Варіант 1

1. Електричні фільтри, їх класифікація. Методика проектування фільтрів.

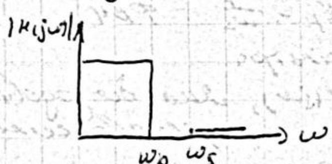
Фільтр представляє собою пристрій, який перетворює згідно певного закону сигнали що проходять через нього

Електричний фільтр, електричний пристрій, в якому з спектру поданих на його вхід електричних коливань виділяються (пропускаються на вихід) складові, розташовані в заданій області частот, і не пропускаються всі останні складові.

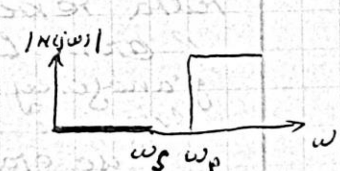
Основні типи фільтрів:

1) Фільтр нижніх частот ФНЧ

Фільтри з областю пропускання $[0, \omega_p]$ і областю затримки $[\omega_s, \infty]$ $\omega_p < \omega_s$

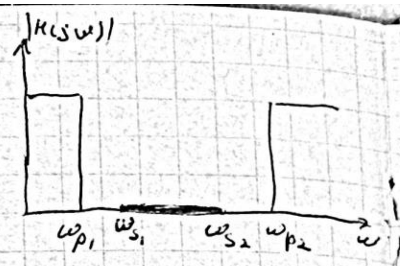


2) ФВЧ - фільтр з областю пропускання $[\omega_p; \infty)$, областю затримки $[0; \omega_s]$ $\omega_s < \omega_p$

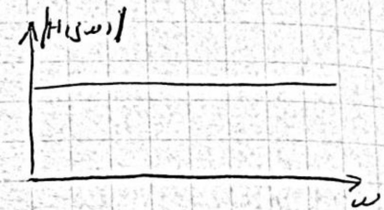


3) Смуговий фільтр (СФ) - фільтр з областю пропускання $[\omega_{p_1}; \omega_{p_2}]$ областю затримки $[0; \omega_{s_1}]$ і $[\omega_{s_2}; \infty)$ де $\omega_{s_1} < \omega_{p_1} < \omega_{p_2} < \omega_{s_2}$

4) Загороджуючий фільтр (ЗФ) – фільтр з областями пропускання $[0, \omega_{p_1}]$ та $[\omega_{p_2}, \infty)$ і областю затримки $[\omega_{s_1}, \omega_{s_2}]$, де $\omega_{p_1} < \omega_{s_1} < \omega_{s_2} < \omega_{p_2}$



5) Всепропускаючий фільтр – це фільтр з одиничною передачею для всіх частот з області $[0; \infty)$. Даний тип фільтрів використовують для реалізації фазової корекції та фазового зсуву.



ФЧХ та груповий час затримки

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$$

$$\tau(\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$ – груповий час затримки.

Методика проектування фільтрів

1. Задання технічних характеристик проектованого фільтру. ~~ці~~
Вони включають вимоги до АЧХ в області пропускання та області затримки, та ширину перехідної області, вимоги до ФЧХ (або $\tau(\omega)$) та інші параметри (вхідний та вихідний опір, елементна база, рівень сигналу на виході і вході) та

$$K_п = \frac{\omega_s}{\omega_p} \text{ – ФНЧ} \qquad K_p = \frac{\omega_p}{\omega_s} \text{ – ФВЧ}$$

$K_п = 1$ – ідеального фільтра

2. Представляє собою знаходження $H(j\omega)$, яка б задовільняла технічним характеристикам сформованим в етапі 1. Вибір $H(j\omega)$ буде залежати від робочого діапазону частот, чутливості нулів та полюсів, рівнів вхідних і вихідних сигналів;
це етап апроксимації
3. Представляє собою задачу реалізації передаточної ф-ції отриманої під час 2-го етапу, у вигляді схеми.
Крім цього входить дослідження допусків фільтрів від розкиду параметрів елементів
4. етап представляє аналіз кожної схеми фільтра отриманої на 3-му етапі, на відповідність

допуском робочих характеристик чутливості можливості регулювання.

5. Знайти обернене Z-перетворення ф-ції $X(z)$

$$X(z) = \frac{2 + z^{-1} + z^{-2}}{1 + z^{-1} + 0{,}5z^{-2}}$$

$$\begin{array}{l|l}
2 + z^{-1} + z^{-2} & 1 + z^{-1} + 0{,}5z^{-2} \\
\underline{2 + 2z^{-1} + z^{-2}} & 2 - z^{-1} + z^{-2} - 0{,}5z^{-3} + 0{,}25z^{-5} \\
\quad -z^{-1} & \\
\quad \underline{-z^{-1} - z^{-2} - 0{,}5z^{-3}} & \\
\qquad z^{-2} + 0{,}5z^{-3} & \\
\qquad \underline{z^{-2} + z^{-3} + 0{,}5z^{-4}} & \\
\qquad\quad -0{,}5z^{-3} - 0{,}5z^{-4} & \\
\qquad\quad \underline{-0{,}5z^{-3} - 0{,}5z^{-4} - 0{,}25z^{-5}} & \\
\qquad\qquad 0{,}25z^{-5} &
\end{array}$$

$x_0 = \alpha_0 = 2$
$x_1 = \alpha_1 = -1$
$x_2 = \alpha_2 = 1$
$x_3 = \alpha_3 = -0{,}5$
$x_4 = \alpha_4 = 0$
$x_5 = \alpha_5 = 0{,}25$

2. Для заданої передаточної функції $H(s)$ знайти
$Re[H(j\omega)]$, $Im[H(j\omega)]$, $|H(j\omega)|$, $\varphi(j\omega)$, $\tau(j\omega)$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \qquad s = j\omega$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 - j\omega} = \frac{1 - \omega^2 - j\omega}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}$$

$$Re[H(j\omega)] = \frac{1-\omega^2}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2} \qquad Im[H(j\omega)] = \frac{-\omega}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{Re^2[H(j\omega)] + Im^2[H(j\omega)]} = \frac{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}}$$

$$\varphi(j\omega) = -\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}[H(j\omega)]}{\mathrm{Re}[H(j\omega)]} = -\mathrm{arctg}\left(\frac{-\omega}{1-\omega^2}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{1-\omega^2}\right)$$

$$\tau(j\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{1-\omega^2}\right)^2} \cdot \frac{(1-\omega^2)+2\omega\cdot\omega}{(1-\omega^2)^2} =$$

$$= \frac{1-\omega^2+2\omega^2}{(1-\omega^2)^2+\omega^2} = \frac{1+\omega^2}{1-2\omega^2+\omega^4+\omega^2} = \frac{1+\omega^2}{1-\omega^2+\omega^4}$$

4 Знайти передаточну ф-цію для нормованого фільтра нижніх частот Баттерворта 3-го порядку

$$B(\omega) = H(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^{2n}}$$

$n = 3 \qquad s = j\omega$

$$|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1-s^6} = \frac{1}{(1-s^3)(1+s^3)} =$$

$$= \frac{1}{(1-s)(1+s+s^2)(1+s)(1-s+s^2)}$$

$1-s=0 \qquad 1+s+s^2=0 \qquad 1+s=0 \qquad 1-s+s^2=0$

$s=1 \qquad s_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \qquad s=-1 \qquad s_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Вибираємо з лівої площини $(s<0)$

$$H(s) = \frac{1}{(1+s)(1+s+s^2)}$$

6. Цифровий фільтр описується р-ням:

$$y(n)+b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) = x(n)$$

де $y(n)$ - вихідний, а $x(n)$ - вхідний сигнал.
Знайти: передаточну ф-цію цифрового фільтра $H(z)$, визначити імпульсну х-ку фільтра $h(n)$ для $b_1=0{,}5$ $b_2=0{,}4$

$$y(z) + b_1 z^{-1} y(z) + b_2 z^{-2} y(z) = X(z)$$

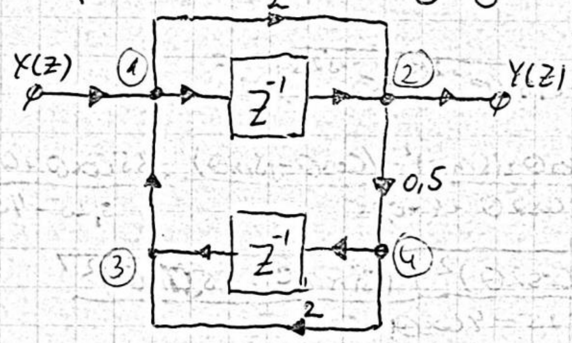
$$H(z) = \frac{y(z)}{X(z)}$$

$$y(z)(1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}) = X(z)$$

$$y(z) = \frac{X(z)}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}$$

$$H(z)=\frac{y(z)}{X(z)} = \frac{\cancel{X(z)}}{(1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2})\cancel{X(z)}} = \frac{1}{1+0{,}5z^{-1}+0{,}4z^{-2}}$$

7. Знайти передаточну ф-цію і частотну х-ку кола, зображеного на рисунку



$N=4$

$$X_1(z) = X_{вх}(z) + X_3(z)$$

$$X_2(z) = 2X_1(z) + z^{-1}X_1(z)$$

$$X_3(z) = 2X_4(z) + z^{-1}X_4(z)$$

$$X_4(z) = 0{,}5\,X_2(z)$$

$$X_1(z) - 1\cdot X_3(z) + 0\cdot X_2(z) + 0\cdot X_4(z) = X_{вх}(z)$$

$$(-2-z^{-1})X_1(z) + 1\cdot X_2(z) + 0\cdot X_3(z) + 0X_4(z) = 0$$

$$0\cdot X_1(z) + 0\cdot X_2(z) + X_3(z) - (2+z^{-1})X_4(z) = 0$$

$$0\cdot X_1(z) - 0{,}5\cdot X_2(z) + 0\cdot X_3(z) + X_4(z) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2-z^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2-z^{-1} \\ 0 & -0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \\ X_4(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot X_{вх}(z)$$

$X_{вых} = X_2(z)$

$X_2(z) = (2+z^{-1})X_1(z)$

$X_1(z) = X_{вх} + (2+z^{-1})\cdot X_4(z) = X_{вх} + (2+z^{-1})\cdot 0,5\, X_2(z) =$
$= X_{вх} + 0,5\cdot(2+z^{-1})^2\cdot X_1(z)$

$X_1(z) - 0,5\cdot(2+z^{-1})^2\cdot X_1(z) = X_{вх}$

$$X_1(z) = \frac{X_{вх}}{1-0,5(2+z^{-1})^2}$$

$$X_2(z) = (2+z^{-1})\frac{X_{вх}}{1-0,5(2+z^{-1})^2} = X_{вых}(z)$$

$$H(z) = \frac{X_{вых}}{X_{вх}} = \frac{(2+z^{-1})X_{вх}}{(1-0,5(2+z^{-1})^2)X_{вх}} = \frac{2+z^{-1}}{1-0,5(2+z^{-1})^2}$$

$z = e^{j\theta}$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{2+e^{-j\theta}}{1-0,5(2+e^{-j\theta})^2} = \frac{(2+e^{-j\theta})(1-0,5(2+e^{j\theta})^2)}{(1-0,5(2+e^{-j\theta})^2)(1-0,5(2+e^{j\theta})^2)} =$$

$$= \frac{-2+4e^{j\theta}+e^{j\theta 2}-e^{-j\theta}+2e^{j\theta-j\theta}+0,5e^{j2\theta-j\theta}}{1-2e^{j\theta}-0,5e^{j2\theta}-2e^{j\theta}+4e^{-j\theta+j\theta}+e^{-j\theta+j2\theta}-0,5e^{-j2\theta}+e^{-j2\theta+j\theta}+0,25e^{-j2\theta+j2\theta}}$$

$$= \frac{4,5e^{j\theta}+e^{j2\theta}-e^{-j\theta}}{1-2(e^{j\theta}+e^{-j\theta})-0,5(e^{j2\theta}+e^{-j2\theta})} =$$

$$= \frac{4,5(\cos\theta+j\sin\theta)+(\cos\theta+j\sin\theta)^2-(\cos\theta-j\sin\theta)}{1-4\cos\theta-\cos 2\theta+4+0,25} = \frac{3,5\cos\theta+\cos 2\theta+j(\sin 2\theta+5,5\sin\theta)}{5,25-4\cos\theta-\cos 2\theta}$$

$$|H(e^{j\theta})|^2 = \frac{\sqrt{(3,5\cos\theta+\cos 2\theta)^2+(\sin 2\theta+5,5\sin\theta)^2}}{5,25-4\cos\theta-\cos 2\theta}$$

$$\varphi(j\theta) = -\operatorname{arctg}\frac{\sin 2\theta+5,5\sin\theta}{3,5\cos\theta+\cos 2\theta}$$

Варіант 2

1 Цифрові фільтри. Основні цифрові сигнали та послідовності, їх властивості

Цифровий фільтр представляє собою пристрій обробки сигналу, що перетворює одну послідовність чисел (вхідну) і вїншу (вихідну)

Цифрові фільтри реалізуються програмним чином на ПК або апаратним способом у вигляді схеми, що складається з регістрів, перемножувачів та суматорів

Цифрові фільтри працюють з цифровими сигналами, які представляють собою дискретні сигнали з квантованими значеннями. Типовим цифровим сигналом є вихідний сигнал АЦП, який дискретизує неперервний сигнал і формує послідовність двійкових чисел із обмеженою розрядністю.

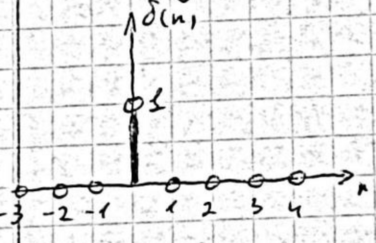
В будь-якій системі що працює з цифровими сигналами, обмежене число рівнів квантування приводить до появи похибки, тому при проектуванні цифр. фільтрів необхідно визначити число розрядів або рівнів квантування, необхідних для представлення сигналу з заданою похибкою. Для позначення цифр. сигналів будемо використовувати

$x(n)$ або $x(nT)$.

Позначення $X(nT)$ використовують для сигналів з рівномірними часовими інтервалами між відліками, тоді як $x(n)$ допускає нерівномірне розміщення відліків.

Найбільш важливі послідовності цифрових сигналів

1) Послідовний одиничний імпульс



$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Послідовність вигляду $\{x[n]\} = \{\ldots, x[-1], x[0], x[1] \ldots\}$ можна виразити через $\delta(n)$ наступним чином:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

2) послідовність Одиничний стрибок (сходинка)

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \qquad (2)$$

З виразів для (1) і (2) бачимо, що послідовності зв'язані між собою наступні співвідношеннями:

$$U[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]$$

$$\delta[n] = U[n] - U[n-1]$$

3) Експоненційна (показникова) послідовність

$$x[n] = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases},$$

де a - дійсна або комплексна величина.
Дану послідовність можна представити $x[n] = a^n \cdot U[n]$

4) синусоїдальна послідовність з періодом p

$$\begin{cases} x_1[n] = A\cos\left(\frac{2\pi n}{p}\right) \\ x_2[n] = A\sin\left(\frac{2\pi n}{p}\right) \end{cases}$$

Якщо p – додатне раціональне число $p = \alpha/\beta$, де α, β – прості додатні числа то послідовність повторюється α відліків

$$x_1[k] = x_1[k + m\alpha], \text{ де } k = 1, 2, \ldots$$

m – ціле число

Якщо ж період p буде представляти собою ірраціональне додатне число, то послідовність $x_1(n)$ і $x_2(n)$ не повторюватимуться

З цифровими сигналами і послідовностями можна виконувати арифметичні операції

нехай $X = \{x[n]\}$ і $Y = \{y[n]\}$ тоді

1) можна визначити суму та різницю 2-ох послідовностей

$$X \pm Y = \{x[n] \pm y[n]\}$$

2) множення послідовностей на скаляр

$$\alpha X = \{\alpha x[n]\}$$

3) множення і ділення 2-х послідовностей

$$X \cdot Y = \{x[n] \cdot y[n]\}$$

$$X / Y = \{x[n] / y[n]\}$$

5. Знайти обернене Z-перетворення функції $X(Z)$

$$X(Z) = \frac{2Z^{-1}}{1 - 0{,}25Z^{-2}}$$

$$\begin{array}{l|l} 2Z^{-1} & 1 - 0{,}25Z^{-2} \\ \hline 2Z^{-1} - 0{,}5Z^{-3} & 2Z^{-1} + 0{,}5Z^{-3} + 0{,}125Z^{-5} \\ \hline \quad 0{,}5Z^{-3} & \\ \quad 0{,}5Z^{-3} - 0{,}125Z^{-5} & \\ \hline \qquad 0{,}125Z^{-5} & \end{array}$$

$x_0 = \alpha_0 = 0$ $\quad x_2 = \alpha_2 = 0$ $\quad x_4 = \alpha_4 = 0$

$x_1 = \alpha_1 = 2$ $\quad x_3 = \alpha_3 = 0{,}5$ $\quad x_5 = \alpha = 0{,}125$

2. Для заданої передаточної ф-ції $H(S)$ знайти $Re[H(j\omega)]$, $Im[H(j\omega)]$, $|H(j\omega)|$, $\varphi(j\omega)$, $\tau(j\omega)$

$$H(s) = \frac{\sqrt{2}\, s}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1}$$

$$s = j\omega$$

$$H(j\omega) = \frac{\sqrt{2}\, j\omega}{(1-\omega^2) + \sqrt{2}\, j\omega} = \frac{j\sqrt{2}\,\omega\left((1-\omega^2) - \sqrt{2}\, j\omega\right)}{\left((1-\omega^2) + \sqrt{2}\, j\omega\right)\left((1-\omega^2) - \sqrt{2}\, j\omega\right)} =$$

$$= \frac{2\omega^2 + j\sqrt{2}\,\omega(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2 + 2\omega^2} = \frac{2\omega^2 + j\sqrt{2}\,\omega(1-\omega^2)}{1+\omega^4}$$

$$Re[H(j\omega)] = \frac{2\omega^2}{1+\omega^4} \qquad Im[H(j\omega)] = \frac{\sqrt{2}\,\omega(1-\omega^2)}{1+\omega^4}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{Re^2[H(j\omega)] + Im^2[H(j\omega)]} = \sqrt{\frac{4\omega^4 + 2\omega^2(1-\omega^2)^2}{(1+\omega^4)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\omega^4 + 2\omega^2(1-2\omega^2+\omega^4)}{(1+\omega^4)^2}} = \sqrt{\frac{4\omega^2 + 2\omega - 4\omega^4 + 2\omega^6}{(1+\omega^4)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\omega^2(1+\omega^4)}{(1+\omega^4)^2}} = \sqrt{\frac{2\omega^2}{1+\omega^4}}$$

$$\varphi(j\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{Im[H(j\omega)]}{Re[H(j\omega)]}$$

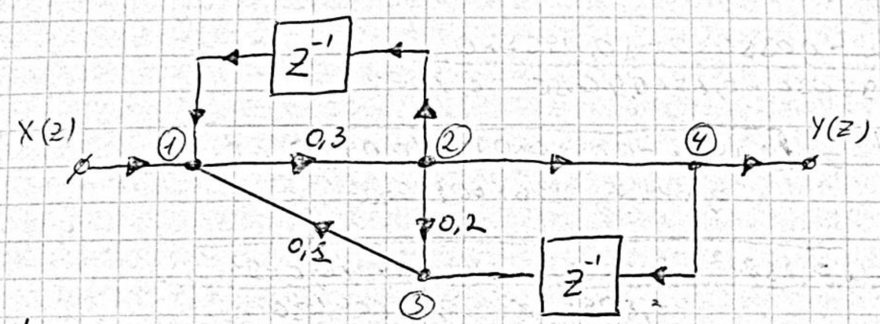
$$\varphi(j\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\,\omega(1-\omega^2)}{1+\omega^4} \cdot \frac{1+\omega^4}{2\omega^2}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{1-\omega^2}{\sqrt{2}\,\omega}$$

$$\tau(j\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1-\omega^2}{\sqrt{2}\,\omega}\right)^2}\right) \cdot \frac{-2\sqrt{2}\,\omega^2 - \sqrt{2}(1-\omega^2)}{2\omega^2} =$$

$$= \left(\frac{-2\sqrt{2}\,\omega^2 - \sqrt{2}(1-\omega^2)}{\frac{2\omega^2 + (1-\omega^2)^2}{2\omega^2} \cdot 2\omega^2}\right) = -\frac{-\sqrt{2}\,(2\omega^2 + 1 - \omega^2)}{2\omega^2 + (1-\omega^2)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(\omega^2+1)}{\omega^4+1}$$

7. Знайти передаточну функцію і частотну характеристику кола, зображеного на рисунку



$N=4$

$x_1(z) = x_{вх}(z) + 0,1 x_3(z) + z^{-1} x_2(z)$

$x_2(z) = 0,3 x_1(z)$

$x_3(z) = 0,2 x_2(z) + z^{-1} x_4(z)$

$x_4(z) = x_2(z)$

$x_1(z) - z^{-1} x_2(z) - 0,1 x_3(z) + 0 \cdot x_4(z) = x_{вх}(z)$

$-0,3 x_1(z) + x_2(z) + 0 \cdot x_3(z) + 0 \cdot x_4(z) = 0$

$0 \cdot x_1(z) - 0,2 x_2(z) + x_3(z) - z^{-1} x_4(z) = 0$

$0 \cdot x_1(z) - x_2(z) + 0 \cdot x_3(z) + x_4(z) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -z^{-1} & -0,1 & 0 \\ -0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 1 & -z^{-1} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \\ x_3(z) \\ x_4(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_{вх}(z)$$

$x_4(z) = x_2(z)$

$x_2(z) = 0,3 \cdot x_{вх} + 0,1(0,2 \cdot x_2(z) + z^{-1} \cdot x_2(z)) + z^{-1} x_2(z) =$

$= 0,3 x_{вх} + x_2(0,1(0,2 + z^{-1}) + z^{-1})$

$$x_2(z) = \frac{0,3 x_{вх}}{1 - 0,1(0,2 + z^{-1}) + z^{-1}} = x_4(z)$$

$$H(z) = \frac{x_{вих}}{x_{вх}} = \frac{0,3 x_{вх}}{(1 - 0,1(0,2 + z^{-1}) + z^{-1}) x_{вх}} = \frac{0,3}{1 - 0,1(0,2 + z^{-1}) + z^{-1}}$$

$z = e^{j\theta}$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{0,3}{(0,994 - 0,33 e^{-j\theta})} = \frac{0,3(0,994 - 0,33 e^{j\theta})}{(0,994 - 0,33 e^{-j\theta})(0,994 - 0,33 e^{j\theta})} =$$

$$= \frac{0,2982 - 0,099\cos\theta - j0,099\sin\theta}{0,994^2 - 0,328021(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) - 0,33^2 e^{j\theta - j\theta}} =$$

$$= \frac{0,2982 - 0,099\cos\theta - j0,099\sin\theta}{0,988036 - 0,65604\cos\theta - 0,1089}$$

$$|H(e^{j\theta})|^2 = \frac{\sqrt{(0,2982 - 0,099\cos\theta)^2 + (0,099\sin\theta)^2}}{0,879136 - 0,65604\cos\theta} =$$

$$= \frac{\sqrt{0,2982^2 - 2\cdot 0,2982\cdot 0,099\cos\theta + 0,099^2}}{0,879136 - 0,65604\cos\theta}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{-0,099\sin\theta}{0,2982 - 0,099\cos\theta} = \operatorname{arctg}\frac{0,099\sin\theta}{0,2982 - 0,099\cos\theta}$$

6. Цифровий фільтр описується р-ням

$$y(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) = x(n)$$

де $y(n)$ – вихідний, а $x(n)$ – вхідний сигнал. Знайти: передаточну ф-цію цифрового фільтра $H(z)$; визначити імпульсну х-ку фільтра $h(n)$ для $b_1 = -0,5$ $b_2 = -0,5$

$$Y(z) + b_1 z^{-1} Y(z) + b_2 z^{-2} Y(z) = X(z)$$

$$Y(z)(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{X(z)}{(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{2})X(z)} = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1} - 0,5z^{-2}}$$

Варіант 3

1 Обернене Z-перетворення. Методи знаходження оберненого Z-перетворення.

Процес знаходження послідовності по відповідній ф-ції змінної Z називається оберненим Z-перетворенням

$$X(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \qquad (1)$$

де інтеграл у виразі (1) представляє собою криволінійний інтеграл по замкнутому контуру C. Для простоти, контуром C може бути коло в області збіжності ф-ції X(z) в Z-площині.

Існує 4 способи знаходження Z-перетворення

1) Метод лишків

Якщо X(z) є раціональною ф-цією змінної z, то вираз (1) можна оцінити з допомогою теореми про лишки, яка встановлює, що

$$X(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) Z^{n-1} dZ = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F_n(Z) dZ = \text{сума лишків } F_n(z)$$

$$F_n(z) = X(z) \cdot z^{n-1} \qquad n \in [-\infty; +\infty]$$

2) Метод неперервного ділення

нехай X(z) визначається співвідношенням

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}} \qquad (2)$$

$m \le n$

Тоді ділення чисельника на знаменник отримаємо

$$X(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{2} + \dots \qquad (3)$$

Прирівняємо коефіцієнти

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n} \qquad (4)$$

тоді з (3) і (4) отримаємо

$$X(z) = X(0) + X(1) z^{-1} + \dots$$

$$x(n) = \begin{cases} x_n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

3) розклад ф-ції $X_1(z^{-1})$ в степеневий ряд

Нехай $X(z)$ є z-перетворована послідовність $x(n)$. Визначимо $X_1(z^{-1})$ наступним чином

$$X_1(z^{-1}) = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Розклад ф-ції $X_1(z^{-1})$ в ряд Тейлора в околі точки $z^{-1} = 0$ дає:

$$X_1(z^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} \dots, \qquad (5)$$

де α_k – коефіцієнт розкладу ф-ції в ряд Тейлора

$$\alpha_k = \frac{1}{k!} \frac{d^{(k)}(X_1(z^{-1}))}{(dz^{-1})^k} \Bigg|_{z^{-1}=0}$$

Порівнюючи вираз (5) і (4) можна записати

$$x(n) = \begin{cases} \alpha_n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

4) Метод розкладу на прості дроби

Якщо ф-ція $X(z)$ записана у вигляді множників, то її розклад на прості дроби має вигляд

$$X(z) = \frac{\xi_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{\xi_2}{1-p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{\xi}{1-p_n z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{1} + \dots + a_m z^{-m}}{b_0 + b_1 z^{1} + \dots + b_n z^{-n}}$$

$$b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} = 0$$

$$b_0 (z^{-1} - p_1)(z^{-1} - p_2)(\dots)\dots(z^{-1} - p_n)$$

де робимо припущення, що $p > n$, а полюси є різними. $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$ і $n > m$

ξ_i є лишком ф-ції $X(z)$ в полюсі, що знаходиться в точці при $z = p_i$.

Для того, щоб знайти ξ_i необхідно знайти вираз

$$\xi_i = (1 - p_i z^{-1}) X(z) |_{z = p_i}$$

5. Знайти обернене Z-перетворення функції $X(Z)$

$$X(Z) = \frac{Z^{-1}}{1 - 0{,}25 Z^{-1} - 0{,}375 Z^{-2}}$$

$$
\begin{array}{l|l}
Z^{-1} & 1 - Z^{-1} + 0{,}3565 Z^{-2} \\
\underline{Z^{-1} - 0{,}25 Z^{-2} - 0{,}375 Z^{-3}} & Z^{-1} + 0{,}25 Z^{-2} + 0{,}4375 Z^{-3} \\
0{,}25 Z^{-2} + 0{,}375 Z^{-3} & \\
\underline{0{,}25 Z^{-2} - 0{,}0625 Z^{-3} - 0{,}09375 Z^{-4}} & \\
0{,}4375 Z^{-3} + 0{,}09375 Z^{-4} & \\
\underline{0{,}4375 Z^{-3} - 0{,}109375 Z^{-4} - 0{,}160625 Z^{-5}} & \\
0{,}203125 Z^{-4} + 0{,}160625 Z^{-5} &
\end{array}
$$

$X_0 = \alpha_0 = 0$
$X_1 = \alpha_1 = 1$
$X_2 = \alpha_2 = 0{,}25$
$X_3 = \alpha_3 = 0{,}4375$
$X_4 = \alpha_4 = 0{,}203125$

2. Для заданої передаточної ф-ції $H(S)$ знайти $Re[H(j\omega)]$, $Im[H(j\omega)]$, $|H(j\omega)|$, $\varphi(j\omega)$, $\tau(j\omega)$

$$H(S) = \frac{4}{S+1}$$

$S = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{4}{j\omega+1} = \frac{4(-j\omega+1)}{(j\omega+1)(1-j\omega)} = \frac{4(1-j\omega)}{1+\omega^2}$$

$$Re[H(j\omega)] = \frac{4}{1+\omega^2} \qquad Im[H(j\omega)] = -\frac{4\omega}{1+\omega^2}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{Re^2[H(j\omega)] + Im^2[H(j\omega)]} = \frac{\sqrt{16(1+\omega^2)}}{1+\omega^2} = \frac{4}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\varphi(j\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{Im[H(j\omega)]}{Re[H(j\omega)]}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\left(-\frac{4\omega}{1+\omega^2}\cdot\frac{1+\omega^2}{4}\right) = -\operatorname{arctg}(-\omega) = \operatorname{arctg}(\omega)$$

$$\tau(j\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{1+\omega^2}$$

6. Цифровий фільтр описується р-ня

$$y(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) = x(n)$$

де $y(n)$ – вихідний, а $x(n)$ – вхідний сигнал.
Знайти: передаточну ф-цію цифрового фільтра $H(z)$
Визначити імпульсну х-ку фільтра $h(n)$ при $b_1=0,5$ $b_2=0,4$

$$y(z) + b_1 z^{-1} y(z) + b_2 z^{-2} y(z) = x(z)$$

$$y(z)(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) = x(z)$$

$$y(z) = \frac{x(z)}{1+b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{y(z)}{x(z)}$$

$$H(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{x(z)}{(1+b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})x(z)} = \frac{1}{1+0,5z^{-1}+0,4z^{-2}}$$

$$\tau(j\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{1+\omega^2}$$

6. Цифровий фільтр описується р-ня

$$y(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) = x(n)$$

де $y(n)$ – вихідний, а $x(n)$ – вхідний сигнал.
Знайти: передаточну ф-цію цифрового фільтра $H(z)$
визначити імпульсну х-ку фільтра $h(n)$ для $b_1=0{,}5$ $b_2=0{,}4$

$$y(z) + b_1 z^{-1} y(z) + b_2 z^{-2} y(z) = x(z)$$

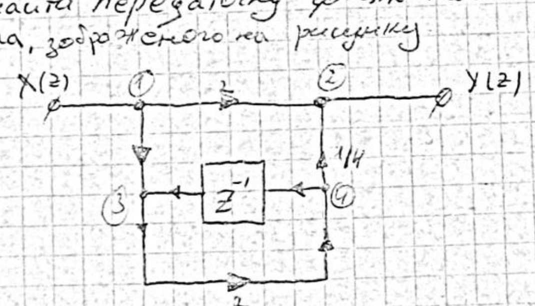
$$y(z)(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) = x(z)$$

$$y(z) = \frac{x(z)}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{2}}$$

$$H(z) = \frac{y(z)}{x(z)}$$

$$H(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{x(z)}{(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})} = \frac{1}{1 + 0{,}5 z^{-1} + 0{,}4 z^{-2}}$$

7 Знайти передаточну ф-цію і частотну характеристику кола, зображеного на рисунку



$N = 4$

$x_1(z) = x_{вх}$

$x_2(z) = 2x_1(z) + \frac{1}{4} x_4(z)$

$x_3(z) = x_1(z) + z^{-1} x_4(z)$ $\qquad x_3(z) = \frac{x_1(z)}{1-2z^{-1}}$

$x_4(z) = 2\,x_2(z)$

$$\begin{cases} x_1(z) + 0\cdot x_2(z) + 0\cdot x_3(z) + 0\cdot x_4(z) = x_{вх} \\ -2x_1(z) + x_2(z) + 0\cdot x_3(z) - \frac{1}{4} x_4(z) = 0 \\ -1\cdot x_1(z) + 0\cdot x_2(z) + 1\cdot x_3(z) - z^{-1} x_4(z) = 0 \\ 0\cdot x_1(z) + 0\cdot x_2(z) - 2\cdot x_3(z) + x_4(z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 0 & 1 & -z^{-1} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \\ x_3(z) \\ x_4(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_{вх}(z)$$

$X_{вих} = X_2(z)$

$X_2(z) = 2X_1(z) + \frac{1}{4}\cdot 2\,\frac{X_1(z)}{1-2z^{-1}} = X_1(z)\left(2+\frac{1}{2(1-2z^{-1})}\right) =$

$= X_{вх}\left(2+\frac{1}{2(1-2z^{-1})}\right)$

$H(z) = \frac{X_{вих}}{X_{вх}} = \frac{X_{вх}\left(2+\frac{1}{2(1-2z^{-1})}\right)}{X_{вх}} = 2+\frac{1}{2-4z^{-1}} = \frac{4-8z^{-1}+1}{2-4z^{-1}}$

$H(e^{j\theta}) = \frac{4-8e^{-j\theta}+1}{2-4e^{-j\theta}} = \frac{(4-8e^{-j\theta}+1)(2-4e^{j\theta})}{(2-4e^{-j\theta})(2-4e^{j\theta})} =$

$= \frac{8-16e^{j\theta}-16e^{-j\theta}+32e^{j\theta-j\theta}+2-4e^{j\theta}}{4-8e^{j\theta}-8e^{-j\theta}+16e^{j\theta-j\theta}} = \frac{42-36\cos\theta-4j\sin\theta}{4-16\cos\theta+16}$

$|H(e^{j\theta})|^2 = \frac{(42-36\cos\theta)^2+16\sin^2\theta}{4-16(\cos\theta-1)}$

$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{-4\sin\theta}{42-36\cos\theta} = \operatorname{arctg}\frac{4\sin\theta}{42-36\cos\theta}$

4. Знайти передаточну ф-цію для нормованого фільтра нижніх частот Чебишева 2-го

$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2{}_n T^2(\omega)}$

$T_n(\omega) = \cos(n\arccos(\omega))$

$T_{n+1}(\omega) = 2\omega T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega)$

$T_0(\omega) = \cos(0) = 1$

$T_1(\omega) = \cos(\arccos(\omega)) = \omega$

$T_2(\omega) = 2\omega\cdot\omega - 1 = 2\omega^2 - 1$

$\omega = \frac{s}{j}$

$|H(j\omega)|^2 = H(s)\cdot H(-s) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega)} = \frac{1}{1+\varepsilon^2(2\omega^2-1)^2} =$

$= \frac{1}{1+\varepsilon^2\left(2\cdot\frac{s^2}{-1}-1\right)^2} = \frac{1}{1+\varepsilon^2(-2s^2-1)^2} = \frac{1}{1+\varepsilon^2(4s^4+4s^2+1)}$

$= \frac{1}{1+4s^4\varepsilon^2+4s^2\varepsilon^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{4\varepsilon^2\left(\frac{1+\varepsilon^2}{4\varepsilon^2}+s^4+s^2\right)}$

Варіант 5

1 Основні функціональні вузли цифрових фільтрів. Аналіз цифрових фільтрів

Цифровий фільтр реалізують або програмним способом на ПК або апаратним способом.

Основні принципи реалізації ЦФ

1. Перетворення співвідношення між вхідними, вихідними сигналами цифрового фільтру в алгоритм

2. Реалізацію алгоритму у вигляді комбінації цифрових компонент або у вигляді цифрової апаратури.

Позначимо $H(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{1+az^{-1}}{1+bz^{-1}}$, (1)

де $x(z)$ і $y(z)$ – відповідно перетв. вхідної та вихідної послідовностей $x(n)$ та $y(n)$

З виразу (1) $y(z) = H(z) \cdot x(z)$

Для реалізації ~~[illegible]~~ передаточної ф-ції $H(z)$ перетворимо її в різницеве р-ня

$$(1+az^{-1}) \cdot x(z) = (1+bz^{-1})\, y(z)$$

$$x(n) + a\,x(n-1) = y(n) + b\,y(n-1)$$

$$y[n] = -b\,y[n-1] + x[n] + a\,x[n-1] \quad (2)$$

З останнього р-ня випливає, що сигнал на виході $y(n)$ представляє собою алгебраїчно зважену суму вхідного сигналу і попередніх значень вхідного і вихідного сигналу.

Реалізація передаточної ф-ції $H(z)$ вимагає виконання алгоритму (2).

Для цього необхідно: 1) одиничні затримки (регістри зсуву) для зберігання попередніх значень вхідного та вих. сигналу

2) перемножувачі для забезпечення необхідного масштабу-

вання або отримання зважених множників вхідних сиг-
налів
3) суматори, які виконують також і віднімання для додаван-
ня різних величин в правій частині р-ня (2)
Програмна і апаратна реалізація виразу $H(z)$ вимагають ре-
алізації трьох вище згаданих частин:
1) затримок (регістрів зсуву); 2) операцій додавання (суматорів)
3) операцій множення (перемножувачів), схематичне зображення
яких має наступний вигляд

$x(n) \to \boxed{z^{-1}} \to y(n)=x(n-1)$ – затримка (регістр)

$x_1(n), x_2(n) \to (+) \to y(n)=x_1(n)+x_2(n)$ – суматор

$x(n) \to \boxed{\alpha} \to y(n)=\alpha\, x(n)$ перемножувач

Аналіз цифрових фільтрів

Розглянемо цифрову схему з одним входом і одним вихо-
дом, яка складається з $N+2$ $(0, 1, \dots, N+1)$ вузлів і в віток.
Нехай вузол 0 є вхідним (джерелом сигналу), а
вузол $N+1$ – вихідним; змінна $x_\alpha(n)$, $\alpha=1, \dots N$ відноситься
до виходу суматора в вузлі α. Нехай також $x_{вх}(n)$ – вхідна
послідовність, $x_{вих}(n)$ – вихідна послідовність
$X_i(z)$ – z-перетворення послідовності $x_i(n)$, $x_{вх}(n)$, $x_{вих}(n)$.
В кожному вузлі α запишемо вузлове р-ня, яке
описує взаємодію сигналів віток, що підходять до вузла α.
В результаті отримаємо систему алгебраїчних комплексних
р-нь розмірності N:

$$A \cdot X(z) = B\, X_{вх}(z) \qquad (3)$$

де $A(z) = (N \times N)$ – комплексна матриця $(N \times N)$ і містить
х-ки віток даної схеми; B – вектор розмірністю $(N \times 1)$
$X(z)$ – вектор $(N \times 1)$, що складається з N вузлових змінних

$$X(z) = (X_1(z), X_2(z), \dots X_N(z))^T$$

З виразу (3) знайдемо $X(z)$

$$X(z) = A^{-1} B(z) \cdot X_{вх}(z) \qquad (4)$$

вихідне р-ня можна отримати, додавши р-ня в вузлі $N+1$

$$X_{вих}(z) = C(z) \cdot X(z) + D(z) \cdot X_{вх}(z) \qquad (5)$$

де $C(z) = (1 \times N)$ – рядок $D(z) = (1 \times 1)$ – скаляр
Підставимо (4) в (5)

$$X_{вих}(z) = C(z) \cdot A^{-1}(z) \cdot B(z) \cdot X_{вх}(z) + D(z) \cdot X_{вх}(z)$$

$$X_{вих}(z) = [C \cdot A^{-1} \cdot B + D]\, X_{вх}(z)$$

$$H(z)=\frac{x_{вих}(z)}{x_{вх}(z)}=C(z)\cdot A^{-1}(z)\cdot B(z)+D(z)$$

$$x_{вих}(n)=h(n)\cdot x_{вх}(n)$$

5. Знайти обернене Z-перетворення $X(z)$

$$X(z)=\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2}}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-0{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2} \\ \underline{1-0{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2}} & 1+0{,}5z^{-1}-0{,}25z^{-2}-0{,}375z^{-3}-0{,}0625z^{-4} \\ 0{,}5z^{-1}-0{,}5z^{-2} & \\ \underline{0{,}5z^{-1}-0{,}25z^{-2}+0{,}25z^{-3}} & \\ -0{,}25z^{-2}-0{,}25z^{-3} & \\ \underline{-0{,}25z^{-2}+0{,}125z^{-3}-0{,}125z^{-4}} & \\ -0{,}375z^{-3}+0{,}125z^{-4} & \\ \underline{-0{,}375z^{-3}+0{,}1875z^{-4}-0{,}1875z^{-5}} & \\ -0{,}0625z^{-4}+0{,}1875z^{-5} & \end{array}$$

$x_0=\alpha_0=1$

$x_1=\alpha_1=0{,}5$

$x_2=\alpha_2=-0{,}25$

$x_3=\alpha_3=-0{,}375$

$x_4=\alpha_4=-0{,}0625$

2. Для заданої передаточної функції $H(s)$ знайти $Re[H(j\omega)]$, $Im[H(j\omega)]$, $|H(j\omega)|$, $\varphi(j\omega)$, $\tau(j\omega)$

$$H(s)=\frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

$s=j\omega$

$$H(j\omega)=\frac{2j\omega+1}{(1-\omega^2)+j\omega}=\frac{(2j\omega+1)((1-\omega^2)-j\omega)}{((1-\omega^2)+j\omega)((1-\omega^2)-j\omega)}=$$

$$=\frac{2j\omega(1-\omega^2)+2\omega^2+(1-\omega^2)-j\omega}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}=\frac{1+\omega^2+j(\omega-2\omega^3)}{1-2\omega^2+\omega^4+\omega^2}$$

$$Re[H(j\omega)]=\frac{1+\omega^2}{1-\omega^2+\omega^4}\qquad Im[H(j\omega)]=\frac{\omega-2\omega^3}{1-\omega^2+\omega^4}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1+\omega^2)^2 + (\omega - 2\omega^3)^2}}{1 - \omega^2 + \omega^4}$$

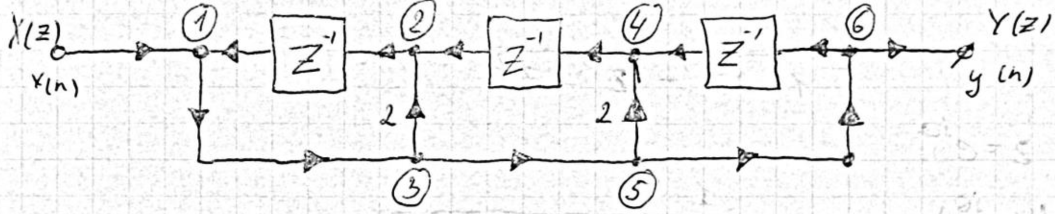
$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{Im[H(j\omega)]}{Re[H(j\omega)]} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega - 2\omega^3}{1+\omega^2}\right)$$

$$\tau(j\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - 2\omega^3}{1+\omega^2}\right)} \cdot \frac{(1-6\omega^2)(1+\omega^2) - 2\omega(\omega - 2\omega^3)}{(1+\omega^2)^2}\right.$$

$$= -\frac{1 + \omega^2 - 6\omega^2 - 6\omega^4 - 2\omega^4 + 4\omega^4}{(1+\omega^2)^2 + (\omega - 2\omega^3)^2} = \frac{1 - 7\omega^2 - 2\omega^4}{1 + 2\omega^2 + \omega^4 + \omega^2 - 4\omega^4 + 4\omega^6} =$$

$$= -\frac{1 - 7\omega^2 - 2\omega^4}{1 + 3\omega^2 - 3\omega^4 + 4\omega^6}$$

7. Знайти передаточну ф-цію і частотну характеристику кола, зображеного на рисунку



$$X_1(z) = X_{вх} + z^{-1} X_2(z)$$
$$X_2(z) = 2X_3(z) + z^{-1} X_4(z)$$
$$X_3(z) = X_1(z)$$
$$X_4(z) = 2X_5(z) + z^{-1} X_6(z)$$
$$X_5(z) = X_3(z)$$
$$X_6(z) = X_5(z)$$

$$X_1(z) - z^{-1} X_2 + 0X_3(z) + 0\cdot X_4(z) + 0\cdot X_5(z) + 0\cdot X_6(z) = X_{вх}$$
$$0\cdot X_1(z) + X_2(z) - 2X_2(z) - z^{-1} X_4(z) + 0\cdot X_5(z) + 0\cdot X_6(z) = 0$$
$$-X_1(z) + 0\cdot X_2(z) + X_3(z) + 0\cdot X_4(z) + 0\cdot X_5(z) + 0\cdot X_6(z) = 0$$
$$0\cdot X_1(z) + 0\cdot X_2(z) + 0\cdot X_3(z) + X_4(z) - 2\cdot X_5(z) - z^{-1}\cdot X_6(z) = 0$$
$$0\cdot X_1(z) + 0\cdot X_2(z) - X_3(z) + 0\cdot X_4(z) + X_5(z) + 0\cdot X_6(z) = 0$$
$$0X_1(z) + 0\cdot X_2(z) + 0\cdot X(z) + 0\cdot X_4(z) - X_5(z) + X_6(z) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -z & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -z^{-1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \\ X_4(z) \\ X_5(z) \\ X_6(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot X_{вх}$$

$$X_{вих} = X_6(z)$$

$$X_1(z) = X_{вх} + z^{-1}\left(2X_1(z) + z^{-1}\left(2X_1(z) + z^{-1} X_1(z)\right)\right) =$$
$$= X_{вх} + X_1 z^{-1}\left(2 + z^{-1}(2 + z^{-1})\right) = X_{вх} + X_1(z)\left(2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}\right) = X_1$$

$$X_1(z) = \frac{X_{вх}}{1 - (2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3})}$$

$$H(z) = \frac{Y_{вых}}{X_{вх}} = \frac{Y_{вх}}{(1-(2z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3}))Y_{вх}} =$$

$$= \frac{1}{1-2z^{-1}-2z^{-2}-z^{-3}}$$

$$z = e^{j\theta}$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1-2(e^{-j\theta}+2e^{-2j\theta}-e^{-j3\theta})} =$$

$$= \frac{1-2e^{j\theta}-2e^{j2\theta}-e^{j3\theta}}{(1-2e^{-j\theta}-2e^{-j2\theta}-e^{-j3\theta})(1-2e^{j\theta}-2e^{j2\theta}-e^{j3\theta})} \doteq$$

$$(1-2e^{-j\theta}-2e^{-j2\theta}-e^{-j3\theta})(1-2e^{j\theta}-2e^{j2\theta}-e^{j3\theta}) = 1-2e^{j\theta}-2e^{j2\theta}-$$
$$-e^{j3\theta}-2e^{-j\theta}+4e^{-j\theta+j\theta}+4e^{-j\theta+j\theta 2}+2e^{-j\theta+j3\theta}-2e^{-j\theta 2}+$$
$$+4e^{-j2\theta+j\theta}+4e^{-j2\theta+j2\theta}+2e^{-j2\theta+j3\theta}+e^{-j3\theta}+2e^{-j3\theta+j\theta}+2e^{-j\theta 3+j2\theta}+$$
$$e^{-j3\theta+j3\theta} = 1-2(e^{j\theta}+e^{-j\theta})-2(e^{j2\theta}+e^{-j2\theta})-(e^{j3\theta}+e^{j3\theta})+4e^{0}+$$
$$+4(e^{j\theta}+e^{-j\theta})+2(e^{j2\theta}+e^{-j2\theta})+4e^{0}+2(e^{j\theta}+e^{-j\theta}+e^{0} =$$
$$= 10-2(2\cos\theta)-2\cdot 2\cos 2\theta-2\cos 3\theta+4(2\cos\theta)-2(2\cos 2\theta)+$$
$$+2(2\cos\theta) = 10+8\cos\theta-2\cos 3\theta$$

$$1-2e^{j\theta}-2e^{j2\theta}-e^{j3\theta} = 1-2\cos\theta-2\cos 2\theta-\cos 3\theta-j(2\sin\theta+$$
$$+2\sin 2\theta+\sin 3\theta)$$

$$\doteq \frac{1-2\cos\theta-2\cos 2\theta-\cos 3\theta-j(2\sin\theta+2\sin 2\theta+\sin 3\theta)}{10+8\cos\theta-2\cos 3\theta}$$

$$|H(e^{j\theta})|^2 = \frac{\sqrt{(1-2\cos\theta-2\cos 2\theta-\cos 3\theta)^2+(2\cos\theta+2\sin 2\theta+\sin 3\theta)^2}}{10+8\cos\theta-2\cos 3\theta}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{-(2\sin\theta + 2\sin 2\theta + \sin 3\theta)}{1 - 2\cos\theta - 2\cos 2\theta - \cos 3\theta} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{2\sin\theta + 2\sin\theta + \sin 3\theta}{1 - 2\cos\theta - 2\cos 2\theta - \cos 3\theta}$$

6. Цифровий фільтр описується р-ням

$$y(z) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) = x(n)$$

де $y(n)$ – вихідний, а $x(n)$ – вхідний сигнал. Знайти: передаточну ф-цію цифрового фільтра $H(z)$; визначити імпульсну х-ку фільтра $h(n)$ для $b_1 = 0,5$ $b_2 = 0,4$

$$Y(z) + b_1 z^{-1} Y(z) + b_2 z^{-2} Y(z) = X(z)$$

$$Y(z)(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) = X(z)$$

$$g(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{X(z)}{(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})X(z)} = \frac{1}{1 + 0,5 z^{-1} + 0,4 z^{-2}}$$

заміна $s^2 = p$

$$(s^2 - p_1)(s^2 + p_2) = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-\frac{1}{\varepsilon^2}}}{2}$$

Варіант 4

1. Апроксимація передаточної функції фільтрів. Чебишівська апроксимація.

Фільтр – система, яка характеризується набором функцій типу вхід-вихід або збурення виклик

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau,$$

де $h(t)$ – перехідна характеристика фільтра

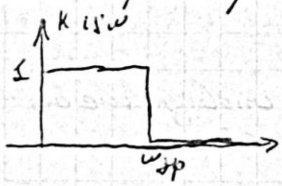
$$Y(S)=H(S)\cdot X(S), \quad S=j\omega$$

$H(S)$ – передаточна функція фільтра

Так як $S=j\omega$, то функція $H(S)$ або $H(j\omega)$ є комплексною величиною і має дійсну та уявну частину

$$H(j\omega)=Re[H(j\omega)]+Im[H(j\omega)]$$

Проектування більшої частини фільтрів відбувається із апроксимації у вигляді ФНЧ з нормованою ідеальною характеристикою.



$\omega_{зр}=1\ \frac{рад}{с}$ – нормування

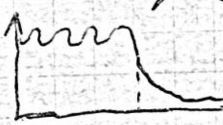
Нормований ідеальний фільтр має коефіцієнт передачі рівний 1 в смузі пропускання від 0 до $\omega_{зр}$ і нуль для всіх частот більших $\omega_{зр}$. Розв'язок задачі для таких фільтрів представляє собою функцію, яка має одиничний тангенс кута нахилу в області пропускання

$$\begin{cases} H(j\omega) = e^{-j\omega} & 0 \le |\omega| \le \omega_{зр} \\ H(j\omega) = 0 & |\omega| > \omega_{зр} \end{cases} \qquad \omega_{зр} = 1 \text{ рад/с}$$

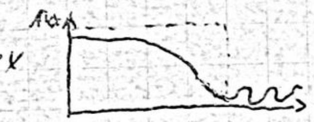
Тепер ідеальний ФНЧ може бути перетворений в будь-який інший фільтр

До основних апроксимацій, які використовують при проектуванні фільтрів відносять апроксимацію Чебишева

- фільтр Чебишева з рівнохвильовою в обл. пропускання і рівноспадною в обл. затримки АЧХ



- інверсний фільтр Чебишева з рівноспадною в обл. пропускання і рівнохвильовою в обл. затримки АЧХ



ω

Апроксимація Чебишева

В багатьох випадках бажано мати апроксимацію, яка би задовільняла технічним умовам на проект. фільтра при менших значеннях n

Для Чебишівської апроксимації коефіцієнт передачі фільтру Чебишева в області пропускання коливається між 2-ма значеннями. Число хвиль таких коливань, що вкладаються в смугу пропускання залежить від порядку n фільтра. Амплітуда коливань коефіцієнт передачі є вільним параметром.

Поліном Чебишева n-го порядку визначається наступним виразом

$$T_n(\omega) = \cos(n \cdot \cos^{-1}(\omega))$$

введемо $\cos^{-1}(\omega) = x$ тоді

$$T_n(\omega) = \cos(nx)$$

Для спрощення використовують рекурентне співвідношення

$$\cos[(n+1)x] = 2\cos nx \cdot \cos x - \cos[(n-1)x]$$

Звідси $T_{n+1}(\omega) = 2\omega T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega)$

Поліном Чебишева має властивості:

1) для всіх n: $\begin{cases} 0 \le |T_n(\omega)| \le 1 & 0 \le |\omega| \le 1 \\ |T_n(\omega)| > 1 & |\omega| > 1 \end{cases}$

2) Поліном $T_n(\omega)$ монотонно зростає для всіх значень n

3) Поліном T_n є непарним (парним) поліномом, якщо n є непарним (парним

$|T_n(0)| = 0$ n - непарне

$|T_n(1)| = 1$ n - парне

Для $|\omega| \le 1$ значення ф-ції arccos ω є дійсним кутом, тому $T_n(\omega)$ представляє собою косинус дійсного кута і його значення змінюється періодично по значенню [-1; +1]

Для $|\omega| > 1$ arccos ω представляє собою уявну величину і cos(n arccos ω) є гіперболічним косинусом дійсного кута

Так як гіперболічний косинус змінюється [1; +∞] то $T_n(\omega)$ буде в тих самих межах. $1 \le |T_n(\omega)| < \infty$

5. Знайти обернене Z-перетворення ф-ції X(Z)

$$X(Z) = \frac{1 + 2Z^{-1} + Z^{-2}}{1 - Z^{-1} + 0,3561 Z^{-2}}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 + 2Z^{-1} + Z^{-2} & 1 - Z^{-1} + 0,3561 Z^{-2} \\
\underline{1 - Z^{-1} + 0,3561 Z^{-2}} & 1 + 3Z^{-1} + 2,3561 Z^{-2} + 1,2878 Z^{-3} \\
\quad 3Z^{-1} - 0,6439 Z^{-2} & \\
\quad \underline{3Z^{-1} - 3Z^{-2} + 1,0683 Z^{-3}} & \\
\qquad 2,3561 Z^{-2} - 1,0683 Z^{-3} & \\
\qquad \underline{2,3561 Z^{-2} - 2,3561 Z^{-3} + 0,839 Z^{-4}} & \\
\qquad\qquad 1,2878 Z^{-3} - 0,839 Z^{-4} &
\end{array}$$

$x_0 = \alpha_0 = 1$

$x_1 = \alpha_1 = 3$

$x_2 = \alpha_2 = 2,3561$

$x_3 = \alpha_3 = 1,2871$

2. Для заданих передаточних функцій $H(S)$ знайти $Re[H(j\omega)]$, $Im[H(j\omega)]$, $|H(j\omega)|$, $\varphi(j\omega)$, $\tau(j\omega)$

$$H(s) = \frac{10s+1}{s^2+s+1}$$

$S = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{j10\omega+1}{-\omega^2+j\omega+1} = \frac{(1+j10\omega)(1-\omega^2-j\omega)}{(\omega^2+1)^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{-\omega^2+1+10\omega^2-j\omega-j10\omega^3+j10\omega}{1-\omega^2+\omega^4} = \frac{1+9\omega^2+j(9\omega-10\omega^3)}{1-\omega^2+\omega^4}$$

$$Re[H(j\omega)] = \frac{1+9\omega^2}{1-\omega^2+\omega^4} \qquad Im[H(j\omega)] = \frac{9\omega-10\omega^3}{1-\omega^2+\omega^4}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1+9\omega^2)^2+(9\omega-10\omega^3)^2}}{1-\omega^2+\omega^4}$$

$$\varphi(j\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{Im[H(j\omega)]}{Re[H(j\omega)]} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{9\omega-10\omega^3}{1+9\omega^2}\right)$$

$$\tau(j\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -\left(\frac{1}{1+\left(\frac{9\omega-10\omega^3}{1+9\omega^2}\right)^2}\right)\cdot\frac{(9-30\omega^2)\cdot(1+9\omega^2)-18\omega(9\omega-10\omega^3)}{(1+9\omega^2)^2} = -\left(\frac{9+81\omega^2-30\omega^2-270\omega^4-162\omega^2+180\omega^4}{(1+9\omega^2)^2+(9\omega-10\omega^3)^2}\right) =$$

$$= -\left(\frac{9-111\omega^2-90\omega^4}{(1+9\omega^2)^2+(9\omega-10\omega^3)^2}\right) = \frac{-9+111\omega^2+90\omega^4}{1+18\omega^2+81\omega^4+81\omega^2-180\omega^4+100\omega^6}$$

$$= \frac{-9+111\omega^2+90\omega^4}{1+99\omega^2-99\omega^4+100\omega^6}$$

4. Знайти передаточну функцію для нормованого фільтра нижніх частот Баттерворта 3-го порядку

$$B(\omega) = H(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^{2n}}$$

$n = 3 \quad S = j\omega$

$$|H(j\omega)|^2 = H(S)H(-S) = \frac{1}{1-S^6} = \frac{1}{(1-S^3)(1+S^3)} =$$

$$= \frac{1}{(1-S)(1+S+S^2)(1+S)(1-S+S^2)}$$

$1-S=0$ $\quad$ $S=1$

$1+S+S^2=0$ $\quad$ $S_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

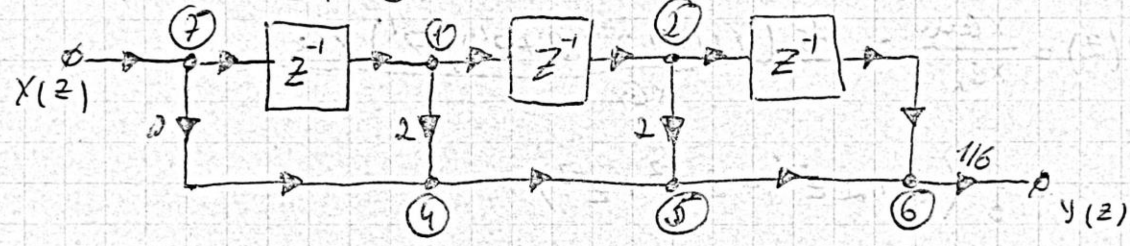
$1+S=0$ $\quad$ $S=-1$

$1-S+S^2=0$ $\quad$ $S_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Вибираємо з лівої площини ($S<0$

$$H(S)=\frac{1}{(1+S)(1+S+S^2)}$$

7. Знайти передаточну функцію і частотну х-ку кола, зображеного на рисунку



$X_1(z)=z^{-1}X_7(z)$

$X_2(z)=z^{-1}X_1(z)$

$X_3(z)=z^{-1}X_2(z)$

$X_4(z)=X_7(z)+2X_1(z)$

$X_5(z)=X_4(z)+2X_2(z)$

$X_6(z)=X_5(z)+X_3(z)$

$X_7(z)=X_{вх}$

$X_1(z)+0\cdot X_2(z)+0\cdot X_3(z)+0\cdot X_4(z)+0\cdot X_5(z)+0\cdot X_6(z)-z^{-1}X_7(z)=0$

$-z^{-1}X_1(z)+X_2(z)+0\cdot X_3(z)+0\cdot X_4(z)+0\cdot X_5(z)+0\cdot X_6(z)+0\cdot X_7(z)=0$

$0\cdot X_1(z)-z^{-1}X_2(z)+X_3(z)+0\,X_4(z)+0\cdot X_5(z)+0\cdot X_6(z)+0\cdot X_7(z)=0$

$-2\cdot X_1(z)+0\cdot X_2(z)+0\cdot X_3(z)+X_4(z)+0\cdot X_5(z)+0\cdot X_6(z)-X_7(z)=0$

$0\cdot X_1(z)-2X_2(z)+0\cdot X_3(z)-X_4(z)+X_5(z)+0\cdot X_6(z)+0\,X_7(z)=0$

$0\cdot X_1(z)+0\,X_2(z)-X_3(z)+0\cdot X_4(z)-X_5(z)+X_6(z)+0\cdot X_7(z)=0$

$X_1(z)+0\cdot X_2(z)+0\cdot X_3(z)+0\cdot X_4(z)+0\cdot X_5(z)+0\,X_6(z)+X_7(z)=X_{вх}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z^{-1} \\ -z^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \\ X_4(z) \\ X_5(z) \\ X_6(z) \\ X_7(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} X_{вх}$$

$$X_{вих} = \frac{1}{6} X_6(z)$$

$$X_6(z) = X_5(z) + X_3(z) = X_4(z) + 2\cdot X_2(z) + z^{-1}\cdot X_2(z) = X_{вх} + 2X_1(z) +$$
$$+ (2+z^{-1})z^{-1}X_1(z) = X_{вх} + (2+z^{-1}(2+z^{-1}))X_1(z) =$$
$$= X_{вх} + (2+z^{-1}(2+z^{-1}))z^{-1}X_{вх} = X_{вх}(1+(2+z^{-1}(2+z^{-1}))z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{X_{вих}}{X_{вх}} = \frac{\frac{1}{6}(1+(2+z^{-1}(2+z^{-1}))z^{-1})X_{вх}}{X_{вх}} =$$

$$= \frac{1}{6}(1+2z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3})$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1+2e^{-j\theta}+2e^{-2j\theta}+2e^{-j3\theta}}{6} = \frac{1+2\cos\theta-2j\sin\theta-2j\sin2\theta+2+2\cos3\theta-2j\sin3\theta}{6} =$$

$$= \frac{1+2(\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta)-j2(\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta)}{6}$$

$$|H(e^{j\theta})|^2 = \frac{\sqrt{(1+2(\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta))^2+4(\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta)^2}}{6}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{-2(\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta)}{1+2(\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta)} = \operatorname{arctg}\frac{2(\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta)}{1+2(\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta)}$$

6. Цифровий фільтр описується р-ням

$$y(n)+b_1y(n-1)+b_2y(n-2)=x(n)$$

де $y(n)$ – вихідний, а $x(n)$ – вхідний сигнал. Знайти: передаточну ф-цію цифрового фільтра $H(z)$, визначити імпульсну характеристику фільтра $h(n)$ для $b_1=0{,}5$, $b_2=0{,}1$

$$y(z)+b_1z^{-1}y(z)+b_2z^{-2}y(z)=x(z)$$

$$y(z)(1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2})=x(z)$$

$$y(z)=\frac{x(z)}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{X(z)}{(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})\, X(z)} = \frac{1}{1 + 0{,}5 z^{-1} + 0{,}4 z^{-2}}$$