

Hochschule für Technik Stuttgart

Bachelorarbeit

vorgelegt von

Vipin Singh

Bachelorstudiengang Mathematik

Fakultät Vermessung, Informatik und Mathematik

Sommersemester 2022

**Entwicklung eines deflektometrischen
Prüfaufbaus für spiegelnde Prüfobjekte**

ErstprüferIn:
ZweitprüferIn:

Prof. Dr.-Ing. Uwe Müßigmann, Hochschule für Technik Stuttgart
Dipl.-Ing. Sebastian Lichtenberg, NeuroCheck GmbH

Zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	2
Inhaltsverzeichnis	3
Abbildungsverzeichnis	5
Abkürzungsverzeichnis	7
1 Einführung	8
2 Grundlagen zur Deflektometrie	10
2.1 Rekonstruktion von spiegelnden Oberflächen	11
2.1.1 Phasenkodierung	13
2.1.2 Frequenzkodierung	14
2.1.3 Stochastische Kodierung	15
2.1.4 Rekonstruktion der Oberfläche und Regularisierungsproblem	17
2.2 Qualitative Sichtprüfung	18
3 Sichtprüfung durch Lichtstreuung	20
3.1 Prüfaufbau	20
3.2 Verfahren	21
3.3 Einsatz von mehreren Streifenmustern	23
3.4 Optimierungen	28
3.4.1 Unterschiede zwischen Kameraaufnahme und Monitorbild	28
3.4.2 Muster mit unterschiedlichen Streifenbreiten	29
3.4.3 Verknüpfung von mehreren Kameraaufnahmen	31
3.4.4 Nachbearbeitung mit der Fourier-Analyse	32
4 Deflektometrische Registrierung	35
4.1 Bestimmung der deflektometrischen Registrierung	36
4.1.1 Deflektometrische Registrierung ohne Phasenentfaltung	36
4.1.2 Deflektometrische Registrierung mit Phasenentfaltung	38
4.2 Auswertung der deflektometrischen Registrierung	43
5 Fourier-Streifen-Analyse	48

Quellenverzeichnis

49

Abbildungsverzeichnis

2.1	Cloud Gate Chicaog - The Bean	10
2.2	Cloud Gate mit Ausschnitt	11
2.3	Aufbau einer Deflektometrie-Prüfstation	12
2.4	Kodierung und Dekodierung der Objektoberfläche	12
2.5	Sinusoidale Streifenmuster	13
2.6	Muster der Frequenzkodierung	14
2.7	Specklemuster	15
2.8	Prinzip der Zuordnung einer stochastischen Kodierung	16
2.9	Ergebnis der Zuordnung einer stochastischen Kodierung	16
2.10	Regularisierungsproblem	17
2.11	Stereo-Methode zur Lösung des Regularisierungsproblems	18
2.12	Kratzer an Hell-Dunkel-Übergang eines Streifenmusters	19
3.1	Prüfaufbau	20
3.2	Lichtbrechung an einem Kratzer	21
3.3	Kratzer	22
3.4	Eingravierung im Glas	22
3.5	Rechteckschwingung bzw. <i>engl.: square wave</i>	24
3.6	Rechteckförmiges Streifenmuster	25
3.7	Zu verknüpfende Bilder	25
3.8	Verknüpfte Bilder über Minimierung und Maximierung	27
3.9	Verknüpfte Bilder über Differenz	27
3.10	Unterschied zwischen Muster und Kameraaufnahme	28
3.11	Grauwerteverlauf in Form einer Impulsschwingung bzw. <i>engl: pulse wave, rectangular wave</i>	29
3.12	Sägezahnschwingung bzw. Kippschwingung	30
3.13	Einheits-Impulsschwingung	30
3.14	Rechteckförmiges Streifenmuster	31
3.15	Prozess der Hervorhebung von Oberflächendefekten	32
3.16	Amplitudenspektrum des Gesamtbildes	33
3.17	Bild mit angewandtem frequenzselektives Filter	33
4.1	Bestimmung eindeutiger Position	40

4.2	Darstellung Spalten- und Zeilenregistrierung	44
4.3	Darstellung Spalten- und Zeilenregistrierung eines Brillenglases	44
4.4	Spiegelndes Porzellanbruchstück mit Delle	45
4.5	Deflektometrische Registrierung bei Delle	45
4.6	Hervorhebung von Pickeln auf reflektierenden Oberflächen.	46

Abkürzungsverzeichnis

L_{height} Höhe des Monitorbildes in Pixel. 24, 31, 36, 38, 39, 44

L_{width} Breite des Monitorbildes in Pixel. 24, 25, 29–31, 36–42, 44

\mathbb{R} Reelle Zahlen. 30, 35, 43

\mathbb{D} Definitionsmenge. 42, 43

\mathbb{W} Wertemenge. 43

$f_{r,x}$ Bild der deflektometrischen Registrierung der Spaltenpositionen. 43–47

$f_{r,y}$ Bild der deflektometrischen Registrierung der Zeilenpositionen. 43–46

l_r Deflektometrische Registrierung. 35, 37, 41–44, 47

$l_{r,x}$ Deflektometrische Registrierung der Spaltenpositionen. 35–39, 41–43

$l_{r,y}$ Deflektometrische Registrierung der Zeilenpositionen. 35–37, 39, 41–43

Kapitel 1

Einführung

Durch die optischen Besonderheiten von spiegelnd glänzenden Oberflächen treten solche in der Industrie an vielen Stellen auf. Speziell in der Automobilindustrie werden täglich große Karosserieflächen glänzend lackiert. Alleine in Deutschland wurden in den Jahren von 1990 bis 2021 im Durchschnitt ungefähr 5 Millionen Personenkraftwagen pro Jahr produziert. [1] Ein großer Teil der Fahrzeuge erhalten nach der Lackierung eine spiegelnde Oberfläche. Solche Oberflächen müssen durch besondere Verfahren auf Defekte überprüft werden. Dabei sorgen spekulare Reflexionen dafür, dass die Oberflächen nicht direkt, sondern über ihre Spiegelbilder der Umgebung betrachtet werden.

Die riesige Menge an Oberflächen macht es für die Qualitätssicherung unumgänglich die Prüfung durch automatisierte Prozesse zu integrieren. Dabei stoßen die üblichen Verfahren der industriellen Bildverarbeitung auf ihre Grenzen, sodass neue Methoden eingeführt werden müssen. Diese speziellen Anwendungen erfordern den Einsatz von deflektometrischen Prüfaufbauten. In der Industrie sind solche Verfahren schon seit Längerem zur Analyse der Topographie von spiegelnden Freiformflächen etabliert. Deflektometrische Verfahren funktionieren nach einem ähnlichen Prinzip, wie auch die Inspektion von spiegelnden Oberflächen durch Menschen. Das wissenschaftliche Gebiet der Deflektometrie ist auch heute noch Thema für viele Forschungsarbeiten und wird stetig weiterentwickelt.

Im Rahmen der Arbeit werden spekular reflektierende Objektoberflächen unter Projektion von bekannten Mustern durch eine Kamera aufgenommen, anschließend analysiert und auf Defekte überprüft. Welche Informationen können aus der Beobachtung von Spiegelbildern gewonnen werden? Wie sehen allgemein anwendbare Methoden aus, um spiegelnde Oberflächen erfolgreich zu bewerten? Das Ziel der Arbeit ist es, diese Fragen zu erforschen und aufzuklären. Des Weiteren sollen ein Aufbau, die Ansteuerung von Beleuchtung und Kamera und die notwendige Auswertung des Bildmaterials entwickelt werden, durch welche eine Erkennung von Oberflächendefekten ermöglicht wird. Die Umsetzung soll dabei in Form einer Softwareerweiterung für NeuroCheck erfolgen, eines sogenannten *Plug-ins*.

Während der Arbeit soll außerdem ein bestimmter Sonderfall genauer betrachtet werden - transparente Prüfobjekte. Die Problematik ist dabei, dass man ohne Weiteres kein sichtbares Muster auf die Oberfläche projizieren kann. Dafür gibt es verschiedene Lösungsansätze

wie z. B. die Auftragung einer undurchsichtigen Beschichtung. Eine andere Möglichkeit ist eine Veränderung in der Beleuchtungskomponente. Anstatt ein Muster auf das Objekt zu projizieren, kann man eine Durchlichtbeleuchtung nutzen. Das heißt, dass man auf einem Bildschirm unter dem transparenten Prüfobjekt verschiedene Muster anzeigt.

Durch die aufgenommenen Muster können Aussagen über die Oberflächenbeschaffenheit getroffen werden. Abhängig von den verwendeten Mustern und der Auswertung sollen damit bestimmte Fehlstellen kenntlich gemacht werden. Als Fehlstellen gelten Verformungen und Oberflächendefekte wie z. B. Dellen, Kratzer oder matte Stellen.

Kapitel 2

Grundlagen zur Deflektometrie

Zunächst soll im folgenden Kapitel auf die Grundlagen der Deflektometrie und den Stand der Technik eingegangen werden. Der Begriff „Deflektometrie“ leitet sich aus dem lateinischen Wort „deflectere¹“ und dem griechischen Wort „métron²“ ab. Somit bedeutet die Deflektometrie wörtlich übersetzt „Messung der Ablenkung“. Im wissenschaftlichen Kontext wird die Deflektometrie wie folgt definiert:

Definition 2.1: Deflektometrie

Die *Deflektometrie* bezeichnet allgemein alle Methoden zur berührungslosen optischen Erfassung von Gestaltinformationen spiegelnder Oberflächen durch automatische Auswertung von Spiegelbildern bekannter Szenen. [2]

Die Übersetzung „Messung der Ablenkung“ bezieht sich dabei auf das gemessene Spiegelbild der bekannten Szene. Die Szene wird dabei über eine Oberfläche abgelenkt und schließlich durch einen Sensor als Spiegelbild aufgenommen. Aus dem Zusammenhang zwischen der Szene und dem Spiegelbild können damit Gestaltinformationen über die spiegelnde Oberfläche berechnet werden.



Abbildung 2.1: Cloud Gate Chicago - The Bean [3]

¹lat: deflectere: abweichen, abbiegen, ablenken

²griech: μέτρον : Maß, Messung

In Abbildung 2.1 erkennt man eine spiegelnde Skulptur, dessen Oberfläche ausschließlich durch die Umgebung und die Spiegelung definiert ist. Dabei ist es für das menschliche Gehirn zunächst nicht schwierig die Oberflächenform zu interpretieren. Das liegt an der Betrachtung der Kontextinformation. Man erkennt z. B. über die Gebäude im Hintergrund die Form der Skulptur. Zusätzlich mit der Spiegelung der Szene kann man die Krümmung der Oberfläche deuten. Wenn man den Hintergrund ausblendet, erkennt man die Schwierigkeit der Thematik (siehe Abbildung 2.2).



Abbildung 2.2: Cloud Gate mit Ausschnitt. *in Anlehnung an [3]*

Alleine aus dem rechten Ausschnitt von Abbildung 2.2 ist es schon schwieriger zu beurteilen, wie die Skulptur geformt sein könnte. Zieht man nun Vorwissen über die gespiegelte Szene hinzu, wie z. B. das Wissen über senkrecht stehende Gebäude in Chicago, kann man Aussagen zur Gestalt der lokalen Oberfläche treffen. Die Schwierigkeit für die automatische Auswertung ist dabei eine eindeutige Zuordnung zwischen der Szene und dem Spiegelbild aufzustellen. Diese und ähnliche Aufgaben, in denen Spiegelbilder analysiert werden, fallen in das Themengebiet der Deflektometrie.

Die Definition 2.1 öffnet ein großes Feld für verschiedene Verfahren und Anwendungen. Die Verfahren der Deflektometrie sind auch heute noch Themen für viele Forschungsarbeiten. Im Folgenden soll dabei auf den Stand der Technik der Deflektometrie eingegangen werden.

2.1 Rekonstruktion von spiegelnden Oberflächen

Das Hauptforschungsgebiet der gegenwärtigen Deflektometrie die Generierung von dreidimensionalen Modellen von spiegelnden Objektoberflächen ist. Der Aufbau eines solchen Anwendungsfalls sieht eine Beleuchtungseinheit (z. B. einen Bildschirm), ein Sensor (z. B. eine Kamera) und ein zu untersuchendes Objekt vor.

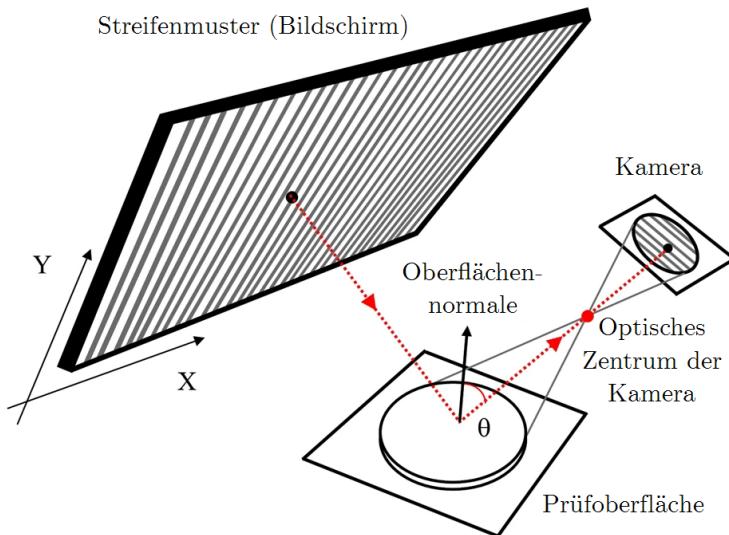


Abbildung 2.3: Aufbau einer Deflektometrie-Prüfstation. *in Anlehnung an [4]*

Wie in Abbildung 2.3 angedeutet, wird ein Muster als bekannte Szene auf ein Prüfobjekt projiziert und anschließend von einer Kamera aufgenommen. Das grundlegende Prinzip basiert darauf, dass jeder durch die Kamera aufgenommene Punkt des Objekts dem richtigen Punkt auf dem Bildschirm zugeordnet wird. Dabei ordnet man jedem Pixel des projizierten Musters sein zugehöriges Pixel des erzeugten Musters auf dem Bildschirm zu. Durch diese Zuordnung von Kamera- und Bildschirmpunkten lassen sich Neigungsinformationen der Oberfläche berechnen. Dies kann durch Strahlenverfolgungen erreicht werden. In Abbildung 2.3 lässt sich das über die in Rot eingeziehenen Vektoren erkennen. Wie bereits erwähnt, liegt die Schwierigkeit in der eindeutigen Zuordnung zwischen der Szene und dem Spiegelbild. Hierfür gibt es verschiedene Ansätze dies zu erreichen. Grundlegend ist dabei die Kodierung der Objektoberfläche, damit diese durch die Kamera aufgenommen werden kann. Die Kamera digitalisiert dann die kodierte Oberfläche zu einem oder mehreren Bildern. Unter Berücksichtigung der Kodierung können die Bilder durch einen entsprechenden Software-Algorithmus dekodiert werden und man erhält damit die Zuordnung zwischen der Szene und dem Spiegelbild (siehe Abbildung 2.4).

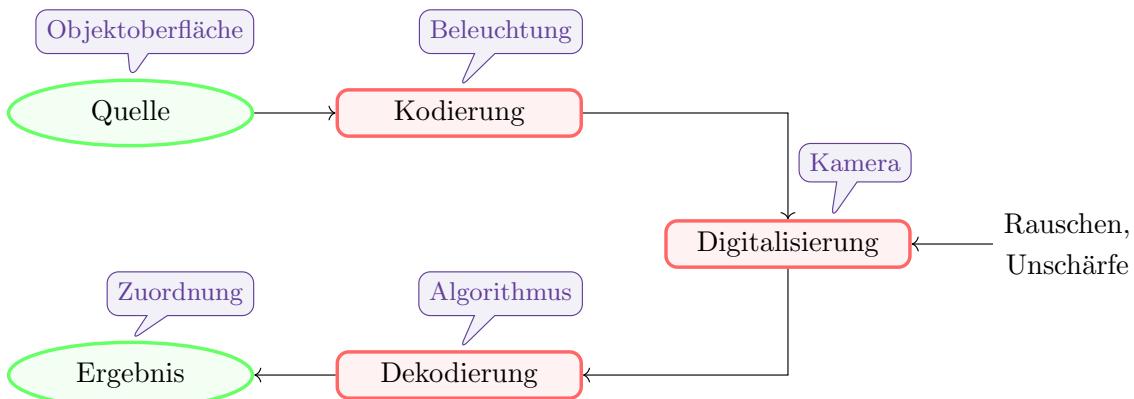


Abbildung 2.4: Kodierung und Dekodierung der Objektoberfläche.

Die Art, wie man die Informationen in den digitalen Kanal überträgt ist entscheidend für eine gute Zuordnung. Aus dem Grund werden sich einige Gedanken über die Kodierung der Objektoberfläche gemacht. Auf eine Auswahl von Möglichkeiten soll im Folgenden eingegangen werden.

2.1.1 Phasenkodierung

Die am weitest eingesetzte Kodiermethode in dem Kontext der Deflektometrie ist die Phasenkodierung. Diese Verfahren werden in dem Themengebiet der „Phasenmessende Deflektometrie“ beschrieben. Dabei verwendet man Streifenmuster, die entlang der Ausbreitung der Streifen den Grauwerteverlauf einer Sinus-Funktion annehmen. Solche Muster nennt man auch sinusoidale Streifenmuster. Die Szene bzw. der Monitor wird dabei über die Phase der Sinus-Funktion kodiert. Das heißt, jeder Punkt auf einem Monitor, angegeben durch eine x - und eine y -Koordinate, wird durch eine Phase ϕ_x in x -Richtung und eine Phase ϕ_y in y -Richtung kodiert. Verwendet man Streifenmuster, stellt man die Kodierung in zwei Bildern dar. Das erste Bild kodiert die Spaltenpositionen durch die Phasen ϕ_x und das zweite Bild kodiert die Zeilenpositionen ϕ_y (siehe Abbildung 2.5).

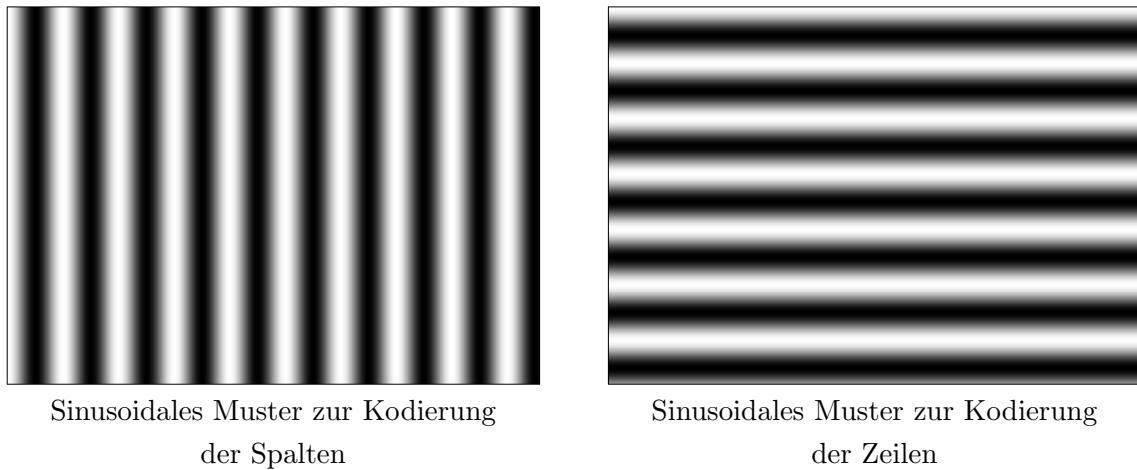


Abbildung 2.5: Sinusoidale Streifenmuster zur Kodierung der Szene durch die Phasen (ϕ_x, ϕ_y) .

Der Vorteil ist dabei die Kodierung durch die Grauwerte, die unabhängig von benachbarten Positionen dekodiert werden können. Zur Dekodierung müssen aus den Grauwerten zunächst die Phasen bestimmt werden. Dies funktioniert über ein sogenanntes Phasenschiebeverfahren [5], bei dem weitere Bildaufnahmen mit Phasenverschiebungen der Sinus-Funktion vorgenommen werden. Durch die Periodizität der Sinus-Funktion sind die bestimmten Phasen zunächst noch relativ zu den einzelnen Perioden angegeben. In einem weiteren Schritt muss eine sogenannte Phasenentfaltung bzw. „Unwrapping“ durchgeführt werden (siehe auch Definition 4.2), damit die absoluten Phasen (ϕ_x, ϕ_y) bestimmt werden. Die Dekodierung über das „Unwrapping“ erfolgt dabei durch die Verwendung von weiteren sinusoidalen Mustern mit unterschiedlicher Frequenz. Diese Art der Kodierung erfordert damit mehrere Bilder. Ein solches Verfahren wird im Kapitel 4.1 genauer beschrieben.

Es sind damit zunächst mehrere Bildaufnahmen erforderlich. Da solche Verfahren damit mehr Ressourcen verwenden, fokussieren sich einige Forschungsarbeiten die Anzahl der benötigten Muster zu reduzieren. Der heutige technische Stand, ermöglicht es bereits, z. B. durch Überlagerung von Mustern und weitere Optimierungen, die Phasendekodierung durch eine einzige Kameraaufnahme umzusetzen(vgl. [6]).

2.1.2 Frequenzkodierung

Als Alternative zur Phasenkodierung kann man die Sinus-Funktion auch nutzen um die Ortskoordinaten des Bildschirms über Frequenzen zu kodieren. Hierfür eignet sich die Darstellung der Koordinaten in der Polarform.

$$(x, y) \mapsto (r, \phi)$$

Wenn man im Folgenden den Radius r einer speziellen Frequenz und die Phase ϕ als Phasenverschiebung einer Sinus-Funktion zuweist, erhält man zeitabhängige Muster. So könnte zum Beispiel durch

$$f_t(r, \phi) = 1 + \sin(2\pi rt + \phi)$$

die Kodierung der Szene in Abhängigkeit der Zeit t angegeben sein. In Abbildung 2.6 wird eine Kodierung dieser Art zu bestimmten Zeitpunkten abgebildet.

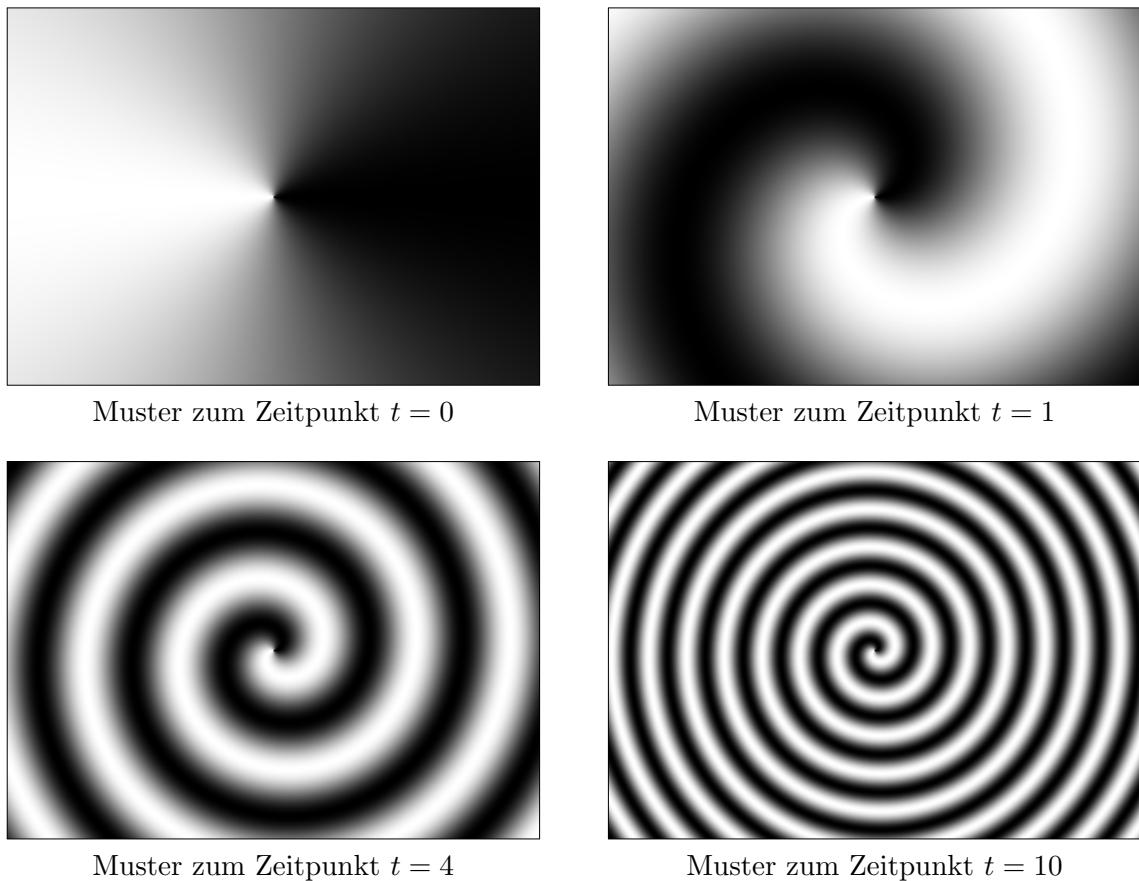


Abbildung 2.6: Muster der Frequenzkodierung der Szene zu festen Zeitpunkten t .

Zur Dekodierung muss hier über eine gewisse Zeit die Frequenz der einzelnen Bildpunkte gemessen werden. Zusätzlich muss der Phasenwinkel bestimmt werden. Dafür kann ein ähnliches Verfahren wie auch bei der Bestimmung der Phase im vorhergehenden Abschnitt 2.1.1 eingesetzt werden. Zur Optimierung des Rechenaufwands ist es auch möglich, jeder Ortskoordinate eine eigene Frequenz zuzuweisen, damit man sich die Bestimmung der Phase sparen kann.

Da in diesem Kodierverfahren nicht mehr die Grauwerte des Bildes selbst den Ort kodieren, ist es unempfindlich gegenüber Nichtlinearitäten in den Anzeige- oder Aufnahmefarben. Außerdem lassen sich mehrere Signale überlagern und genau durch die Frequenz trennen. Ein großer Nachteil im Vergleich zur Phasenkodierung ist allerdings die lange Messzeit der Frequenz [7].

2.1.3 Stochastische Kodierung

Die stochastische Kodierung nutzt ein zufällig generiertes Muster als Szene. Geeignet für dieses Verfahren sind sogenannte „Specklemuster“ [8]. Es handelt sich dabei um bandbegrenzte Muster mit zufällig verteilten Grauwerten. Aufgrund der Unschärfe und dem Rauschen, welche in der Aufnahme durch eine Kamera einfließen, ist die Bandbegrenztheit notwendig um eine Dekodierung zu ermöglichen. Abbildung 2.7 zeigt ein solches Muster.

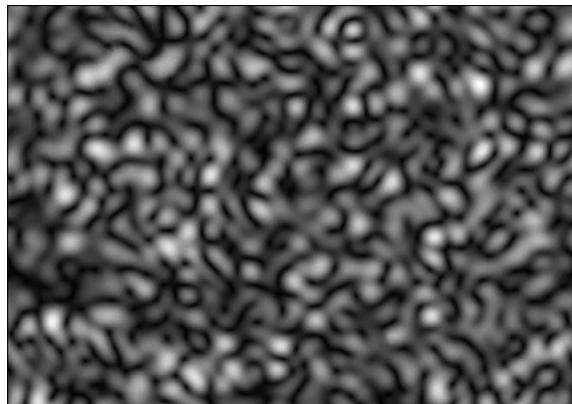


Abbildung 2.7: Specklemuster.

Das Grundprinzip der Dekodierung für dieses Kodierverfahren ist das Verfolgen der Punkte beim Verschieben des Specklemusters. Es wird zunächst die Spiegelung des Specklemusters aufgenommen und ein Referenzpunkt definiert. Nach der Verschiebung des Specklemusters (z. B. in x-Richtung) wird dieser Referenzpunkt in dem zweiten Bild über seine Umgebung gesucht. Dabei verwendet man einen Algorithmus zur Berechnung der zweidimensionalen Bildkorrelation, die die höchste Übereinstimmung mit der Umgebung sucht. Wenn der verschobene Referenzpunkt gefunden wurde, wird an derselben Stelle der Punkt im ersten Bild markiert. Der markierte Punkt ist dann der neue Referenzpunkt, der im zweiten Bild gesucht wird. Dieser Vorgang wiederholt sich, solange die Referenzpunkte im Bild liegen. Abbildung 2.8 zeigt schematisch das Verfahren zur Dekodierung.

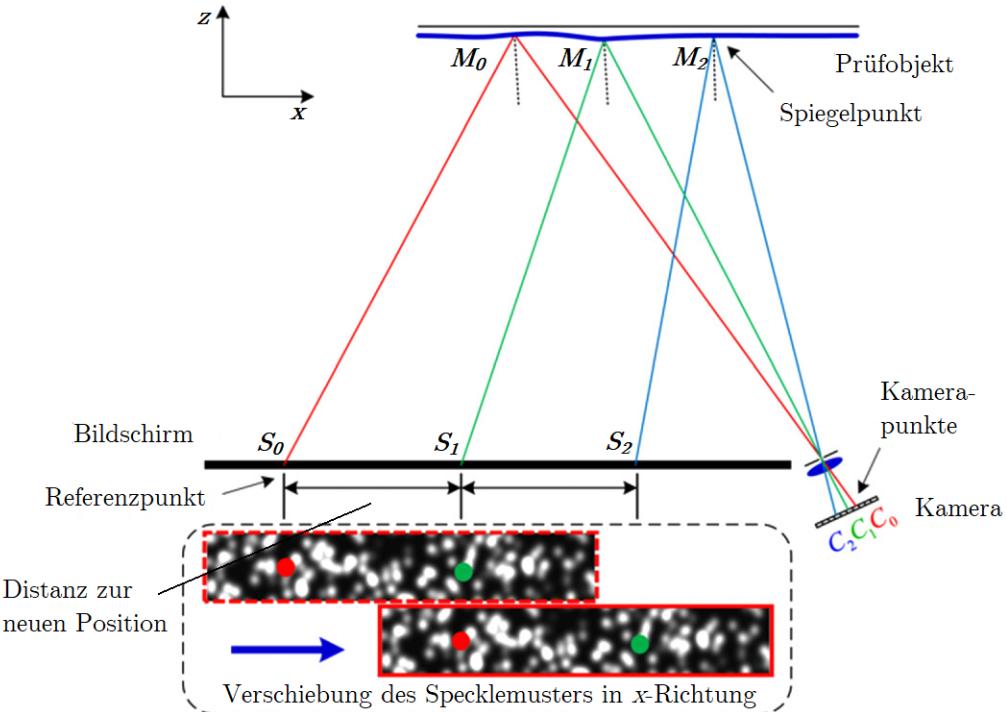


Abbildung 2.8: Prinzip der Zuordnung einer stochastischen Kodierung. *in Anlehnung an [8]*

Führt man dasselbe auch für die andere Richtung (z. B. in y-Richtung) durch, erhält man ein Raster auf dem Objekt, an dem die Objektpunkte zugeordnet wurden (siehe Abbildung 2.9).

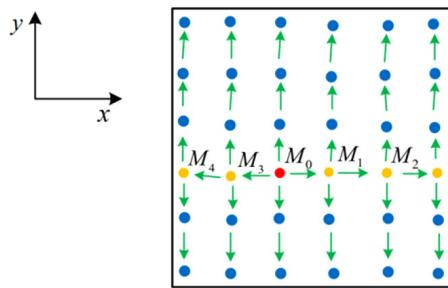


Abbildung 2.9: Ergebnis der Zuordnung einer stochastischen Kodierung. Die grünen Pfeile zeigen an, von welchem Referenzpunkt man auf die nächste Zuordnung kam. *in Anlehnung an [8]*

Im Vergleich zu den vorgestellten Kodierverfahren in den vorherigen Abschnitten 2.1.1 und 2.1.2, liefert die Dekodierung in diesem Fall nur eine begrenzte Auflösung und keine vollflächige Zuordnung. Außerdem ist dieses Verfahren nicht anwendbar für Objekte, die eine große Verzerrung der Muster erzeugen, da die zweidimensionalen Bildkorrelation ansonsten die Referenzpunkte nicht finden kann. Dennoch sind die Vorteile dieses Verfahrens der geringe Rechenaufwand und die Möglichkeit durch drei Bilder eine erfolgreiche Dekodierung durchzuführen [8].

2.1.4 Rekonstruktion der Oberfläche und Regularisierungsproblem

Durch das Vorgehen nach Abbildung 2.4 und die beschriebenen Kodiermöglichkeiten kann die Zuordnung der Kamerapunkte und der Bildschirmpunkte erfolgen. Mithilfe weiterer Schritte kann man daraus die Oberfläche rekonstruieren.

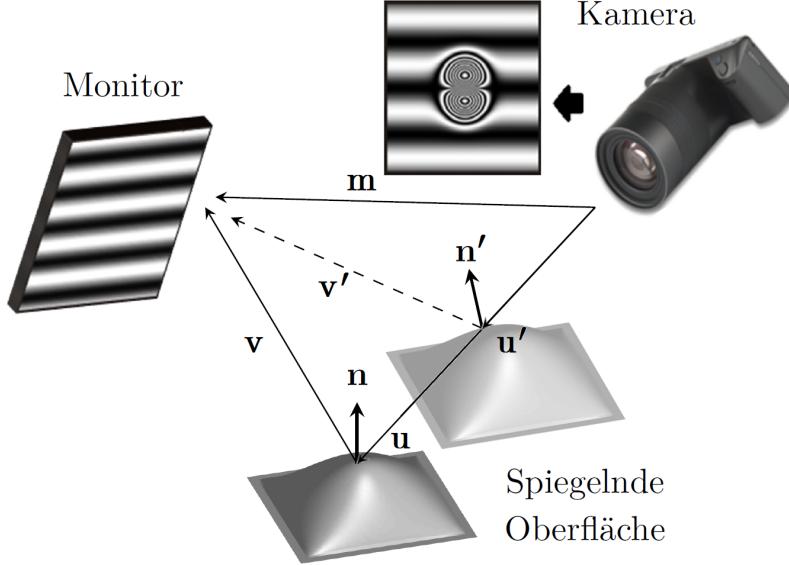


Abbildung 2.10: Mehrere Positionsmöglichkeiten für die spiegelnde Oberfläche bei selber Zuordnung von Kamera- und Bildschirmpunkten, auch Regularisierungsproblem genannt. *in Anlehnung an [9]*

Abbildung 2.10 zeigt die Strahlenverfolgung zur Bestimmung der Oberflächennormalen n . Zunächst benötigt man neben der Zuordnung zusätzliche Informationen über den Systemaufbau. Das umfasst die Positionen und Ausrichtungen der Kamera und des Monitors im Raum, womit man die Zuordnung in Weltkoordinaten angeben kann. Dadurch ist der Vektor m , sowie die Richtung des Sichtvektors u bestimmt. Man weiß zwar welcher Kamerapunkt welchen Punkt des Bildschirms sieht, allerdings ist dadurch das optische System nicht ausreichend beschrieben um die Länge des Sichtvektors u anzugeben. Es fehlt die Lage der Oberfläche. Wäre diese bekannt, könnte der Reflexionsvektor v mit

$$v = m - u$$

bestimmt werden. Mithilfe des Reflexionsgesetzes kann man aus dem Reflexionsvektor v und dem Sichtvektor u den Normalenvektor n bestimmen:

$$n = \frac{v - u}{\|v - u\|} \quad (2.1)$$

Der Sichtvektor u lässt sich für jeden Kamerapunkt aufstellen. Berechnet man nach der Überlegung die Normalenvektoren n für jeden Kamerapunkt, erhält man ein Vektorfeld, welches Normalenfeld genannt wird. Damit wären die Neigungsinformation der Oberfläche bekannt.

Durch die unzureichende Information über die Lage der spiegelnden Oberfläche, erhält man entlang der Richtung eines Sichtvektors u unendlich viele potentielle Normalenvektoren n' . Man bekommt somit auch viele verschiedene Normalenfelder für eine eindeutige Zuordnung von Kamera- und Bildschirmpunkten. Diese Mehrdeutigkeit wird als Regularisierungs- oder Deflektometrieproblem bezeichnet [10]. Zur Auflösung des Regularisierungsproblems gibt es verschiedene Ansätze. Ein solcher Ansatz ist die Stereo-Methode. Dabei werden zwei Aufnahmen aus unterschiedlichen Positionen verwendet. Man bestimmt für beide Aufnahmen jeweils eine Zuordnung von Kamera- und Bildschirmpunkten. Somit entstehen für beiden Aufnahmen mehrere potentielle Normalenfelder. Bestimmt man die Korrelation zwischen den Normalenfeldern der unterschiedlichen Aufnahmen, sollte man eine Lage finden, an denen die Normalenfelder übereinstimmen. Das Normalenfeld in dieser Lage entspricht damit dem tatsächlichen Normalenfeld (siehe Abbildung 2.11). Dieses und auch andere Verfahren zur Auflösung des Regularisierungsproblems ist Thema der Dissertation von J. Balzer [10].

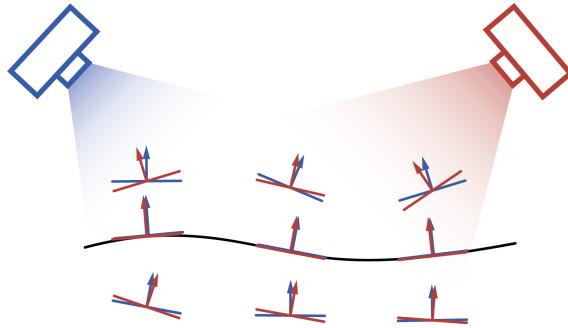


Abbildung 2.11: Stereo-Methode zur Auflösung der Mehrdeutigkeit der Normalenfelder.
[9]

Schließlich ist es möglich, aus dem Normalenfeld die räumlichen Informationen der Oberfläche zu berechnen. Dafür kann man zunächst aus den Normalenvektoren die zugehörigen Tangentialebenen berechnen, die über je zwei Richtungsvektoren definiert sind. Diese Richtungsvektoren bilden die Tangentialfelder des Prüfobjekts. Man kann über eine Integration der Tangentialfelder in ausgewählte Richtungen Kurven bestimmen, die in der Oberfläche des Objekts liegen. Durch diese Integration erhält man einen Höhenzusammenhang der Oberflächenpunkte. Wenn zusätzlich die Lage eines Oberflächenpunkts im Raum gegeben ist, kann man die Positionen der Oberflächenpunkte im Raum angeben [11].

2.2 Qualitative Sichtprüfung

Der Bereich der qualitativen Sichtprüfung hat grundlegend die Aufgabe, spiegelnde Oberflächen nach bestimmten Kriterien in gut und fehlerhaft zu unterteilen. Die Aufbauten für solche Verfahren sehen in der Regel ähnlich aus wie auch in Abbildung 2.3. Zur Analyse dieser spiegelnden Oberflächen ist es nicht unbedingt nötig, ein dreidimensionales Oberflächenmodell zu erzeugen. Ein wesentlicher Unterschied ist deshalb, dass die Informationen über den Systemaufbau nicht zwingend notwendig für Berechnungen sind. Um

eine möglichst allgemeine Lösung zu entwickeln, ist dies ein essenzieller Vorteil. Die Vorgehensweise bei diesen Verfahren basiert in den meisten Fällen darauf, die Abweichungen der Oberflächenstruktur zu einem Referenzobjekt zu bewerten. Abhängig von den einzelnen Oberflächenmerkmalen können verschiedene Muster und Strategien zur Auswertung eingesetzt werden.

In seiner Dissertation „Deflektometrie zur automatischen Sichtprüfung und Rekonstruktion spiegelnder Oberflächen“ [11] listet Stefan Bruno Werling vom Karlsruher Institut für Technologie einige Auswertungsmöglichkeiten auf. Daraus sind die Folgenden eine Auswahl seiner Strategien:

- Untersucht man auf der Oberfläche eines Objekts ein sinusförmiges Streifenmuster, dann können im Frequenzraum Abweichungen des Musters von einem „Idealmuster“ bzw. Referenzmuster festgestellt werden. Dadurch entdeckt man Unterschiede in der Oberflächenkrümmung. Die Transformation des Bildes in den Frequenzraum wird durch die Fourier-Transformation erreicht.
- Nutzt man zur Auswertung ein Schachbrettmuster, so können durch die Wahl eines geeigneten Schwellwerts bestimmte Flächen segmentiert und geometrisch analysiert werden. Nach der Analyse sollen Anomalien der geometrischen Merkmale Aussagen über die Krümmung treffen.
- Besonders kleine Fehler und Defekte der Oberflächenstruktur lassen sich an Hell-Dunkelübergängen gut hervorheben. Hierfür kann man einfache Streifenmuster analysieren, wie es in Abbildung 2.12 gezeigt ist.

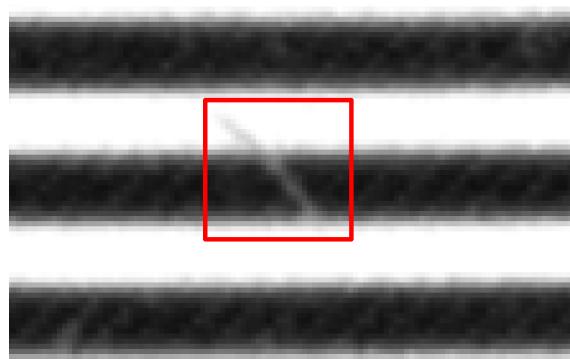


Abbildung 2.12: Kratzer an Hell-Dunkel-Übergang eines Streifenmusters

Durch die Variabilität der Deflektometrie und der offenen Definition der qualitativen Sichtprüfung lassen sich z. B. durch Veränderung des Musters zahlreiche verschiedenste Verfahren aufstellen, um eine Objektoberfläche zu analysieren. Aus dem Grund kann keine allgemeine Funktionsweise von deflektometrischen Verfahren für die qualitative Sichtprüfung beschrieben werden.

Kapitel 3

Sichtprüfung durch Lichtstreuung

Dieses Kapitel legt den Schwerpunkt auf die Erkennung von kleineren Oberflächendefekten auf transparenten Prüfobjekten, wie z. B. Kratzer. Dabei sollen insbesondere Beschädigungen von Brillengläsern kenntlich gemacht werden.

3.1 Prüfaufbau

Die folgende Abbildung 3.1 zeigt eine Skizze des verwendeten Prüfaufbaus. Zur Vereinfachung wird die Skizze ohne Halterungen erstellt.

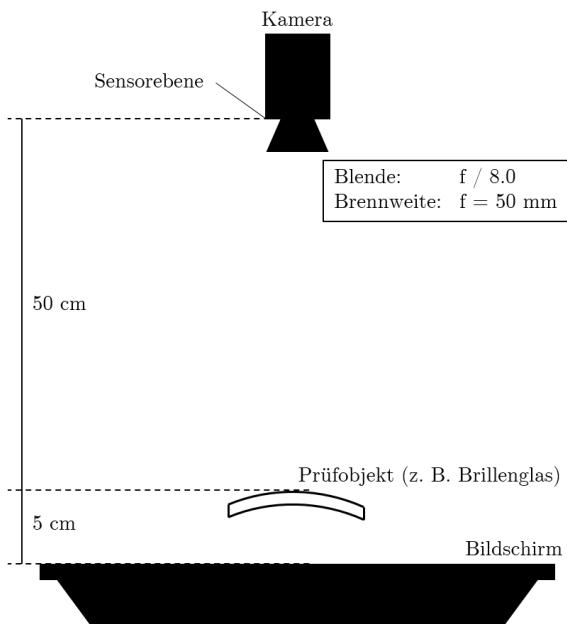


Abbildung 3.1: Prüfaufbau (Abbildung nicht maßstabsgerecht)

Die Parameter des Prüfaufbaus wie z. B. Kameraeinstellungen und Entfernungen lassen sich aus Abbildung 3.1 entnehmen. Es gilt zu beachten, dass die Entfernung zur Kamera nicht am Objektiv, sondern an der Sensorebene gemessen wird. Der Grund liegt darin, dass Objektive unterschiedliche Größen haben, weshalb die Entfernung andernfalls für verschiedene Objektive unterschiedlich sein würde. Die Sensorebene einer Kamera ist die

Position des Kamerasensors, an der das einfallende Licht aufgenommen wird. Zur Erzeugung des Bildmaterials wird ein Monitor als Durchlichtbeleuchtung verwendet, um die speziellen Eigenschaften der Lichtstreuung an den Oberflächenbeschädigungen zunutze zu machen. Auf diese Eigenschaften wird im Kapitel 3.2 weiter eingegangen. Die Objekte zwischen der Kamera und der Beleuchtung sind dabei transparente Brillengläser mit Oberflächenbeschädigungen. Die Oberflächenbeschädigungen umfassen Eingravierungen, Kratzer und ähnliche Fehlstellen.

3.2 Verfahren

Es soll ein Verfahren beschrieben werden, dass es ermöglicht, Kratzer und ähnliche Defekte mittels Methoden aus der Deflektometrie sichtbar zu machen. Man nutzt die abweichen- de Lichtstreuung an Kratzern und anderen Oberflächenbeschädigungen im Gegensatz zur idealen Oberfläche des Objekts. Das beschriebene Verfahren lässt sich mit geeigneter Anpassung des Versuchsaufbaus auch auf spiegelnde Oberflächen anwenden. Dabei gilt zu beachten, dass Spiegelbilder anstelle von Bildern der Durchlichtprojektionen ausgewertet werden.

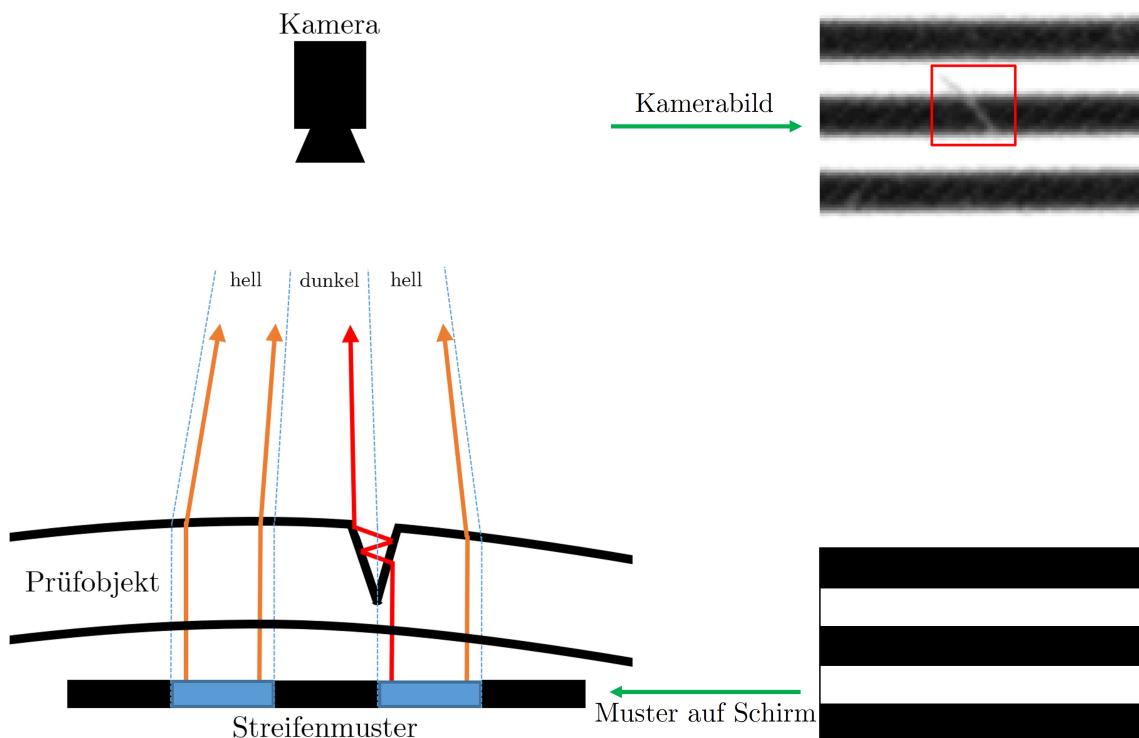


Abbildung 3.2: Querschnitt eines Brillenglases mit Lichtbrechung an einem Kratzer. Die blauen Stellen entsprechen den hellen Streifen und die schwarzen Stellen den dunklen Streifen auf dem Monitor. (Abbildung nicht maßstabsgetreu)

In Abbildung 3.2 wird schematisch die Überlegung hinter dem Ansatz dargestellt. Man nimmt ein Streifenmuster und projiziert dieses auf ein spiegelndes Prüfobjekt. Für ein transparentes Prüfobjekt kann man das Streifenmuster als Durchlichtbeleuchtung von un-

ten projizieren. Mit der Kamera wird schließlich eben dieses projizierte Muster aufgenommen. Dabei fällt an den Hell-Dunkelübergängen Licht vom hellen Streifen in den Kratzer. Durch den Kratzer werden manche Lichtstrahlen so gestreut, dass diese an der Stelle des dunklen Streifens in den Kamerasensor gelangen (siehe roten Lichtstrahl in Abbildung 3.2). Man erkennt im Kamerabild eine lokale Fehlstelle, da der Kratzer heller ist als der umliegende dunkle Streifen. Analog dazu erkennt man im hellen Streifen lokal eine etwas dunklere Stelle. Durch Anpassung der Kameraeinstellungen kann man beeinflussen, wie deutlich man den Kratzer sieht. Z. B. kann dies durch die Erhöhung der Belichtungszeit oder weitere Öffnung der Blende geschehen. Dadurch wird ein Oberflächendefekt im dunklen Streifen zwar besser und stärker sichtbar, allerdings ist es möglich, die Informationen über den Defekt im hellen Streifen zu verlieren. Dies liegt daran, dass auch die dunklere Stelle im hellen Streifen so hell werden kann, dass sie nicht mehr von dem hellen Streifen selbst zu unterscheiden ist. Dieses Problem erkennt man in der Abbildung 3.3.

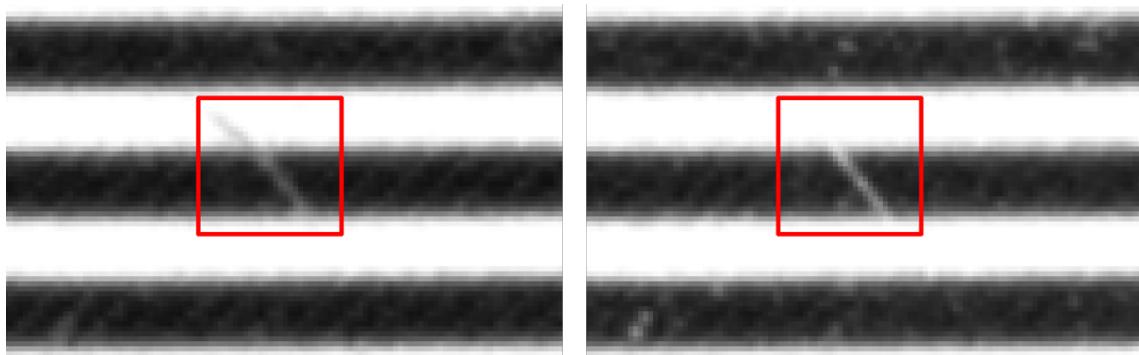


Abbildung 3.3: Kratzer an Hell-Dunkel-Übergang. Links mit weniger weit geöffneten Blende im Vergleich zu rechts.

Trotz der fehlenden Information hat das rechte Bild den Vorteil, dass durch den höheren Kontrast zwischen dem Oberflächendefekt und dem Hintergrund eine bessere Erkennung möglich ist. Je ausgeprägter die Beschädigung in der Oberfläche ist, desto mehr Licht wird an der Stelle gestreut und die Beschädigung wird besser erkennbar.

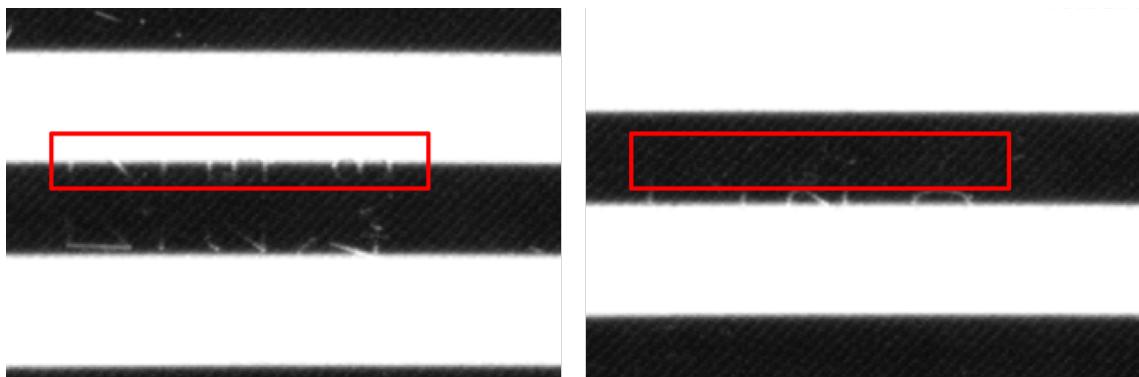


Abbildung 3.4: Schlecht erkennbare Eingravierung im Glas, nach Verschiebung des Streifelmusters.

In Abbildung 3.4 stellt man fest, dass kleine Defekte der Oberflächenstruktur, wie hier z. B. die Eingravierung, nur zum Teil und besonders in der Nähe der Übergänge zu erkennen sind.

Daraus lassen sich bestimmte Folgerungen ziehen. Zunächst decken solche Streifenmuster nur unmittelbar an den Übergängen zuverlässig Defekte auf. Das bedeutet, um Defekte an bestimmten Stellen zu erfassen, muss das verwendete Streifenmuster an den Stellen Übergänge haben. Das bedeutet auch, dass Muster mit schmaleren Streifen aufgrund weiterer Übergänge besser geeignet sind, um auch kleinere Oberflächendefekte sichtbar zu machen. Allerdings führt dies auch dazu, dass stets nur kleine Teile der Defekte zu erkennen sind. Als Lösung dieses Problems kann man mehrere Streifenmuster verwenden, deren Streifen stets in ihrer Ausbreitungsrichtung verschoben sind. Verknüpft man die sichtbaren Teile der Defekte, kann man in einem vollständigen Gesamtbild alle Oberflächendefekte ab einer bestimmten Mindeststärke sichtbar machen. Die Mindeststärke hängt dabei unter anderem von den Kameraeinstellungen, der Beleuchtungsstärke und den verwendeten Streifenmustern ab.

3.3 Einsatz von mehreren Streifenmustern

Die verwendeten Streifenmuster haben entlang ihrer Ausbreitungsrichtung den Grauwerteverlauf einer Rechteckschwingung.

Die periodische Einheitsrechteckschwingung $s_f(t)$ sei definiert durch (vgl. [12]):

$$s_f(t) := \operatorname{sgn}(\sin(2\pi ft)) \quad (3.1)$$

$\operatorname{sgn}(x)$ bezeichnet hierbei die Vorzeichenfunktion mit:

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Die Periodendauer T der Einheitsrechteckschwingung $s_f(t)$ steht über den Kehrwert im Zusammenhang mit der Frequenz f :

$$T = \frac{1}{f}$$

Für $f = \frac{1}{3}$ und $f = \frac{1}{4}$ sieht das Schaubild der Funktion aus wie in Abbildung 3.5:

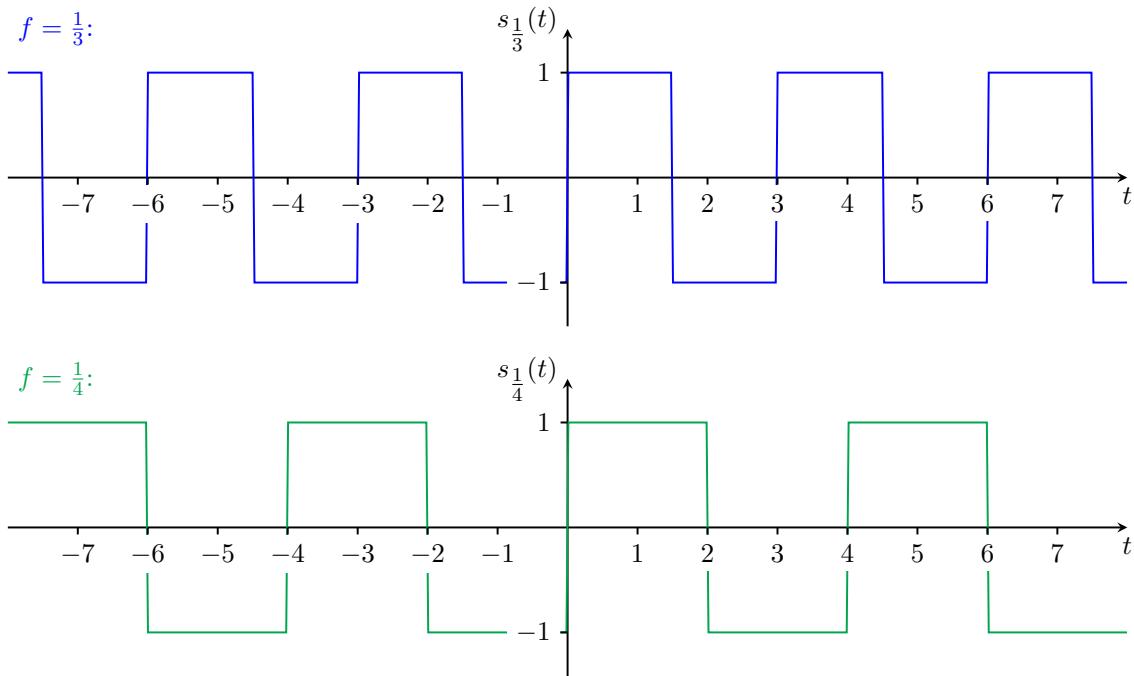


Abbildung 3.5: Einheitsrechteckschwingung (*engl.: square wave*) für $f = \frac{1}{3}$ (in blau) und $f = \frac{1}{4}$ (in grün).

Mithilfe der Einheitsrechteckschwingung aus Gleichung 3.1 lässt sich ein Streifenmuster mit Ausbreitungsrichtung in x ausdrücken durch:

$$m_k(x, y) = A_m \left(1 + s_f \left(x - \frac{1}{2\pi f} \psi_k \right) \right), \quad (3.2)$$

$$f = \frac{N_p}{L_{width}}, \quad \psi_k = (k-1) \frac{2\pi}{N_{shift}}, \quad k \in \{1, \dots, N_{shift}\}$$

Das Streifenmuster aus Gleichung 3.2 ist durch die Periodizität der Einheitsrechteckschwingung auch periodisch zur Ausbreitungsrichtung. A_m bezeichnet die Amplitude, f die Frequenz, N_p die Anzahl der Perioden über die Monitorbreite L_{width} , N_{shift} die Anzahl der Phasenverschiebungen und ψ_k die Phasenverschiebung des k -ten Musters. Analog zu Gleichung 3.2 lassen sich auch Streifenmuster mit Ausbreitungsrichtung in y über die Monitorhöhe L_{height} schreiben. Das Bild eines vertikalen Streifenmusters, d. h. mit Ausbreitungsrichtung in x , nach Gleichung 3.2 wird in Abbildung 3.6 dargestellt.

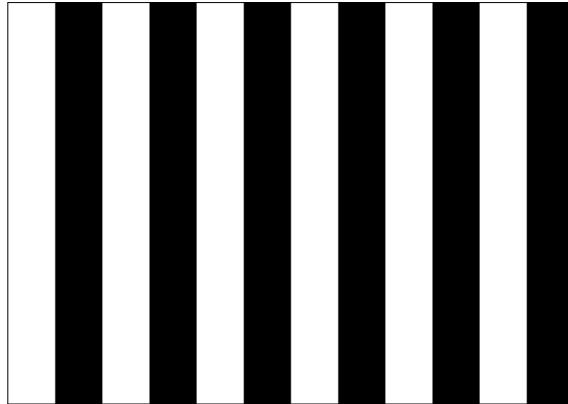


Abbildung 3.6: Streifenmuster nach Gleichung 3.2, mit $A_m = 127.5$, $N_p = 6$, $L_{width} = 384$ und $\psi_0 = 0$. Die Breite der Streifen betragen jeweils 32 Pixel.

Die verschiedenen Streifenmuster m_k können nach Gleichung 3.2 als zueinander phasenverschoben bezeichnet werden. Die Phasenverschiebung ψ_k wird durch einen Phasenwinkel im Bogenmaß angegeben. Eine Phasenverschiebung von π bedeutet dementsprechend eine Phasenverschiebung um eine halbe Periode des Musters. Anschaulich stellt man fest, dass für gleich breite helle und dunkle Streifen diese ihre Positionen tauschen. Dies kann man sich zunutze machen, denn das bedeutet, dass die Schnittmenge der dunklen Streifen in den beiden Streifenmustern am kleinsten ist. Da bestimmte Fehlstellen entweder in den dunklen oder in den weißen Streifen deutlich zu erkennen sind, ergänzen sich die beiden Streifenmuster durch die sichtbaren Fehlstellen. Verknüpft man die Kamerabilder von solchen Mustern, dann kann man damit die meiste Information aus zwei Bildern extrahieren. Durch zusätzliche Bilddaten mit verschobenen Streifenmustern kann man detailliertere Oberflächeninformationen von dem Prüfobjekt gewinnen.

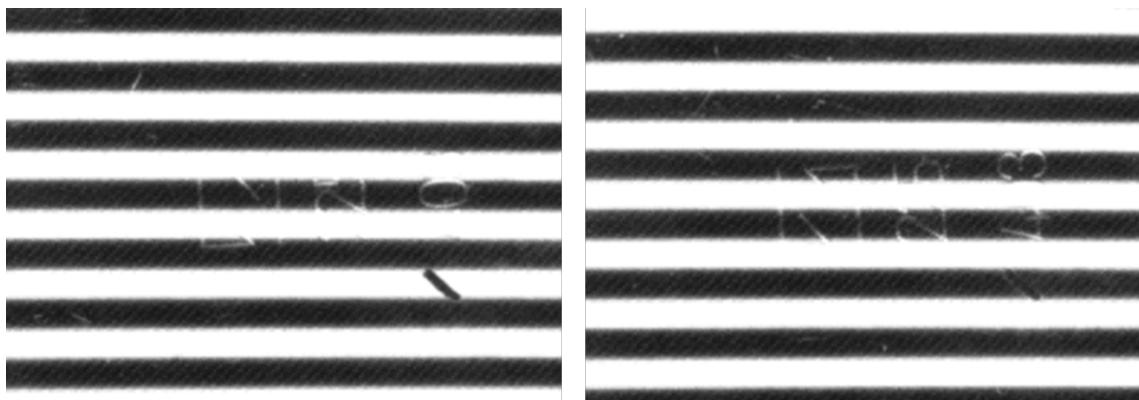


Abbildung 3.7: Kameraaufnahme eines Prüfobjekts unter Projektion von Streifenmustern mit einer Phasenverschiebung von π zueinander.

Wie man erkennt, sind die Streifen der beiden Bilder genau zueinander versetzt. Die Auffälligkeiten in den Bildern z. B. Eingravierungen sind oft entweder im dunklen oder im hellen Streifen zu erkennen. Durch den Unterschied zum Streifenhintergrund erfasst man gewisse Oberflächeninformation des Prüfobjekts. Das heißt, dass die beiden Bilder

sich durch den Versatz in ihrer Oberflächeninformation ergänzen. Zur Verknüpfung der Information in einem Gesamtbild überlegt man sich, wie bestimmte Defekte in den beiden Bildern aussehen. Dabei fällt auf, dass sich Defekt- bzw. Fehlstellen in zwei Fällen abzeichnen (vgl. Abbildung 3.7).

Fall 1: z. B. Kratzer

$$\begin{array}{ccc} \text{Muster } m_1 & & \text{Muster } m_2 \\ \text{Helle Fragmente in dunklen Streifen} & \longleftrightarrow & \text{Helle Fragmente in hellen Streifen} \end{array}$$

Fall 2: z. B. Partikel

$$\begin{array}{ccc} \text{Muster } m_1 & & \text{Muster } m_2 \\ \text{Dunkle Fragmente in hellen Streifen} & \longleftrightarrow & \text{Dunkle Fragmente in dunklen Streifen} \end{array}$$

Das Muster m_1 und das Muster m_2 sind Streifenmuster, die zueinander um π phasenverschoben sind. Für eine Verknüpfung von Bildern errechnet man ein neues Bild, indem man zwei Bilder punktweise zusammen verrechnet. Das bedeutet, um für das Ergebnisbild den Bildpunkt an der Stelle (x, y) zu berechnen, nimmt man sich die beiden Bildpunkte der Eingangsbilder an derselben Stelle (x, y) . Daraus folgt auch, dass die zu verrechnenden Bilder dieselbe Größe haben müssen. Diese Bedingung ist hier durch dieselben Kameraeinstellungen gegeben.

Unter Berücksichtigung dieser beiden Fälle soll man eine Verknüpfung für diese Bilder aufstellen, sodass die Oberflächendefekte und Fehlstellen hervorgehoben werden. Um die Fehlstellen vom Typ *Fall 1* zu erkennen, reicht es aus, für alle Bildpunkte zu untersuchen, ob einer der beiden Bildpunkte dunkel ist. Ist das erfüllt, dann wird der Bildpunkt zum Hintergrund hinzugefügt. Dies kann man erreichen, indem man punktweise das Minimum der Bilder bestimmt. Dadurch würden nur Defekte von *Fall 1* hell sein und die restlichen Bildpunkte dunkel. Da *Fall 2* genau umgekehrt zu *Fall 1* ist, kann man analog vorgehen, um die Defekte von *Fall 2* zu erkennen. Das heißt, dass punktweise das Maximum der Bilder bestimmt wird. Alle Bildpunkte, die nicht in beiden Bildern dunkel sind, werden damit hell. In Abbildung 3.8 sollen diese Verknüpfungen dargestellt werden.

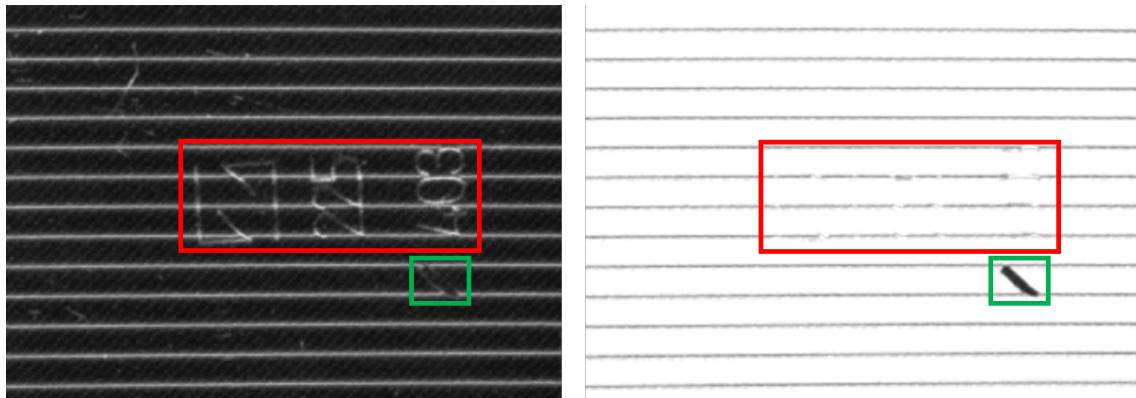


Abbildung 3.8: Verknüpfte Bilder, um Defekte von *Fall 1* (rot umrahmt) und Defekte von *Fall 2* (grün umrahmt) isoliert voneinander zu betrachten. Links über Minimierung und rechts über Maximierung verknüpft. Die verknüpften Quellbilder sind in Abbildung 3.7 einzusehen.

In den Bildern aus Abbildung 3.8 sind noch horizontale Streifen zu erkennen. Diese sind keine Defekte, sondern entstehen aus Überlappungen der Streifenmuster in den Kamerabildern. Auf diese „Fehler“ und Möglichkeiten zur Beseitigung dieser wird im nächsten Abschnitt 3.4 eingegangen.

Als Nächstes sollen beide Fälle in einem Gesamtbild kenntlich gemacht werden. Hierfür macht man sich die Gemeinsamkeiten von *Fall 1* und *Fall 2* zunutze. Man kann feststellen, dass die Helligkeit der Defekte in beiden Kamerabildern trotz Veränderung der Muster ungefähr gleich bleibt. Verknüpft man die beiden Bilder durch die punktweise betragsmäßige Differenz, werden Defekte aus den beiden Fällen dunkel. Die restliche, normal-spiegelnde Oberfläche wird hell, da jeder sonstige Bildpunkt in einem Muster dunkel und im anderen Muster hell erscheinen sollte, also eine hohe Differenz ergibt. Die Ausnahme bilden dabei auch hier die Überlappungen von Streifen (siehe Abbildung 3.9).

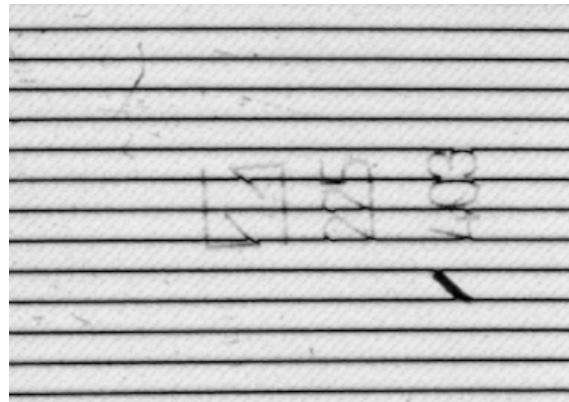


Abbildung 3.9: Über betragsmäßige Differenz verknüpfte Bilder.

3.4 Optimierungen

Nach dem Verknüpfen der Bilder verbleiben neben den Defekten noch schmale horizontale Streifen (vgl. Abbildung 3.8 und 3.9). Diese entstehen, wenn in den Kamerabildern von den um π phasenverschobenen Streifenmustern Überlappungen der Streifen vorkommen. Das kann durch eine Reihe von Ungenauigkeiten im gesamten Prozess passieren. Zum besseren Verständnis muss auf die Differenzen zwischen dem aufgenommenen Kamerabild und der erzeugten Muster auf dem Bildschirm eingegangen werden.

3.4.1 Unterschiede zwischen Kameraaufnahme und Monitorbild

Das Kameraobjektiv hat bestimmte Einstellungsmöglichkeiten, darunter die Blende und der Fokus. Aufgrund der festen Brennweite des verwendeten Objektivs wird der Einfluss der Brennweite nicht genauer betrachtet. Die entscheidenden Einstellungen für diesen Prozess sind also der Fokus und die Blende. Über die Fokussteuerung kann eine einzelne Tiefenebene im Bild scharf gestellt werden. Da das Prüfobjekt und das Streifenmuster in unterschiedlichen Tiefenebenen liegen, führt das bereits dazu, dass im Kamerabild nicht beides gleichzeitig fokussiert werden kann. Der Fokus liegt zur Prüfung auf der Oberfläche des Objekts. Dadurch wird das Streifenmuster unscharf, wodurch die Breiten der hellen und dunklen Streifen verändert werden. Die zweite Einstellungsmöglichkeit ist die Blende. Öffnet man diese weiter, lässt man mehr Licht in den Kamerasensor. Durch mehr einfalldendes Licht vergrößern sich die Breiten der hellen Streifen im Bild. Oberflächendefekte des Prüfobjekts werden gleichzeitig besser sichtbar. Zur Kompensation der unterschiedlichen Streifenbreiten im Kamerabild müssen die Breiten der hellen und dunklen Streifen im erzeugten Muster unterschiedlich gewählt werden (siehe Abbildung 3.10).

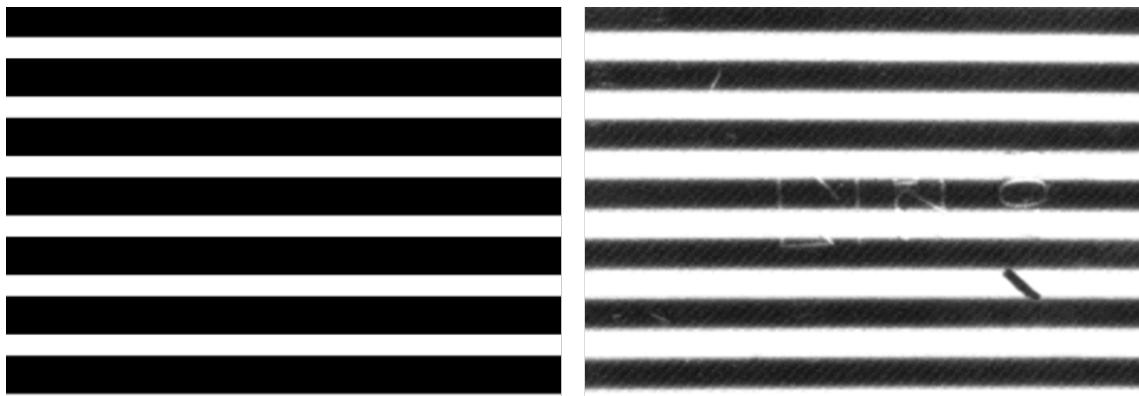


Abbildung 3.10: Unterschied zwischen Muster und Kameraaufnahme. Links erzeugtes Muster mit fünf Pixel Breite der hellen und neun Pixel Breite der dunklen Streifen, Rechts Kameraaufnahme

Man muss also mit Streifenmustern arbeiten, die von der Gleichung 3.2 abweichen und unterschiedliche Breiten für die hellen und dunklen Streifen haben. Es kommt dazu, dass die hellen und dunklen Streifen im Kamerabild unter Umständen nicht exakt gleich breit sein können, da die Anpassung der Streifenbreiten lediglich auf pixelgenauer Ebene durch-

geführt werden kann. Außerdem gibt es auch bei der Phase der Streifenmuster die Beschränkung, dass die maximale Genauigkeit der Verschiebung auch ein Pixel beträgt. Das bedeutet, dass die Streifen selbst bei exakt gleicher Breite unter dem Kamerabild nicht genau versetzt voneinander liegen. Es kommt hinzu, dass diese Genauigkeit sich auf den projizierenden Bildschirm bezieht. Durch das Brillenglas zwischen der Kamera und dem Bildschirm kann die Phasenverschiebung im Kamerabild also mit zusätzlichen Fehlern behaftet sein. Außerdem ist zu beachten, dass in der Kameraaufnahme stets ein Rauschen die Szene überlagert.

3.4.2 Muster mit unterschiedlichen Streifenbreiten

Das erzeugte Streifenmuster in Abbildung 3.10 hat nicht mehr den Grauwerteverlauf einer Rechteckschwingung (vgl. Abbildung 3.5) entlang der Ausbreitungsrichtung. Dadurch lässt sich das Streifenmuster nicht mehr in der Form aus Gleichung 3.2 darstellen. Der Grauwerteverlauf in einer Zeile bzw. Spalte eines solchen Streifenmusters entspricht einer Impulsschwingung (siehe Abbildung 3.11).

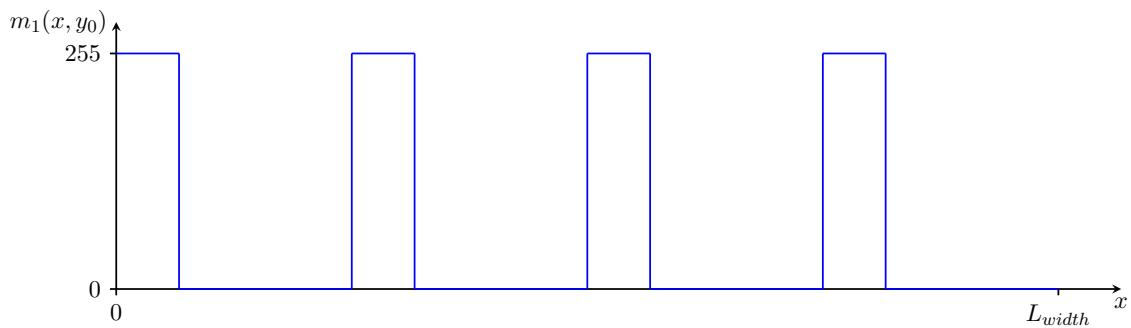


Abbildung 3.11: Impulsschwingung, engl: *pulse wave, rectangular wave*, eines Streifenmusters mit Ausbreitungsrichtung in x bei fester, aber beliebiger Zeile y_0 .

Um eine Gleichung für eine solche Impulsschwingung (siehe Abbildung 3.11) herzuleiten, kann man die periodische Sägezahnschwingung verwenden [13]. Eine Sägezahnschwingung lässt sich darstellen durch (vgl. [14]):

$$w_f(t) = 2(ft - \lfloor ft \rfloor) - 1 \quad (3.3)$$

f bezeichnet die Frequenz der Sägezahnschwingung und steht analog zu Gleichung 3.1 über den Kehrwert im Zusammenhang mit der Periodenlänge der Sägezahnschwingung $w_f(t)$:

$$f = \frac{1}{T}$$

Mit $T = 3$ erhält man folgendes Schaubild (siehe Abbildung 3.12).

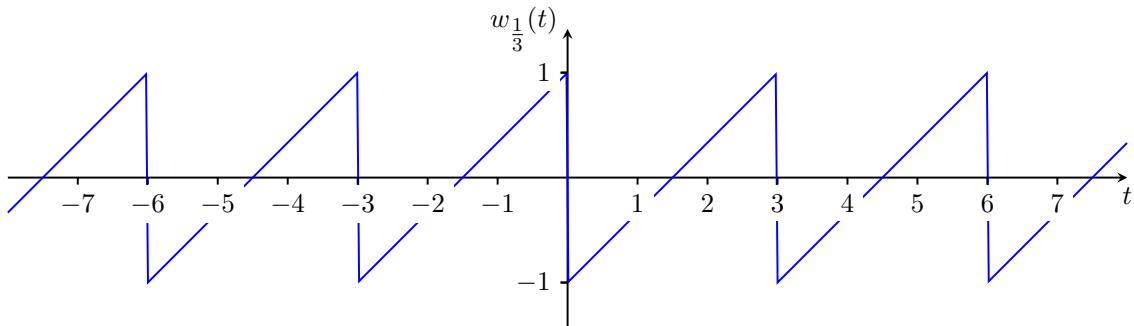


Abbildung 3.12: Sägezahnschwingung nach Gleichung 3.3 mit $f = \frac{1}{3}$.

Bildet man die Differenz von zwei zueinander versetzten Sägezahnfunktionen, erhält man die Impulsschwingung $p_{f,D}(t)$:

$$p_{f,D}(t) = w_f(t - \frac{D}{f}) - w_f(t) - w_f(-\frac{D}{f}), \quad D \in (0, 1] \subset \mathbb{R} \quad (3.4)$$

D wird Tastgrad (*engl: duty cycle*) genannt und bezeichnet die Impulsdauer der Impulsschwingung im Verhältnis zur Periodenlänge T . Somit erhält man mit $D = \frac{1}{2}$ eine Rechteckschwingung wie auch in Abbildung 3.5. Ein Schaubild der Gleichung 3.4 wird in Abbildung 3.13 dargestellt.

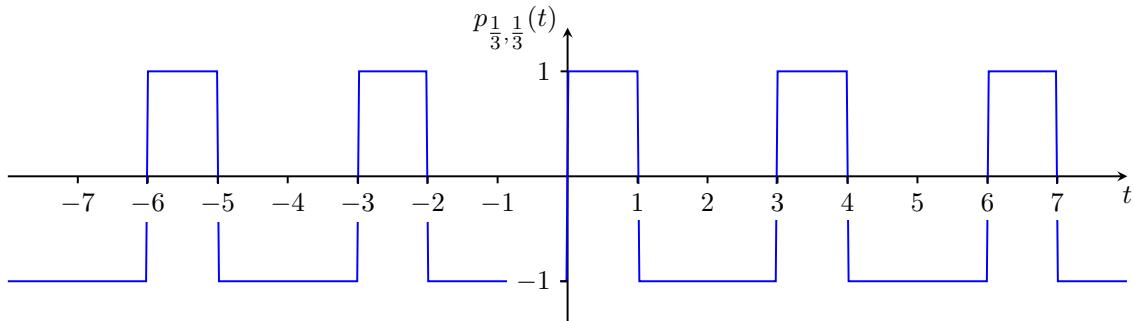


Abbildung 3.13: Einheits-Impulsschwingung nach Gleichung 3.4 mit $f = \frac{1}{3}$ und $D = \frac{1}{3}$.

Aus Gleichung 3.4 lässt sich somit eine mathematische Darstellung für Streifenmuster mit unterschiedlichen Streifenbreiten aufschreiben:

$$m_k(x, y) = A_m \left(1 + p_{f,D} \left(x - \frac{1}{2\pi f} \psi_k \right) \right), \quad (3.5)$$

$$f = \frac{N_p}{L_{width}}, \quad D \in (0, 1] \subset \mathbb{R}, \quad \psi_k = (k-1) \frac{2\pi}{N_{shift}}, \quad k \in \{1, \dots, N_{shift}\}$$

Wie auch in Gleichung 3.2 gilt für dieses Muster die Periodizität in der Ausbreitungsrichtung. Auch hier bezeichnet A_m die Amplitude, N_p die Anzahl der Perioden über die Monitorbreite L_{width} , N_{shift} die Anzahl der Phasenverschiebungen und ψ_k die Phasenverschiebung des k -ten Musters. Zusätzlich zu diesen Parametern hat man den Tastgrad D , der in diesem Fall die Breite der hellen Streifen im Verhältnis zu der Periodenlänge T angibt. Die Periodenlänge T ist im Streifenmuster die Summe der Breite eines einzelnen

dunklen und eines einzelnen hellen Streifens. Analog zu Gleichung 3.5 lässt sich auch ein horizontales Streifenmuster mit Ausbreitungsrichtung in y über die Monitorhöhe L_{height} aufschreiben. Das Bild eines vertikalen Streifenmusters, d. h. mit Ausbreitungsrichtung in x , nach Gleichung 3.5 wird in Abbildung 3.14 dargestellt.

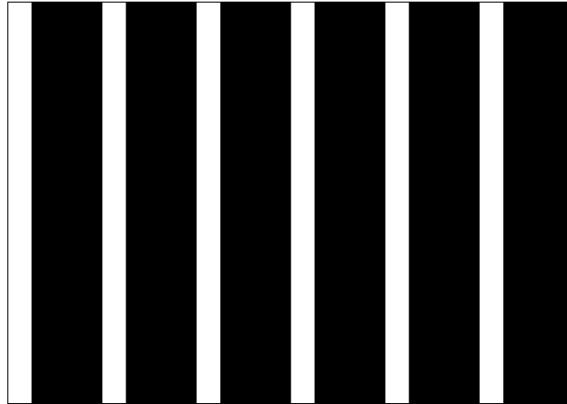


Abbildung 3.14: Streifenmuster nach Gleichung 3.2, mit $A_m = 127.5$, $N_p = 6$, $L_{width} = 384$, $D = \frac{1}{4}$ und $\psi_0 = 0$. Die hellen Streifen haben damit eine Breite von 16 Pixeln und die dunklen Streifen eine Breite von 48 Pixeln.

3.4.3 Verknüpfung von mehreren Kameraaufnahmen

Da die Kameraeinstellungen auf die Prüfstation und Prüfbedingungen angepasst werden müssen, sind die Möglichkeiten zur Eliminierung der Streifen im Vorhinein begrenzt. Die Nachbearbeitung kann über verschiedene Ansätze erfolgen. Aufgrund der Periodizität und der festen Ausbreitungsrichtung der Streifen bietet es sich an, die Fourier-Analyse anzuwenden. Man untersucht die Frequenzkomponenten der Streifen und filtert speziell diese aus dem Bild heraus, um sie zu entfernen. Diese Methode kann allerdings nicht die fehlende Information an den dunklen Streifen wiederherstellen, sondern lediglich eine Bildverbesserung durchführen. Eine andere Möglichkeit ist das Hinzuziehen von weiteren Bildern. Da an den Stellen der horizontalen Streifen die Information fehlt, kann man zusätzliche Muster zur Hand nehmen, um die Informationen zu ergänzen. Man zieht weitere phasenverschobene Muster hinzu, sodass man eine gerade Anzahl an Phasenverschiebungen hat. Daraus kann man die Informationen vereinen und eliminiert die Streifen, welche durch Überlappungen der versetzten Streifen in den Kamerabildern entstehen. Im Folgenden werden als Beispiel die vier Kamerabilder der Streifenmustern $m_1 - m_4$ miteinander verknüpft, die mit $N_{shift} = 4$ gebildet wurden. Aus den vier aufgenommenen Bildern verknüpft man je zwei Bilder mit der betragsmäßigen Differenz, in denen die Streifenmuster eine Phasenverschiebung von π zueinander haben. Die zwei resultierenden Bilder haben zueinander versetzte Streifen, die aus den Überlappungen entstehen. Zum Schluss kann man die beiden Bilder so verknüpfen, dass man stets den Bildpunkt mit dem höheren Helligkeitswert nimmt. Das entspricht der Maximierung. Analog kann man auch die horizontalen Streifen aus Abbildung 3.8 eliminieren, in welcher die Typen von Fehlstellen isoliert voneinander betrachtet wurden. In Abbildung 3.15 werden die einzelnen Schritte dieses Verfahrens

veranschaulicht. Analog lässt sich auch die Verknüpfung von mehr als vier phasenverschobenen Streifenmustern durchführen.

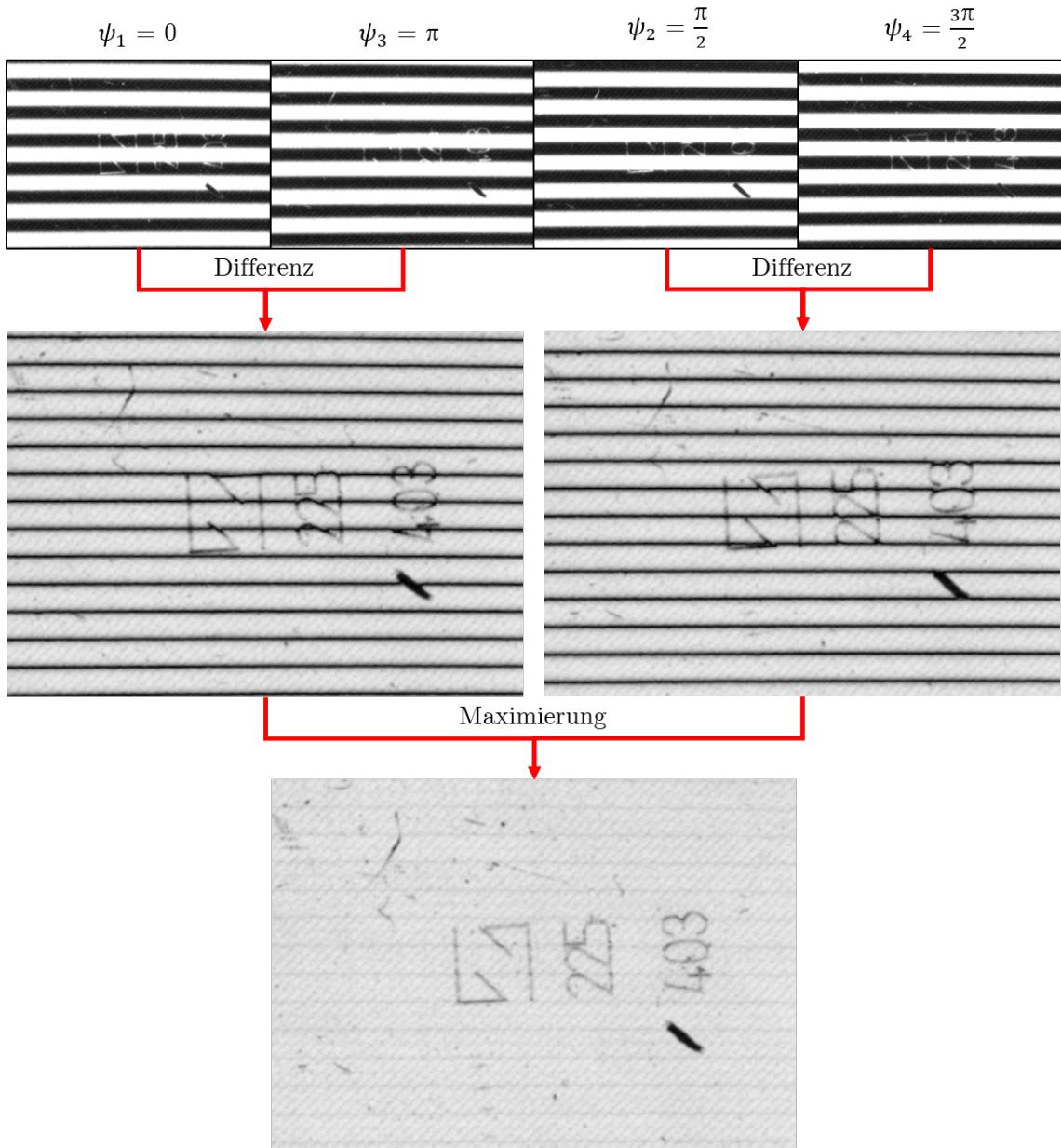


Abbildung 3.15: Prozess zur Hervorhebung von Oberflächendefekten mit $N_{shift} = 4$.

3.4.4 Nachbearbeitung mit der Fourier-Analyse

Im praktischen Durchlauf verbleiben auch im letzten Bild noch sehr schwache horizontale Streifen. Das liegt an den oben genannten Ungenauigkeiten im Prüfprozess und der Mustererzeugung. Da das Ergebnis mit weiteren phasenverschobenen Streifenmustern stetig besser wird, könnte man diese durch eine höhere Anzahl von Streifenmustern N_{shift} eliminieren. Dabei gilt zu beachten, dass man im Diskreten und Numerischen arbeitet und bei einer sehr hohen Anzahl von Phasenverschiebungen Messfehler und Gleitpunktfehler zum Tragen kommen. Das bedeutet, man muss eine zum Prüfaufbau passende Anzahl an

Mustern verwenden, um bessere Ergebnisse dokumentieren zu können. Zur Bildverbesserung hat man auch die Möglichkeit, die zuvor erwähnte Fourier-Analyse anzuwenden. Die noch verbliebenen Strukturen lassen sich im Amplitudenspektrum des Bildes durch die Ausbreitungsrichtung finden. Da diese Strukturen nur noch sehr schwach im Bild vorhanden ist, sind die jeweiligen Frequenzkomponenten auch dementsprechend gering gewichtet (siehe Abbildung 3.16).

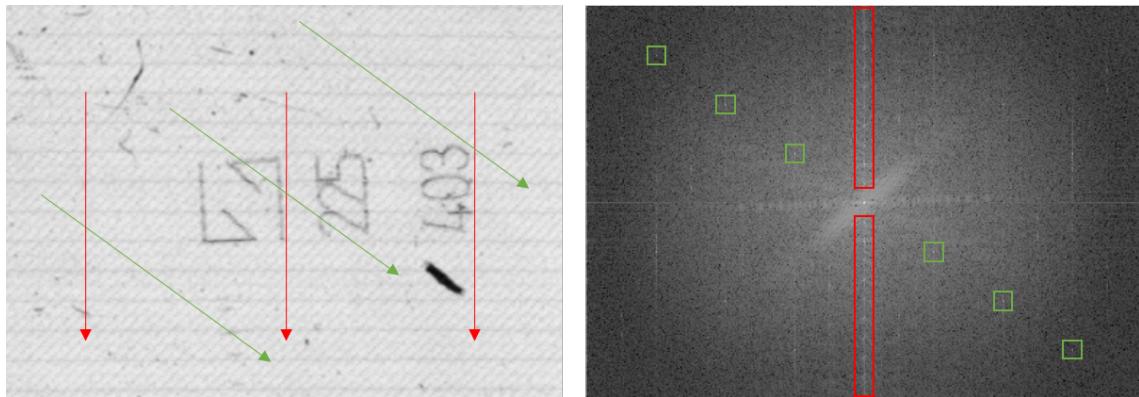


Abbildung 3.16: Amplitudenspektrum des Gesamtbildes. (mit Markierungen)

In Rot ist im Bild die Ausbreitungsrichtung der ersten Struktur markiert, die entsprechenden Gewichte der Frequenzkomponenten sind in derselben Farbe im Amplitudenspektrum gezeichnet. Analog sind in Grün die für die zweite Struktur relevante Ausbreitungsrichtung und Gewichte der Frequenzkomponenten markiert. Die grün gekennzeichnete Struktur entsteht in diesem Fall durch die Verwendung eines speziellen Polfilters, auf dessen Funktion nicht genauer eingegangen werden muss. Filtert man im Amplitudenspektrum die markierten Bereiche heraus und wendet die inverse Fourier-Transformation an, erhält man ein Bild, indem die beiden störenden Strukturen nicht mehr vorhanden sind. Das Ergebnisbild wird durch ein geeignetes Werkzeug [15] berechnet und in Abbildung 3.17 dargestellt.

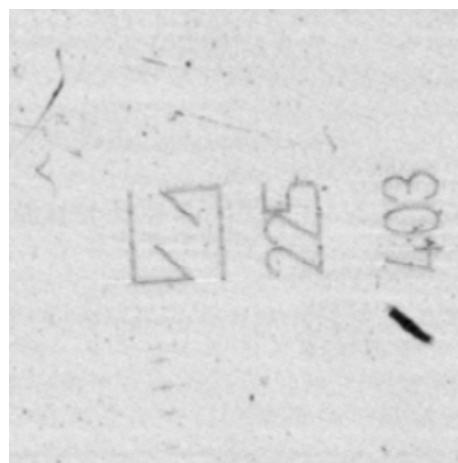


Abbildung 3.17: Angewandtes frequenzselektives Filter nach Abbildung 3.16. Erstellt mit dem Online-Werkzeug „Fourifier“ von © 2020 Ejectamenta.[15]¹

Mit dem vorgestellten deflektometrischen Verfahren wurden Oberflächendefekte wie z. B. Kratzer, Eingravierungen oder Partikel auf transparenten und spiegelnden Prüfobjekten sichtbar gemacht. Das erzeugte Gesamtbild dieses Verfahrens kann nun durch anschließende Bildverarbeitung analysiert und geprüft werden. In diesem konkreten Fall würden sich z. B. Kratzer detektieren oder die eingravierten Zeichen auslesen lassen.

Dieses Verfahren kann je nach Parametrisierung mit unterschiedlicher Empfindlichkeit Abweichungen, die die Lichtreflexionen beeinflussen, in der Oberfläche sichtbar machen. Dadurch eignet es sich besonders für Brillengläser und transparente Objekte. Für spiegelnde Objekte mit einem angepasstem Aufbau konnten ähnliche Ergebnisse erzielt werden, allerdings treten nochmal größere Schwankungen in den Streifenbreiten auf. Diese müssen durch eine größere Anzahl an Bildaufnahmen kompensiert werden. Das Verfahren ist außerdem auf Kratzer und Eingravierungen optimiert. Für spiegelnde Objekte empfiehlt sich aus dem Grund ein anderes Verfahren, das im Kapitel 4 beschrieben wird.

¹Anmerkungen: Das Bild musste aufgrund der Anforderungen des verwendeten Online-Werkzeugs zuschnitten werden. Außerdem wurden die Frequenzkomponenten „händisch“ entfernt, weshalb das Bild fehlerbehaftet ist. Das Bild konnte auch nicht auf Korrektheit geprüft werden und dient nur der Veranschaulichung. Die Nutzungsrechte unterliegen der Lizenz von © 2020 Ejectamenta. Für weitere Informationen zu Geschäfts- und Nutzungsbedingungen siehe: <https://ejectamenta.com/about/terms-of-service/>

Kapitel 4

Deflektometrische Registrierung

Definition 4.1: Deflektometrische Registrierung

Die *deflektometrische Registrierung* l_r beschreibt die Abbildung von Bildpunkten zu Schirmpunkten. [11]

$$l_r : A_{Cam} \rightarrow L \cup \emptyset, \quad P_B \rightarrow P_L$$

$A_{Cam} \subset \mathbb{R}^2$ bezeichnet die Menge der Bildpunkte bzw. der Kamerapixel. $L \subset \mathbb{R}^2$ bezeichnet die Menge der Schirmpunkte bzw. der Monitorpixel. In Koordinatenschreibweise lässt sich die Abbildung somit darstellen als:

$$l_r : \mathbb{R}^2 \supset A_{Cam} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_B, y_B) \mapsto (x_L, y_L)$$

Satz 4.1: Separierbarkeit der deflektometrischen Registrierung

Ferner kann die *deflektometrische Registrierung* l_r in zwei Abbildungen von Bildpunkten zu den Spalten- und Zeilenpositionen der Schirmpunkte separiert werden:

$$l_{r,x} : \mathbb{R}^2 \supset A_{Cam} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_B, y_B) \mapsto x_L$$

$$l_{r,y} : \mathbb{R}^2 \supset A_{Cam} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_B, y_B) \mapsto y_L$$

Die deflektometrische Registrierung kann aus der Beobachtung des Monitors durch die Kamera aufgestellt werden. Wird der Monitor indirekt über eine spiegelnde Oberfläche beobachtet, können aus der deflektometrischen Registrierung Krümmungsmerkmale der spiegelnden Oberfläche bestimmt werden. Durch die Kalibrierung der Positionen der Systemkomponenten können mittels der deflektometrischen Registrierung Höheninformationen über die Oberfläche gewonnen werden. Der zugehörige Ansatz wurde im Abschnitt 2.1 bereits beschrieben.

4.1 Bestimmung der deflektometrischen Registrierung

Die Bestimmung der deflektometrischen Registrierung nach Definition 4.1 bedeutet die Zuordnung von Kamerapixeln zu Monitorpixeln. Grundsätzlich soll jeder Lichtstrahl, der über das Prüfobjekt in die Kamera reflektiert wird, im Kamerabild eindeutig zugeordnet werden können. Eine einfache Möglichkeit, eine solche Zuordnung zu erreichen, bekommt man, indem man die Pixel des Monitors einzeln einschaltet und dabei die Veränderung im Kamerabild betrachtet. Bei kleinen Bildern ist dies noch umsetzbar, allerdings wird die Anzahl von Pixeln mit zunehmender Auflösung schnell sehr groß und unübersichtlich, sodass dieser Ansatz nicht praktikabel ist. Aus dem Grund ist es effektiver, Bilder auf dem Monitor anzuzeigen, die Positionen visuell codieren können. Durch die visuelle Erfassung des Spiegelbilds können somit die zugehörigen Positionen auf dem Monitor berechnet werden.

Ein herkömmliches Kodierverfahren für solche Prozesse ist das Phasenschiebeverfahren. Der Ansatz bei dem Verfahren ist es, die Zeilen- und Spaltenpositionen des Monitors durch periodische Muster zu kodieren. Die Grauwerte von periodischen Mustern nehmen dabei Werte an, die über die periodische Funktion bestimmt wurden. Die hier verwendeten Funktionen sind Kosinusfunktionen. Damit können die Pixel des Musters Phaseninformationen eines lokalen Orts übertragen. Durch die Periodizität der Funktionen kann aus der reinen Phaseninformation noch nicht die genaue Monitorposition bestimmt werden. Die Lösung dieses Problems wird als Phasenentfaltung bezeichnet (siehe Definition 4.2). Hierzu stellt Werling in seiner Arbeit [11] ein mehrstufiges Phasenschiebeverfahren vor, das Muster mit unterschiedlichen Perioden verwendet.

Definition 4.2: Phasenentfaltung

Die *Phasenentfaltung* bezeichnet den Vorgang zur Auflösung der mehrdeutigen Zuordnung der Phaseninformation zu unterschiedlichen Perioden.

4.1.1 Deflektometrische Registrierung ohne Phasenentfaltung

Ohne eine Phasenentfaltung bekommt man eventuell eine mehrdeutige Zuordnung aufgrund der Periodizität der Kosinusfunktion. Soll eine eindeutige Zuordnung über das Phasenschiebeverfahren ohne Phasenentfaltung erfolgen, darf es demnach nur eine einzige Musterperiode auf der Monitorbreite bzw. Monitorhöhe geben. Damit lässt sich die Kodierung der Monitorkoordinaten (x_L, y_L) durch die Phasen (ϕ_x, ϕ_y) folgendermaßen aufstellen:

$$x_L = \frac{L_{width}}{2\pi} \phi_x, \quad y_L = \frac{L_{height}}{2\pi} \phi_y \quad (4.1)$$

Die Monitorbreite wird dabei mit L_{width} und die Monitorhöhe mit L_{height} angegeben.

O.B.d.A. wird unter Verwendung von Satz 4.1 nachfolgend nur die deflektometrische Registrierung der Spaltenpositionen $l_{r,x}$ (x -Richtung) betrachtet. Die deflektometrische Registrierung der Zeilenpositionen $l_{r,y}$ (y -Richtung) kann analog bestimmt werden. Das k -te

Muster m_k zur Kodierung der Monitorpunkte wird durch eine Kosinusfunktion aufgebaut und hat die Form:

$$m_k(x_L, y_L) = A_m \left(1 + C_m \cos \left(\frac{2\pi}{L_{width}} x_L + \psi_k \right) \right), \quad (4.2)$$

$$k \in \{1, \dots, N_{shift}\}, \quad \psi_k = (k-1) \frac{2\pi}{N_{shift}}$$

A_m bezeichnet die Amplitude, C_m den Kontrast, ψ_k die Phasenverschiebung des k -ten Musters und N_{shift} die Anzahl der Muster für das Phasenschiebeverfahren. Das Muster wird auf dem Monitor angezeigt und über eine spiegelnde Oberfläche durch die Kamera beobachtet. Durch die Reflexion an der Oberfläche trifft der Sichtstrahl ausgehend vom Bildpunkt $(x_B, y_B)^\top \in A_{Cam}$ den Monitor im Punkt $(x_L, y_L)^\top \in L \cup \emptyset$, welcher durch die Abbildung aus der Gleichung 4.1 bestimmt wurde:

$$\begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix} = l_r(x_B, y_B) = \begin{pmatrix} l_{r,x}(x_B, y_B) \\ l_{r,y}(x_B, y_B) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Dementsprechend lässt sich das k -te Kamerabild g am Bildpunkt $(x_B, y_B)^\top$ beschreiben durch das k -te Muster am Punkt $(l_{r,x}(x_B, y_B), l_{r,y}(x_B, y_B))^\top$:

$$g_k(x_B, y_B) = m_k(l_{r,x}(x_B, y_B), l_{r,y}(x_B, y_B)) \quad (4.4)$$

Setzt man für m_k die Gleichung 4.2 unter Berücksichtigung der Veränderung durch die Oberfläche ein, erhält man:

$$g_k(x_B, y_B) = A_g(x_B, y_B) \left(1 + C_g(x_B, y_B) \cos \left(\frac{2\pi}{L_{width}} l_{r,x}(x_B, y_B) + \psi_k \right) \right) \quad (4.5)$$

Dabei sind die Amplitude A_g und der Kontrast C_g des Musters im Kamerabild unter Umständen unterschiedlich zu dem angezeigten Muster im Monitorbild. Der Unterschied ist abhängig von dem Oberflächenpunkt an dem der Sichtstrahl reflektiert wird. Aus dem Grund werden A_g und C_g in Abhängigkeit vom Kamerabildpunkt $(x_B, y_B)^\top$ angegeben.

Durch Umstellung der Gleichung 4.1 nach der Phase und Einsetzen der deflektometrischen Registrierung l_r , erhält man die Phase ϕ_x des k -ten Musters in Abhängigkeit von den Kamerabildpunkten:

$$\phi_x = \frac{2\pi}{L_{width}} l_{r,x}(x_B, y_B) \quad (4.6)$$

Durch Einsetzen der Phase aus Gleichung 4.6 in die Gleichung 4.5 des Kamerabilds erhält man den Zusammenhang zwischen der Phase ϕ_x des k -ten Musters und dem Kamerabild g_k :

$$g_k(x_B, y_B) = A_g(x_B, y_B) (1 + C_g(x_B, y_B) \cos(\phi_x(x_B, y_B) + \psi_k)) \quad (4.7)$$

Unter Einbeziehung der N_{shift} -vielen phasenverschobenen Streifenmuster kann man die Phase ϕ_x berechnen [11]:

$$\tan(\phi_x) = - \frac{\sum_{k=1}^{N_{shift}} g_k(x_B, y_B) \sin(\psi_k)}{\sum_{k=1}^{N_{shift}} g_k(x_B, y_B) \cos(\psi_k)} \quad (4.8)$$

Aus den Gleichungen 4.1 und 4.8 folgt schließlich:

$$x_L = l_{r,x}(x_B, y_B) = \frac{L_{width}}{2\pi} \arctan \left(-\frac{\sum_{k=1}^{N_{shift}} g_k(x_B, y_B) \sin \left((k-1) \frac{2\pi}{N_{shift}} \right)}{\sum_{k=1}^{N_{shift}} g_k(x_B, y_B) \cos \left((k-1) \frac{2\pi}{N_{shift}} \right)} \right) \quad (4.9)$$

Mit der Gleichung 4.9 ist die deflektometrische Registrierung in x -Richtung angegeben und die Monitorpositionen eindeutig bestimmt. Die deflektometrische Registrierung in y -Richtung lässt sich analog dazu bestimmen. Die Anzahl der Muster bzw. Phasenverschiebungen N_{shift} bleibt noch als Parameter festzulegen. Um eine eindeutige Zuordnung zu erhalten, benötigt man aufgrund der drei unbekannten Größen Amplitude A_g , Kontrast C_g und Phase ϕ_x in Gleichung 4.7 eine Mindestanzahl von drei Phasenverschiebungen.

Durch die Eindeutigkeit der Zuordnung einer Spaltenposition aus Phase des verwendeten Musters spart man sich die Phasenentfaltung. Dennoch ist das Phasenschiebeverfahren nach diesem Ansatz eher unpräzise und daher ungeeignet für Praxisanwendungen. Der Grund liegt darin, dass Bildschirme lediglich eine vergleichsweise kleine Anzahl von Helligkeitsstufen darstellen können. Die Anzahl zu kodierender Pixelpositionen sind in der Regel deutlich größer. Hinzu kommt die Limitierung durch die Kamera, welche eine maximale Auflösung und Anzahl Helligkeitsstufen aufnehmen kann. Zusammengenommen ist die Auflösung der Monitorpunkte stark begrenzt durch die Abhängigkeit von der Monitorbreite bzw. -höhe. Eine höhere Ortsauflösung, lässt sich erreichen indem man Muster mit mehreren Perioden über die Monitorbreite bzw. Monitorhöhe verwendet. Damit wird eine Phasenentfaltung als zusätzliche Aufgabe erforderlich.

4.1.2 Deflektometrische Registrierung mit Phasenentfaltung

Die im Folgenden beschriebene Methodik zur Bestimmung der deflektometrischen Registrierung ist ein mehrstufiges Phasenschiebeverfahren. Ein solches Verfahren wird von Kammel in seiner Dissertation [16] vorgestellt. Das Verfahren von Kammel zeigt jedoch in der Praxis Kodierungsartefakte bzw. Phasensprünge insbesondere an den Periodengrenzen. Aus dem Grund stellt Werling darauf aufbauend in seiner Dissertation [11] einen neuen Ansatz eines mehrstufigen Phasenschiebeverfahrens vor, der das Problem mit den Phasensprüngen minimiert. Die Idee des Ansatzes ist dabei, dass man zunächst analog zum Verfahren aus Kapitel 4.1.1, die x - bzw. y -Koordinaten relativ zu den Perioden der Muster bestimmt. Durch mehrere Muster mit unterschiedlichen Perioden erhält man schließlich unterschiedliche relative x - bzw. y -Koordinaten. Diese müssen für das finale Ergebnis jeweils den richtigen Perioden zugeordnet werden, indem ein Gleichungssystem aufgestellt wird.

Analog zum Verfahren aus Kapitel 4.1.1 benötigt man N_{shift} -viele Muster um die Phase eines Bildpunkts $(x_B, y_B)^\top$ zu bestimmen. Zusätzlich betrachtet man mehrere Stufen des Verfahrens. Das Muster auf der Stufe i hat N_λ^i -viele Perioden über die Monitorbreite L_{width} bzw. Monitorhöhe L_{height} . Dabei sollen sich für unterschiedliche Stufen auch die

Perioden der verwendeten Muster unterscheiden. Die Phasen ϕ_x^i und ϕ_y^i der kodierten Monitorpunkte $(x_L, y_L)^\top$ auf der i -ten Stufe sehen dann folgendermaßen aus:

$$\phi_x^i = \frac{2\pi N_\lambda^i}{L_{width}} x_L \quad \phi_y^i = \frac{2\pi N_\lambda^i}{L_{height}} y_L \quad (4.10)$$

O.B.d.A. wird unter Verwendung von Satz 4.1 nachfolgend nur die deflektometrische Registrierung der Spaltenpositionen $l_{r,x}$ (x -Richtung) betrachtet. Die deflektometrische Registrierung der Zeilenpositionen $l_{r,y}$ (y -Richtung) kann analog bestimmt werden. Auf der Stufe i hat das k -te Muster m_k^i zur Kodierung der Monitorpunkte $(x_L, y_L)^\top$ somit die Form:

$$m_k^i(x_L, y_L) = A_m^i (1 + C_m^i \cos(\phi_x^i + \psi_k)), \\ k \in \{1, \dots, N_{shift}\}, \quad \psi_k = (k-1) \frac{2\pi}{N_{shift}} \quad (4.11)$$

Es bezeichnet A_m^i die Amplitude und C_m^i den Kontrast des Musters der i -ten Stufe. Wie auch in Kapitel 4.1.1 entspricht ψ_k der Phasenverschiebung des k -ten Musters der Stufen und N_{shift} der Anzahl der Phasenverschiebungen. Analog zu Kapitel 4.1.1 nimmt die Kamera das Signal g_k^i auf:

$$g_k^i(x_B, y_B) = A_g^i(x_B, y_B) \left(1 + C_g^i(x_B, y_B) \cos \left(\frac{2\pi N_\lambda^i}{L_{width}} l_{r,x}(x_B, y_B) + \psi_k \right) \right) \quad (4.12)$$

Analog zu Kapitel 4.1.1 lässt sich aus den Bildern g_k^i die Phase der i -ten Stufe ϕ_x^i berechnen. Vergleichbar mit Gleichung 4.9 kann man in diesem Verfahren aus der Phase die Monitorkoordinaten relativ zum Intervall $[0, L_{width}/N_\lambda^i]$ bestimmen:

$$x_{L,relativ}^i = \frac{L_{width}}{2\pi N_\lambda^i} \arctan \left(- \frac{\sum_{k=1}^{N_{shift}} g_k^i(x_B, y_B) \sin \left((k-1) \frac{2\pi}{N_{shift}} \right)}{\sum_{k=1}^{N_{shift}} g_k^i(x_B, y_B) \cos \left((k-1) \frac{2\pi}{N_{shift}} \right)} \right) \quad (4.13)$$

Die absolute Monitorkoordinate x_L^i der i -ten Stufe lässt sich bestimmen, indem man zur Phase ϕ_x^i ein unbekanntes ganzzahliges Vielfaches von 2π addiert. In Abhängigkeit von $x_{L,relativ}^i$ bedeutet das für x_L^i :

$$x_L^i = x_{L,relativ}^i + n^i \frac{L_{width}}{N_\lambda^i}, \quad (n^i \in \mathbb{N}_0) \quad (4.14)$$

Dabei ist n^i ein unbekannter ganzzahliger Faktor, der die absolute Auswertung bestimmt. Zur Bestimmung des Faktors n^i sollen zwei verschiedene Stufen i, j des Verfahrens mit $i \neq j$ betrachtet werden. Zur eindeutigen Lösbarkeit des nachfolgenden Gleichungssystems müssen N_λ^i und N_λ^j teilerfremd sein. Das heißt es gilt:

$$ggT(N_\lambda^i, N_\lambda^j) = 1 \quad \forall i \neq j$$

Dadurch erhält man zwei unterschiedliche Muster m_k^i und m_k^j ($i \neq j$) und das eindeutig lösbare Gleichungssystem:

$$x_L = x_{L,relativ}^i + n^i \frac{L_{width}}{N_\lambda^i}, \quad n^i \in \{0, \dots, N_\lambda^i - 1\} \subset \mathbb{N}_0 \\ x_L = x_{L,relativ}^j + n^j \frac{L_{width}}{N_\lambda^j}, \quad n^j \in \{0, \dots, N_\lambda^j - 1\} \subset \mathbb{N}_0 \quad (4.15)$$

In diesem Zusammenhang muss für die Monitorkoordinate $x_L = x_L^i = x_L^j$ gelten. Diese Gleichheit ist aufgrund von Ungenauigkeiten während des gesamten Bildaufnahmeprozesses nur schwierig zu erreichen, weshalb man aus dem Gleichungssystem ein Optimierungsproblem bildet. Das heißt, gesucht ist folgende Näherungslösung (n^i, n^j) :

$$(n^i, n^j) = \arg \min_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0} \left| \left(x_{L, \text{relativ}}^i + \alpha \frac{L_{\text{width}}}{N_\lambda^i} \right) - \left(x_{L, \text{relativ}}^j + \beta \frac{L_{\text{width}}}{N_\lambda^j} \right) \right|, \quad (4.16)$$

$$\alpha \in \{0, \dots, N_\lambda^i - 1\}, \quad \beta \in \{0, \dots, N_\lambda^j - 1\}$$

Durch weitere Stufen dieses Verfahrens erhöht sich zunehmend die Genauigkeit der Phasenentfaltung. Das zu betrachtende Optimierungsproblem ergibt schließlich das Tupel $(n^1, \dots, n^{N_{\text{step}}})$ zur Bestimmung der deflektometrischen Registrierung in x -Richtung:

$$(n^1, \dots, n^{N_{\text{step}}}) = \arg \min_A \sum_{i=1}^{N_{\text{step}}} \sum_{j=i+1}^{N_{\text{step}}} \left| \left(x_{L, \text{relativ}}^i + \alpha^i \frac{L_{\text{width}}}{N_\lambda^i} \right) - \left(x_{L, \text{relativ}}^j + \alpha^j \frac{L_{\text{width}}}{N_\lambda^j} \right) \right|,$$

mit $A = (\alpha^1, \dots, \alpha^{N_{\text{step}}})$ und $\alpha^i \in \{0, \dots, N_\lambda^i - 1\} \subset \mathbb{N}_0$

$$(4.17)$$

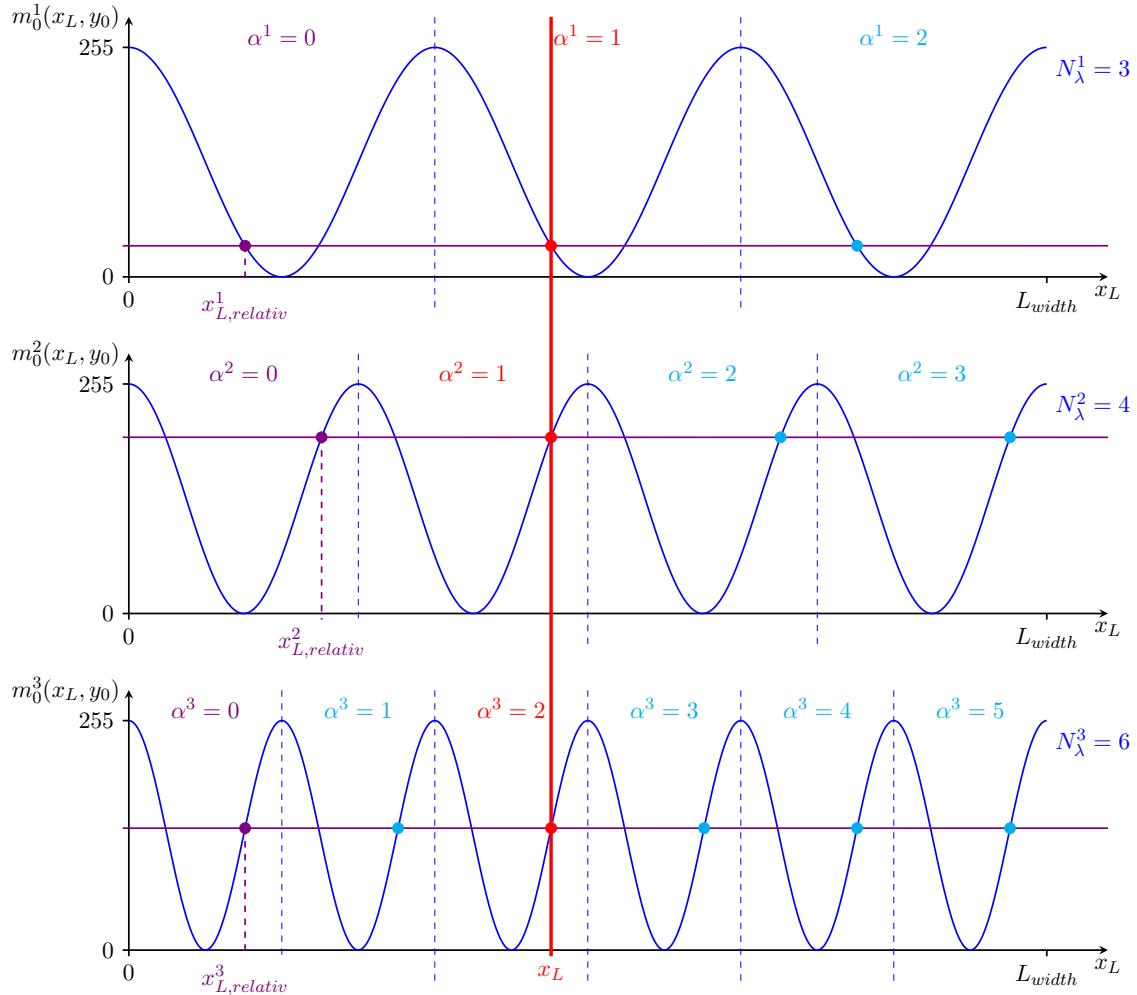


Abbildung 4.1: Bestimmung eindeutiger Spaltenposition x_L durch Verwendung von unterschiedlichen Perioden bei fester Zeile y_0 .

Die Abbildung 4.1 stellt die graphische Lösung des Optimierungsproblems aus Gleichung 4.17 anhand eines Beispiels dar. Durch die zuvor erwähnten Schritte des Verfahrens erhält man für ein Kamerapixel die relative Spaltenposition $x_{L,\text{relativ}}^i$ zu den Perioden des i -ten Musters (siehe violette Punkte in Abb. 4.1). Unter Berücksichtigung der Teilerfremdheit erhält man durch die Bestimmung des minimalen Abstands die eindeutige Zuordnung $A = (\alpha^1, \dots, \alpha^{N_{step}})$ der relativen Spaltenpositionen zur richtigen Periode (siehe rote Punkte in Abb. 4.1).

Mit dieser Zuordnung aus Gleichung 4.17 lässt sich die absolute Monitorkoordinate in den Spalten x_L^i berechnen. Durch die Berechnung eines Mittelwerts der x_L^i erhält man die beste Annäherung an die tatsächliche Spaltenposition.

$$\begin{aligned}
 x_L &= l_{r,x}(x_B, y_B) \\
 &= \frac{1}{N_{step}} \sum_{i=1}^{N_{step}} x_{L,\text{relativ}}^i + n^i \frac{L_{width}}{N_\lambda^i} \\
 &= \frac{1}{N_{step}} \sum_{i=1}^{N_{step}} \frac{L_{width}}{2\pi N_\lambda^i} \arctan \left(-\frac{\sum_{k=1}^{N_{shift}} g_k^i(x_B, y_B) \sin \left((k-1) \frac{2\pi}{N_{shift}} \right)}{\sum_{k=1}^{N_{shift}} g_k^i(x_B, y_B) \cos \left((k-1) \frac{2\pi}{N_{shift}} \right)} \right) + n^i \frac{L_{width}}{N_\lambda^i}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Durch Gleichung 4.18 ist die deflektometrische Registrierung der Spaltenpositionen $l_{r,x}$ nach der Phasenentfaltung angegeben. Analog lässt sich dieses Verfahren auch für die deflektometrische Registrierung der Zeilenpositionen $l_{r,y}$ anwenden.

Für die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems aus 4.15 ist die Wahl der Anzahl der Perioden im Muster N_λ^i entscheidend. Da der Zusammenhang

$$ggT(N_\lambda^1, \dots, N_\lambda^{N_{step}}) = 1$$

gelten soll, sind geeignete Wahlen für die Anzahl der Perioden N_λ^i die Elemente aus der Menge der Primzahlen $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$. Die festzulegenden Parameter N_{shift} und N_{step} haben zunächst keine großen Auswirkungen auf die Lösbarkeit des Verfahrens, dennoch empfiehlt es sich, eine genügend hohe Anzahl von Phasenverschiebungen und Mustern mit unterschiedlichen Perioden zu wählen, um die Genauigkeit des Verfahrens anzuheben. Für die erfolgreiche Zuordnung der Phase zu einer relativen Spaltenposition $x_{L,\text{relativ}}^i$ ist eine Mindestanzahl von drei Phasenverschiebungen notwendig ($N_{shift} \geq 3$, vgl. Kapitel 4.1.1).

Das beschriebene Verfahren zur Bestimmung der deflektometrischen Registrierung l_r wird nachfolgend im Algorithmus 1 zusammengefasst.

Algorithmus 1 Bestimmung der deflektometrischen Registrierung mit Phasenentfaltung**Eingabe:** $N_{shift} \geq 3$, $N_{step} \geq 1$, $N_\lambda^i \geq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, N_{step}\}$ **Ausgabe:** Deflektometrische Registrierung der Spalten $l_{r,x}$

```

1: procedure BILDAUFNAHME( $N_{step}$ ,  $N_{shift}$ ,  $N_\lambda^i$ ,  $L_{width}$ )
2:   for Alle Stufen  $i \leftarrow 1$  to  $N_{step}$  do
3:     for Alle Phasenverschiebungen  $k \leftarrow 1$  to  $N_{shift}$  do
4:       Erzeugung des Musters  $m_k^i$  nach Gleichung 4.11
5:       Anzeige des Musters  $m_k^i$  auf geeignetem Bildschirm
6:       Aufnahme des Bildes mit Kamera  $\rightarrow g_k^i$  nach Gleichung 4.12
7:     end for
8:   end for
9:   return Musterbilder  $g_k^i$ 
10: end procedure

11: procedure DEFLEKTOMETRISCHEREGISTRIERUNG( $N_{step}$ ,  $N_{shift}$ ,  $N_\lambda^i$ ,  $L_{width}$ ,  $g_k^i$ )
12:   // Überprüfung ob eindeutige Berechnung möglich ist:
13:   if  $ggT(N_\lambda^1, \dots, N_\lambda^{N_{step}}) = 1$  then
14:     // Deflektometrische Registrierung ist eindeutig zu berechnen
15:     for Alle Kamerapixel  $(x_B, y_B) \in \mathbb{D}(g_k^i)$  do
16:       for Alle Stufen  $i \leftarrow 1$  to  $N_{step}$  do
17:         Berechnung von  $x_{L,relativ}^i$  nach Gleichung 4.13
18:       end for
19:       Lösung des Optimierungsproblems aus Gleichung 4.17  $\rightarrow (n^1, \dots, n^{N_{step}})$ 
20:       Berechnung von  $x_L$  nach Gleichung 4.18  $\rightarrow l_{r,x}(x_B, y_B)$ 
21:     end for
22:     return Deflektometrische Registrierung der Spalten  $l_{r,x}$ 
23:   else
24:     // Deflektometrische Registrierung ist nicht eindeutig zu berechnen
25:     return
26:   end if
27: end procedure

```

Der Algorithmus beschreibt die Berechnung der deflektometrischen Registrierung der Spaltenpositionen $l_{r,x}$. Analog lässt sich auch die deflektometrische Registrierung der Zeilenpositionen $l_{r,y}$ bestimmen. Nach Satz 4.1 kann schließlich aus den separierten deflektometrischen Registrierungen der Spalten- und Zeilenpositionen $l_{r,x}$ und $l_{r,y}$ die deflektometrische Registrierung l_r des Prüfsystems gebildet werden.

4.2 Auswertung der deflektometrischen Registrierung

Die deflektometrische Registrierung l_r kann nicht ohne Weiteres direkt ausgewertet werden. Deshalb wird im Folgenden die Weiterverarbeitung der deflektometrischen Registrierung beschrieben, sodass bekannte Methoden aus dem Gebiet der Bildverarbeitung angewendet werden können.

Die graphische Darstellung der deflektometrischen Registrierung l_r stellt sich zunächst als schwierig heraus, da man mit einer Abbildung der Form $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ arbeitet. Aus dem Grund wird die Separierbarkeit der deflektometrischen Registrierung aus Satz 4.1 angewendet. Daraus erhält man die beiden Abbildungen der Form $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$l_{r,x} : \mathbb{R}^2 \supset A_{Cam} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_B, y_B) \mapsto x_L$$

$$l_{r,y} : \mathbb{R}^2 \supset A_{Cam} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_B, y_B) \mapsto y_L$$

In der Form lässt sich die Analogie zu der mathematischen Beschreibung eines Graubildes f erkennen:

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \rightarrow [I_{min}, I_{max}] \subseteq \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

Für die Darstellung als Bilder sind somit lediglich geeignete Transformationen der Wertemengen der deflektometrischen Registrierungen $l_{r,x}$ und $l_{r,y}$ nötig.

Definition 4.3: Darstellung der Deflektometrischen Registrierung

Die deflektometrischen Registrierung l_r kann als zwei einzelne Graubilder $f_{r,x}$ und $f_{r,y}$ dargestellt werden.

$$f_{r,x} : \mathbb{R}^2 \supset \mathbb{D}(l_{r,x}) \rightarrow [I_{min}, I_{max}] \subseteq \mathbb{R}$$

$$f_{r,y} : \mathbb{R}^2 \supset \mathbb{D}(l_{r,y}) \rightarrow [I_{min}, I_{max}] \subseteq \mathbb{R}$$

Dabei lassen sich die Bilder $f_{r,x}$ und $f_{r,y}$ schreiben als:

$$f_{r,x}(x, y) = t_x(l_{r,x}(x, y))$$

$$f_{r,y}(x, y) = t_y(l_{r,y}(x, y))$$

Es gilt $\mathbb{D}(f_{r,x}) = \mathbb{D}(l_{r,x})$ und $\mathbb{D}(f_{r,y}) = \mathbb{D}(l_{r,y})$. Die Abbildungen t_x und t_y sind dabei lineare Transformationen der Wertemengen der deflektometrischen Abbildungen in Spalten und Zeilen zu den zulässigen Intensitäten für die Bilder $f_{r,x}$ und $f_{r,y}$, angegeben durch das Intervall $[I_{min}, I_{max}]$.

$$t_x : \mathbb{R} \supset \mathbb{W}(l_{r,y}) \rightarrow [I_{min}, I_{max}] \subseteq \mathbb{R}$$

$$t_y : \mathbb{R} \supset \mathbb{W}(l_{r,y}) \rightarrow [I_{min}, I_{max}] \subseteq \mathbb{R}$$

Die Transformationen t_x und t_y lassen sich schreiben als:

$$t_x(x) = \left(\frac{x}{L_{width}} (I_{max} - I_{min}) \right) + I_{min}$$

$$t_y(y) = \left(\frac{y}{L_{height}} (I_{max} - I_{min}) \right) + I_{min}$$

Erstellt man aus der berechneten deflektometrischen Registrierung l_r einer ungekrümmten Fläche die zugehörigen Bilder $f_{r,x}$ und $f_{r,y}$ nach Definition 4.3, erhält man Darstellungen wie in Abbildung 4.2:



Graubild der Spaltenzuordnung $f_{r,x}(x, y)$



Graubild der Zeilenzuordnung $f_{r,y}(x, y)$

Abbildung 4.2: Darstellung der Spalten- und Zeilenregistrierung als Bilder in Graustufen mit $I_{min} = 0$ und $I_{max} = 255$. Je dunkler ein Pixel ist, desto weiter links bzw. oben befindet sich die zugeordnete Spalten- bzw. Zeilenposition.

In Abbildung 4.2 wird direkt das Muster auf dem Monitor betrachtet. Aus dem Grund lässt sich erkennen, dass die Zuordnung von Monitor- und Kamerapixeln in den Spalten und Zeilen linear verläuft. Werden nun die Streifen durch besondere Oberflächeneigenschaften gekrümmmt oder verzerrt, dann werden an diesen Stellen in den Bildern der deflektometrischen Registrierung Abweichungen vom linearen Grauwerteverlauf sichtbar.



Graubild der Spaltenzuordnung $f_{r,x}(x, y)$



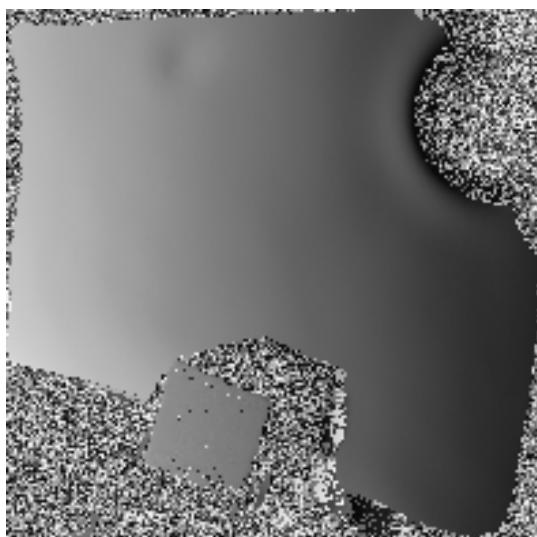
Graubild der Zeilenzuordnung $f_{r,y}(x, y)$

Abbildung 4.3: Darstellung von Spalten- und Zeilenregistrierung als Bilder. Abweichungen vom linearen Verlauf entstehen durch tiefe Eingravierungen im Glas. Das Muster wurde als Durchlicht direkt über der Kamera beobachtet.

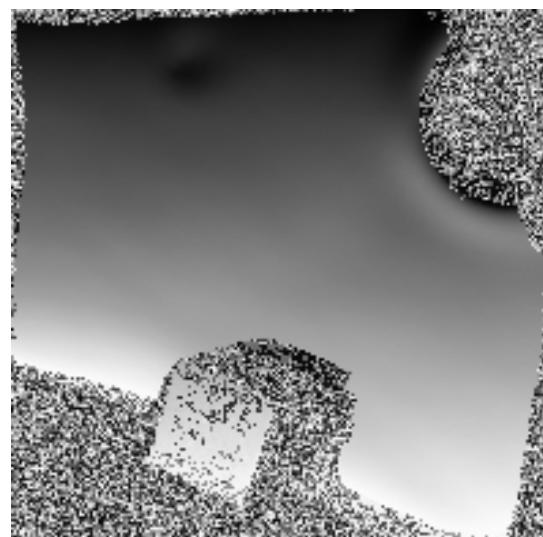
Die deflektometrische Registrierung macht bestimmte Fehlstellen in Abbildung 4.3 kenntlich. Diese Fehlstellen sind allerdings nur tiefe Eingravierungen, durch welche die Phase des Streifenmusters lokal deformiert wird. Normale Kratzer beeinflussen besonders den durch die Kamera gemessenen Grauwert. Die zugeordnete Monitorposition hingegen wird durch solche Kratzer nur geringfügig verändert, weshalb diese im Bild der deflektometrischen Registrierung kaum erkennbar sind. Besser funktioniert die Fehlstellenerkennung, indem man die Reflexionen bzw. die Spiegelbilder der Muster aufnimmt. So ist es möglich, wie in Abbildung 4.5, z. B. Dellen und Beulen auf spiegelnden Oberflächen durch die deflektometrische Registrierung deutlich hervorzuheben.



Abbildung 4.4: Spiegelndes Porzellanbruchstück mit Delle.



Graubild der Spaltenzuordnung $f_{r,x}(x,y)$



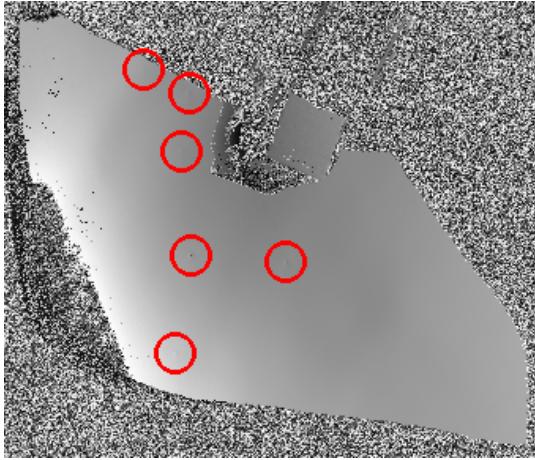
Graubild der Zeilenzuordnung $f_{r,y}(x,y)$

Abbildung 4.5: Deflektometrische Registrierung des spiegelnden Porzellanbruchstücks aus Abbildung 4.4.

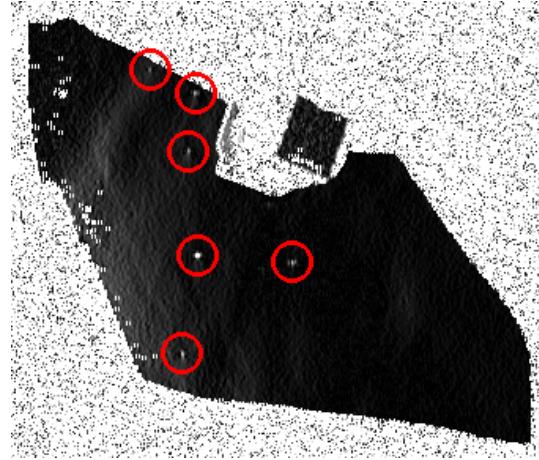
In Abbildung 4.5 entsteht im Hintergrund um das Objekt herum eine Störumgebung. Der

Grund dafür ist die fehlende Reflexion des Musters und somit ähnliche Grauwerte in den phasenverschobenen Bildern. Dies führt dazu, dass in der Bestimmung der Phase ϕ für solche Pixel numerisch instabile Ausdrücke und somit schwankende Werte vorkommen.

Die resultierenden Bilder können durch herkömmliche Verfahren aus der Bildverarbeitung weiterverarbeitet und analysiert werden. Durch die weichen Grauwertverläufe an gleichmäßig gekrümmten Oberflächen in den $f_{r,x}$ und $f_{r,y}$, lassen sich diese Bilder effizient über ihre Gradienten analysieren (siehe Abbildung 4.6). Abrupte Änderungen der Grauwerte innerhalb des spiegelnden Objekts führen zu höheren Gradienten als in der Umgebung. Fehlstellen wie z. B. Dellen oder Pickel lassen sich damit gut detektieren. Aus demselben Grund erweisen sich auch Hochpassfilterungen als hilfreich [11].



Graubild der Spaltenzuordnung $f_{r,x}(x, y)$



Gradientenbild von $f_{r,x}(x, y)$ über den Sobel-Operator in x -Richtung

Abbildung 4.6: Deflektometrische Spaltenregistrierung eines spiegelnden Porzellanbruchstücks und das Gradientenbild.

Das untersuchte Objekt aus Abbildung 4.6 weist am linken Rand vereinzelt matte Stellen auf. Dadurch treten im Bild der deflektometrischen Registrierung $f_{r,x}$ einzelne dunkle Punkte bzw. Artefakte am linken Rand auf. Diese erkennt man somit auch im Gradientenbild von $f_{r,x}$ als Fehlstellen.

In dem Gradientenbild in x -Richtung aus Abbildung 4.6 lassen sich Aussagen über die Krümmung der Oberfläche entlang der x -Richtung treffen. Allgemein betrachtet man zunächst eine feste Gerade in der Kameraebene, bezeichnet als Bildkurve. Die Bildkurve entsteht durch die Spiegelung einer bestimmten Monitorkurve auf einer Oberfläche. Von der Kurve in der Monitorebene schneiden die ausgehenden Lichtstrahlen die Oberfläche entlang einer Oberflächenkurve. Über den Zusammenhang der Spiegelabbildung von Geraden und Kurven an gekrümmten Oberflächen lässt sich zeigen, dass die Änderung der Monitorkurve vom linearen Verlauf proportional zur Änderung der Flächennormalen entlang der Oberflächenkurve ist [11]. Deutlich wird dies nochmals, wenn man beachtet, dass Geraden bei der Spiegelung nur auf Geraden abgebildet werden können, wenn die Spiegeloberfläche

an den Reflexionspunkten einer Ebene entspricht. Das heißt, dass lokale Änderungen der Tangenten an der Monitorkurve lokalen Abweichungen der Spiegeloberfläche vom ebenen Verlauf entsprechen. Bekanntlich stellt die deflektometrische Registrierung l_r den Zusammenhang zwischen der Bildebene und der Monitorebene dar. Demzufolge lässt sich durch das Ableiten der deflektometrischen Registrierung l_r in eine bestimmte Richtung direkt die Abweichung der Flächennormalen, also die wahrgenommene Krümmung der Oberfläche, entlang der Richtung bestimmen. Die wahrgenommene Krümmung steht in direktem Zusammenhang mit der zweiten Ableitung der Objektoberfläche [11].

In Abbildung 4.6 erhält man durch die Faltung des Bildes $f_{r,x}$ mit dem Sobel-Operator für die x -Richtung ein Bild, das in direkter Beziehung zu der Ableitung der deflektometrischen Registrierung l_r in x -Richtung steht. Somit steht dieses Bild auch im Verhältnis mit der Krümmung der Oberfläche in x -Richtung. Analog lässt sich auch die Krümmung in y -Richtung auswerten.

Die deflektometrische Registrierung hat im Vergleich zur Rekonstruktion der Oberfläche essenzielle Vorteile. Zum Einen kann zur Oberflächenprüfung auf die aufwendige Systemkalibrierung verzichtet werden. Außerdem ermöglichen die Separierbarkeit und die Darstellung als Bilder den Einsatz von effizienten Methoden aus dem Bereich der Bildverarbeitung. Das ermöglicht den Einsatz dieser Verfahren für die Erkennung von verschiedenen Fehlstellen auf spiegelnden Oberflächen. Die Verwendung für transparente Objekte, die Licht durchlassen, ist nur eingeschränkt möglich, da die meiste Information in der Krümmung der Streifenmuster liegt. Nutzt man also den Monitor als Durchlichtbeleuchtung, ist die Zuordnung trotz vorhandener Fehlstellen überwiegend linear. Dies kann allerdings auch zum Vorteil genutzt werden, wenn nur diese speziellen Informationen gesucht werden.

Kapitel 5

Fourier-Streifen-Analyse

Quellenverzeichnis

- [1] Statista GmbH. *Pkw-Produktion in Deutschland bis 2021*. 2022. URL: <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/75210/umfrage/produktion-von-pkw-in-deutschland-seit-1990/> (Letzter Zugriff: 04.04.2022).
- [2] Michael Heizmann. *Deflektometrie zur Inspektion spiegelnder Oberflächen*. Fraunhofer-Institut für Optronik. URL: <https://www.vision.fraunhofer.de/de/technologien-anwendungen/technologien/oberflaecheninspektion/deflektometrie-spiegelnder-oberflaechen.html> (Letzter Zugriff: 01.03.2022).
- [3] Bob Parker. *The Chicago Bean*. URL: <https://mergx.wordpress.com/2011/07/10/the-chicago-bean/> (Letzter Zugriff: 29.05.2022).
- [4] Hyug-Gyo Rhee Manh The Nguyen Young-Sik Ghim. *Aufbau einer Deflektometrie-Prüfstation*. URL: <https://www.nature.com/articles/s41598-019-39514-6/figures/1> (Letzter Zugriff: 25.02.2022).
- [5] P Carré. „Installation et utilisation du comparateur photoélectrique et interférentiel du Bureau International des Poids et Mesures“. In: *Metrologia* (1966). DOI: 10.1088/0026-1394/2/1/005. URL: <https://doi.org/10.1088/0026-1394/2/1/005>.
- [6] Tomas Sauer und Christian Faber Hanning Liang. „Using wavelet transform to evaluate single-shot phase measuring deflectometry data“. In: *Applications of Digital Image Processing XLIII*. Hrsg. von Andrew G. Tescher und Touradj Ebrahimi. Bd. 11510. International Society for Optics und Photonics. SPIE, 2020, S. 404–410. DOI: 10.1117/12.2567301. URL: <https://doi.org/10.1117/12.2567301>.
- [7] Christian Faber. „Fortschritte in der Deflektometrie: Neue Mess- und Kodierungsverfahren“. In: 492. JENAer Optikkolloquium. OptoNet e.V. 19. Mai 2022.
- [8] J. W. Goodman. „Some fundamental properties of speckle“. In: (1976). DOI: 10.1364/JOSA.66.001145. URL: <http://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-66-11-1145>.
- [9] David Uhlig und Michael Heizmann. „Multi-Stereo-Deflektometrie mit einer Lichtfeldkamera“. In: *tm - Technisches Messen* 85.s1 (2018), s59–s65. DOI: doi:10.1515/teme-2018-0042. URL: <https://doi.org/10.1515/teme-2018-0042> (Letzter Zugriff: 01.06.2022).

- [10] Jonathan Balzer. *Regularisierung des Deflektometrieproblems - Grundlagen und Anwendung*. 2008. ISBN: 978-3-86644-230-6. DOI: 10.5445/KSP/1000007844. URL: <https://publikationen.bibliothek.kit.edu/1000007844> (Letzter Zugriff: 01.06.2022).
- [11] Stefan Bruno Werling. *Deflektometrie zur automatischen Sichtprüfung und Rekonstruktion spiegelnder Oberflächen*. 2011. ISBN: 9783866446878. DOI: 10.5445/IR/1000023290. URL: <https://publikationen.bibliothek.kit.edu/1000023290> (Letzter Zugriff: 02.03.2022).
- [12] Eric W. Weissstein. *Square Wave*. MathWorld - A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/SquareWave.html> (Letzter Zugriff: 26.05.2022).
- [13] Evan Sitt et al. „Implementation of Digital Synthesis in Functional Programming“. In: 21st International Symposium on Trends in Functional Programming. Krakau, Polen, 2020. URL: http://www.cse.chalmers.se/~rjmh/tfp/proceedings/TFP_2020_paper_21.pdf (Letzter Zugriff: 26.05.2022).
- [14] Eric W. Weissstein. *Square Wave*. MathWorld - A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/SquareWave.html> (Letzter Zugriff: 26.05.2022).
- [15] Ejectamenta. *Ejectamenta Fourifier*. 2020. URL: <https://ejectamenta.com/imaging-experiments/fourifier/> (Letzter Zugriff: 14.03.2022).
- [16] Sören Kammel. *Deflektometrische Untersuchung spiegelnd reflektierender Freiformflächen*. 2005. ISBN: 3937300287. DOI: 10.5445/KSP/1000002980. URL: <https://publikationen.bibliothek.kit.edu/1000002980> (Letzter Zugriff: 28.04.2022).