាយដូចខាងក្រោម៖

បើ $y=f(x)\Leftrightarrow dy=f'(x)dx$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (2) នោះយើងបាន៖

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)}\Leftrightarrow h(y)dy=g(x)dx$$

$$h(f(x))f'(x)dx=g(x)dx$$

$$\int h(f(x))f'(x)dx=\int g(x)dx+c \quad (3)$$

តែ $y=f(x)$ និង $dy=f'(x)dx$ នោះសមីការ (3) សមមូលនឹង៖

$$\int h(y)dy=\int g(x)dx+c \quad (4)$$

សមីការ (4) ជាវិធីសាស្ត្រនៃការដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលញែកអថេរ។

សម្គាល់

យើងមិនចាំបាច់ប្រើចំនួនថេរពីរទេ នៅក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាល នៃសមីការញែកអថេរព្រោះ៖

$$\int h(y)dy+c_1=\int g(x)dx+c_2$$

$$\int h(y)dy=\int g(x)dx+c_2-c_1$$

$$=\int g(x)dx+c \quad (c=c_2-c_1)$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

$$\frac{dy}{dx}=1+e^{2x}$$

ចម្លើយ

យើងបាន៖

$$\frac{dy}{dx}=1+e^{2x}\Leftrightarrow dy=\left(1+e^{2x}\right)dx$$
$$\Leftrightarrow\int dy=\int\left(1+e^{2x}\right)dx+c$$
$$\Leftrightarrow y=x+\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយនៃសមីការគឺ៖

$$y=x+\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

$$\frac{dy}{dx}=\sin x$$

ចម្លើយ

យើងបាន៖

$$\frac{dy}{dx}=\sin x\Leftrightarrow dy=\sin xdx$$
$$\Leftrightarrow\int dy=\int\sin xdx+c$$
$$\Leftrightarrow y=-\cos x+c$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយនៃសមីការគឺ៖

$$y=-\cos x+c$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$(1+x)dy-ydx=0$$

ចម្លើយ

យើងបាន $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{1+x}$ សមមូលនឹង៖

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{1+x}+c_1$$

$$\ln|y| = \ln|1+x| + c_1$$

$$y = e^{\ln|1+x|+c_1}$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយនៃសមីការគឺ៖

$$y = (1+x)c, c = e^{c_1}$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$xy^4 dx + \left(y^2+2\right)e^{-3x} dy = 0$$

ចម្លើយ

គេបាន៖

$$xe^{3x} dx + \left(y^{-2}+2y^{-4}\right) dy = 0$$

គណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកយើងបាន៖

$$\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} - y^{-1} - \frac{2}{3}y^{-3} = c_1$$

$$e^{3x}(3x-1) = \frac{9}{y} + \frac{6}{y^3} + c, c = 9c_1$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយនៃសមីការគឺ៖

$$e^{3x}(3x-1) = \frac{9}{y} + \frac{6}{y^3} + c$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, y(4) = 3$$

ចម្លើយ

គេបាន៖

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow ydy + xdx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int ydy + \int xdx = c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c$$

$$\Leftrightarrow y^2 + x^2 = k,\ \ k = 2c$$

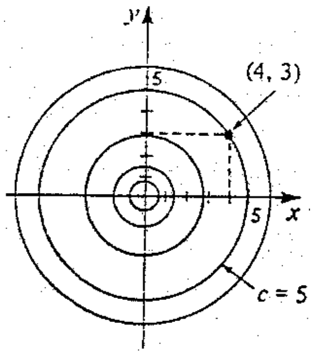
តែ $y(4) = 3$ គេបាន៖

$$3^2 + 4^2 = k$$

$$k = 25$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយនៃសមីការគឺ៖

$$x^2 + y^2 = 25$$



ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4,\ \ y(0) = -2$$

ចម្លើយ

គេបាន៖

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2 - 4} = dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2-4} = \int dx + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = x + c$$

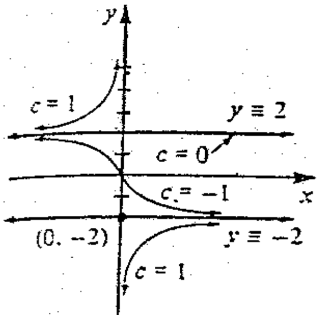
$$\Leftrightarrow \frac{y-2}{y+2} = ke^{4x},\ \ k = e^{4c}$$

ដោះស្រាយសមីការនេះសម្រាប់ y គេបាន៖

$$y = 2\left(\frac{1+ke^{4x}}{1-ke^{4x}}\right)$$

ចម្លើយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នូវលក្ខខណ្ឌខាងលើគឺ៖

$$y = -2$$



ប្រតបត្ត

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

1) $x\sin x e^{-y}dx - ydy = 0$

(**ចម្លើយ** $-x\cos x + \sin x = e^{y}(y-1) + c$)

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{x-3}, y(1) = 2$

(**ចម្លើយ** $y = x + 1 + \ln\frac{2}{|x-3|}$)

3) $2x(y+1)dx - ydy = 0, y(0) = -2$

(**ចម្លើយ** $x^2 = y - \ln|1+y| + 2$)

សម្គាល់

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានរាង៖

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c), a, b \neq 0$$

គេត្រូវតាង $u = ax+by+c$ ដើម្បីរកចម្លើយតាមសមីការញែកអថេរគេបាន៖

$$u = ax+by+c \Leftrightarrow du = adx+bdy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right)$$

$$\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) = f(u)$$

$$\frac{1}{b}\frac{du}{dx} = f(u) + \frac{a}{b}$$

$$\frac{du}{bf(u)+a} = dx$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y+1}$$

ចម្លើយ

តាង $u = x+y+1$ សមីការខាងលើទៅជា៖

$$\frac{udu}{1+u} = dx$$

$$\int \frac{udu}{1+u} = \int dx + c_1$$

$$u - \ln|1+u| = x + c_1$$

$$x+y+2 = ce^{y}, c = e^{1-c_1}$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយនៃសមីការគឺ៖

$$x+y+2 = ce^{y}$$

ប្រតបត្ត

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1) $\dfrac{dy}{dx}=(x+y+1)^2$

(**ចម្លើយ** $y=-x-1+\tan(x+c)$)

2) $\dfrac{dy}{dx}=\tan^2(x+y)$

(**ចម្លើយ** $2y-2x+\sin 2(x+y)=c$)

3) $\dfrac{dy}{dx}=2+\sqrt{y-2x+3}$

(**ចម្លើយ** $4(y-2x+3)=(x+c)^2$)

២.៣. សមីការប្រាកដ និង សមីការមិនប្រាកដ(Exact and Non exact Equations)

២.៣.១. សមីការប្រាកដ

២.៣.១.១. និយមន័យ

- កន្សោមឌីផេរ៉ង់ស្យែល $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលប្រាកដក្នុងតំបន់ R នៃប្លង់ (xy) បើវាអាស្រ័យនឹងឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៍ $f(x,y)$ ណាមួយ។
- សមីការ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ហៅថា **សមីការប្រាកដ** បើកន្សោមនៅអង្គខាងឆ្វេងមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលប្រាកដ។

ឧទាហរណ៍

សមីការ $x^2y^3dx+x^3y^2dy=0$ ជាសមីការប្រាកដព្រោះ៖

$$d\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right)=x^2y^3dx+x^3y^2dy$$

២.៣.១.២. ទ្រឹស្តីបទ

គេឱ្យ $M(x,y)$ និង $N(x,y)$ ជាប់ និង មានដេរីវេទី១ជាប់នៅក្នុងតំបន់ R នៃប្លង់ (xy)។ គេបាន **លក្ខខណ្ឌចាំបាច់** និង **គ្រប់គ្រាន់** ដែល $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលប្រាកដគឺ៖

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

លក្ខខណ្ឌចាំបាច់(The necessity)

សន្មតថា $M(x,y)$ និង $N(x,y)$ មានដេរីវេដោយផ្នែកទី១ជាប់គ្រប់ (x,y) បើ $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលប្រាកដ នោះមានអនុគមន៍ $f(x,y)$ ដែល៖

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

នាំឱ្យគេបាន៖

$$M(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x},N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}$$

ដូចនេះ គេបាន៖

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់(The sufficiency)

លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់នៃទ្រឹស្តីបទបង្ហាញថា មានអនុគមន៍ $f(x,y)$ ដែល៖

$$M(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x},N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}$$

ផ្ទៀតផ្ទាត់៖

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

ការបង្កើតអនុគមន៍ $f(x,y)$ ជាវិធីសាស្រ្តសំខាន់សម្រាប់ដោះស្រាយសមីការប្រាកដ។

២.៣.១.៣. វិធីដោះស្រាយ(Method of Solution)

ដំណោះស្រាយសមីការ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ គេអនុវត្តដូចខាងក្រោម៖

1) យើងបង្ហាញថា $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$

2) សន្មតថា $M(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ គេទាញបាន៖

$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$ (*) ($g(y)$ ជាថេរនៃអាំងតេក្រាល)

3) ធ្វើឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើសមីការ (*) ធៀបនឹង y គេបាន៖

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+g'(y)=N(x,y)$$

$$g'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \quad (**)$$

4) ធ្វើអាំងតេក្រាលនៃសមីការ (**) ធៀបនឹង y ហើយជំនួសចម្លើយក្នុងសមីការ (*) នោះយើងបានចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ $f(x,y)=c$ គឺ៖

$$\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy=c$$

សម្គាល់

ម្យ៉ាងទៀតយើងអាចចាប់ផ្តើមដោយសន្មតថា $\dfrac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ ហើយគេបាន៖

$$f(x,y)=\int N(x,y)dy+h(x) \text{ និង } h'(x)=M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$2xydx+\left(x^2-1\right)dy=0$$

ចម្លើយ

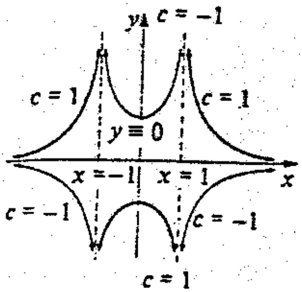
យើងឃើញថា $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=2x$ តាមទ្រឹស្តីបទ មានអនុគមន៍ $f(x,y)$ ដែល៖

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy,\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-1\Leftrightarrow f(x,y)=x^2y+g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+g'(y)=x^2-1\Leftrightarrow g'(y)=-1,g(y)=-y$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺគ្រួសារខ្សែកោង៖

$$x^2y-y=c$$



សម្គាល់

ចម្លើយនៃសមីការគឺមិនមែនជាអនុគមន៍ $f(x,y)=x^2y-y$ នោះទេ។ ចម្លើយគឺ $f(x,y)=c$ ឬ $f(x,y)=0$ បើចំនួនថេរត្រូវបានគេប្រើក្នុងអាំងតេក្រាលនៃ $g'(y)$ ។

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\left(e^{2y}-y\cos xy\right)dx+\left(2xe^{2y}-x\cos xy+2y\right)dy=0$$

ចម្លើយ

យើងឃើញថា $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2e^{2y}-\cos xy+xy\sin xy$ តាមទ្រឹស្តីបទ មានអនុគមន៍ $f(x,y)$ ដែល៖

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{2y}-y\cos xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2xe^{2y}-x\cos xy+2y$$

គេបាន៖

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{2y}-y\cos xy\Leftrightarrow f\left(x,y\right)=\int\left(e^{2y}-y\cos xy\right)dx$$

$$=xe^{2y}-\sin xy+g\left(y\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2xe^{2y}-x\cos xy+g'(y)=2xe^{2y}-x\cos xy+2y$$

$$g'(y)=2y\Leftrightarrow g\left(y\right)=y^2$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺគ្រួសារខ្សែកោង៖

$$xe^{2y}-\sin xy+y^2=c$$

ប្រតបត្ត

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

1) $\left(\cos x\sin x-xy^2\right)dx+y\left(1-x^2\right)dy=0,\ \ y(0)=2$

(**ចម្លើយ** $y^2\left(1-x^2\right)-\cos^2 x=3$)

2) $y(y-1)dx+x(2y-1)dy=0$

(**ចម្លើយ** $x\left(y^2-y\right)=c$)

3) $\left(2x^3-xy^2-2y+3\right)dx-\left(x^2y+2x\right)dy=0$

(**ចម្លើយ** $x^4-x^2y^2-4xy+6x=c$)

4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy^2-\cos x\sin x}{y\left(1-x^2\right)}$, $y(0)=2$

(**ចម្លើយ** $y^2\left(1-x^2\right)-\cos^2 x=3$)

២.៣.២. សមីការមិនប្រាកដ(Non exact Equations)

២.៣.២.១. និយមន័យ

- យើងដឹងហើយថា សមីការមានទម្រង់ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ជា **សមីការប្រាកដ** ប្រសិនបើ $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ។
- ក្នុងករណីដែល $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$ គេហៅសមីការខាងលើថាជា **សមីការមិនប្រាកដ**។

២.៣.២.២. វិធីកត្តាអាំងតេក្រាល(Integrating Factor Technique)

ឧបមាថា សមីការ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ជាសមីការមិនប្រាកដ គឺ $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ក្នុងករណីនេះយើងរកអនុគមន៍ $\mu(x,y)$ មួយដែល៖

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

ជា **សមីការប្រាកដ**។

អនុគមន៍ $\mu(x,y)$ បើមានហៅថា **កត្តាអាំងតេក្រាល** (Integrating Factor)។ អនុគមន៍ $\mu(x,y)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោម៖

$$\frac{\partial M}{\partial y}\mu+\frac{\partial \mu}{\partial y}M=\frac{\partial N}{\partial x}\mu+\frac{\partial \mu}{\partial x}N$$

សមីការនេះមិនមែនជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញ (Ordinary Differential Equation) ទេដោយហេតុថា វាទាក់ទងនឹងអថេរមិនអាស្រ័យច្រើនជាងមួយ។ សមីការនេះហៅថា **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដោយផ្នែក** (Partial Differential Equation)។ យើងសិក្សាពីរករណីដូចខាងក្រោម៖

ករណីទី១

មានកត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(x)$ ដែលជាអនុគមន៍នៃ x តែមួយនោះ គេបាន៖

$$\frac{\partial M}{\partial y}\mu+\frac{\partial \mu}{\partial y}M=\frac{\partial N}{\partial x}\mu+\frac{\partial \mu}{\partial x}N$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{d\mu}{\mu}$$

មានន័យថា $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ ជាអនុគមន៍នៃ x តែមួយគត់។ ក្នុងករណីនេះអនុគមន៍ $\mu(x)$ ត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$\mu(x)=e^{\int\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)dx}$$

ករណីទី២

មានកត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(y)$ ដែលជាអនុគមន៍នៃ y តែមួយគេបាន៖

$$\frac{\partial M}{\partial y}\mu+\frac{\partial \mu}{\partial y}M=\frac{\partial N}{\partial x}\mu+\frac{\partial \mu}{\partial x}N$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{d\mu}{\mu}$$

មានន័យថា $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ជាអនុគមន៍នៃ y តែមួយគត់។ ក្នុងករណីនេះអនុគមន៍ $\mu(y)$ ត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$\mu(y)=e^{\int\left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right)dy}$$

កត្តាអាំងតេក្រាលមួយត្រូវបានកំណត់។ គុណសមីការដើមនឹងកត្តាអាំងតេក្រាល μ គេបានសមីការថ្មីជាសមីការប្រាកដ។ អនុវត្តន៍វិធីដោះស្រាយសមីការប្រាកដខាងដើម គេនឹងទទួលបានចម្លើយនៃសមីការមិនប្រាកដ។

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\left(x+y^2\right)dx-2xydy=0,\ (1)$$

ចម្លើយ

គេបាន $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\dfrac{2}{x}$ នាំឱ្យ៖

$$\mu(x)=e^{\int\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)dx}=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=\frac{1}{x^2}$$

សមីការថ្មីគឺ៖

$$\left(\frac{1}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx-2\frac{y}{x}dy=0,\ (2)$$

ជាសមីការប្រាកដ។ ដោះស្រាយសមីការនេះគេបាន៖

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

តាមទ្រឹស្តីបទមានអនុគមន៍ $f(x,y)$ ដែល៖

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2\left(\frac{y}{x}\right)$$

គេបាន៖

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2 \Leftrightarrow f(x,y)=\int\left(\frac{1}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx$$

$$=\ln|x|-\frac{y^2}{x}+g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2y}{x}+g'(y)=-2\frac{y}{x}$$

$$g'(y)=0 \Leftrightarrow g(y)=c$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺគ្រួសារខ្សែកោង៖

$$\ln|x|-\frac{y^2}{x}+c=0 \text{ ឬ } x=ke^{y^2/x},\ k=e^{-c}$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$2xy\ln y dx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0 \quad (1)$$

ចម្លើយ

គេបាន $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=-\dfrac{1}{y}$ នាំឱ្យ៖

$$\mu(y)=e^{\int\left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right)dy}=e^{-\int\frac{dy}{y}}=\frac{1}{y}$$

សមីការថ្មីគឺ៖

$$2x\ln y dx+\left(\frac{x^2}{y}+y\sqrt{y^2+1}\right)dy=0 \quad (2)$$

ជាសមីការប្រាកដ។ ដោះស្រាយសមីការនេះគេបាន៖

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2\left(\frac{x}{y}\right)$$

តាមទ្រឹស្តីបទមានអនុគមន៍ $f(x,y)$ ដែល៖

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\ln y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}$$

គេបាន៖

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\ln y \Leftrightarrow f(x,y) = \int 2x\ln y dx$$

$$= x^2\ln y + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + g'(y) = \frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}$$

$$g'(y) = y\sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow g(y) = \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{3/2}$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺគ្រួសារខ្សែកោង៖

$$x^2\ln y + \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{3/2} = c$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

1) $\left(4xy+3y^2-x\right)dx + x\left(x+2y\right)dy = 0$?

(**ចម្លើយ** $x^3\left(4xy+4y^2-x\right) = c$)

2) $y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0$?

(**ចម្លើយ** $xy^2(x+2y+2) = c$)

២.៤. សមីការលីនេអ៊ែ(Linear Equations)

២.៤.១. និយមន័យ

ក្នុងមេរៀនទី១ យើងបានកំណត់ទម្រង់ទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែលំដាប់ n គឺ៖

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$ ហៅថា **សមីការលីនេអ៊ែលំដាប់មួយ**។

២.៤.២. កត្តាអាំងតេក្រាល (Integrating Factor)

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $a_1(x)$ គេបាន៖

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x) \quad (1)$$

$$dy+\left[P(x)y-f(x)\right]dx=0 \quad (2)$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (2) នឹងអនុគមន៍ $\mu(x)$ ដើម្បីឱ្យទៅជា **សមីការប្រាកដ** គេបាន៖

$$\mu(x)dy+\mu(x)\left[P(x)y-f(x)\right]dx=0$$

តាមទ្រឹស្តីបទខាងដើមគេបាន៖

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)=\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)\left[P(x)y-f(x)\right]\Leftrightarrow\frac{d\mu}{dx}=\mu P(x)$$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int P(x)dx\Rightarrow\ln|\mu|=\int P(x)dx$$

ដូចនេះ គេបាន៖

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$$

ដែល $\mu(x)$ ហៅថា **កត្តាអាំងតេក្រាល** (Integrating Factor)។

២.៤.៣. វិធីដោះស្រាយ (Method of Solution)

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់មួយគេត្រូវ៖

1) សរសេរសមីការក្រោមទម្រង់ $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$ (1)

2) រកកត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$

3) គុណសមីការ (1) ដោយកត្តាអាំងតេក្រាល $e^{\int P(x)dx}$ យើងបាន៖

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y=f(x,y)e^{\int P(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right)=f(x,y)e^{\int P(x)dx}$$

4) គណនាអាំងតេក្រាលខាងលើយើងបានចម្លើយនៃសមីការ៖

$$e^{\int P(x)dx}y=\int f(x,y)e^{\int P(x)dx}dx+c$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\int f(x,y)e^{\int P(x)dx}dx+ce^{-\int P(x)dx}$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\frac{dy}{dx}+2xy=x,\ y(0)=-3$$

ចម្លើយ

អនុគមន៍ $P(x)=2x,\ f(x)=x$ ជាប់លើ $-\infty<x<\infty$ គេបានកត្តាអាំងតេក្រាល៖

$$\mu(x)=e^{2\int xdx}=e^{x^2}$$

សមីការដើមទៅជា៖

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx}+2xe^{x^2}y=xe^{x^2}\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}y\right)=xe^{x^2}$$

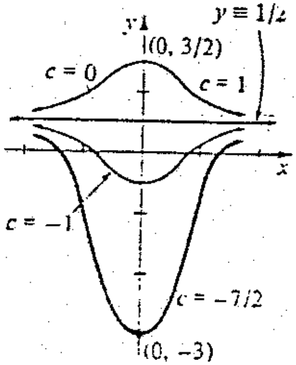
$$e^{x^2}y=\int xe^{x^2}dx\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}+ce^{-x^2}$$

ហើយលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=-3$ នាំឱ្យ $c=-7/2$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃបញ្ហាលក្ខខណ្ឌដើមគឺ៖

$$y=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}e^{-x^2}$$

រូបខាងក្រោម



ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y^2},\, y(-2)=0$$

ចម្លើយ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលឱ្យមិនមែនជា **សមីការញែកអថេរ សមីការអូម៉ូហ្សែន សមីការប្រាកដ** និង **សមីការលីនេអ៊ែ** នៃអថេរអាស្រ័យ y ។
ដូចនេះ ភាពប្រាសនៃសមីការដើមគឺ $\frac{dx}{dy}=x+y^2 \Leftrightarrow \frac{dx}{dy}-x=y^2$ ជាសមីការលីនេអ៊ែមានអថេរអាស្រ័យ x និង មានកត្តាអាំងតេក្រាល $e^{-\int dy}=e^{-y}$ ចំពោះ $-\infty<y<\infty$ គេបាន៖

$$\frac{d}{dy}\left(e^{-y}x\right)=y^2e^{-y} \Leftrightarrow e^{-y}x=\int y^2e^{-y}dy$$

$$x=-y^2-2y-2+ce^{y}$$

ដោយលក្ខខណ្ឌដើម $y(-2)=0$ នាំឱ្យ $c=0$
ដូចនេះ ចម្លើយនៃបញ្ហាលក្ខខណ្ឌដើមគឺ៖

$$x=-y^2-2y-2$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$ydx+(3x-xy+2)dy=0 \quad (1)$$

គេបាន៖

$$ydx+(3x-xy+2)dy=0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dy}+\left(\frac{3}{y}-1\right)x=-\frac{2}{y} \quad (2)$$

ជាសមីការលីនេអ៊ែមានអថេរអាស្រ័យ x និង អថេរមិនអាស្រ័យ y គេបានកត្តាអាំងតេក្រាល៖

$$e^{\int\left(\frac{3}{y}-1\right)dy}=e^{3\ln|y|-y}=e^{-y}y^3$$

សមីការ **(2)** នាំអោយ៖

$$e^{-y}y^3\left(\frac{dx}{dy}+\left(\frac{3}{y}-1\right)x\right)=e^{-y}y^3\left(-\frac{2}{y}\right)$$

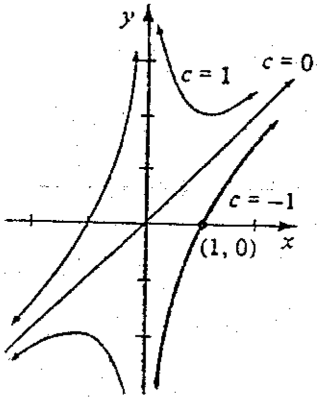
$$\frac{d}{dy}\left(e^{-y}y^3x\right)=2e^{-y}y^2$$

$$e^{-y}y^3x=2\int\left(e^{-y}y^2\right)dy$$

$$=2\left(y^2+2y+2\right)e^{-y}+c$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺ៖

$$xy^3=2y^2+4y+4+ce^y$$



ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$x\frac{dy}{dx}-4y=x^6e^x$$

(**ចម្លើយ** $y=x^5e^x-x^4e^x+cx^4$)

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\left(x^2+9\right)\frac{dy}{dx}+xy=0$$

(**ចម្លើយ** $y=\frac{c}{\sqrt{x^2+9}}$)

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$x\frac{dy}{dx}+y=2x, y(1)=0$$

(**ចម្លើយ** $y=x-\frac{1}{x}$)

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ $\frac{dy}{dx}+y=f(x), y(0)=0$ ដែល៖

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

ចម្លើយ

យើងដោះស្រាយសមីការដោយចែកចេញជាពីរផ្នែក៖

1) ចំពោះ $0\le x\le 1$ យើងបាន៖

$$\frac{dy}{dx}+y=1\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\left(e^xy\right)=e^x$$

$$y=1+c_1e^{-x}$$

ដោយលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=0$ នាំឱ្យ $c=-1$ នោះគេបាន៖

$$y=1-e^{-x}, 0\le x\le 1$$

2) ចំពោះ $x>1$ យើងបាន៖

$$\frac{dy}{dx}+y=0\Rightarrow y=c_2e^{-x}$$

តែបើ y ជាអនុគមន៍ជាប់នោះយើងបាន៖

$$\lim_{x\to 1^+} y(x)=y(1)\Leftrightarrow c_2e^{-1}=1-e^{-1}$$

$$c_2=e-1$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយនៃសមីការគឺ៖

$$y=\begin{cases}1-e^{-x}, & 0\le x\le 1\\ (e-1)e^{-x}, & x>1\end{cases}$$

២.៥. ការជំនួស(Substitutions)

២.៥.១. ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$y(1+2xy)dx+x(1-2xy)dy=0$$

ចម្លើយ

យើងឃើញថា សមីការនេះមិនមែនជាសមីការញែកអថេរ មិនប្រាកដ និង មិនលីនេអ៊ែ។

តាង $u=2xy$ នាំឱ្យគេបាន៖

$$dy=\frac{xdu-udx}{2x^2}$$

ក្រោយពីសម្រួលយើងបានសមីការដើមក្លាយជា៖

$$2u^2dx+(1-u)xdu=0$$

$$2\frac{dx}{x}+\frac{1-u}{u^2}du=0$$

$$2\int\frac{dx}{x}+\int\left(\frac{1-u}{u^2}\right)du=c$$

$$2\ln|x| - u^{-1} - \ln|u| = c$$

$$\ln\left|\frac{x}{2y}\right| = c + \frac{1}{2xy}$$

$$\frac{x}{2y} = c_1 e^{1/2xy}$$

$$x = 2c_1 y e^{1/2xy}, c_1 = e^c, y \neq 0$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺៈ

$$x = 2c_1 y e^{1/2xy}$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការៈ

$$x\frac{dy}{dx} - y = \frac{x^3}{y} e^{y/x}$$

(**ចម្លើយ** តាង $u = \dfrac{y}{x}$ គេបាន $y + x = x(c_1 - x)e^{y/x}$)

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការៈ

$$2xy\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 3x - 6$$

(**ចម្លើយ** តាង $u = y^2$ គេបាន $x^2y^2 = x^3 - 3x^2 + c$)

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការៈ

$$\frac{dy}{dx} = (-2x + y)^2 - 7, \ \ y(0) = 0$$

(**ចម្លើយ** តាង $u = -2x + y$ គេបាន $y = 2x + \dfrac{3\left(1 - e^{6x}\right)}{1 + e^{6x}}$)

២.៥.២. សមីការប៊ែរនូយី (The Equation of Bernoulli)

២.៥.២.១. និយមន័យ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)y^n$ ដែល n ជាចំនួនពិត $n\neq 0$ និង $n\neq 1$ ហៅថា **សមីការប៊ែរនូយី**។ James Bernoulli ជាអ្នកគណិតវិទ្យាជនជាតិស្វីស (**1654-1705**)។

- ករណី $n=0$ គេបាន៖

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

ជាសមីការលីនេអ៊ែ។

- ករណី $n=1$ គេបាន៖

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y}+\left[P(x)-f(x)\right]dx=0$$

ជាសមីការញែកអថេរ។

២.៥.២.២. វិធីដោះស្រាយ

ចំពោះ $n\neq 0$ និង $n\neq 1$ គេជំនួស $w=y^{1-n}$ គេបាន៖

$$w=y^{1-n} \Leftrightarrow \frac{dw}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

នោះសមីការដើមទៅជា៖

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)y^n$$

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)y^{-n}P(x)y=(1-n)y^{-n}f(x)y^n$$

$$\frac{dw}{dx}+(1-n)P(x)w=(1-n)f(x)$$

ជា **សមីការលីនេអ៊ែ**។

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^2$$

ចម្លើយ

យើងឃើញថា $P(x)=1/x, f(x)=x, n=2$ ដោយជំនួស $w=y^{-1}$ សមីការខាងលើទៅជា $\frac{dw}{dx}-\frac{1}{x}w=-x$ កត្តាអាំងតេក្រាលនៃសមីការលីនេអ៊ែ ដែល $0<x<\infty$ គឺ៖

$$e^{-\int dx/x}=x^{-1}$$

គេបាន $\frac{d}{dx}\left(x^{-1}w\right)=-1$ ដោយ $w=y^{-1} \Leftrightarrow y=\frac{1}{w}$ យើងបាន៖

$$w=-x^2+cx$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយនៃសមីការគឺ៖

$$y=\frac{1}{-x^2+cx}$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{y^2}$$

(**ចម្លើយ** $y^3=1+cx^{-3}$)

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y=\frac{12y^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{1+x^2}}$$

(**ចម្លើយ** $y^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{x}\left(4\sqrt{1+x^2}+c\right)$)

២.៥.៣. សមីការរីកាទី (The Equation of Riccati)

២.៥.៣.១. និយមន័យ

ជាសមីការមិនលីនេអ៊ែដែលមានទម្រង់៖

$$\frac{dy}{dx}=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2$$

សមីការនេះបានរកឃើញដោយ អ្នកគណិតវិទ្យាជនជាតិ **អ៊ីតាលី** មានឈ្មោះថា Jacopo Francesco Riccati **(28/05/1676-15/04/1754)**។

២.៥.៣.២. ចំលើយ

សមីការមិនលីនេអ៊ែខាងលើមានចម្លើយតាងដោយ៖

$$y=y_1+u$$

ដែល y_1 ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការរីកាទី និង u ជាចម្លើយនៃសមីការ៖

$$\frac{du}{dx}-(Q+2y_1R)u=Ru^2$$

ដែលអាចបម្លែងទៅជាសមីការលីនេអ៊ែ៖

$$\frac{dw}{dx}+(Q+2y_1R)w=-R$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងបាន៖

$$y=y_1+u\Leftrightarrow y'=y_1'+u'$$

ដោយជំនួសក្នុងសមីការដើមគេបាន៖

$$\begin{aligned}y_1'+u'&=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2\\&=P(x)+Q(x)\left(y_1+u\right)+R(x)\left(y_1+u\right)^2\\&=P(x)+Q(x)y_1+Q(x)u+R(x)y_1^2+R(x)u^2+2R(x)uy_1\end{aligned}$$

តែ y_1 ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការរីកាទីនាំឱ្យ៖

$$y_1'=P(x)+Q(x)y_1+R(x)y_1^2$$

គេបាន៖

$$u'=Q(x)u+R(x)u^2+2R(x)uy_1$$

$$u'-(Q+2Ry_1)=Ru^2$$

ជា **សមីការប៊ែរនូយី** មាន $n=2$ ។

ដោយជំនួស $w=\frac{1}{u}$ តាមសមីការប៉េរនូយីគេបានសមីការៈ

$$\frac{dw}{dx}+(Q+2y_1R)w=-R$$

ជា **សមីការលីនេអ៊ែ**។

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការៈ

$$y'-y^2+2e^xy=e^{2x}+e^x, y_1=e^x$$

ចម្លើយ

ចេញពីសមីការដើមគេបានៈ

$$P(x)=e^{2x}+e^x, Q(x)=-2e^x, R(x)=1$$

សមីការដើមទៅជាៈ

$$\frac{dw}{dx}+(-2e^x+2e^x)w=-1$$

$$\frac{dw}{dx}=-1$$

$$\frac{dw}{dx}=-1\Leftrightarrow w=c-x$$

តែ $w=\frac{1}{u}$ នាំឱ្យៈ

$$\frac{1}{u}=c-x\Leftrightarrow u=\frac{1}{c-x}$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺៈ

$$y=y_1+u=e^x+\frac{1}{c-x}$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការៈ

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x}+(1+2e^x)y+y^2, y_1=-e^x$$

(**ចម្លើយ** $y=-e^{x}+\dfrac{1}{ce^{-x}-1}$)

២.៥.៤. សមីការឡាហ្គ្រង់ និង សមីការក្លេរ៉ូ (The Equation of Lagrange and Clairaut)

២.៥.៤.១. សមីការឡាហ្គ្រង់

និយមន័យ

ជាសមីការមិនលីនេអ៊ែដែលមានទម្រង់៖

$$y=x\varphi(y')+\psi(y')$$

សមីការនេះ បានរកឃើញដោយអ្នកគណិតវិទ្យាជនជាតិអ៊ីតាលី មានឈ្មោះថា Joseph-Louis Lagrange **(25/01/1736-10/04/1813)**។

វិធីដោះស្រាយ

តាង $y'=p\Leftrightarrow dy=pdx$ សមីការខាងលើទៅជា៖

$$y=x\varphi(p)+\psi(p)\Leftrightarrow dy=x\varphi'(p)dp+\varphi(p)dx+\psi'(p)dp$$

$$pdx=x\varphi'(p)dp+\varphi(p)dx+\psi'(p)dp$$

$$\frac{dx}{dp}-\left(\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}\right)x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$

ដោះស្រាយសមីការលីនេអ៊ែនេះគេបានចម្លើយជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{cases}x(p)=f(p,c)\\ y(p)=f(p,c)\varphi(p)+\psi(p)\end{cases}$$

ចម្លើយជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រនេះអាចបម្លែងជា **ចម្លើយទោល** (Singular Solution) ទម្រង់ខាងក្រោម៖

$$y=\varphi(c)x+\psi(c)$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$y=2xy'-3(y')^{2}$$

ចម្លើយ

តាង $p = y' \Leftrightarrow dy = pdx$ នាំឱ្យ៖

$$y = 2xp - 3p^2 \Leftrightarrow dy = 2xdp + 2pdx - 6pdp$$

$$pdx = 2xdp + 2pdx - 6pdp$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 6 \quad (1)$$

គេបាន៖

$$e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{2\ln|p|} = p^2$$

$$p^2\left(\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x\right) = 6p^2$$

$$\frac{d}{dp}\left(p^2x\right) = 6p^2$$

$$p^2x = 2p^3 + c$$

$$x = 2p + cp^{-2}$$

$$y = 2xp - 3p^2$$

$$= 2p\left(2p + cp^{-2}\right) - 3p^2$$

$$= p^2 + 2cp^{-1}$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយនៃសមីការគឺ៖

$$x = 2p + cp^{-2}$$

$$y = p^2 + 2cp^{-1}$$

ចម្លើយជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រនេះអាចបម្លែងជាចម្លើយទោលទម្រង់ខាងក្រោម៖

$$x = 2p + cp^{-2} \Leftrightarrow cp^{-1} = px - 2p^2$$

$$y = p^2 + 2cp^{-1}$$

$$= p^2 + 2\left(px - 2p^2\right)$$

$$= 2px - 3p^2$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយទោលនៃសមីការគឺ៖

$$y = 2px - 3p^2$$

២.៥.៤.២. សមីការក្លេរ៉ូ

និយមន័យ

ជាសមីការមិនលីនេអ៊ែដែលមានទម្រង់៖

$$y = xy' + f(y')$$

សមីការនេះបានរកឃើញ ដោយអ្នកគណិតវិទ្យាជនជាតិបារាំង មានឈ្មោះថា Alexis Claude Clairaut **(1713-1765)**។

វិធីដោះស្រាយ

តាង $y' = p \Leftrightarrow dy = pdx$ សមីការខាងលើទៅជា៖

$$y = xp + f(p) \Leftrightarrow (x + f'(p))dp = 0$$

ចម្លើយនៃសមីការក្លេរ៉ូអាចមានទម្រង់ពីរគឺ៖

1) ជាគ្រួសារនៃបន្ទាត់ $y = cx + f(c)$ ដែល c ជាចំនួនថេរ

2) ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $x = -f'(t), y = f(t) - tf'(t)$ ហៅថា **ចម្លើយទោល** (Singular Solution)។

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2$$

ចម្លើយ

យើងបាន $f(y') = \frac{1}{2}(y')^2$ នាំឱ្យ៖

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺគ្រួសារបន្ទាត់៖

$$y = cx + \frac{1}{2}c^2$$

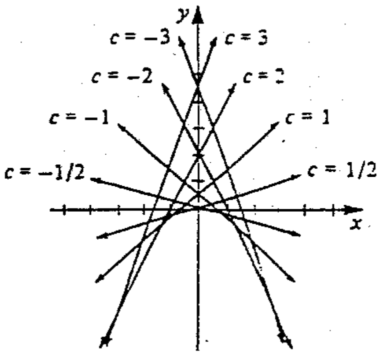
ម៉្យាងទៀត យើងដឹងថា $f(t)=\frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow f'(t)=t$

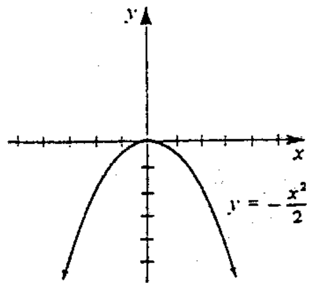
គេបានចម្លើយជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រគឺ៖

$$x=-t, y=\frac{1}{2}t^2-t^2=-\frac{1}{2}t^2$$

ដូចនេះ ក្រោយពីបំបាត់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រយើងបានចម្លើយទោលគឺ៖

$$y=-\frac{1}{2}x^2$$





ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$y=xy'+1-\ln y'$$

(**ចម្លើយ** $y=cx+1-\ln c, y=2+\ln x$)

២.៥.៥. សមីការអូម៉ូហ្សែន(Homogeneous Equations)

២.៥.៥.១. និយមន័យ

បើ $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ ដែល n ជាចំនួនពិតនោះអនុគមន៍ $f(x,y)$ ហៅថា **អនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេ** n ។

ឧទាហរណ៍

1) $f(x,y)=x-3\sqrt{xy}+5y$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេ 1។

2) $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេ $\frac{3}{2}$ ។

3) $f(x,y)=x^2+y^2-1$ ជាអនុគមន៍មិនអូម៉ូហ្សែន។

ប្រតបត្ត

1) $f(x,y)=6xy^3-x^2y^2$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេ 4។

2) $f(x,y)=x^2-y$ ជាអនុគមន៍មិនអូម៉ូហ្សែន។

២.៥.៥.២. ទ្រឹស្តីបទ១

បើ $M(x,y)$ និង $N(x,y)$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេដូចគ្នា នោះ គេបាន $\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេសូន្យ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ $M(x,y)$ និង $N(x,y)$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេ n ដូចគ្នា គេបាន៖

$$M(tx,ty)=t^nM(x,y)$$
$$N(tx,ty)=t^nN(x,y)$$
$$\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)}=\frac{t^nM(x,y)}{t^nN(x,y)}=t^0\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

ដូចនេះ $\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេសូន្យ។

២.៥.៥.៣. ទ្រឹស្តីបទ២

បើ $f(x,y)$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេសូន្យអថេរ x និង y នោះ $f(x,y)$ ជាអនុគមន៍មានអថេរតែមួយគឺ $\dfrac{y}{x}$។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $y=ux$ យើងបាន៖

$$\begin{aligned} f(x,y)=f(x,ux)&=x^0f(1,u)\\ &=f(1,u)\\ &=f\left(1,\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $f(x,y)$ ជាអនុគមន៍អាស្រ័យនឹងអថេរតែមួយ។

២.៥.៥.៤. និយមន័យ

បើសមីការដែលមានទម្រង់ទូទៅ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ មានលក្ខណៈ $M(tx,ty)=t^nM(x,y)$ និង $N(tx,ty)=t^nN(x,y)$ នោះគេហៅថា **សមីការមានមេគុណអូម៉ូហ្សែន** (Homogeneous Coefficients) ឬ ជា **សមីការអូម៉ូហ្សែន** (Homogeneous Equations)។

២.៥.៥.៥. វិធីដោះស្រាយ(Method of Solution)

សមីការមានទម្រង់ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ដែល $M(x,y)$ និង $N(x,y)$ អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេដូចគ្នា អាចត្រូវបានគេបង្រួមទៅរកសមីការញែកអថេរបាន ដោយការជំនួស $y=ux$ ឬ $x=vy$ ដែល u និង v ជាអថេរអាស្រ័យថ្មី។ គេបាន៖

$$y=ux \Leftrightarrow dy=udx+xdu$$
$$M(x,ux)dx+N(x,ux)(udx+xdu)=0$$
$$x^nM(1,u)dx+x^nN(1,u)(udx+xdu)=0$$
$$\left[M(1,u)+uN(1,u)\right]dx+xN(1,u)du=0$$
$$\frac{dx}{x}+\frac{N(1,u)du}{M(1,u)+uN(1,u)}=0$$

គណនាអាំងតេក្រាលនៃអង្គទាំងពីរយើងបានចម្លើយនៃសមីការ។

សម្គាល់

គេនិយមតាង៖

- $y=ux$ ប្រសិនបើ $M(x,y)$ មានភាពស្មុកស្មាញជាង $N(x,y)$ និង
- $x=vy$ ប្រសិនបើ $N(x,y)$ មានភាពស្មុកស្មាញជាង $M(x,y)$។

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-xy\right)dy=0 \quad (1)$$

ចម្លើយ

តាង $y=ux \Leftrightarrow dy=udx+xdu$ គេបានសមីការ (1) ទៅជា៖

$$\left[x^2+(ux)^2\right]dx+\left[x^2-x(ux)\right](udx+xdu)=0$$

$$\left(1+u^2\right)dx+(1-u)(udx+xdu)=0$$

$$(1+u)dx+x(1-u)du=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{(1-u)du}{(1+u)}=0$$

នាំអោយ៖

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{(1-u)du}{(1+u)}=c$$

$$\ln|x|+2\ln|1+u|-u=c$$

$$x(1+u)^2=ke^u,\ k=e^c$$

តែ $y=ux \Leftrightarrow u=\dfrac{y}{x}$ គេបាន៖

$$x\left(1+\frac{y}{x}\right)^2=ke^{y/x} \Leftrightarrow c(x+y)^2=xe^{y/x}$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺ៖

$$c(x+y)^2=xe^{y/x}$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\left(2\sqrt{xy}-y\right)dx-xdy=0$$

(**ចម្លើយ** តាង $y=ux$ គេបាន $\sqrt{xy}-x=c$)

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$2x^3ydx+\left(x^4+y^4\right)dy=0$$

(**ចម្លើយ** តាង $x=vy$ គេបាន $3x^4y^2+y^6=c$)

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$\left(x^2-xy+y^2\right)dx-xydy=0$$

(**ចម្លើយ** តាង $y=ux$ គេបាន $(y-x)e^{\frac{y}{x}}=c$)

សម្គាល់

1) សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូហ្សែនអាចសរសេរក្រោមទម្រង់៖

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

ដើម្បីឈានទៅដល់សមីការនេះយើងសរសេរសមីការ៖

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

ទៅជារាង៖

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

ដែល៖

$$f(x,y)=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

អនុគមន៍ $f(x,y)$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេ 0 ពេលដែល M និង N អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេ n គេបាន៖

$$f(x,y)=-\frac{x^nM\left(1,\frac{y}{x}\right)}{x^nN\left(1,\frac{y}{x}\right)}=-\frac{M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការ៖

$$x\frac{dy}{dx}=y+xe^{y/x},y(1)=1$$

ចម្លើយ

សមីការខាងលើអាចសរសេរ៖

$$x\frac{dy}{dx}=y+xe^{y/x}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+e^{y/x}$$

តាង $u=\frac{y}{x}\Leftrightarrow y=ux$ គេបាន៖

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

នាំអោយសមីការខាងលើទៅជា៖

$$u+x\frac{du}{dx}=u+e^{u}$$

$$e^{-u}du=\frac{dx}{x}$$

$$-e^{-u}=\ln|x|+c$$

$$-e^{-y/x}=\ln|x|+c$$

តែ $y(1)=1$ គេបាន៖

$$-e^{-1}=c$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយតែមួយគត់នៃសមីការគឺ៖

$$e^{-1}-e^{-y/x}=\ln|x|$$

2) យើងពិនិត្យសមីការ៖

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0\quad(1)$$

ដែល a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 ជាចំនួនថេរ។ គេសិក្សាពីរករណីខាងក្រោម៖

- បើ $c_1=c_2=0$ នោះសមីការ (1) ជាសមីការអូម៉ូហ្សែន
- បើ $c_1\neq 0$ ឬ $c_2\neq 0$ នោះគេសិក្សាពីរករណីទៀតគឺ៖
  - ករណី $a_1x+b_1y\neq a_2x+b_2y$ គេតាង៖

$x=x_1+h$ និង $y=y_1+k$ (h,k ជាចំនួនថេរ)

សមីការ (1) អាចសរសេរជាទម្រង់៖

$$(a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1)dx_1+(a_2x_1+b_2y_1+a_2h+b_2k+c_2)dy_1=0 \quad (2)$$

ដោយយក $a_1h+b_1k+c_1=0$ និង $a_2h+b_2k+c_2=0$ នោះសមីការ (2) ទៅជា៖

$$(a_1x_1+b_1y_1)dx_1+(a_2x_1+b_2y_1)dy_1=0 \quad (3)$$

ជាសមីការអូម៉ូហ្សែនដែលគេអាចដោះស្រាយបាន។

- ករណី $a_1x+b_1y=a_2x+b_2y$ គេតាង៖

$$u=a_1x+b_1y \Leftrightarrow du=a_1dx+b_1dy$$

$$\Leftrightarrow dy=\frac{1}{b_1}\left(du-a_1dx\right)$$

សមីការថ្មីគឺ៖

$$(u+c_1)dx+\frac{1}{b_1}(u+c_2)(du-a_1dx)=0$$

$$dx+\frac{(u+c_2)du}{b_1(u+c_1)-a_1(u+c_2)}=0$$

ជាសមីការញែកអថេរ។

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

$$(x+2y-4)dx-(2x+y-5)dy=0 \quad (1)$$

ចម្លើយ

តាង $x=x_0+h$ និង $y=y_0+k$ គេបាន៖

$$dx=dx_0 \text{ និង } dy=dy_0$$

សមីការ (1) ទៅជា៖

$$\left[x_0+h+2\left(y_0+k\right)-4\right]dx_0-\left[2\left(x_0+h\right)+y_0+k-5\right]dy_0=0$$

$$\left(x_0+2y_0+h+2k-4\right)dx_0-\left(2x_0+y_0+2h+k-5\right)dy_0=0 \quad (2)$$

យក $h+2k-4=0$ និង $2h+k-5=0$ គេបាន៖

$$h=2, k=1$$

សមីការ (2) ទៅជា៖

$$\left(x_0+2y_0\right)dx_0-\left(2x_0+y_0\right)dy_0=0 \quad (3)$$

តាង $y_0=x_0u \Leftrightarrow dy_0=x_0du+udx_0$ គេបានសមីការ (3) ទៅជា៖

$$\left(x_0+2ux_0\right)dx_0-\left(2x_0+ux_0\right)\left(x_0du+udx_0\right)=0$$

$$\left(1+2u\right)dx_0-\left(2+u\right)\left(x_0du+udx_0\right)=0$$

$$\left(1-u^2\right)dx_0-x_0\left(2+u\right)du=0$$

$$\frac{dx_0}{x_0}-\frac{\left(2+u\right)du}{\left(1-u^2\right)}=0$$

នាំអោយ៖

$$\int\frac{dx_0}{x_0}-\int\frac{\left(2+u\right)du}{\left(1-u^2\right)}=c$$

$$\int\frac{dx_0}{x_0}-\left(\frac{3}{2}\int\frac{du}{1-u}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u}\right)=c$$

$$\ln\left|x_0\right|+\frac{3}{2}\ln\left|1-u\right|-\frac{1}{2}\ln\left|1+u\right|=c$$

$$\frac{x_0\left(1-u\right)^{3/2}}{\left(1+u\right)^{1/2}}=k,\ \ k=e^c$$

តែ $u=\dfrac{y_0}{x_0}$ ហើយ $x=x_0+2\Leftrightarrow x_0=x-2$ និង $y=y_0+1\Leftrightarrow y_0=y-1$

គេបាន៖

$$(x-y-1)^3=c(x+y-3)$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺ៖

$$(x-y-1)^3=c(x+y-3)$$

ឧទាហរណ៍

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

$$(2x+3y-1)dx+(2x+3y+2)dy=0,\ y(1)=3$$

(**ចម្លើយ** $x+y-4=-3\ln\left(\frac{1}{4}\left|2x+3y-7\right|\right)$)

២.៦. វិធីពីកាត (Picard's Method)

ចំពោះបញ្ហាតម្លៃដើម៖

$$y'=f(x,y),\ \ y(x_0)=y_0\ \ (1)$$

ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលទៅលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x យើងបាន៖

$$y(x)=c+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt \Leftrightarrow y(x_0)=c+\int_{x_0}^{x_0} f(t,y(t))dt$$

$$c=y_0$$

ដូចនេះ គេបាន៖

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt\ \ (2)$$

យើងព្យាយាមដោះស្រាយសមីការ **(2)** តាមវិធីប៉ាន់ស្មានជាបន្តបន្ទាប់ (Method of Successive Approximations)។

ឧបមាថា $y_0(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ទូទៅណាមួយ ដែលតាងអោយចម្លើយប៉ាន់ស្មាននៃសមីការ **(2)**។ ដោយហេតុថា $f(x,y_0(x))$ ជាអនុគមន៍ដែលស្គាល់អាស្រ័យនឹងអថេរ x ហើយអនុគមន៍នេះ អាចត្រូវបានគេគណនាអាំងតេក្រាល។ ជាមួយ $y(t)$ គេជំនួសដោយ $y_0(t)$ អង្គខាងស្តាំនៃសមីការ **(2)** កំណត់អនុគមន៍ថ្មីសរសេរដោយ៖

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_0(t))dt$$

ដោយធ្វើតាមវិធីដដែលៗយើងបាន៖

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t))dt$$

រហូតដល់៖

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, \ \ n = 1; 2; 3; \dots \ \ (3)$$

ទម្រង់នៃសមីការ (3) នេះហៅថា **វិធីពីកាតនៃអ៊ីតេរ៉ាស្យុង** (Picard's Method of Iteration)។

ឧទាហរណ៍

ពិនិត្យបញ្ហា $y' = y - 1, \ y(0) = 2$ គេប្រើវិធីពីកាត ដើម្បីកំណត់រក y_1, y_2, y_3, y_4 យើងមាន៖

$$x_0 = 0, \ \ y_0(x) = 2 \ \text{និង} \ f(t, y_{n-1}(t)) = y_{n-1}(t) - 1$$

នោះសមីការគេបាន (3) ទៅជា៖

$$y_n(x) = 2 + \int_0^x (y_{n-1}(t) - 1)dt, \ \ n = 1; 2; 3; \dots$$

អាំងតេក្រាលខាងលើនេះអោយជាបន្តបន្ទាប់៖

$$y_1(x) = 2 + \int_0^x 1.dt = 2 + x$$

$$y_2(x) = 2 + \int_0^x (1 + t)dt = 2 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_3(x) = 2 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)dt = 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3}$$

$$y_4(x) = 2 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2.3}\right)dt = 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4}$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

បើ $n \to \infty$ នោះយើងបាន $y(x) = 1 + e^x$ ព្រោះ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ រូបមន្ត Mac-Laurin។

ដូចនេះ គេបានចម្លើយនៃបញ្ហាតម្លៃដើមខាងលើគឺ៖

$$y(x) = 1 + e^x$$

ជំពូក៣
ការអនុវត្តសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ

៣.១. ការអនុវត្តក្នុងធរណីមាត្រ (GEOMETRICAL APPLICATIONS)

៣.១.១. កូអរដោនេដេកាត (Cartesian Coordinates)

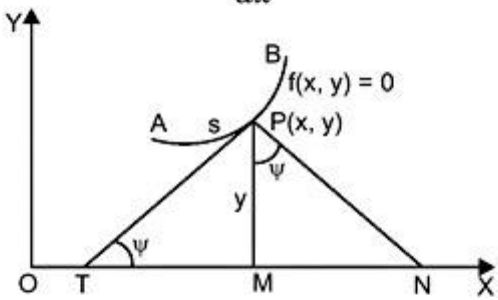
គេមាន $P(x,y)$ ជាចំណុចណាមួយលើខ្សែកោង AB ដែលសមីការដេកាតរបស់វាគឺ $f(x,y)=0$។ តាងចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ប៉ះ និងបន្ទាត់ន័រម៉ាល់នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសដោយ T និង N រៀងគ្នា។ គូសបន្ទាត់កែង PM នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគេបាន៖

$$P = \tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

៣.១.២. សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (Equation of the tangent)

គេបាន៖

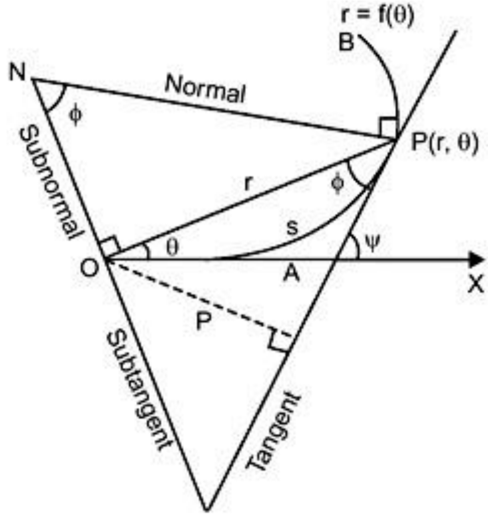
$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$



៣.១.៣. សមីការន័រម៉ាល់ (Equation of the normal)

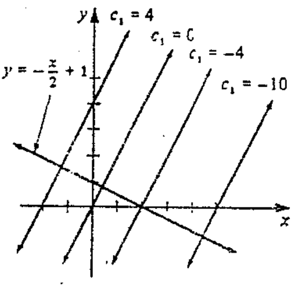
គេបាន៖

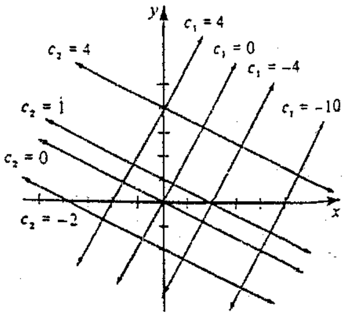
$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$



៣.២. ចំណោលកែង(Orthogonal Trajectories)

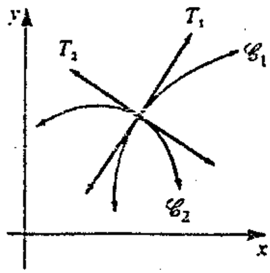
ក្នុងធរណីមាត្រវិភាគ យើងដឹងថា បន្ទាត់ពីរ L_1, L_2 ដែលបន្ទាត់នីមួយៗ មិនស្របនឹងអ័ក្សកូអរដោនេ ជាបន្ទាត់កែងគ្នាលុះត្រាតែវា បំពេញទំនាក់ទំនង $m_1 m_2 = -1$ ។ ចំពោះហេតុផលនេះក្រាបនៃ $y = -\frac{1}{2}x + 1$ និង $y = 2x + 4$ កែងរវាងគ្នា។ នេះមានន័យថា ក្រាបនៃ $y = -\frac{1}{2}x + 1$ កែងនឹងគ្រប់បន្ទាត់ក្នុងគ្រួសារខ្សែកោង $y = 2x + c_1$ ក្នុងរូប (a) ខាងក្រោម ហើយក្នុងរូប (b) បង្ហាញថា ខ្សែកោងនីមួយៗក្នុងគ្រួសារ $y = -\frac{1}{2}x + c_2$ កែងទៅនឹងគ្រប់ខ្សែកោងនីមួយៗ ក្នុងគ្រួសារ $y = 2x + c_1$ ។





៣.២.១. ខ្សែកោងកែង(Orthogonal Curves)

ជាទូទៅខ្សែកោងពីរ C_1 និង C_2 ត្រូវបានគេហៅថា **កែង** (Orthogonal) ត្រង់ចំណុចមួយលុះត្រាតែបន្ទាត់ប៉ះ T_1 និង T_2 កែងគ្នាត្រង់ចំណុចនោះ (**មើលរូបខាងក្រោម**)។



ឧទាហរណ៍

បង្ហាញថា ខ្សែកោង $y = x^3$ និង $x^2 + 3y^2 = 4$ កែងគ្នាត្រង់ចំណុច S មួយ?

ចម្លើយ

ក្នុងរូបខាងក្រោម យើងឃើញថា ចំណុចប្រសព្វនៃក្រាបគឺ $(1,1)$ និង $(-1,-1)$។ បន្ទាត់ប៉ះនៃ $y = x^3$ ត្រង់ចំណុចទូទៅណាមួយគឺៈ

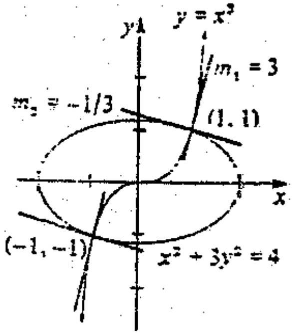
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \text{ នាំឱ្យ } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 3$$

ចំណែក $\frac{dy}{dx}$ នៃខ្សែកោងទីពីរគឺៈ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{3y}\Leftrightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,-1)}=-\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ ត្រង់ $(1,1)$ និង $(-1,-1)$ យើងបាន៖

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}=-1$$



សន្និដ្ឋាន

យើងបានគ្រួសារនៃខ្សែកោង $(C_1): y=c_1x^3, c_1\neq 0$ កែងទៅនឹងគ្រួសារនៃខ្សែកោង $(C_2): x^2+3y^2=c_2^2$ ដែលសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសារទីមួយគឺ៖

$$\frac{dy}{dx}=3c_1x^2=3\left(\frac{y}{x^3}\right)x^2=\frac{3y}{x}$$

ដែល $c_1=\frac{y}{x^3}$ និង សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសារទីពីរគឺ៖

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{3y}$$

ដូច្នេះ គេបាន៖

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}=-1$$

និយមន័យ

ប្រសិនបើគ្រប់ខ្សែកោងគ្រួសារ $G(x,y,c_1)=0$ កែងទៅនឹងគ្រប់ខ្សែកោងគ្រួសារ $H(x,y,c_2)=0$ នោះគ្រួសារទាំងពីរហៅថា **ចំណោលកែងរវាងគ្នា**។

ឧទាហរណ៍

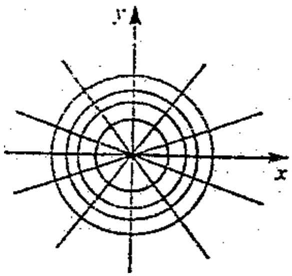
1) ក្រាបនៃ $y=-\frac{1}{2}x+1$ ជាចំណោលកែងនៃ $y=2x+c_1$។

ដូច្នេះ គ្រួសារនៃ $y=-\frac{1}{2}x+c_1$ និង $y=2x+c_1$ ជាចំណោលកែងរវាងគ្នា។

2) ក្រាបនៃ $y=4x^3$ ជាចំណោលកែងនៃ $x^2+3y^2=c_2^2$។

ដូច្នេះ គ្រួសារនៃ $y=c_1x^3$ និង $x^2+3y^2=c_2^2$ ជាចំណោលកែងរវាងគ្នា។

3) ក្នុងរូបខាងក្រោមបង្ហាញថា គ្រួសារនៃបន្ទាត់ត្រង់ $y=c_1x$ កាត់តាមគល់អ័ក្ស ហើយគ្រួសារ $x^2+y^2=c_2^2$ នៃរង្វង់មានផ្ចិតត្រង់គល់អ័ក្សជា **ចំណោលកែងរវាងគ្នា**។



៣.២.២. វិធីសាស្ត្រទូទៅ(General Methodology)

ដើម្បីរកចំណោលកែងនៃគ្រួសារខ្សែកោងដែលឱ្យមួយជាដំបូងត្រូវ៖

❖ រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសារខ្សែកោងដែលឱ្យ(គ្រួសារទី១)៖

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

❖ រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសារទី២ ដែលកែងទៅនឹងគ្រួសារទី១ នោះ៖

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{f(x,y)}$$

❖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសារទី២ គេនឹងបានចម្លើយ។

ឧទាហរណ៍

រកចំណោលកែងនៃគ្រួសារអ៊ីពែបូលៈ

$$y = \frac{c_1}{x}$$

ចម្លើយ

ដេរីវេនៃ $y = -\frac{c_1}{x}$ គឺ $\frac{dy}{dx} = \frac{-c_1}{x^2}$ ជំនួស c_1 ដោយ $y = \frac{c_1}{x}$ គេបាន $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$ ហើយ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃគ្រួសារកែងគឺ $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\frac{-y}{x}} = \frac{x}{y}$

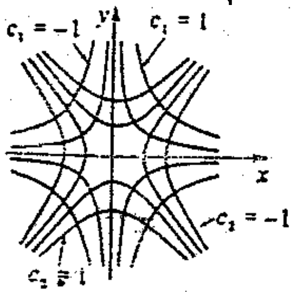
ដោះស្រាយសមីការញែកអថេរគេបាន៖

$$ydy = xdx \Leftrightarrow x^2 - y^2 = c_2, c_2 = c_2'$$

ដូចនេះ គេបានចំណោលកែងនៃ $y = \frac{c_1}{x}$ គឺ៖

$$x^2 - y^2 = c_2$$

ក្រាបនៃគ្រួសារទាំងពីរបង្ហាញក្នុងរូបខាងក្រោម



ឧទាហរណ៍

រកចំណោលកែងនៃ៖

$$y=\frac{c_1 x}{1+x}$$

ចម្លើយ

$\frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{(1+x)^2}$ ជំនួស $c_1=\frac{y(1+x)}{x}$ យើងបាន៖

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x(1+x)}$$

ហើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចំណោលកែងគឺ៖

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(1+x)}{y}$$

ដោះស្រាយសមីការញែកអថេរគេបាន៖

$$ydy=-x(1+x)dx$$

$$3y^2+3x^2+2x^3=c_2, c_2=6c_2'$$

ដូចនេះ គេបានចំណោលកែងនៃ $y=\frac{c_1 x}{1+x}$ គឺ៖

$$3y^2+3x^2+2x^3=c_2$$

៣.៣. ការអនុវត្តនៃសមីការលីនេអ៊ែ(Applications of Linear Equations)

៣.៣.១. ភាពកើន និង ភាពថយ(Growth and Decay)

ឧទាហរណ៍

គេមាន N_0 ចំនួននៃបាក់តេរី។ នៅត្រង់ $t=1$ ម៉ោងចំនួននៃបាក់តេរីត្រូវបានវាស់ស្មើ $\left(\frac{3}{2}\right)N_0$ ។ បើអត្រាកើនសមមាត្រទៅនឹងចំនួននៃបាក់តេរីដែលមាន ចូរកំណត់រយៈពេលចាំបាច់ចំពោះចំនួននៃបាក់តេរីបីដង ?

ចម្លើយ

យើងដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dN}{dt}=kN\ (*), N(0)=N_0$
បន្ទាប់ពីដោះស្រាយបញ្ហានេះយើងប្រើលក្ខខណ្ឌ $N(1)=\left(\frac{3}{2}\right)N_0$ ដើម្បីកំណត់ចំនួនថេរសមមាត្រ k។ សមីការ $(*)$ ជាសមីការលីនេអ៊ែ ហើយអាចញែកអថេរបាន។ គេបាន៖

$$\frac{dN}{dt}-kN=0$$

ដែលមានកត្តាអាំងតេក្រាលគឺ៖

$$e^{-kt} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{-kt}N\right]=0$$

$$\Leftrightarrow N(t)=ce^{kt}$$

ត្រង់ $t=0$ នាំឱ្យ $N_0=ce^0=c$ និង ត្រង់ $t=1$ យើងបាន៖

$$\frac{3}{2}N_0=N_0e^k \Leftrightarrow k=0.4055$$

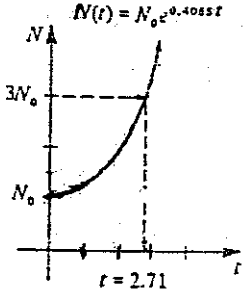
$$N(t)=N_0e^{0.4055t}$$

ដើម្បីករយៈពេលដែលបាក់តេរីមានបីដងយើងដោះស្រាយសមីការ៖

$$3N_0=N_0e^{0.4055t} \Leftrightarrow t\approx 2.71$$

ដូចនេះ គេបាន៖

$$t\approx 2.71$$



៣.៣.២. ភាពកើតមាននូវកាបូន(Carbon Dating)

នៅឆ្នាំ ១៩៥០ អ្នកគីមីវិទ្យា Willard Libby បានចែកវិធីសាស្ត្រនៃការប្រើវិទ្យុសកម្មកាបូនដូចទៅនឹង មធ្យមនៃការកំណត់អាយុកាលរបស់ Fossil។ ទ្រឹស្តីបទផ្អែកលើព្រឹត្តិការណ៍ដែល Isotope កាបូន-១៤ ត្រូវបានគេបង្កើតក្នុងបរិយាកាសដោយអំពើនៃប្រតិកម្មលើនីត្រូសែន។ អត្រានៃចំនួនកាបូន-១៤ ក្នុងលំដាប់កាបូននៅក្នុងបរិយាកាស លេចឡើងជាចំនួនថេរ។ លើសពីនេះវិធីសាស្ត្ររបស់គាត់បានបង្ហាញថា ពាក់កណ្តាលជីវិតនៃវិទ្យុសកម្មកាបូន-១៤ គឺមានអាយុកាល ៥៦០០ ឆ្នាំ។

ឧទាហរណ៍

គ្រោងឆ្អឹងសត្វត្រូវបានគេរកឃើញមានផ្ទុក $1/1000$ នៃចំនួនដើមរបស់កាបូន-១៤។ កំណត់អាយុកាលរបស់គ្រោងឆ្អឹង ?

ចម្លើយ

យើងចាប់ផ្តើមដោយ $A(t)=A_0e^{kt}$ ពេល $t=5600$ ឆ្នាំនោះ $A(t)=\dfrac{A_0}{2}$ យើងអាចកំណត់តម្លៃ k គឺ៖

$$\frac{A_0}{2}=A_0e^{5600k}\Leftrightarrow k=-0.00012378$$

$A(t)=A_0e^{-0.00012378t}$ នៅពេល $A(t)=\dfrac{A_0}{1000}$ គេបាន៖

$$\frac{A_0}{1000}=A_0e^{-0.00012378t}\Leftrightarrow t\approx 55807$$

ដូចនេះ គេបាន៖

$t\approx 55807$ ឆ្នាំ

៣.៣.៣. ច្បាប់ត្រជាក់របស់ញូតុន (Newton's law of Cooling)

ច្បាប់ញ៉ូតុននៃ Cooling បង្ហាញថា កម្រិតដែលសីតុណ្ហភាព $T(t)$ ផ្លាស់ប្តូរនៅក្នុងអង្គធាតុ Cooling សមាមាត្រទៅនឹងផលដករវាងសីតុណ្ហភាពនៅក្នុងអង្គធាតុ និង សីតុណ្ហភាពថេរ T_0 នៃមជ្ឈដ្ឋានជុំវិញ។ គេបាន៖

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0), k: \text{ចំនួនថេរ}$$

ឧទាហរណ៍

ពេលគេយកនំ Cake ចេញពីចង្ក្រានដុតនំនោះមានសីតុណ្ហភាព $300^\circ F$ ។ 3 នាទី ក្រោយមកសីតុណ្ហភាពវាគឺ $200^\circ F$ ។ តើមានរយៈពេលប៉ុន្មានដែលនំនឹងមានសីតុណ្ហភាពខិតទៅរក $70^\circ F$ ។

ចម្លើយ

យើងត្រូវដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម $\frac{dT}{dt} = k(T - 70), T(0) = 300$ កំណត់តម្លៃ k ដែល $T(3) = 200$ សមីការខាងលើឱ្យ៖

$$\int \frac{dT}{T - 70} = \int k dt \Leftrightarrow T = 70 + c_2 e^{kt}$$

ពេល $t = 0, T = 300$ គេបាន៖

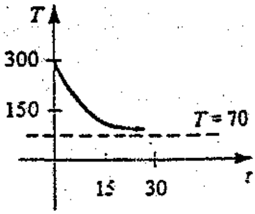
$$300 = 70 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 230$$

$$T(t) = 70 + 230e^{kt}$$

ចេញពី $T(3) = 200$ នាំឱ្យ $k = -0.19018$

ដូចនេះ គេបាន៖

$$T(t) = 70 + 230e^{-0.19018t}$$



$T(t)$	t (minutes)
75°	20.1
74°	21.3
73°	22.8
72°	24.9
71°	28.6
70.5°	32.3

៣.៣.៤. ល្បាយគីមី(Chemical Mixture)

ឧទាហរណ៍

អំបិលចំនួន ៥០ ផោន ត្រូវបានគេលាយក្នុងធុងមួយដែលមានទឹកចំណុះ ៣០០ ហ្គាឡុង។ សូឡូយស្យុងទឹកអំបិលបូមចូលក្នុងធុងបាន ៣ ហ្គាឡុងក្នុងមួយនាទី និង បង្ហូរចេញវិញក៏បានដូចគ្នាដែរ។ ក្នុងការបង្ហូរចូលនោះមានសូឡូយស្យុង ២ ផោនក្នុង ១ ហ្គាឡុង កំណត់បរិមាណអំបិល ដែលមាននៅក្នុងធុងនៅរយៈពេលណាមួយ។ តើមានអំបិលចំនួនប៉ុន្មានបន្ទាប់ពី ៥០ នាទីក្រោយមក? បន្ទាប់ពីរយៈពេលជាយូរ?

ចម្លើយ

តាង $A(t)$ ជាបរិមាណអំបិលគិតជាផោននៅក្នុងធុងនៅរយៈពេលណាមួយ។ អត្រា $A(t)$ ប្រែប្រួលឱ្យដោយ៖

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} \text{rate of} \\ \text{substance entering} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{rate of} \\ \text{substance leaving} \end{pmatrix} = R_1 - R_2 \quad (**)$$

ដូច្នេះ គេបាន៖

$$R_1 = (3gal/\min).(2lb/gal) = 6lb/\min$$

$$R_2 = (3gal/\min).\left(\frac{A}{300}lb/gal\right) = \frac{A}{100}lb/\min$$

សមីការ $(**)$ ក្លាយជា $\dfrac{dA}{dt} = 6 - \dfrac{A}{100}, A(0) = 50 \quad (***)$ ដែលមានកត្តាអាំងតេក្រាលគឺ $e^{t/100}$ សមីការ $(***)$ អាចសរសេរ៖

$$\frac{d}{dt}\left[e^{t/100}A\right] = 6e^{t/100} \Leftrightarrow A = 600 + ce^{-t/100}$$

ពេល $t = 0, A = 50$ នាំឱ្យ $c = -550$ គេបាន៖

$$A(t) = 600 - 550e^{-t/100}$$

ត្រង់ $t = 50$ យើងបាន $A(50) = 266.41$ ផោន

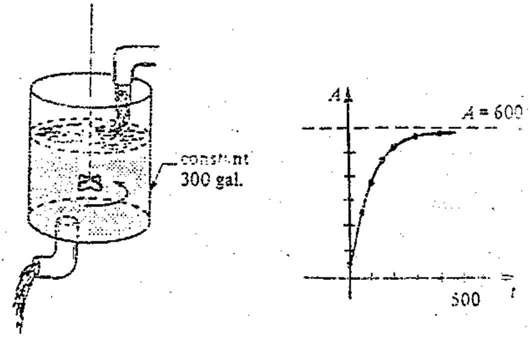
ក្នុងរយៈពេលយ៉ាងយូរបរិមាណសូលុយស្យុងអំបិលគឺ៖

$$(300gal)(2lb/gal) = 600lb$$

ដូចនេះ គេបាន៖

$$A(50) = 266.41$$

$$A(\infty) = 600lb$$

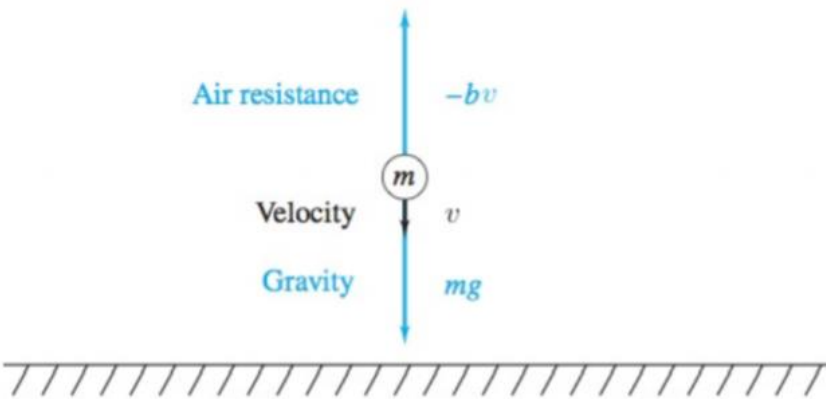


t (minutes)	A (lbs)
50	266.41
100	397.67
150	477.27
200	525.57
300	572.62
400	589.93

៣.៣.៥. ទម្លាក់អង្គធាតុ(Falling Bordy)

ចំណោទ

វត្ថុមួយធ្លាក់ពីលើអាកាសឆ្ពោះទៅផែនដី។ សន្មតថា កម្លាំងដែលមានឥទ្ធិពលលើវត្ថុគឺ **ទំនាញផែនដី** តែមួយប៉ុណ្ណោះ។ ម៉្យាងទៀត ល្បឿននៃវត្ថុជាអនុគមន៍នៃពេលវេលា។



បើ F តាងកម្លាំងសរុបដែលមានអំពើលើវត្ថុ

m ជាម៉ាស់នៃវត្ថុ

v ជាល្បឿននៃវត្ថុ និង

$\frac{dv}{dt}$ ជាសំទុះនៃវត្ថុ

នោះតាមច្បាប់ទី២របស់ញ៉ូតុនគេបាន៖

$$m\frac{dv}{dt}=F$$

គេសន្មតថា v មានទិសដៅវិជ្ជមាននៅពេលវាធ្លាក់ចុះក្រោម។ នៅជិតផែនដី កម្លាំងដោយសារទំនាញផែនដីគឺ mg ដែល g ជាសំទុះទំនាញផែនដី។ កម្លាំងទប់នៃខ្យល់ដែលសមាមាត្រទៅនឹងល្បឿនត្រូវបានអោយដោយ $-bv$ ដែល ជាចំនួនថេរវិជ្ជមានអាស្រ័យនឹងដង់ស៊ីតេនៃខ្យល់ និង រូបរាងនៃវត្ថុ។

ដូចនេះ យើងបានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១ដូចខាងក្រោម៖

$$m\frac{dv}{dt}=mg-bv,\ \ v(0)=v_0$$

ដោះស្រាយសមីការនេះគេបាន៖

$$m\frac{dv}{dt}=mg-bv\Leftrightarrow\frac{dv}{mg-bv}=\frac{dt}{m}$$

$$\int\frac{dv}{mg-bv}=\int\frac{dt}{m}+c$$

$$-\frac{1}{b}\ln|mg-bv|=\frac{t}{m}+c$$

$$mg-bv=ke^{-\frac{bt}{m}},\ \ k=e^{-bc}$$

ដោយដោះស្រាយសមីការនេះធៀបនឹង $v(t)$ គេបាន៖

$$v(t)=\frac{mg}{b}-\frac{k}{b}e^{-\frac{bt}{m}}$$

តែ $v(0)=v_0$ គេបាន៖

$$v(0)=\frac{mg}{b}-\frac{k}{b}e^{0}=v_0$$

$$k=-v_0b+mg$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយនៃចំណោទខាងលើគឺ៖

$$v(t)=\frac{mg}{b}+\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{bt}{m}}$$

៣.៣.៦. សៀគ្វីអគ្គិសនី(Electrical circuits)

១. រ៉េស៊ីស្តង់

បើអាំងតង់ស៊ីតេចរន្ត $i(t)$ ដែលឆ្លងកាត់សៀគ្វីស្មើ R នោះតង់ស្យុង $V_R(t)$ ដែលឆ្លងកាត់រ៉េស៊ីស្តង់ស្មើ៖

$$V_R(t)=R.i(t)$$

២. បូប៊ីន

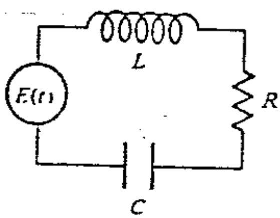
ចំពោះបូប៊ីនមួយនៃ L គិតជា **ហង់រី** នោះតង់ស្យុង $V_L(t)$ ដែលឆ្លងកាត់បូប៊ីនស្មើ៖

$$V_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$$

៣. កុងដង់សាទ័រ

ចំពោះកុងដង់សាទ័រមួយដែលមានកាប៉ាស៊ីតេ C គិតជា **ផារ៉ាត់** នោះតង់ស្យុង $V(t)$ ដែលឆ្លងកាត់ស្មើ៖

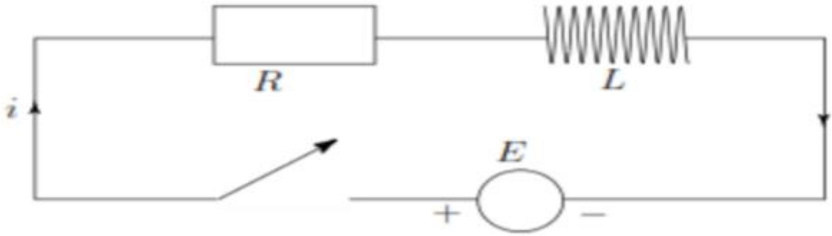
$$V(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau$$



ឧទាហរណ៍

កំណត់ចរន្តអគ្គិសនីប្រសើរបំផុតនៃសៀគ្វីអគ្គិសនីខាងក្រោម (សៀគ្វី RL) ដែលក្នុងនោះមានលក្ខខណ្ឌដើម $i=0$ ត្រង់ $t=0$?

ចម្លើយ



តាមច្បាប់គារឆ្វេសនៃតង់ស្យុង (KVL) គេបាន៖

$$L\frac{di(t)}{dt}+R.i(t)=E,\ i(0)=0\ \ (1)$$

សមីការនេះអាចសរសេរជាទម្រង់សមីការលីនេអ៊ែ៖

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{R}{L}i(t)=\frac{E}{L}\ \ (2)$$

គេបាន៖

$$\mu(t)=e^{\int\frac{R}{L}dt}=e^{\frac{R}{L}t}$$

គេបានសមីការ **(2)** ទៅជា៖

$$e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{di(t)}{dt}+\frac{R}{L}i(t)\right)=e^{\frac{R}{L}t}.\frac{E}{L}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{R}{L}t}.i(t)\right)=e^{\frac{R}{L}t}.\frac{E}{L}$$

$$e^{\frac{R}{L}t}.i(t)=\int e^{\frac{R}{L}t}.\frac{E}{L}dt$$

$$e^{\frac{R}{L}t}.i(t)=\int e^{\frac{R}{L}t}.\frac{E}{L}dt$$
$$=\frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}+C$$

នាំអោយ៖

$$i(t)=\frac{E}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

តែ $i(0)=0$ គេបាន៖

$$i(0)=\frac{E}{R}+Ce^{0}=0$$
$$C=-\frac{E}{R}$$

ដូចនេះ គេបានចម្លើយនៃចំណោទគឺ៖

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

ករណីពិសេស

កាលណា $t\to\infty$ គេបាន អាំងតង់ស៊ីតេចរន្តដែលឆ្លងកាត់សៀគ្វីគឺ៖

$$i(t)=\frac{E}{R}$$

៣.៤. ការអនុវត្តនៃសមីការមិនលីនេអ៊ែ(Applications of Nonlinear Equations)

យើងឃើញថា បើចំនួនប្រជាជន P ត្រូវបានពណ៌នាដោយ $\frac{dP}{dt}=kP,k>0$ (1) ការកកើតឡើងនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះ មិនផ្តល់នូវគម្រូពិតនៃភាពកើនឡើងនៃចំនួនប្រជាជននោះទេ។

នៅឆ្នាំ ១៨៤០ អ្នកគណិតវិទ្យា-ជីវវិទ្យា ជនជាតិ Belgique ឈ្មោះ P.F.Verhulst បានចាប់អារម្មណ៍ទៅលើរូបមន្តគណិតវិទ្យា ចំពោះការព្យាករណ៍ចំនួនប្រជាជននៃប្រទេសផ្សេងៗគ្នា។

សមីការមួយក្នុងចំណោមសមីការដែលគាត់បានសិក្សាគឺ៖

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) \quad (2), a, b: \text{ ថេរវិជ្ជមាន}$$

ហើយសមីការនេះហៅថា **សមីការ** Logistic។ វិធីសាស្ត្រសម្រាប់ដោះស្រាយសមីការ (2) គឺការញែកអថេរ។ យើងបាន៖

$$\frac{dP}{P(a-bP)} = dt \Leftrightarrow \frac{1}{a}\int \frac{dP}{P} - \frac{1}{a}\int \frac{(-b)dP}{(a-bP)} = \int dt$$

$$\frac{1}{a}\ln|P| - \frac{1}{a}\ln|a-bP| = t + c \Leftrightarrow \ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = at + c$$

$$P(t) = \frac{ac_1e^{at}}{1+bc_1e^{at}} = \frac{ac_1}{bc_1 + e^{-at}} \quad (3)$$

បើយក $P(0) = P_0, P_0 \neq a/b$ នោះសមីការ (3) នាំឱ្យ៖

$$c_1 = \frac{P_0}{a - bP_0}$$

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a-bP_0)e^{-at}} \quad (4)$$

រីឯសមីការ ដែលផ្តល់នូវការពណ៌នាពីល្បឿន នៃការរាលដាលមេរោគរបស់មនុស្សម្នាក់ក្នុងចំណោមមនុស្សទាំងមូលឱ្យដោយសមីការ៖

$$\frac{dx}{dt} = kx(n+1-x), k > 0$$

ដោយហេតុថា ល្បឿននៃការចម្លងមេរោគ មិនត្រឹមតែសមាមាត្រទៅនឹងចំនួនមនុស្ស $x(t)$ តែមួយនោះទេ គឺវាសមាមាត្រផងដែរទៅនឹង $y(t)$។ $x(t)$ តាងចំនួនមនុស្សដែលមានផ្ទុកមេរោគ និង $y(t)$ តាងចំនួនមនុស្សមិនមានផ្ទុកមេរោគ។ គេបាន $\frac{dx}{dt} = kxy, k:$ ចំនួនថេរ។

បើមនុស្សម្នាក់ចម្លងទៅមនុស្ស n នាក់នោះ x និង y ទាក់ទងគ្នាដោយ៖

$$x + y = n + 1 \Rightarrow y = (n + 1 - x)$$

ដោយជំនួសតម្លៃ y ចូលក្នុងសមីការដើមគេបាន៖

$$\frac{dx}{dt}=kx(n+1-x), x(0)=1$$

ឧទាហរណ៍

ឧបមាថា មាននិស្សិតម្នាក់ផ្ទុកមេរោគផ្តាសាយ ត្រូវបានគេយកទៅដាក់ក្នុងបរិវេណមហាវិទ្យាល័យមួយដែលមាននិស្សិត 1000 នាក់បូករួមទាំងនិស្សិតម្នាក់នោះផងដែរ។ កំណត់ចំនួននិស្សិតឆ្លងមេរោគក្រោយរយៈពេល 6 ថ្ងៃ បើគេដឹងថា ក្រោយរយៈពេល 4 ថ្ងៃ មាននិស្សិត 50 នាក់ឆ្លងរោគ។

ចម្លើយ

យើងត្រូវដោះស្រាយបញ្ហា $\frac{dx}{dt}=kx(1000-x), x(0)=1$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $a=1000k$ និង $b=k$ ចេញពីសមីការ (4) គេបាន៖

$$x(t)=\frac{1000k}{k+999ke^{-1000kt}}$$

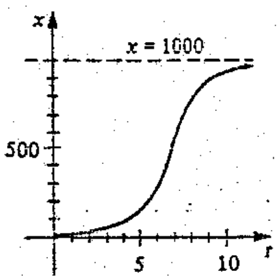
តែ $x(4)=50$ នាំឱ្យ៖

$$50=\frac{1000}{1+999e^{-4000k}} \Leftrightarrow k=0.0009906$$

$$x(t)=\frac{1000}{1+999e^{-0.0009906t}} \Leftrightarrow x(6)=276$$

ដូចនេះ គេបាន៖

$$x(6)=276$$



t days	x (number infected)
4	50 (observed)
5	124
6	276
7	507
8	735
9	882
10	953

សន្និដ្ឋាន

សៀវភៅតូចមួយនេះ ផ្តល់នូវចំណេះដឹងថ្មី បទពិសោធន៍ថ្មី គំនិតថ្មីយ៉ាងច្រើនដល់ពួកយើងទាំងអស់គ្នា។ វាជាវត្ថុចាំបាច់មួយសម្រាប់ អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវ សិស្ស និង និស្សិតទាំងអស់ ដែលតែងជួបនូវបញ្ហាទាំងឡាយទាក់ទងទៅនឹង **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ**។ វាជាប្រភពផ្តល់នូវចំណេះដឹងដែលមានសារៈសំខាន់បំផុត ចំពោះការសិក្សារូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា ជាពិសេសក្នុងផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ។ យើងឃើញថា ការសិក្សាជំពូក១ បង្ហាញពីទ្រឹស្តីទាំងឡាយដែលជាប់ទាក់ទងមានដូចជា ដេរីវេ និង អាំងតេក្រាលជាដើម។ ចំណែកឯការសិក្សានូវជំពូក២វិញនោះគឺ បានផ្តល់នូវចំណេះដឹងជាច្រើនផងដែរខាង និយមន័យទ្រឹស្តីបទ រូបមន្តគ្រឹះ ប្រភេទជាច្រើននៃសមីការលំដាប់មួយ និង ដំណោះស្រាយរបស់វា។ ចំណែកឯជំពូក៣វិញគឺ បានផ្តល់នូវការអនុវត្តយ៉ាងច្រើនក្នុងផ្នែករូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា និង វិទ្យាសាស្ត្រ ដូចជា ការកំណត់រកខ្សែកោងកែងនឹងខ្សែកោងដែលអោយ ភាពកើន និង ភាពថយ ការកើតមាននូវកាបូន ភាពត្រជាក់ និង ការរលាយនូវសារជាតិគីមី និង ការព្យាករណ៍ចំនួនប្រជាជនជាដើម។

សៀវភៅនេះ ជាវត្ថុដ៏មានតម្លៃមួយ សម្រាប់ជាប្រទីបជួយបំភ្លឺដល់អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានទាំងអស់ ជាពិសេសផ្នែកបច្ចេកទេស ជំនួញ និងគ្រប់គ្រង។ វាផ្តល់នូវចំណដឹះងយ៉ាងសំខាន់ ដល់អ្នកបច្ចេកទេស អ្នកជំនួញ និងអ្នកគ្រប់គ្រងទាំងនោះអោយចេះប្រើប្រាស់គណិតវិទ្យា ជាពិសេស **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ** ដើម្បីវិភាគពីបញ្ហាផ្សេៗ។

តាមរយៈការសិក្សាស្រាវស្រាវ លើប្រធានបទនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវចងក្រងសៀវភៅនេះ ក៏សូមចូលរួមផងដែរ ផ្តល់នូវមតិយោបល់មួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

- ការសហការគ្រប់ផ្នែកពីស្ថាប័នរដ្ឋ ឯកជន អង្គការ ក្នុងការយកចិត្តទុកដាក់លើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា ដើម្បីធ្វើយ៉ាងណាអោយសិស្ស និស្សិត មាន

ការចាប់អារម្មណ៍ ស្រឡាញ់ និង មានភាពច្បាស់លាស់ក្នុងមុខវិជ្ជានេះ ងាយស្រួលជួយអភិវឌ្ឍន៍សង្គមជាតិអោយកាន់តែរីកចំរើន។

- ការផ្ដល់ឱកាស ឱ្យអ្នកស្រាវជ្រាវផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រលើ **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ** ក្នុងបញ្ហាដែលកើតមានក្នុងស្ថាប័នរបស់ខ្លួនលើគ្រប់ផ្នែក។
- បង្កើតស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ និង អភិវឌ្ឍន៍ក្នុងរចនាសម្ព័ន្ធទាំងអស់ក្នុងគោលដៅជំរុញកំណើនសេដ្ឋកិច្ច និង បច្ចេកវិទ្យាថ្មីៗក្នុងក្របខណ្ឌ បែបវិទ្យាសាស្ត្រ។

សរុបសេចក្ដីទៅ ទួសបីថា សៀវភៅនេះវាផ្ដល់នូវចំណេះដឹងតិចតួចក៏ពិតមែន ក៏វាបានចូលរួមចំណែកដ៏ធំមួយ ក្នុងការពង្រីកនូវចំណេះដឹង ផ្នែកសិក្សាស្រាវជ្រាវដល់សិស្ស និស្សិត និង អ្នកសិក្សាទាំងឡាយផងដែរ។ ដើម្បីធ្វើយ៉ាងណាអោយការអនុវត្តន៍ទាំងអស់នោះ ប្រកបទៅដោយលទ្ធផលជាវិជ្ជមាន រួមចំណែកក្នុងការអភិវឌ្ឍន៍ជាតិ មាតុភូមិ នាពេលបច្ចុប្បន្ន និង ទៅអនាគត។

គន្ថនិទ្ទេស

1. Ashley Evans, **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល**, 2000.

2. Stephan L. Campbell, ***An Introduction to Differential Equations And Their Applications***, 1990.

3. Dennis G. Zill and Michael R. Cullen, ***Differential Equations With Boundary-Value Problems***, Fourth Edition, U.S.A, 1997.

4. Erwin Kreyszig, ***Advanced Engineering Mathematics***, Seventh Edition, Singapore, 1993.

5. Richard Bronson, Ph.D, ***Theory and Problems of Differential Equations***, Second Edition, Singapore, 1994.

6. J. David Logan, ***A first Course in Differential Equations***, Second Edition, 2011.

7. Richard Bronson. Ph. D, ***Schaum's Easy Outlines, Differential Equations***, McGraw-Hill Companies, 2003.

8. Paul Dawkins, ***Differential Equations***, 2007.

9. Lothar Collatz, ***Differential Equations : An introduction with Applications***, Johnwiley & Sons, 1986.

10. Morris Tenenbaum and Harry Pollard, ***Ordinary Differential Equations***, Dover Publiccations, INC., New York, 1985.

11. https://www.math24.net/topics-first-order-differential-equations/
12. https://byjus.com/maths/first-order-differential-equation/
13. https://sciencenotes.org/dilution-example-problems/
14. https://www.researchgate.net/publication/340923175
15. https://www.researchgate.net/publication/323966036
16. https://www.researchgate.net/publication/330486515