$$= \frac{1}{2\pi}\left\{ \frac{1}{2}t \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4m}\sin 2mt \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} = \frac{1}{2\pi}(\pi - 0) = \frac{1}{2} \neq 1$$

С-ма не є ортонормованою.

Висновки.

1) Якщо для неперервного сигналу $f(t)$ виконана вибірка із N значень, то цей сигнал можна представити у вигляді N-мірного вектора, який відповідає 1 точці N-мірного простору.

2) Величина ~~вектора~~ сигналу визнач. нормою вектора

Скалярний добуток векторів — це добуток проекції одного вектора на довжину другого.
Коеф. кореляції визначає кут між векторами, а також ступінь подібності. Якщо $r = 0$, то вектори, що відображають сигнали, є взаємоперпендикулярні.

3) Множина взаємноперпендикулярних векторів норма яких рівна 1, наз. ортонормованим базисом. Будь-які вектори можна розкласти по базису, складові якого отримують із допомогою скалярного добутку.

08.10.10 Лекція 4

1) Задані 2 3-мірні вектори $\bar{f} = (4; -4; 7)$ і $\bar{g} = (3; -2; 6)$. Знайти відстань між ними, їх скалярний добуток, коеф. кореляції, а також складову вектора $\bar{f}$ в напрямі вектора $\bar{g}$.

$f_x = \frac{C_x \cdot g_x}{}$; C_y ; C_z — складові f

2) Довести, що множина ф-цій $\{1; \sqrt{2}\cos t; \sqrt{2}\sin t; \sqrt{2}\cos 2t; \sqrt{2}\sin 2t \dots\}$ на відрізку $[-\pi; \pi]$ утворює с-му ортонормованих ф-цій.

Ф-ція кореляції

Для визначення подібності або відмінності 2-х сигналів викор. ф-цію взаємної кореляції. Ф-ція взаємної кореляції 2-х періодичних сигналів з періодом T визнач. наст. чином:

$$f(t) * g(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,g(t+\tau)\,dt$$

Це співвідношення визначає величину взаємозв'язку між ф-ціями при зсуві їх на час τ. Коеф. взаємної кореляції визнач. з наст. виразу:

$$R_{fg}(\tau) = \frac{(f(t) \cdot g(t+\tau))}{\|f(t)\| \cdot \|g(t)\|}$$

Ф-ція автокореляції

Для того, щоб визначити ф-цію автокореляції достатньо скористатися попереднім виразом, в якому замість $g(t)$ буде саме значення ф-ції $f(t)$.

$$f(t)*f(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot f(t+\tau)\,dt$$

Автокореляційна ф-ція має основу симетрію відносно $\tau=0$ і приймає макс. значення при $\tau=0$:

$$max=f(t)*f(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \|f(t)\|^2\,dt \quad - \text{при } \tau=0$$

Ф-ція взаємної кореляції цифрових сигналів f_i та g_i $(i=1,..,N)$

$$f_i*g_{i+j}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\cdot g_{i+j}$$

З допомогою ф-ції взаємної кореляції можна визначити силу звязку між цими ф-ціями, а також степінь запізнення одної відносно іншої.

Ф-ція автокореляції дискретного сигналу визнач. насл. чином:

$$f_i*f_{i+j}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\cdot f_{i+j}$$

Перетворення Фур'є

Існує декілька видів перетв. Фур'є:

1) Неперіодичний неперервний сигнал можна розкласти в інтеграл Фур'є
2) Періодичний неперервний сигнал можна розкласти в нескінченний ряд Фур'є
3) Неперіодичний дискретний сигнал можна розкласти в інтеграл Фур'є
4) Періодичний дискретний сигнал можна розкласти в нескінченний ряд Фур'є

Розриви 2-го роду – значення ф-ції прямує до $-\infty$ або $+\infty$.

В загальному вип. періодичну ф-цію $f(t)$, яка має тільки розриви 1-го роду можна представити у вигляді:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\omega t+a_2\cos 2\omega t+\dots+b_1\sin\omega t+$$
$$+b_2\sin 2\omega t+\dots=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}(a_i\cos i\omega t+b_i\sin i\omega t)$$

Розклад в ряд Фур'є.

Довільну ф-цію можна розкласти по с-мі ортогональних ф-цій, навіть якщо ф-ції з цієї с-ми не представляються у вигляді тригонометричного ряду.
Під перетворенням Фур'є розуміють розклад саме в тригонометричний ряд.

Коефіцієнти розкладу Фур'є визнач. насл. чином:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt;$$

$$a_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos i\omega t\,dt$$

$$b_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin i\omega t\,dt$$

Якщо ф-ція $f(t)$ є парною, то $b_i = 0$, якщо непарна – то $a_i = 0$.

В загальному випадку періодичного сигналу з періодом T при розкладі в ряд Фур'є необхідно викор. інтервал від $-T/2$ до $+T/2$ і розклад ф-ції матиме вигляд:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\left[a_i\cos\left(i\frac{2\pi}{T}t\right) + b_i\sin\left(i\frac{2\pi}{T}t\right)\right]$$

$$a_i = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(i\frac{2\pi}{T}t\right)dt \qquad i = 0, 1 \ldots$$

$$b_i = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(i\frac{2\pi}{T}t\right)dt \qquad i = 1, \ldots$$

Розклад в комплексний ряд Фур'є

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega t}$$

$\dot{C}_k$ – комплексні коеф. Фур'є, обчислюються як скалярний добуток ф-ції $f(t)$ і e^{jkt}.

$$\dot{C}_k = \left(f(t)\cdot e^{jkt}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-jkt}\,dt$$

Якщо період ф-ції рівний не 2π, а T, то отримаємо наст. розклад:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Звязок між комплексними та дійсними коеф. Фур'є

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x$$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt - j\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega_0 T)\,dt$$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \qquad k = 1, 2 \ldots$$

$\dot{C}_k = \frac{1}{2} a_0$ при $k=0$

$\dot{C}_k = \frac{1}{2}(a_k + j b_k)$ при $k = -1; -2 \dots$

З ост. виразу видно, що $\dot{C}_k$ є комплекс-

носпряженими відносно відповідних

їм значень C_k

$$\begin{cases} |\dot{C}_{-k}| = |\dot{C}_k| \\ \angle \dot{C}_{-k} = -\angle \dot{C}_k \end{cases}$$

Множину абсолютних значень $\dot{C}_k$

$|\dot{C}_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}$ наз. спектром, а сукупність аргументів

$\angle \dot{C}_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$ наз. спектром фаз.

Множину величин $|C_k|^2$ наз. спектром потужності. Комплексні коеф. Фур'є з врахуванням амплітуд і фаз можна записати

$$\begin{cases} \dot{C}_k = |\dot{C}_k| e^{j\varphi_k} \\ \angle \dot{C}_k = \varphi_k \end{cases}$$

Коеф. $\dot{C}_k$ є комплексними числами, а ф-ція $f(t)$ є дійсною, а значить права частина виразу

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_0 t}$$

повинна бути дійсною.

Тому її записують у вигляді

$$f(t) = C_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\dot{C}_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

<u>Висновки</u>: 1) Сигнал будь-якої форми можна розкласти на гармонічні складові з різними частотами, кратними цілому числу. Сукупність цих складових наз. спектром, а сума цих складових формує значення ф-ції в часовій області.

2) Розклад в ряд Фур'є має властивість лінійності. Якщо сигнал зсувається в часі, то спектр амплітуд і спектр потужності не змінюється. Потужність сигналу в часовій і частотній області є рівною.

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_k|^2$$

Це співвідношення виражає теорему Парсеваля.

3) Якщо збільшувати к-сть гармонік, то точність наближення ф-ції $f(t)$ рядом Фур'є збільшується

Дискретне перетворення Фур'є

Найпростіший спосіб реалізувати розклад ф-ції в ряд Фур'є полягає у використанні аналізатора спектрів (представляє собою набір фільтрів з різною частотою зрізу). (смугові фільтри з великим коеф. прямокутності).

2-спосіб полягає у викор. ЕОМ. Оцифрований сигнал у вигляді послідовності цифрових значень вводиться в ЕОМ і після викон. цифрових перетворень отримуються коеф. розкладу в ряд Фур'є.

2 спосіб є повільнішим, але більш точним, ніж перший.

Нехай ми маємо ряд з N цифрових значень сигналу, вибраних на певному інтервалі: $\{f_0, f_1, .., f_{N-1}\}$.

Позначимо інтервал дискретизації вибірки цього сигналу як Δt.

Тоді основний період сигналу виражається як $N \cdot \Delta t$.

Вважаючи цей сигнал періодичною ф-цією з періодом $N \cdot \Delta t$, розкладемо його в ряд Фур'є. Визначимо коеф. Фур'є N-мірного вектора $f(f_0, f_1, .., f_{N-1})$

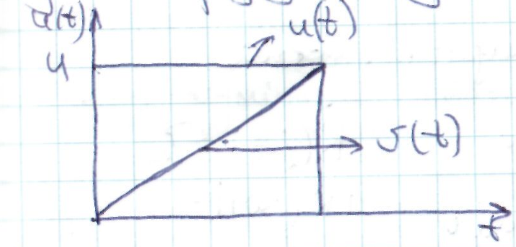
15.10.10

Лекція 5

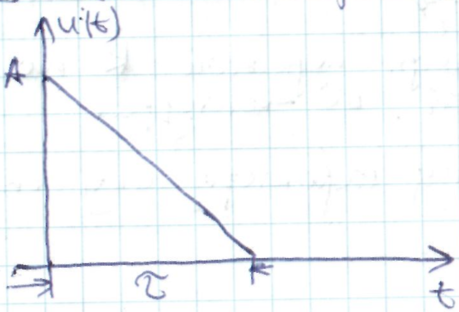
1) Довести, що ряд Фур'є пилкоподібного сигналу, зобр. на рис, має вигляд:

$$u(t) = A/2 - \frac{A}{\pi}\left[\sin \omega t + \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \dots\right]$$

2.) - Обчислити взаємну кореляційну ф-цію $(u \times \upsilon)$, для випадку, коли сигнал $u(t)$ прямокутний, а сигнал $\upsilon(t)$ - трикутний. Їх амплітуди U і тривалості T однакові. В вихідному стані (при відсутності затримки) сигнали існують на скінченому відрізку часу $[0, T]$.



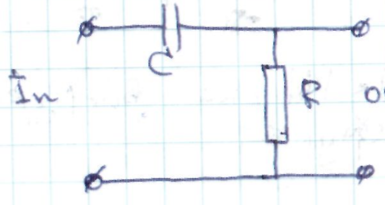
3.) - Знайти автокореляційну ф-цію сигналу

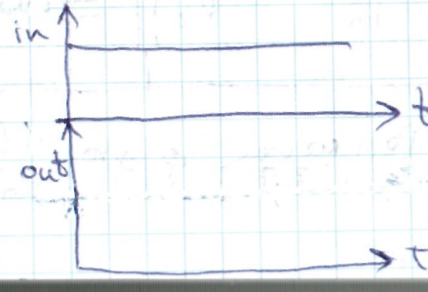


$$1(t) = \begin{cases} A, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

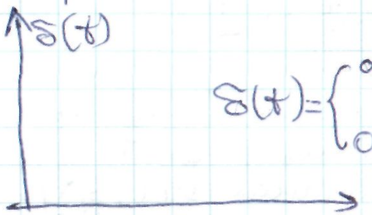
$u_{вих}(0) = 0$

4.) - Знайти перехідну характ. кола, зображеного на рис.





Знайти імпульсну характеристику цього ж кола (реакцію кола на δ-ф-цію)



$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

Імпульсна характ. визначається як похідна від перехідної характ. цього ж кола.

5.)-Знайти частотну характ. кола

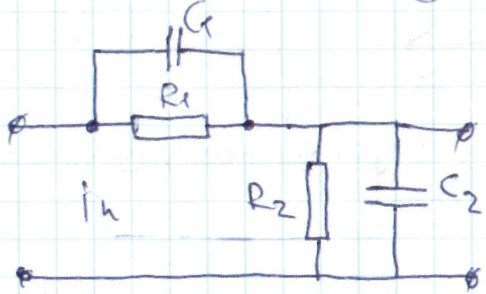
$\dot K(j\omega)$ - ?

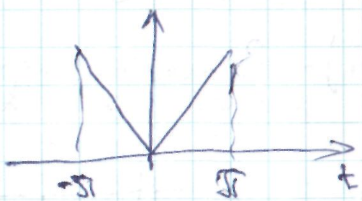
$|\dot K(j\omega)|$ - ?

$\varphi(\omega)$ - ?

Яке значення коеф. передачі $\dot K$ на резонансній частоті LC-контура.

6.)- Знайти частотну характеристику кола





8.)- Розкласти ф-цію $f(t)=|t|$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ в ряд Фур'є.

8.)- Задано вектор $f_i = \cos\frac{3\pi i}{4}$, $i=0,\dots,7$. Необхідно виконати дискретне перетворення Фур'є.

Дискретне перетворення Фур'є (продовження)

$$\bar f = (f_1, \dots f_{N-1})$$

Для того, щоб отримати коеф. перетв. Фур'є, необхідно задати вектор, що відповідає к-ті ортонормованих ф-цій, а скалярний добуток цього вектора і вектора $\bar f$ визначить коеф. Фур'є для дискр. значень. Якщо N-мірний вектор, що відп. ф-ції e^{jkt}, позначити як $\dot e_k$, то коеф. Фур'є для вектора $\bar f$ можна визначити, як скалярний добуток $C_k=(\bar f, e_k)$.

Ф-ція $e^{jkt} = \cos kt + j\sin kt$ відповідає N-мірному вектору, компонентами якого є вибірки e^{jkt} з інтервалом $2\pi/N$. Позначивши $\Delta\omega = 2\pi/N$, отримаємо

$e_k = (1, e^{jk\Delta\omega}, e^{jk\Delta\omega}, \dots e^{j(N-1)k\Delta\omega})$.

Множина векторів, утворена з e_k $k=0,\dots,N-1$ в N-мірному векторному просторі утворює ортонормований базис. Вектор $\bar f$ можна розкласти по ортонормованому базису згідно виразу

$$\bar f = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e_k.$$

Коеф. C_k визначаються через $(\bar f, e_k)$. Тоді підставивши замість скал. добутку суму складових вектора $\bar f$ та базисних векторів e_k

$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i\cdot e_i = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-ji\frac{2\pi}{N}k} \quad (1)$$

$k=0,\dots,N-1$

Співвідношення, яке виражає кожен компонент вектора $\vec{f}'$,

$$f_i = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}ik} \qquad (2)$$

наз. оберненим дискретним перетворенням Фур'є.

Вираз (1) – пряме дискретне перетв. Фур'є.

Якщо коеф. Фур'є дискретного перетв. представити у вигляді

$$C_k = A_k + jB_k,$$

то отримаємо

$$A_k + jB_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i\left(\cos\frac{2\pi}{N}ik - j\sin\frac{2\pi}{N}ik\right),$$

з якого випливає

$$\begin{cases} A_k = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=0}^{N-1} f_i\cos\frac{2\pi}{N}ik \\ B_k = -\frac{1}{N}\sum\limits_{i=0}^{N-1} f_i\sin\frac{2\pi}{N}ik \end{cases} \qquad k=0,\dots,N-1$$

1

1 $$f_i = \sum_{k=0}^{N-1}(A_k + jB_k)\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{N}ik + j\sin\frac{2\pi}{N}ik\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\left(A_k\cos\frac{2\pi}{N}ik - B_k\sin\frac{2\pi}{N}ik\right) +$$

$$+ j\sum_{k=0}^{N-1}\left(A_k\sin\frac{2\pi}{N}ik + B_k\cos\frac{2\pi}{N}ik\right)$$

Але значення f_i є дійсними числами, тому уявна частина цього виразу обертається в 0, а обернене дискр. перетв. Фур'є має вигляд:

$$f_i = \sum_{k=0}^{N-1}\left(A_k\cos\frac{2\pi}{N}ik - B_k\sin\frac{2\pi}{N}ik\right),$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Властивості ДПФ:

1) – Властивість періодичності спектру

Коеф. Фур'є (A_k, B_k) отримані з допомогою ДПФ, зв'язані наст. чином

$C_{N+k} = C_k$ – спектр повторюється через N гармонік

Це означає, що спектри є періодичними з періодом N. З власт. періодичності випливає, що коеф. $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$ є основними коеф. Фур'є і отримуються із N значень вибірки даних. Всі інші коеф. є їх повторенням.

2) – Властивість симетричності спектру

$$C_{N-k} = C_k$$

Складові спектру з від'ємними k повторюються через N значень на інтервалі $[k - N/2;\ k-(N-1)]$.

Це означає, що спектр амплітуд має осьову симетрію відносно $K = N/2$.

Швидке перетворення Фур'є (ШПФ)

Якщо виконати ДПФ для сигналу з вибіркою ≈ 1000, то обчислення займе багато часу, але при ШПФ затрати часу будуть набагато менші. ШПФ — це алгоритм обчислення, який викор. властивості періодичності тригонометр. ф-цій, для того, щоб уникнути непотр. обч. в ДПФ.
Нехай число вибірки $= N$, тоді деяке комплексне число W

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

В цьому випадку в ДПФ коеф. Фур'є для сигналу $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ будуть обч.:

$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i W^{ki}$$

Розглянемо для прикладу сигнал з 8 складовими. Спочатку коеф. Фур'є сигналу запишемо у вигляді:

$N = 8$

$$C_k = \frac{1}{8}\left(f_0 w^0 + f_1 w^k + f_2 w^{2k} + f_3 w^{3k} + \dots + f_7 w^{7k}\right)$$

Розглянемо всі C_k $(k = 0, \dots, 7)$

Для цього ост. вираз запишемо у вигляді матриці.

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^{8\,0} & w^{10\,2} & w^{12\,4} & w^{14\,6} \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^{9\,1} & {}^{4}w^{12} & {}^{7}w^{15} & {}^{2}w^{18} & {}^{5}w^{21} \\ w^0 & w^4 & {}^{0}w^{8} & {}^{4}w^{12} & {}^{0}w^{16} & {}^{4}w^{20} & {}^{0}w^{24} & {}^{4}w^{28} \\ w^0 & w^5 & {}^{2}w^{10} & {}^{7}w^{15} & {}^{4}w^{20} & {}^{1}w^{25} & {}^{6}w^{30} & {}^{3}w^{35} \\ w^0 & w^6 & {}^{4}w^{12} & {}^{2}w^{18} & {}^{0}w^{24} & {}^{6}w^{30} & {}^{4}w^{36} & {}^{2}w^{42} \\ w^0 & w^7 & {}^{6}w^{14} & {}^{5}w^{21} & {}^{4}w^{28} & {}^{3}w^{35} & {}^{2}w^{42} & {}^{1}w^{49} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix}$$

Для того, щоб обч. коеф. Фур'є цим способом необх. викон. 64 множення та $7 \times 8 = 56$ додавань. Узагальнюючи, можна сказати, що в обчисленні ДПФ необх. виконати N^2 множень та $N \times (N-1)$ додавань.
З властивості періодичності можемо записати, що $w_8 = w_0$, $w_9 = w_1$ ...
Якщо остачу від показника n, поділеного на 8 записати як $k \bmod 8$, то значення $w^k = w^{n \bmod 8}$. Викор. цю закономірність, ост. матрицю можна представити у вигляді! (те, що олівцем)

ШПФ — це алгоритм ефективного обч., з використанням закономірностей, скритих всередині матриці.

Лекція 6

22.10.10

$$\bar{f} = (f_1, \dots, f_N)$$

$$\bar{f} = (\bar{c}, \bar{e})$$

$$e = e^{-\frac{j2\pi}{N}} = W_N$$

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-\frac{j2\pi}{N} ik} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i W_N^{ik}$$

$k = 0, \dots, N-1$ $\quad$ <u>ПДПФ</u>

$$f_i = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{\frac{2\pi j}{N} ki} = \sum_{k=0}^{N-1} C_k W_N^{-ik}$$

<u>ОДПФ</u>

Розглянемо деякі співвідношення, які випливають з величини W_N. Розглянемо величину W_N^2:

$$W_N^2 = \left(e^{-\frac{2\pi j}{N}}\right)^2 = e^{-\frac{2\pi j}{N} 2} =$$

$$= e^{-\frac{2\pi j}{N/2}} = W_{N/2}$$

$$W_N^{k+N/2} = W_N^k \cdot W_N^{N/2} = W_N^k e^{-\frac{2\pi j}{N} \cdot \frac{N}{2}} =$$

$$= W_N^k \cdot e^{-\pi j} = -W_N^k$$

$(e^{jx} = \cos x + j \sin x)$

Послідовність даних (вибірка) ділиться на 2 рівні послідовності, одна з яких скл. з елем. з парними номерами, а друга – з непарними. Якщо вихідна послідовність скл. з непарного числа елем., то необх. додати до неї 0, щоб число цих елем. стало парним. Це дозволить записати дискретне перетв. Фур'є $C(k)$ через два ДПФ $C_{11}(k)$ і $C_{12}(k)$, які будуть, відповідно, ДПФ даних з парними та непарними номерами.

Отже, N-точкове ДПФ перетв. в два ДПФ, кожне з яких містить N/2 точок.

Після цього цей процес продовжується доти, поки $C(k)$ не розпадеться на N/2 дискр. перетв. Фур'є, кожне з яких складатиметься з 2 точок, що представляють собою початкові дані (вибірку). Практично, відбув. перевпорядкув. початкових даних (вибірки) і обчислення N/2 ДПФ. Результати цих обчислень зручно об'єднувати в четвірки. Всього отрим. N/4 4-точкових ДПФ, які обчислюються і відповідно об'єднуються в N/8 8-точкових ДПФ і т.д., поки не отримується кінцеве N-точкове ДПФ $C(k)$. На кожному етапі для знах. ДПФ викор. загальний множник, який представляє собою W_N в певній степені.

$$C_k = \frac{1}{N}\left[\underbrace{\sum_{i=0}^{N/2-1} f_{2i} W_N^{2ik}}_{\text{парні номера}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{N/2-1} f_{2i+1} W_N^{(2i+1)k}}_{\text{непарні номера}}\right] =$$

$$C_k = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=0}^{N/2-1} f_{2i} W_N^{2ik} + W_N^k \sum_{i=0}^{N/2-1} f_{2i+1} W_N^{2ik}\right]$$

Враховуючи, що $W_N^{2nk} = (W_N^2)^{nk} = W_{N/2}^{nk}$

$$C_k = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=0}^{N/2-1} f_{2i} W_{N/2}^{ik} + W_N^k \sum_{i=0}^{N/2-1} f_{2i+1} W_{N/2}^{ik}\right]$$

$$k=0, \dots, N-1$$

Ост. р-ня ми запишемо у вигляді

$$C(k) = C_{11}(k) + W_N^k C_{12}(k)$$

$$k = 0, \dots, N-1$$

Для ДПФ з $N=8$ маємо вибірку $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ і 8-точкове ДПФ

$$C_k = C_{11}(k) + W_8^k C_{12}(k).$$

Тоді ця вибірка на першому кроці розбивається на 2:

$\underbrace{f_0, f_2, f_4, f_6}_{\text{парні номера}}$ $\qquad$ $\underbrace{f_1, f_3, f_5, f_7}_{\text{непарні номера}}$

$k=0, \dots, 3$ $\qquad$ $k=0, \dots, 3$

$$\begin{cases} C_{11}(k) = C_{21}(k) + W_{N/2}^k \cdot C_{22}(k) \\ C_{12}(k) = C_{23}(k) + W_{N/2}^k C_{24}(k) \end{cases}$$

на наст. кроці:

$f_0, f_4;$ $\quad f_2, f_6;$ $\quad f_1, f_5;$ $\quad f_3, f_7;$

$C_{21}(k)$ $\quad C_{22}(k)$ $\quad C_{23}(k)$ $\quad C_{24}(k)$

$k=0,1$

2-точкові ДПФ:

$$\begin{cases} C_{21}(k) = f_0 + W_{N/4}^k f_4 \\ C_{22}(k) = f_2 + W_{N/4}^k f_6 \\ C_{23}(k) = f_1 + W_{N/4}^k f_5 \\ C_{24}(k) = f_3 + W_{N/4}^k f_7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{21}(0) = f_0 + f_4 \\ C_{22}(0) = f_2 + f_6 \\ C_{23}(0) = f_1 + f_5 \\ C_{24}(0) = f_3 + f_7 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_{21}(1) = f_0 - f_4 \\ C_{22}(1) = f_2 - f_6 \\ C_{23}(1) = f_1 - f_5 \\ C_{24}(1) = f_3 - f_7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{11}(0) = C_{21}(0) + W_{N/2}^0 C_{22}(0) = C_{21}(0) + C_{22}(0) \\ C_{11}(1) = C_{21}(1) + W_{N/2}^1 C_{22}(1) = C_{21}(1) - jC_{22}(1) \\ C_{11}(2) = C_{21}(\cancel{2}0) + W_{N/2}^2 \cdot C_{22}(\cancel{2}0) = C_{21}(\cancel{2}0) - C_{22}(\cancel{2}0) \\ C_{11}(3) = C_{21}(\cancel{3}1) + W_{N/2}^3 \cdot C_{22}(\cancel{3}1) = C_{21}(\cancel{3}1) + jC_{22}(\cancel{3}1) \end{cases}$$

(о̂ківуєм – через симетричність спектру)

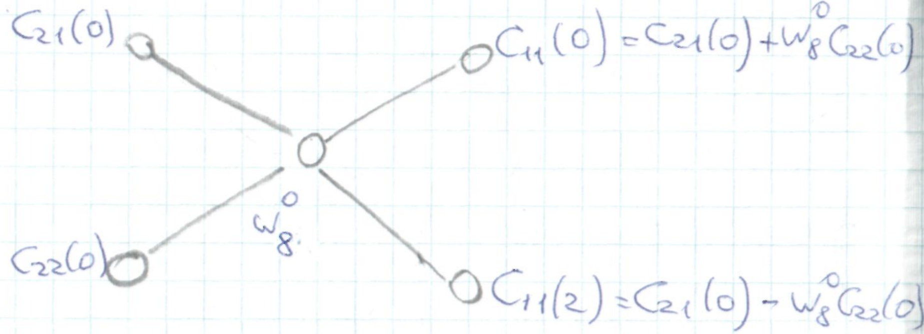
$C_{12}(0) = C_{23}(0) + W_{N/2}^{0} C_{24}(0) = C_{23}(0) + C_{24}(0)$

$C_{12}(1) = C_{23}(1) + W_{N/2}^{1} C_{24}(1) = C_{23}(1) - jC_{24}(1)$

$C_{12}(2) = C_{23}(2) + W_{N/2}^{2} C_{24}(2) = C_{23}(2) - C_{24}(2)$

$C_{12}(3) = C_{23}(3) + W_{N/2}^{2} C_{24}(3) = C_{23}(3) + jC_{24}(3)$

Ост. р-ня можна зобразити на діаграмі, взявши їх попарно і скориставшись симетрією знаків

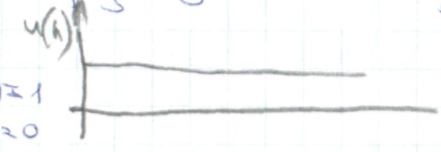


1) Знайти ДПФ з допомогою алгоритму ШПФ з часовою децимацією (проріджен-ням). Вхідна вибірка = (1, 0, 0, 1)

2) —//— Вхідна вибірка = (0, 1, 1, 1)

Z-перетворення

Дозволяє замінити розв'язок лінійних різницевих р-нянь розв'язком алгебраїчних р-нянь.



$n \geq 0 \quad x(n) = 1$

$n < 0 \quad x(n) = 0$

Z-перетворення для послідовності $x(n)$ позначається як $X(Z)$ і визначається

(1) $$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot Z^{-n}, \text{ де}$$

Z - комплексна змінна.

$X(Z)$ є комплексною ф-цією

Представивши Z в експоненціальній формі $Z = r \cdot e^{j\theta}$, (1) запишемо:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}$$

Отже, $X(Z)$ визначена для тих значень Z з радіусом r в Z-площини, для яких

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) \cdot r^{-n}| < \infty \quad (2)$$

Всі значення Z, для яких виконується умова (2), наз. областю збіжності послідовності $x(n)$. Таблиця Z-перетворень деяких фізично реалізованих послідовностей $x(n)$

фізично-реалізована послідовність	Z-перетв. послідовності	радіус збіжності
$x(n) = \delta(n)$	$X(Z) = 1$	$R = 0$
$x(n) = \delta(n-m)$	$X(Z) = Z^{-m}$	$R = 0$
$x(n) = u(n)$	$X(Z) = \frac{Z}{Z-1} = \frac{1}{1-Z^{-1}}$	$R = 1$

29.10.10 **Лекція 7**

Реалізація часових затримок мікроконтролера сімейства MCS-51 (Intel, Atmega)

Мікроконтролери MCS-51 мають два таймери лічильника C/$\overline{T}$0, C/$\overline{T}$1 і шість джерел переривань. Мікроконтролер може працювати в режимі таймера (підраховує імпульси, що поступають з тактового генератора кристалу), в режимі лічильника (підраховує зовнішні імпульси, що поступають на його входи T0, T1 (P3.0, P3.1). Підрахунок імпульсів виконується з допомогою регістрів TH0, TL0 (C/$\overline{T}$0) або TH1, TL1 (для C/$\overline{T}$1). При переповненні цих регістрів їхнє значення скидається в 0 і вони починають рахувати з 0.

Існує 4 режими роботи таймерів лічильників C/$\overline{T}$0, C/$\overline{T}$1:

0: - в цьому режимі таймери ліч. працюють на основі 13-розрядних регістрів TH0 (8 розрядів) і TL0 (5 розрядів) для C/$\overline{T}$0, TH0 (8) і TL0 (5) для C/$\overline{T}$1. В цьому режимі лічильник може порахувати $2^{13} = 8192$ машинних циклів.

1: - в цьому режимі таймери ліч. працюють на основі 16-розрядних регістрів TH0 (8) і TL0 (8) для C/$\overline{T}$0; TH1 (8) і TL1 (8) для C/$\overline{T}$1; Макс. число тактів до переривання $2^{16} = 65536$

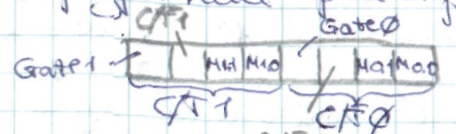
2: 8-розрядний режим для C/$\overline{T}$0 і C/$\overline{T}$1 ($2^8 = 256$). Основна відмінність роботи полягає в автоматичному перевантаженні регістрів TH0 і TH1: TH0 ← TL0

TH1 ← TL1

3: режим роботи на основі 8-розрядних таймерів лічильників. Викор. для задання швидкості передачі даних по послідовному порту.

• Регістр TMOD - регістр режимів роботи таймерів ліч. C/$\overline{T}$0, C/$\overline{T}$1.

8-розрядний регістр



C/$\overline{T}$0

(M 1.1) (M 0.1)	M(1.0) (M 0.0)	C/$\overline{T}$1 C/$\overline{T}$0
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	3

режими роботи C/$\overline{T}$0, C/$\overline{T}$1

Якщо C/$\overline{T}$0 (C/$\overline{T}$1) = 0 - таймер

C/$\overline{T}$0 (C/$\overline{T}$1) = 1 - лічильник

Gate0 (Gate1) = 0 - заборонений запуск таймера лічильника C/$\overline{T}$0 через вхід $\overline{INT0}$ за допомогою зовнішнього імпульсу (C/$\overline{T}$1 - через $\overline{INT1}$)

- Регістр TCON задає умови роботи таймерів лічильників С/Т0 і С/Т1.
- Маємо два прапорці TF0, TF1 – прапорці переповнень таймерів ліч. С/Т0, С/Т1. Якщо ліч. підрахував макс. к-сть імпульсів, то по приходженню наст. імпульса всі розряди обнулюються. В цей же час TF0 і TF1 встановлюються в „1".

- TR0, TR1 – біти запуску таймерів ліч. С/Т0, СТ1. Для того, щоб С/Т0 і С/Т1 почали підрахунок імпульсів, TR0 і TR1 встановлюються в „1".

- IE0, IE0 – встан. в „1", якщо на входах зовнішніх переривань $\overline{INT0}$, $\overline{INT1}$ буде рівень логічного нуля („0")

- IT0, IT1 – задають режим переривань по входах зовнішніх переривань $\overline{INT0}$ $\overline{INT1}$. Якщо ITx = 0, то будуть переривання по входах $\overline{INTx}$ по рівню. Якщо ITx = 1, то переривання по фронту (від'ємному, з „1" в „0").

Час виконання машинних команд визначається к-стю машинних циклів. Для MCS-51 команди можуть виконуватися протягом 1, 2 або 4 машинних циклів (при 4 – тільки * і /).
Час виконання

$$T_{м.ц.} = \frac{1}{F_{м.ц.}} = \frac{1}{Fosc/12} = \frac{12}{Fosc}$$

Fosc – частота тактового генератора (зовнішнього)

Fosc (МГц) → $T_{м.ц.}$ (мкс)
Fosc = 12 МГц → $T_{м.ц.}$ = 1 мксек
Fosc = 24 МГц → $T_{м.ц.}$ = 0.5 мксек

Нехай $t_{зат.}$ = 0,3 сек. Задаємо к-сть машинних циклів, необх. для її реалізації.

$$N_{t_{зат.}} = \frac{t_{зат.}}{T_{м.ц.}} = \frac{0{,}3 \text{ сек.}}{1 \text{ мк сек}} = 300000 \text{ маш ц.}$$
для Fosc = 12 МГц.

Щоб це реалізувати, розбиваємо

300000 = 30 · 10000 (30 циклів по 10000)

10 000 < 65536, отже, настроюємо на 1 режим роботи таймера.

1) TMOD = 00000010 – для 1 режиму роботи
2) TR0 = 1
3) TH0 = High (65536 – 10000)
TL0 = Low (65536 – 10000)
4) TF0 = 0.

Переривання в MCS-51

1) $\overline{INT0}$, $\overline{INT1}$ – зовнішні
2) переривання по C/T0, C/T1
3) PS – переривання по послідовному порту

INT0	(0003H)
C/T0	(000BH)
INT1	(0013H)
C/T1	(001BH)
PS	(0023H)

Викор. регістри:

•) IE – регістр дозволів переривань

EA	–	–	ES	ET1	EX1	ET0	EX0
дозвіл всіх переривань			PS	C/T1	$\overline{INT1}$	C/T0	$\overline{INT0}$

•) IP – регістр пріоритетів переривань (високий і низький)

Якщо відпов. біти встановлені в „1" – високий рівень пріоритетів, „0" – низький рівень пріоритетів

–	–	–	PS	PT1	PX1	PT0	PX0
			PS	C/T1	$\overline{INT1}$	C/T0	$\overline{INT0}$

Z-перетворення (продовження)

Табл. 1 (продовження)

4) $x(n) = \{a^n \sin[n\omega T]\} u(n)$

$$X(Z) = \frac{aZ\sin(\omega T)}{Z^2 - 2aZ\cos(\omega T) + a^2}$$

$R = |a|$

5) $x(n) = \{a^n \cos(n\omega T)\} u(n)$

$$X(Z) = \frac{a(Z - a\cos\omega T)}{Z^2 - 2aZ\cos(\omega T) + a^2}$$

$R = |a|$

З даної таблиці випливає, що Z-перетворення послідовності представляє собою раціональну ф-цію від Z або Z^{-1}.
Отже, якщо відомі полюси та „0" Z-перетворення $X(Z)$ послідовності $x(n)$, то можна легко реалізувати $X(Z)$ з точністю до пост. множника.
З Отже, якщо $p_1, p_2, \dots, p_m$ – полюси, $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ – нулі, то

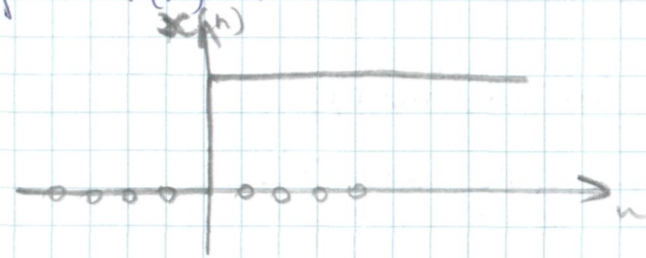
$$X(Z) = L Z^{n-m} \frac{\prod_{i=1}^{n}(Z - Z_i)}{\prod_{j=1}^{m}(Z - p_j)} = L \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^{n}(1 - Z_i Z^{-1})}{\prod_{j=1}^{m}(1 - p_j Z^{-1})}}_{(a)},$$

де L – постійна величина.

Для цифрових фільтрів зручніше викор. вираз (a), так як регістр зсуву або елем. затримки реалізують оператор Z^{-1}. Перемноживши, отримуємо:

$$X(Z)=\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i Z^{-i}}{1+\sum_{j=0}^{m} b_j Z^{-j}}$$

Приклад. Знайти Z-перетв. для наст. вибірки $x(n)$:



$$x(n)=u(n)=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n\ge 0\end{cases}$$

$$X(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) Z^{-n} =$$

$$=1+Z^{-1}+Z^{-2}+\ldots=\frac{1}{1-Z^{-1}}=\frac{Z}{Z-1}$$

(знаменник геометр. прогресії (нескінченної) $q=Z^{-1}$)

$$S=\frac{a_0}{1-q}$$

Властивості Z-перетворення

1) – властивість однозначності

Якщо $X_1(Z)$ і $X_2(Z)$ є Z-перетв. послідовностей $x_1(n)$ і $x_2(n)$ відповідно, то тоді

$X_1(Z)=X_2(Z)$ тоді і тільки тоді, коли $x_1(n)=x_2(n)$.

Це означає, що кожній послідовності $x(n)$ відпов. одне і тільки одне Z (перетв.) $X(Z)$

2) – властивість лінійності

Якщо $X_1(Z)$ і $X_2(Z)$ є Z-перетв. $x_1(n)$ і $x_2(n)$, то для

$x(n)=h_1 x_1(n)+h_2 x_2(n)$ Z перетв. буде:

$X(Z)=h_1 X_1(Z)+h_2 X_2(Z)$

3) – властивість затримки (зсуву)

Якщо $x_1(n)$ має Z-перетв. $X_1(Z)$, то послідовність $x(n)=x_1(n-m)$ має Z-перетв., рівне

$$X(Z)=Z^{-m} X_1(Z)$$

4) – властивість згортки

Якщо $X_1(Z)$ і $X_2(Z)$ є Z-перетв. послідовностей $x_1(n)$ і $x_2(n)$, то тоді для послідовності

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \cdot x_2(n-k) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(n-k) \cdot x_2(k)$$

Z-перетв. визнач.

$$X(Z) = X_1(Z) \cdot X_2(Z)$$