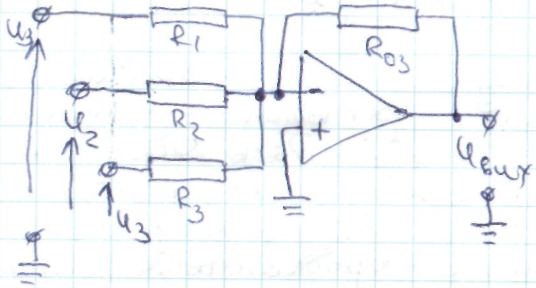
нехай фільтр, що опис. р-ням (1), має один вхід і один вихід, є фізично реалізованим, лінійним, зосередженим і інваріантним в часі. Перетворення Лапласа виразу (1) дає:

$$Y(s) = H(s)\cdot X(s)$$

Лекція 10

26.11.10

1) Знайти величини резисторів R_1, R_2, R_3 для схеми сумування так, щоб $U_{вих} = -(6U_1 + 3U_2 + 4U_3)$ при $R_{03} = 200 кОм$



$$K = -\frac{R_{03}}{R} = \frac{U_{вих}}{U_{вх}}$$

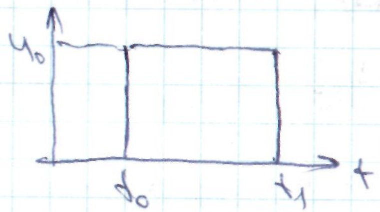
$$6 = \frac{R_{03}}{R_1} = \frac{200 кОм}{33{,}3 кОм}$$

$$3 = \frac{R_{03}}{R_2} = \frac{200 кОм}{66{,}6 кОм}$$

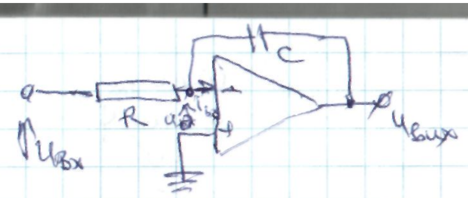
$$4 = \frac{R_{03}}{R_3} = \frac{200 кОм}{50 кОм}$$

$$U_{вих} = -\frac{R_{03}}{R} U_{вх}$$

2) Знайти сигнал на виході інт. якщо на його вхід подати сходинковий сигнал, форма якого має вигляд



для $R = 1 МОм$, $C = 0{,}1 мкФ$, $U_{вх} = 1 В$ знайти $U_{вих}$ через 3 мс



$i_{вх} \approx 0$ $\quad R \to \infty$

$U_д \approx 0$ $\quad R_{вих} \approx 0 Ом$

$$i_R = \underbrace{i_{вх}}_{\approx 0} + i_C \approx i_C;$$

$$\underbrace{U_д}_{\approx 0} + U_C + U_{вих} = 0 \qquad U_{вих} = -U_C$$

$$U_{вх} = U_R = i_R \cdot R$$

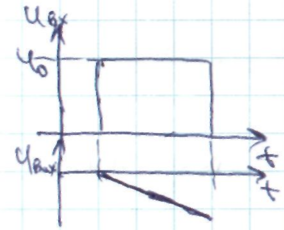
$$i_C = C\frac{dU_C}{dt}$$

$$U_{вх} = CR\frac{dU_C}{dt} = -RC\frac{dU_{вих}}{dt}$$

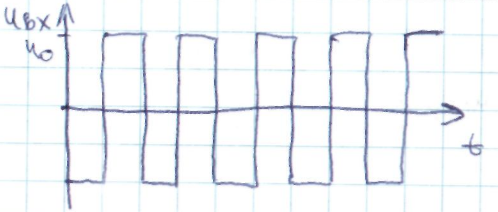
$$\boxed{U_{вих} = -\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t_1} U_{вх}\,dt}$$ – р-ня ідеального інтегратора

$$U_{вих} = -\frac{U_0}{RC}t\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$U_{вих} = -\frac{1 В}{10^6\cdot 10^{-7}}\cdot 3\cdot 10^{-3} = 3\cdot 10^{-2} В$$



3) В інтеграторі $R = 10 кОм$, $C = 0{,}1 мкФ$ $U_{вх}$ представляє прямокутні імпульси частотою $f = 1 кГц$ і амплітудою 5В. Знайти вигляд напруги на виході інтегратора



R = 10 кОм
C = 0,1 мкФ
F = 1кГц
T = 1мс

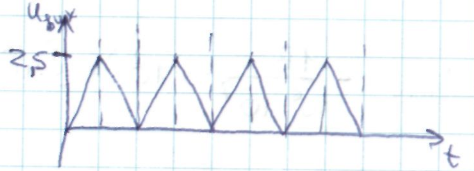
$$U_{вх}(t) = \begin{cases} -U_0, & 0 \le t \le T/2 \\ U_0, & T/2 \le t \le T \end{cases}$$

$0 \le t \le T/2$: $U_{вих} = \frac{U_0}{RC} t \Big|_0^{T/2} = \frac{U_0}{RC} T/2$

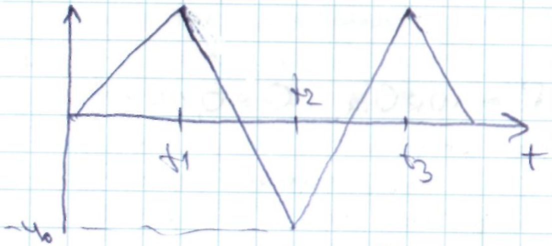
$T/2 \le t \le T$: $U_{вих} = -\frac{U_0}{RC} t \Big|_{T/2}^{T} = T/2\left(-\frac{U_0}{RC}\right)$

$$U_{вих}(t) = \frac{5B \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{10^4 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}} = 2,5B$$

$$U_{вих}(t) = -\frac{5B \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{10^4 \cdot 10^{-7}} = -2,5B$$



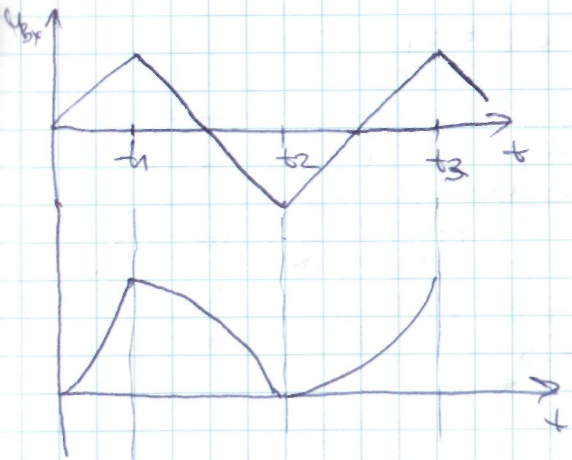
4) Знайти напругу на виході інтегратора



$t_1 \le t\ t_2$

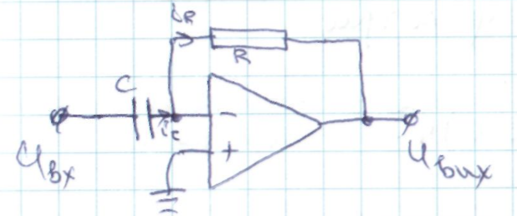
$$U_{вх}(t) = U_0 - 2U_0 \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

$$U_{вих} = -\frac{1}{RC}\left[U_0 \cdot t - 2U_0 \frac{t^2}{2(t_2 - t_1)} + 2U_0 \frac{t_1 t}{t_2 - t_1}\right]$$



$$U_{вх} = -\frac{1}{RC}\left[\left(2U_0 \frac{t_1}{t_2 - t_1} + U_0\right)t - \frac{U_0}{t_2 - t_1} t^2\right]$$

5) На вхід диференціатора з R = 10 кОм, C = 0,1 мкФ, $U_{вх}$ = 5 В подають сигнал трик. форми. Знайти вихідний сигнал



$i_{вх} \approx 0$, $U_Д \approx 0$

$K \to \infty$, $R_{вих} \approx 0$ Ом

$U_{вх} = U_C$

$i_C = i_R = C \frac{dU_C}{dt}$

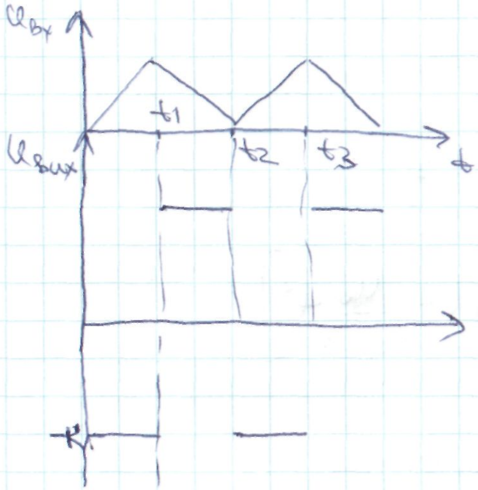
$U_R = -U_{вих}$

$$\boxed{U_{вих} = -RC \frac{dU_{вх}}{dt}}$$

$$U_{вх}(t) = U_0 \frac{t}{t_1}; \quad 0 \le t \le t_1$$

$$U_{вх}(t) = U_0 - U_0 \frac{t-t_1}{t_2-t_1}; \quad t_1 \le t \le t_2$$

$$U_{вих} = -RC \frac{U_0}{t_1} = -K$$



Активні фільтри

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

4) $$Y(S) = H(S) \cdot X(S) \qquad (2)$$

$$s = j\omega$$

$H(S)$ наз. передаточною ф-цією (частотною х-кою) фільтра. Так як $s = j\omega$ - компл. змінна, то $H(S) = H(j\omega)$ є комплексною величиною і має дійсну та уявну частину:

$$H(j\omega) = Re[H(j\omega)] + Im[H(j\omega)]$$

Перейшовши до експоненціального представлення компл. чисел, отримаємо

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{Re^2[H(j\omega)] + Im^2[H(j\omega)]} \qquad (3)$$

$$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg} \frac{Im[H(j\omega)]}{Re[H(j\omega)]}$$

З (2) випливає, що

$$|Y(s)| = |H(s)| \cdot |X(s)|$$

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |X(j\omega)| \qquad (4)$$

$$\arg(Y(j\omega)) = \arg(H(j\omega)) + \arg(X(j\omega)) \qquad (5)$$

Вираз (4) показує, що значення вихідного сигналу представляє собою добуток вхідного сигналу на частотну х-ку фільтра.

З цього виразу також випливає, що якщо АЧХ фільтра $|H(j\omega)| = 0$ для певного діапазону частот, то вихідний сигнал фільтра буде мати нульове значення при частоті вхідного сигналу

$$\omega_{s1} \le \omega \le \omega_{s2}$$

де ω_{s1} і ω_{s2} відповідають діапазону частот, в якому АЧХ фільтра рівна 0.

Діапазон частот $[\omega_{s1}; \omega_{s2}]$ наз. діапазоном затримки фільтра. Аналогічно, якщо АЧХ $|H(j\omega)|$ фільтра більша або рівна 1 в діапазоні $[\omega_{k1}; \omega_{k2}]$, то цей діапазон наз. смугою пропускання фільтра.

Діапазон між смугою пропускання та смугою затримки наз. перехідною областю. Вимоги до АЧХ фільтра включають параметри в обл. пропускання, перехідній обл. та обл. затримки.

Основні типи частотно-вибірних фільтрів

1) ФНЧ – фільтр з областю пропускання $[0; \omega_p]$ і областю затримки $[\omega_s, \infty)$, $\omega_p < \omega_s$

2) ФВЧ – фільтр з областю пропускання $[\omega_p; \infty]$, областю затримки $[0; \omega_s]$, $\omega_s < \omega_p$

3) СФ – фільтр з областю пропускання $[\omega_{p1}; \omega_{p2}]$, областями затримки $[0; \omega_{s1}]$ і $[\omega_{s2}, \infty)$, де $\omega_{s1} < \omega_{p1} < \omega_{p2} < \omega_{s2}$

4) ЗФ – фільтр з областями пропускання $[0, \omega_{p1}]$ та $[\omega_{p2}, \infty)$ і обл. затримки $[\omega_{s1}; \omega_{s2}]$, де

$$\omega_{p1} < \omega_{s1} < \omega_{s2} < \omega_{p2}$$

(режекторний фільтр)

5) всепропускаючий фільтр – це фільтр з одиничною передачею для всіх частот з області $[0; \infty)$. Даний тип фільтрів викор. для реалізацій фазової корекції та фазового зсуву.

ФЧХ та груповий час затримки

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$$

$$\tau(\omega) = \frac{d}{d\omega}[\varphi(\omega)]$$ – груповий час затримки

Методика проектування фільтрів:

1) – задання технічних характеристик на фільтр, що проектується.

Вони включ. вимоги до АЧХ в обл. пропускання та обл. затримки, та ширину перехідної обл.; вимоги до ФЧХ (або $\tau(\omega)$) та ін. параметри (вхідний та вих. опір, елементна база, рівень сигналу на вих...)

2) – представляє собою знаходження $H(j\omega)$, яка би задовільняла технічним характ., сформульованим в етапі 1. Вибір $H(j\omega)$ буде залежати від робочого діапазону частот, чутливості шумів та помилок і т.д.

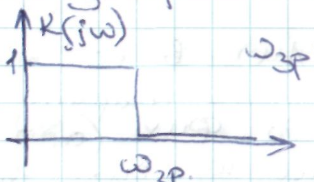
Лекція 11 (продовження 10)

3) - етап представляє собою задачу реалізації передаточної ф-ції, отриманої в п. 2, у вигляді схеми.

4) - представляє собою аналіз кожної схеми фільтра, отриманої на 3 етапі, на відповідність допускам робочих характеристик, чутливості, можливості регулювання

Апроксимація характеристик фільтра

Проектування більшої част. фільтрів відбувається з апроксимації у вигляді ФНЧ з нормованою ідеалізованою х-кою



$\omega_{зр} = 1$ рад/с — нормування

Нормований ідеальний фільтр має коеф. передачі, рівний 1 в смузі пропускання і 0 для всіх частот, більших $\omega_{зр}$.

Фазовий зсув для таких фільтрів представляє собою ф-цію, яка має ? = 1 кута нахилу в області пропускання.

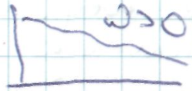
$H(j\omega) = e^{-j\omega}$ $\quad 0 \le |\omega| \le \omega_{зр} = 1$

$H(j\omega) = 0$ $\quad |\omega| > \omega_{зр} = 1$

Тепер ідеальний ФНЧ може бути перетворений в будь-який інший.

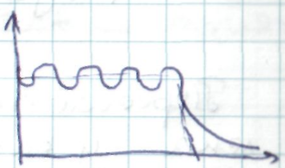
До основних апроксимацій, які викор. при проектуванні фільтрів, відносять:

- апроксимація Баттерворта (фільтр з такою апроксимацією має монотонно спадну АЧХ при $\omega > 0$)



- апроксимація Чебишева

• фільтр Чебишева з рівнохвильовою в обл. пропускання і рівноспадною в обл. затримки АЧХ



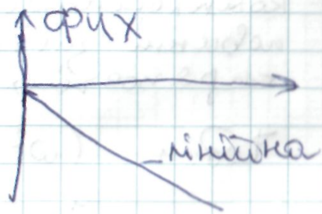
• інверсний фільтр Чебишева з рівноспадною в обл. пропускання і рівнохвильовою в обл. затримки АЧХ

- апроксимація Кауера

Еліптичні фільтри з рівнохвильовою в обл. пропускання і затримки АЧХ

- апроксимація Бесселя

фільтри з макс. плоскою х-кою ? часу затримки, побудовані на основі апроксимації рядом Тейлора в околі 0



Розглянемо осн. властивості модуля передаточної ф-ції фільтрів

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)\overline{H(j\omega)}$$

Так як коеф. ф-ції $H(s)$ є дійсними, то комплексно спряжена величина:

$$|H(j\omega)|^2 = H(s)\cdot H(-s)\Big|_{s=j\omega}$$

Передаточна ф-ція може бути представлена у вигляді відношення поліномів

$$H(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

Тоді $H(s)H(-s)$ може бути представлена у вигляді добутку груп таких співмножників:

$$(s-z_1)(-s-z_1) = \underline{z_1^2 - s^2} \;!$$

Якщо всі полюси і нулі передаточної ф-ції $H(s)$ є дійсними, то $|H(j\omega)|^2$ є дійсною ф-цією і додатньою від ω^2.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{K(z_1^2+\omega^2)(z_2^2+\omega^2)\ldots(z_m^2+\omega^2)}{(p_1^2+\omega^2)(p_2^2+\omega^2)\ldots(p_m^2+\omega^2)}$$

Нехай деякі нулі і полюси ф-ції $H(s)$ є комплексними, тоді комплексні полюси і нулі повинні зустрічатися у вигляді комплексно спряжених пар z_1, z_2 $\quad z_1 = \overline{z_1}$

Тоді: $(\omega^2 + z_1^2)(\omega^2 + z_2^2) =$

$$= \omega^4 + \omega^2(z_1^2 + z_2^2) + z_1^2 z_2^2$$

$z_1 = a + jb \qquad z_2 = a - jb$

Ф-ція Баттерворта певного порядку визначається виразом:

$$B_n(\omega) = \frac{1}{1+\omega^{2n}} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

Для будь-якого n ф-ція x задається розглянутими вище властивостями квадрата модуля передаточної ф-ції:

1) чисельник і знаменник ф-ції є поліномом від ω^2 з дійсними коеф.

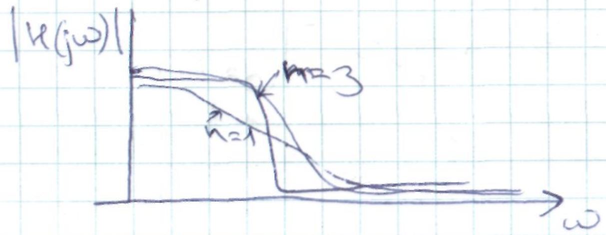
$$B_n(\omega) > 0 \text{ для всіх } \omega$$

тому ф-ція Баттерворта може представляти собою АЧХ фіз. реалізованої перед. ф-ції.

ФНЧ Баттерворта певного порядку x задається

$$|H(j\omega)|^2 = B_n(\omega) = \frac{1}{1-\omega^{2n}}$$

По мірі зростання n, коеф. передачі в обл. пропускання наближається до 1, перехідна обл. звужуватиметься, а в обл. затримки наближ. до $\varnothing$.



n є параметром, вибір якого дає можл. задовільнити заданий набір вимог до фільтру в обл. затухання і обл. затримки

Нормований ФНЧ Баттерворта:

1) при будь-якому n:

$$|H(j\omega)|^2 = 1 \qquad \omega = 0$$

$$|H(j\omega)|^2 = 0{,}5 \qquad \omega = 1$$

$$|H(j\omega)|^2 = 0 \qquad \omega = \infty$$

$\Downarrow$

підсилення по пост. струму ($\omega = 0$) коеф. передачі складає 1 (нема) а частота відповідає 3ДБ дорівн. 1 рад/с

2) ф-ція передачі фільтра Баттерворта монотонно спадає при $\omega > 0$. Отже, $|H(j\omega)|$ макс. при $\omega = 1$.

3) перші $2n-1$ похідних АЧХ ФНЧ Баттерворта n-го порядку рівні $\emptyset$ при $\omega = 0$ тому ці фільтри наз. фільтрами з макс. плоскими АЧХ

По заданій ф-ції Баттерворта n-го порядку побудуємо:

$$h(s) = H(s) \cdot H(-s) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega = s/j} =$$

$$= \frac{1}{1+\omega^{2n}}\Big|_{\omega = s/j} = \frac{1}{1+(j^{-2n}) \cdot s^{2n}} = \frac{1}{1+(-1)^n s^{2n}} \quad (*)$$

Представимо h(s) у вигляді добутку поліномів 1-го порядку та 2-го порядку. З (*) бачимо (якщо підставити), що h(s) не має нулів, а полюси мають властивість квадратної симетрії.

Скориставшись лише тими множниками, що лежать в лівій півплощині (щоб фільтр можна було реалізувати фізично)

Приклад! Знайдемо передаточну ф-цію для ФНЧ Баттерворта 3-го порядку

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1-s^6} = \frac{1}{(1-s^3)(1+s^3)} =$$

$$= \frac{1}{(1+s)(1-s+s^2)(1-s)(1+s+s^2)}$$

$$H(s) = \frac{1}{(1+s)(1+s+s^2)}!$$

передаточна ф-ція

$$H(-s) = \frac{1}{(1-s)(1-s+s^2)}$$

Апроксимація Чебишева

В багатьох випадках бажано мати апроксимацію, яка би задовільняла технічним умовам на проект. фільтр при менших значеннях n.

Для чебишевської апроксимації коеф. передачі фільтру Чебишева в обл. пропускання коливається між 2-ма значеннями. Число хвиль таких коливань, що вкладаються в смугу пропускання залежить від порядку n фільтра. Амплітуда колив. коеф. передачі є вільним параметром.

Поліном Чебишева n-го порядку

$$T_n(\omega) = \cos(n \cdot \cos^{-1}(\omega))$$

$$\cos^{-1}(\omega) = x, \text{ тоді}$$

$$T_n(\omega) = \cos(nx)$$

Відповідно, для $n=0$, $T_0(\omega) = 0$

$$T_1(\omega) = \cos x = \cos(\cos^{-1}\omega) = \omega$$

$$T_2(\omega) = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\omega^2 - 1$$

Для спрощення викор. рекурентне співвідношення:

$$\cos[(n+1)x] = 2\cos nx \cdot \cos x - \cos[(n-1)x]$$

Звідси:

$$T_{n+1}(\omega) = 2\omega T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega)$$

Поліном Чебишева має властивості.

1) для всіх n:

$$\begin{cases} 0 \le |T_n(\omega)| \le 1 & 0 \le |\omega| \le 1 \\ |T_n(\omega)| > 1 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

2) Поліном $T_n(\omega)$ монотонно зростає для всіх значень n

3) Поліном T_n є непарним (парним) поліномом, якщо n є непарним (парним)

$|T_n(0)| = 0$ n - непарне

$|T_n(1)| = 1$ n - парне

Для $|\omega| \le 1$ значення ф-ції $\arccos\omega$ є дійсним кутом, тому $T_n(\omega)$ представляє собою косинус дійсного кута і його значення змінюються періодично по значеннях $[-1;+1]$

Для $|\omega| > 1$ $\arccos\omega$ представляє собою уявну величину і $\cos(n\arccos(\omega))$ є гіперболічним косинусом дійсного кута.
Так як гіперболічний косинус змінюється $[1;+\infty]$, то $T_n(\omega)$ буде в тих самих межах.

Лекція 12

10.12.10

Фільтри Чебишева

Передаточна ф-ція для фільтра НЧ повинна прямувати до ∅ при $\omega \to \infty$. Отже, поліноми Чебишева повинні бути однією із компонент поліномів знаменника передаточної ф-ції фільтра.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)}, \text{ де}$$

ε представляє собою параметр, який задає величину нерівномірності в смузі пропускання. Для $\omega \leq 1$ значення ф-ції $|H(j\omega)|^2$ буде коливатися в межах

$\left[\frac{1}{1+\varepsilon^2}; 1\right]$. В загальному випадку на інтервалі $\omega \in [0; 1]$ є n критичних точок, в яких ф-ція $|H(j\omega)|^2$ досягає макс. значення 1, або мінім. значення $1/(1+\varepsilon^2)$.

При $|\omega| \geq 1$ ф-ція $|H(j\omega)|^2$ монотонно спадає і прямує до ∅. Ф-ція $|H(j\omega)|^2$ фільтра Чебишева n-го порядку задовільняє наст. р-нням:

1) $|H(j \cdot 1)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$

2) $|H(j0)|^2 = 1$ для непарних n

$|H(j0)|^2 = 0$ для $n = 2i$, $i = 0, \dots$

Якщо задано х-ки смуги пропускання та смуги затримки, то можна визначити величину ε та порядок n фільтра Чебишева. Замість ε задається виражена в дБ макс. величина відносно затухання A_{max} в смузі пропускання

$$A_{max} = -10 \log \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

$$A_{max} = 10 \log (1+\varepsilon^2)$$

З ост. виразу $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$.

Передаточна ф-ція фільтра Чебишева має тільки полюси, чисельник представляє постійну величину, полюси розміщуються на еліпсі, а не на колі (як для апрокс. Баттерворта). Більша вісь цього еліпсу проходить по уявній осі S-площини, а мала - по дійсній осі.

Основні перетворення частот

1) перетворення НЧ - НЧ

Всі розглянуті раніше передаточні ф-ції відносились до ФНЧ з $\omega_{зр} = 1$ рад/с.
Нехай нам потрібно отримати частоту зрізу $\omega^0_{зр}$ рад/с. Для цього необхідно замінити кожен символ в передаточній ф-ції НЧ-прототипу на $\omega/\omega^0_{зр}$.

Тоді отримана передаточна ф-ція матиме частоту зрізу $\omega^0_{зр}$.

Напр., для ФНЧ Баттерворта n-го порядку з одиничною шириною діапазону ($\omega_{зр} = 1$)

$$|H_N(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}}$$

N - означає НЧ-прототип

Фільтр нижніх частот Баттерворта n-го порядку з шириною діапазону $\omega^0_{зр}$ матиме

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\omega/\omega^0_{зр}\right)^{2n}}$$

2) перетворення НЧ - ВЧ

Так як х-ки ФНЧ є, по-суті, оберненими до х-к ФВЧ, то частотне перетворення нормованої низькочаст. перед. ф-ції в перед. ф-цію ФВЧ з $\omega^0_{зр}$ визначає.

$$S \to \frac{\omega^0_{зр}}{S}$$

3) перетворення НЧ - СФ

Частотне перетв. для перетв. НЧ-прототипу з однією смугою пропуск. та з середньою част. $\omega = 0$ в смуговий фільтр з 2-ма смугами пропуск. та сер. част. ω_0 і $-\omega_0$, кожна з яких характ. шириною смуги B має вигляд

$$S \to \frac{S^2 + \omega_0^2}{BS}$$

B - ширина смуги пропускання

де ω_0 є необхідною середньою частотою, а B – ширина смуги пропуск. для СФ

4) перетворення НЧ – ЗФ

Част. перетв. для переходу від норм. ФНЧ до загороджуючого фільтру має вираз

$$S \to \frac{BS}{S^2 + \omega_0^2}$$

ω_0 – середня частота смуги затримки
B – ширина смуги затримки

Активні фільтри

Розробка активного фільтра починається з апроксимації вимог (ТЗ), заданих дробовою раціональною передаточною ф-цією вигляду

$$(1)\quad H(S) = \frac{A(S)}{B(S)} = \frac{a_m S^m + a_{m-1} S^{m-1} + \ldots a_1 S + a_0}{S^n + b_{n-1} S^{n-1} + \ldots + b_1 S + b_0}$$

При $m < n$ заданий вираз можна представити у вигляді добутку передаточних ф-цій.

$$H(S) = H_1(S) H_2(S) \ldots H_k(S), \quad \text{де } k \leq n$$

і для кожного значення $j = 1, \ldots, k$ ф-ція $H_j(S)$ є передаточною ф-цією ланки 2-го порядку.

$$H_j(s) = \frac{a_2^{(j)} S^2 + a_1^{(j)} S + a_0^{(j)}}{S^2 + b_1^{(j)} S + b_0^{(j)}}$$

Або передаточною ф-цією ланки 1-го порядку

$$H_j(S) = \frac{a_1^{(j)} S + a_0^{(j)}}{S + b_0^{(j)}}$$

Ланка фільтру 2-го порядку $H_j(S)$ характ. наст. параметрами:

1) добротність $Q_j = \frac{\sqrt{b_0^{(j)}}}{b_1^{(j)}}$

2) частотою $\omega_0^{(j)2} = b_0^{(j)}$

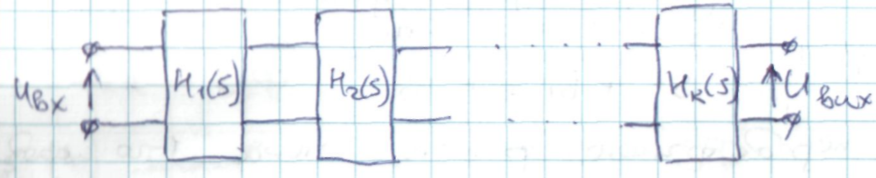
Існує 2 основних способи проектування активного фільтру:

1) – спосіб прямої реалізації, який реалізує повну перед. ф-цію (1) в цілому

2) – каскадний спосіб, який реалізує перед. ф-цію (1) шляхом реалізації її рядом передаточних ф-цій 2-го або 1-го порядку.

Каскадна реалізація активних фільтрів

При каскадному ~~з'єднанні~~ способі реалізації задана перед. ф-ція реаліз. у вигляді каскадного з'єднання послід. фільтрів 2-го та 1-го порядків



Це дозволяє реалізувати ряд перед. ф-ції невеликим набором основних вузлів низького пор.
При каскадній реаліз. досягається менша чутливість, ніж при прямій. Каскадний спосіб значно спрощує задачу реалізації загальної перед. ф-ції так як існує скінченне число різних видів перед. ф-цій 2-го пор. В заг. вип. перед. ф-ція ланки 2-го пор. має вигляд

$$H(S) = \frac{a_2 S^2 + a_1 S + a_0}{S^2 + b_1 S + b_0}$$

Для спеціальних вип. отримаємо:

ФНЧ : $a_2 = 0$, $a_1 = 0$

СФ : $a_1 = 0$, $a_0 = 0$

ФВЧ : $a_2 = 0$, $a_0 = 0$

В усіх ланках фільтрів 2-го пор. викор. джерела напруги, керовані напругою, які можна реалізувати на основі підсилювальних схем на операційних підсилювачах або просто ОП. У випадку каскадної реаліз. ОП викор. також для отрим. в кожній ланці фільтрів великого вхідного опору.

Існує 3 способи реалізації ф-ції ланки 2-го порядку:

1) - безпосередній, під час якого встановлюється загальна схемна конфігурація і її окремі елементи визнач. заданою перед. ф-цією.

2) - враховується те, що існує тільки 7 різновидів біквадратної перед. ф-ції 2-го пор. Величини елем. обчислюються по коеф. перед. ф-ції

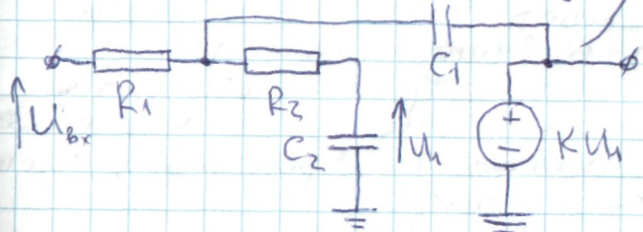
3) - базується на викор. канонічної схеми.

Різні біквадратні перед. ф-ції реаліз. вибором різних наборів величин елементів

Біквадратна ланка на одному підсил.

В 1955р. Саллен і Кі опублікували тобто активних RC схем з джерелом напруги, керованим напругою, в якості акт. елем. для кожної схеми
(для реаліз. перед. ф-ції 2-го пор., за винятком загороджуючого фільтра

$$H(S) = \frac{a_2 S^2 + a_0}{S^2 + b_1 S + b_0}$$
)

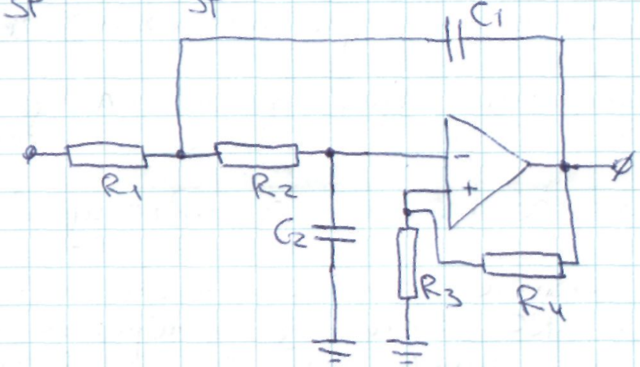


$$H(S) = \frac{\dot{U}_{вих}}{\dot{U}_{вх}}$$

$$\begin{cases} c_0 = K \\ b_0 = 1 = C_1 C_2 R_1 R_2 \\ b_1 = C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_1 - K C_1 R_1 \end{cases}$$

$$X = \{C_1, C_2, R_1, R_2\}$$

$\omega_{зр} = 1 = \omega_{зр}^{зад.}$ $C_1 = \ldots$ $C_2 = \ldots$ – задаємо



Класична схема Салена-Кі фільтра II пор. на ОП

Лекція 13 16.12.10

Цифрові фільтри

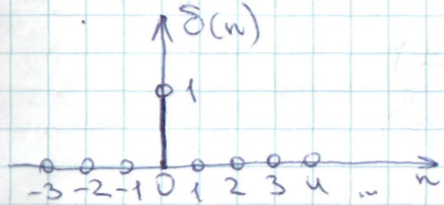
Ц.ф. представляє собою пристрій обробки сигналів, що перетворює одну послід. чисел (вхідну) в іншу (вихідну).
Ц.ф. реалізуються програмним чином на ПК або апаратним способом у вигляді схеми, що складається з регістрів, перемножувачів та суматорів.
Ц.ф. працюють з цифровими сигналами, які представляють собою дискретні сигнали з квантованими значеннями. Типовим цифровим сигналом є вих. сигнал АЦП, який дискретизує неперервний сигнал і формує послідовність двійкових чисел (з скінченною розрядністю). В будь-якій с-мі, що працює з цифр. сигналами, скінченне число рівнів квантування приводить до появи похибки. Тому при проектуванні Ц.ф. необх. визначити число розрядів або рівнів квантування, необхідне для представлення сигналу з заданою похибкою. Для позначення цифр. сигналів будемо викор.:

$x(n)$ або $x(nT)$

Позначення $x(nT)$ викор. для сигналів з рівномірними часовими інтервалами між відліками, тоді як $x(n)$ допускає ~~їх~~ нерівномірне розміщення відліків.

Найбільш важливі послідовності цифрових сигналів:

1.) послід. одиничний імпульс $\delta(n)$



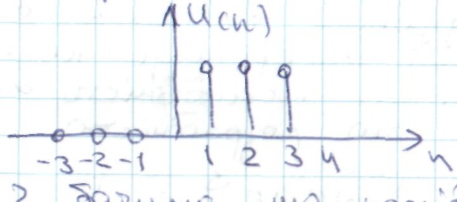
$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

послід. вигляду $\{x(n)\} = \{\ldots, x(-1), x(0), \ldots\}$ можна виразити через $\delta(n)$ наст. чином

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)\,\delta(n-k)$$

2.) послід. одиничний стрибок або сходинка

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$



З виразів для 1 і 2 бачимо, що послідовності звязані між собою наст. співвідношеннями:

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

3.) експоненційна (показникова) послід.

$$x(n)=\begin{cases}a^n, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

a – дійсна або комплексна величина. Дану послід. можна представити

$$x(n)=a^n\cdot u(n)$$

4.) синусоїдальна послід. з періодом p

$$x_1(n)=A_1\cos\left(\frac{2\pi n}{p}\right)$$

$$x_2(n)=A_2\sin\left(\frac{2\pi n}{p}\right)$$

Якщо p - додатне раціональне число, $p=L/\beta$, де L, β – прості додатні числа, то задані послідовності повторюються L відліків.

Якщо ж період p буде представляти собою ірраціональне додатне число, то послідовності $x_1(n)$ і $x_2(n)$ не повторюватимуться.

З цифровими сигналами і послідовностями можна вик. арифм. операцій. Нехай $X=\{x(n)\}$ і $Y=\{y(n)\}$. Тоді

1) можна визначити суму та різницю 2-х послідовностей

$$X\pm Y=\{x(n)\pm y(n)\}$$

2) множення послідовності на скаляр

$$\alpha X=\{\alpha x(n)\}$$

3) множення і ділення 2-х послідовностей

$$XY=\{x(n)\cdot y(n)\}$$

$$X/Y=\{x(n)/y(n)\}$$

В загальній обл. цифрова с-ма опис. набором різницевих р-нь. Це означає, що при заданій вхідній послідовності і поч. умовах різницеві р-ня визнач. вих. послід.

Цифрова с-ма S з одним входом та 1 вих. є, по суті, перетв. одієї послід. чисел $x(n)$ в іншу послід. $y(n)$. Нехай $y_1(n)$ і $y_2(n)$ відповідно відклики нульового стану (вихідний сигнал с-ми при всіх нульових поч. умовах) на вхідні послідовності $x_1(n)$ і $x_2(n)$. Тоді с-ма S наз. лінійною, якщо вихідна послід.

нульового стану $y(n)$ при вхідній дії виду $x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)$ отже співвідн.

$$y(n) = \alpha_1 y_1(n) + \alpha_2 y_2(n)$$

С-ма S з пост. параметрами характ. тим, що вих. сигнал нульового стану $y(n)$ при вхідній посл. $x(n) = x_1(n - n_0)$ визнач. наст. співвідн.

$$y(n) = y_1(n - n_0)$$

Нехай $h(n)$ є відгуком нульового стану на одиничний імпульс $\delta(n)$

Тоді в с-мі з пост. параметрами посл. $h(n-k)$ є відгуком на посл. $\delta(n-k)$. З властивостей лінійності с-ми випливає, що при вхідній посл. $x(n)$, заданій виразом

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,\delta(n-k)$$

Вихідна посл. нульового стану задається виразом

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,h(n-k)$$

Це означає, що лінійна цифрова с-ма S з пост. параметрами характериз. імпульсною характ. $h(n)$. Останній вираз ми можемо запис. в іншому вигляді

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)\cdot h(k)$$

Обидва ост. р-ня означ. згортку 2-х посл. $x(n)$ і $h(n)$. Тому, викор. позн. згортки, можемо запис.

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Лінійна с-ма S з пост. парам. наз. стійкою, якщо імпульсна характ. задовільняє умові

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

і фізично реалізованою, якщо

$$h(n) = 0 \quad \text{при} \quad n < 0$$

Реалізація Z-перетворення для імпульсної характ. $h(n)$ дозволяє отримати передаточну ф-цію $H(Z)$ заданої цифр. с-ми S.

Позначимо $H(Z) = \dfrac{Y(Z)}{X(Z)} = \dfrac{1 + aZ^{-1}}{1 + bZ^{-1}}$,

де $X(Z)$ і $Y(Z)$ – відповідно перетв. вхідної та вих. послідовностей $x(n)$ та $y(n)$.

З ост. виразу

$$Y(Z) = H(Z)\cdot X(Z)$$

Для реалізації передаточної ф-ції $H(z)$ перетворимо її в різницеве р-ня.

$$(1+a z^{-1})\cdot X(z)=(1+b z^{-1})Y(z)$$

$$x(n)+a\,x(n-1)=y(n)+b\,y(n-1)$$

$$y(n)=-b\,y(n-1)+x(n)+a\,x(n-1) \qquad (2)$$

З ост. р-ня випливає, що сигнал на виході $y(n)$ представляє собою алгебраїчно зважену суму вхідного сигналу і попередніх значень вхідного і вих. сигналу.

Реалізація перед. ф-ції $H(z)$ вимагає викон. наст. алгоритму: (2).

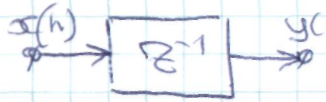
Для цього необх.: одиничні затримки (регістри зсуву) для зберігання попередніх значень вхідного та вих. сигналу

2) перемножувачі для забезп. необхідного масштабування або отримання зважених множників

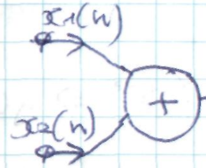
3) суматори, які включають також і віднімання для додавання різних величин в правій частині р-ня (2)

Програмна і апаратурна реалізація виразу $H(z)$ вимагають реаліз. трьох вище зазн. основних частин:

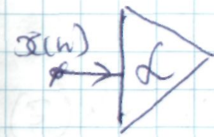
1) затримок (регістрів зсуву)
2) операцій додавання (суматорів)
3) операцій множення (перемножувачів), схематичне зображення яких має наст. вигляд



$y(n)=x(n-1)$ – затримка (регістр)

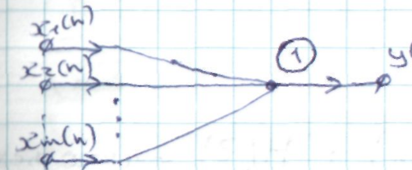


$y(n)=x_1(n)+x_2(n)$ – суматор



$y(n)=\alpha\cdot x(n)$ – перемножувач

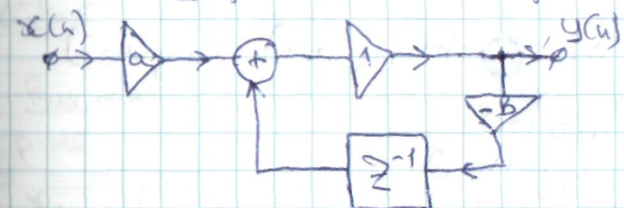
Для зручності зробимо припущення, що суматор є присутній в будь-якій точці з'єднання ліній і забезпечує додавання всіх сигналів, що підходять до цієї точки.



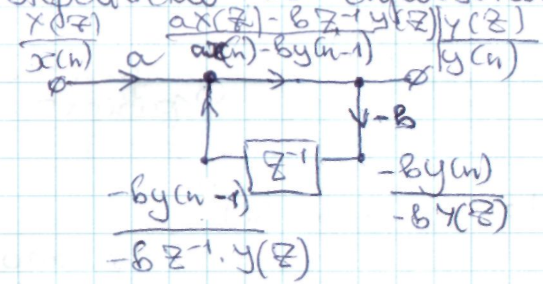
$y(n)=x_1(n)+\ldots+x_m(n)$

Якщо відсутній α, то приймаємо $\alpha=1$.

Приклад. Знайдемо перед. ф-цію цифрової с-ми, зображеної на рис.



Перейдемо до спрощеної схеми



$(z^{-2} \Rightarrow y(n-2))$

$$Y(z) = aX(z) - bz^{-1}Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \qquad (1+bz^{-1})Y(z) = aX(z)$$

$$H(z) = \frac{a}{1+bz^{-1}}$$

$$y(n) = ax(n) - by(n-1)$$

$$y(n) + by(n-1) = ax(n)$$

В загальному вип. $y(n)$ з $H(z)$ шукається

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

$$(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1})X(z)$$

$$y(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1)$$

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2)$$

Для $n=1$ $\quad y(0)=0$

$y(-1)=0$

....

Аналіз цифрових фільтрів

Розглянемо цифрову схему з одним входом і одним виходом, яка складається з $N+2$ $(0, 1, ..., N+1)$ вузлів і в віток.

Нехай вузол 0 є вхідним (джерелом сигналу), а вузол $N+1$ – вихідним; змінна $x_k(n)$, $k=1,...,N$ відноситься до виходу суматора в вузлі k. Нехай також $x_{вх}(n)$ – вхідна послідовність, $x_{вих}(n)$ – вихідна послідовність. $X_i(z)$ – z-перетв. послід. $x_i(n)$, $x_{вх}(n)$, $x_{вих}(n)$. В кожному вузлі k запишемо вузлове р-ня, яке описує взаємодію сигналів віток, що підходять до вузла k. В результ. отримаємо с-му алгебраїчних комплексних р-нь розмірності N:

$$A \cdot X(z) = B X_{вх}(z) \quad (1),$$ де

$A = A(z) = (N \times N)$ – комплексна матриця $(N \times N)$ і містить х-ки віток даної схеми;

B – вектор розмірністю $(N \times 1)$

$X(z)$ – вектор $(N \times 1)$, що скл. з N вузлових змінних $X_1(z), ..., X_N(z)$.

З р-ня (1) знайдемо $X(z)$

$$X(z) = A^{-1}(z) B(z) \cdot X_{вх}(z) \quad (2)$$

Вихідне р-ня можна отримати, додавши р-ня в вузлі $N+1$

$$X_{вих}(z) = C(z) \cdot X(z) + D(z) \cdot X_{вх}(z) \quad (3)$$

де $C(z) = (1 \times N)$ – рядок

$D(z) = (1 \times 1)$ – скаляр

Тоді підставивши в р-ня (3) значення $X(z)$ з (2):

$$X_{вих}(z) = C(z) \cdot A^{-1}(z) \cdot B(z) \cdot X_{вх}(z) + D(z) \cdot X_{вх}(z)$$

$$X_{вих}(z) = [C \cdot A^{-1} \cdot B + D] X_{вх}(z)$$

$$H(z) = \frac{X_{вих}(z)}{X_{вх}(z)} = C(z) \cdot A^{-1}(z) \cdot B(z) + D(z) \quad (4)$$

$$x_{вих}(n) = h(n) * x_{вх}(n)$$

Розрахунок цифрових фільтрів

Включає в себе процес знаходження передаточної ф-ції, яка повинна задовільняти ТУ на даний фільтр. Частотна х-ка $H(e^{j\theta})$ цифр. фільтра є неперервною ф-цією змінної θ з періодом $[2\pi]$.

$$H(e^{j\theta}) = H(e^{j(\theta + 2\pi m)}), \quad m \text{ – ціле число}$$

Період вибиратимемо в межах $[-\pi; \pi]$

$$H(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})| e^{-j\varphi(\theta)}, \text{ де}$$

$\varphi(\theta)$ – фазовий кут (фазова х-ка) фільтру

Так як АЧХ – парні ф-ції

$$|H(e^{j\theta})| = |H(e^{-j\theta})|,$$

а фазові х-ки непарні ф-ції

$$\varphi(-\theta) = -\varphi(\theta),$$

то достатньо визначити част. х-ку ЦФ для $0 < \theta < \pi$ вздовж верхньої половини одиничного кола z-площини.

При розрахунку фільтрів зручно вик. квадрат модуля і груповий час замість АЧХ і ФЧХ:

$$|H(e^{j\theta})|^2 = H(z) \cdot H(z^{-1}) \Big|_{z = e^{j\theta}}$$

З ост. р-ня випливає, що якщо

$z_k \{p_k\} = r_k e^{-j\theta_k}$, де z_k і p_k відповідно 0 {полюс} ф-ції $H(z) \cdot H(z^{-1})$,

то $z_k^{-1} \{p_k^{-1}\} = \frac{1}{r_k} e^{j\theta_k}$ також є 0 {полюсом}.

Так як комплексні 0 (полюси) повинні зустрічатися парами, то можна записати, що $\bar{z}_k \{\bar{p}_k\} = r_k e^{j\theta_k}$,

$$\bar{z}_k^{-1} \{\bar{p}_k^{-1}\} = \frac{1}{r_k} e^{j\theta_k}$$

Можна стверджувати, що $z_k \{p_k\}$ є 0 (полюсами) ф-ції $H(z) \cdot H(z^{-1})$.

З ост. співвідн. випливає, що якщо z_k за представляє собою дійсний 0 (полюс) ф-ції $H(z) \cdot H(z^{-1})$, то $z_k^{-1} = 1/a$, також є її дійсний 0 (полюс).

Якщо $z_k = e^{j\theta_k}$ є ϕ (полюсом) ф-ції $H(z) \cdot H(z^{-1})$, то $z_k^{-1} = e^{-j\theta_k}$ також є ϕ (полюсом)