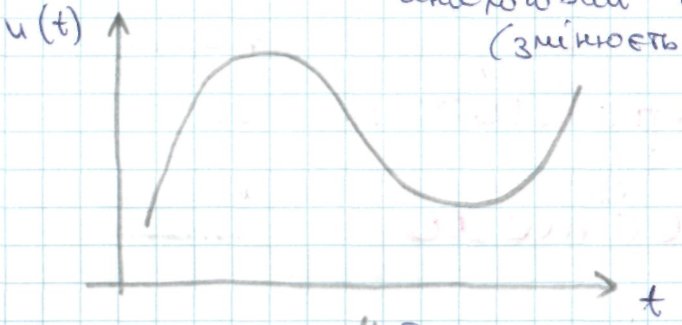
1) $f_{зрізу}$ (3dB) - ($\frac{\sqrt{2}}{2}$ - K(ω))

2) коефіцієнт прямокутності $K_п = \frac{f_{зат.}}{f_{зрізу}}$

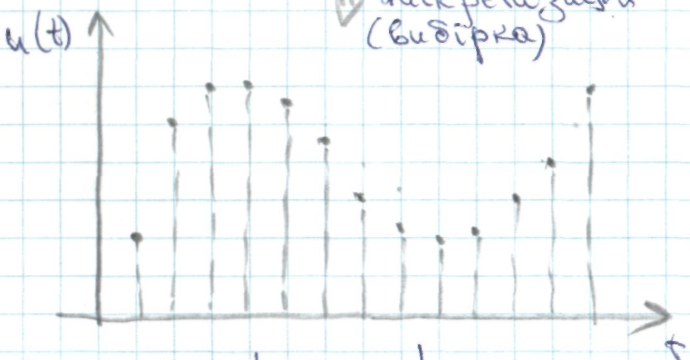
=1 для ідеальних фільтрів

17.09.10, 23.09.10 **Лекція 1, 2**

Аналогові та дискретні сигнали. Математичний апарат, що викор. для їх опису.



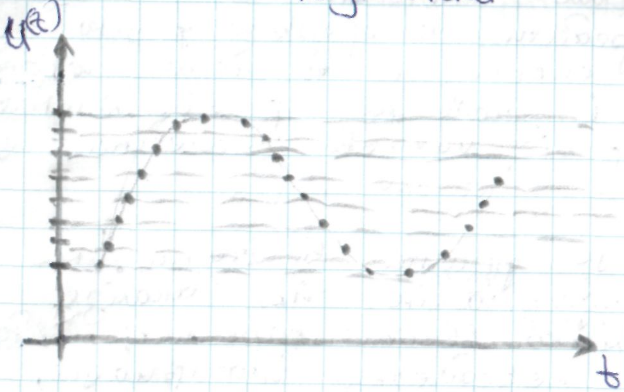
⇓ дискретизація (вибірка)



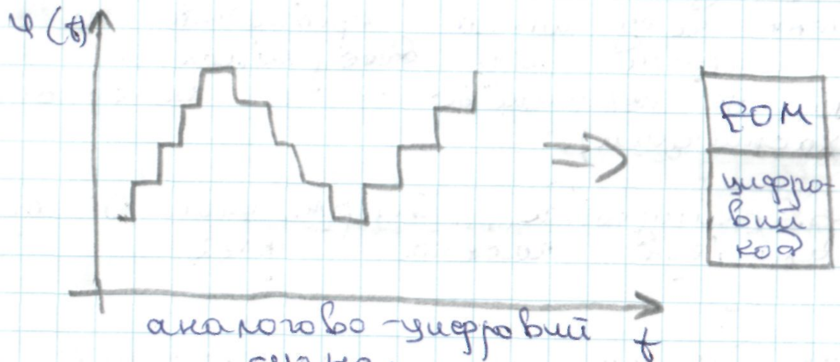
$t_i = t_{i-1} + \Delta t$

$i = 0, N$

квантування



Аналоговий сигнал, отриманий з давача, з допомогою АЦП перетворюється у цифровий код.



Для відтворення синусоїди важливим є вибір кроку дискретизації

<u>Теорема Котельникова</u> (Найквіста):

Ф-ція з обмеженим спектром повністю описується своїми значеннями, що відраховуються через інтервал $1/2 f_{спектру}$, де $f_{спектру}$ – ширина спектру ф-цій (діапазон частот спектру).

$$t_{виб.} = \frac{1}{2 F_{спектру}}$$

Суть теореми Котельникова: якщо необхідно передати неперервну ф-цію з обмеженим спектром, то нема потреби передавати всі значення ф-цій. Достатньо передати окремі миттєві значення, що відраховуються з часом $t_{виб}$.

1) Сигнал - це фізична величина, яка містить інформацію. Для аналізу сигналу необхідно ввести параметр, з допомогою якого передається інформація, її одиницю вимірювання і те, яку фізичну величину відображ. інф.

2) Якщо значення сигналу в будь-який момент часу можна передбачити, то такі сигнали наз. детерміновані. Якщо це неможливо — то випадковим (стохастичним).

Напр., синусоїда - детерм. сигн. Її пар. є амплітуда, частота і фаза

3) Періодичним наз. сигнал, параметри якого є однаковими при зміні часу на ціле число періодів. Крім синусоїди, існують прямокутний, пилкоподібн., трик. та ін. періодичні сигнали

4) Одиничні сигнали бувають імпульсними і затухаючими;

Цифровий сигнал отримується з аналогового методом дискретизації та квантування. Дискретизація в часі наз. вибіркою а по значенню величини сигналу - квантуванням. Перетворення - АЦП -

5) В процесі оцифровування сигналу вибірку потрібно робити з частотою, більшою, ніж $f_{кот}$. Ця частота в 2 рази більша самої вищої частоти сигналу. Якщо брати нижчу частоту, ніж найвища-Кот., то виникають паразитні низькочастотні складові, які не входять до вихідного сигналу. Перетворення - ЦАП

6) Сигнал в загальному вип. - це залежність однієї величини від іншої і з матем. точки зору представляє ф-цію. Найбільш поширене представлення - в електричній формі $(u(t))$.

7) Шуми та завади

При детектуванні сигналів, що несуть корисну для даного виду вимірювання інформ. разом з основним сигналом одночасно реєструються і паразитні сигнали (шуми та завади різної природи). До завад відносять спотворення корисних сигналів під дією дестабілізуючих чинників на процеси вимірювання.

Джерела завад бувають внутрішні та зовнішні. Внутрішні шуми можуть бути властиві фізичній природі джерел сигналу (теплові шуми в електронних колах, дробові ефекти). Зовнішні джерела шумів бувають штучного та природного походження. До штучних відн. індустріальні - двигуни, генератори сигналів різної форми. Природними - блискавки, спалахи сонячної енергії...

Завади поділяються на флуктуаційні, імпульсні та періодичні.
Флуктуаційні представл. хаотичний в часі процес у вигляді випадкових сплесків різної амплітуди. Як правило, вони розподілені за нормальним законом із нульовим сер. знач. і впливають на низькочастотні складові сигналу.

Імпульсні завади подібні на шумові і проявляються як у вигляді окремих імпульсів, так і у вигляді послідовності імпульсів, форма і характер яких випадкові і різні.
Причинами завад є стрибки струму природні електричні явища.

Розподіл імпульсних завад є симетричний але з довільною щільною розподілу.

Періодичні викликаються низько- або високочастотними полями ліній електропередач або силових установок.
Якщо основна потужність зосереджена на окремих ділянках діапазону частот - то такі завади зосереджені.

По характ. дії на сигнал завади поділ. на:

- Адитивні - сумуються з сигналом, не залежать від його форми і значень і не змінюють інформаційної форми самого сигналу
- Мультиплікативні (деформуючі) - можуть змінювати форму інф. част. сигналу, мати залежність від його значень.

8) Математичний опис сигналів

Викор. для абстрагування від фізичної природи сигналу і матеріальної форми його носія; для класифікації, викон. їх порівняння, встановлення степеня їх тотожності, моделювання та обробки сигналів.
Опис сигналу задається ф-цією залежністю певного інф. парам. сигналу від незалежного параметру (аргументу). Така форма опису сиг. наз. динамічною.
Ф-ції, якими опис. сигнали, можуть бути дійсними і комплексними.
Комплексна форма викор. для опису сигналів в частотній області.

9) Математичний апарат (представлення сигналів у вигляді векторів), що викор. при описі сигналів

Сигнал, представлений ф-цією $f(t)$, можна представити вибірку f. Чим більше t, тим вибірка краща.

Відстань та скалярний добуток векторів

Нехай маємо 2 сигнали $f(t)$ і $g(t)$.
Зробимо вибірки

$$f(t) \quad \bar{f} = (f_1, f_2)$$

$$g(t) \quad \bar{g} = (g_1, g_2)$$

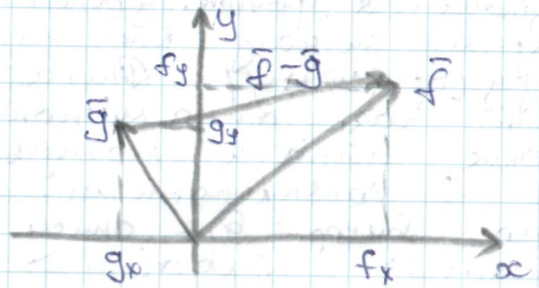
Відстань між векторами

$d(\bar f, \bar g)$. Чим менше значення d, тим ближче вектори f і g і сильніший взаємозв'язок між ними.

$\|\bar f\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$

$\|\bar g\| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ — величина вектора $\bar f$, $\bar g$

Норма між векторами $\bar f$ і $\bar g$ — це норма їх різниці



$$\|\bar f - \bar g\| = d(\bar f, \bar g) = \sqrt{(f_1-g_1)^2 + (f_2-g_2)^2}$$

Відстань — це один з параметрів, що визначає силу зв'язку між векторами. Для визначення сили зв'язку викор. скалярний добуток

$$(\bar f, \bar g) = \|\bar f\| \cdot \|\bar g\| \cdot \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{(\bar f, \bar g)}{\|\bar f\| \|\bar g\|}$$

$$r = \frac{(\bar f, \bar g)}{\|\bar f\| \|\bar g\|}$$ — (сила зв'язку)

$-1 \le r \le +1$ — коефіцієнт кореляції

Якщо напрям векторів співпадає, то $\angle\theta = 0$ і $r = 1$. Зі збільшенням кута θ значення r зменшується і $r=0$, якщо вектори f і g є взаємоперпендикулярні. Величина r наз. коефіцієнтом кореляції (залежить від $\angle\theta$ і не залежить від норми векторів).

Викор. теорему косинусів для векторів $\bar f - \bar g$, можемо записати:

$$\|\bar f - \bar g\|^2 = \|\bar f\|^2 + \|\bar g\|^2 - 2\underbrace{\|\bar f\|\|\bar g\| \cos\theta} =$$

$$= \|\bar f\|^2 + \|\bar g\|^2 - 2(\bar f, \bar g)$$

$$2(\bar f, \bar g) = \|\bar f\|^2 + \|\bar g\|^2 - \|\bar f - \bar g\|^2 =$$

$$= (f_1^2 + f_2^2) + (g_1^2 + g_2^2) - (f_1 - g_1)^2 - (f_2 - g_2)^2 =$$

$$= f_1^2 + f_2^2 + g_1^2 + g_2^2 - f_1^2 - g_1^2 + 2f_1g_1 - f_2^2 - g_2^2 + 2f_2g_2 =$$

$$= 2f_1g_1 + 2f_2g_2$$

$$(\bar f, \bar g) = f_1g_1 + f_2g_2 \qquad (1)$$

Враховуючи (1), коеф. кореляції ми можемо записати наст. чином:

$$r = \frac{f_1g_1 + f_2g_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

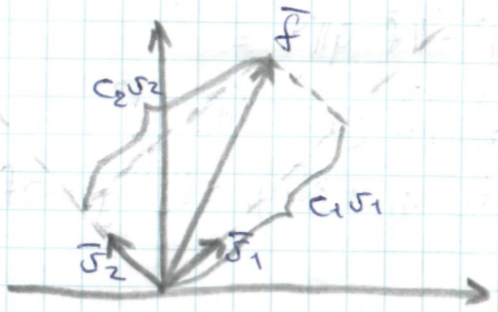
Ортонормований базис

Пара взаємноперпендикулярних векторів $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ наз. ортогональним базисом.

Якщо $\|v_1\| = 1$ і $\|v_2\| = 1$, то такі вектори наз. ортонормованим базисом.
Вектори з нормою 1 наз. одиничними векторами.

Виразимо вектор $\bar{f}$ через вектори ортонормованого базису $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ і сукупність коефіцієнтів c_1, c_2

$$\bar{f} = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 \quad (2)$$



Коеф. c_1, c_2 визначають величину складових вектора $\bar{f}$ у ~~площині~~ напрямі $\bar{v}_1, \bar{v}_2$.

Вектори $c_1\bar{v}_1$, $c_1\bar{v}_2$ наз. проекціями $\bar{f}$.

Нехай заданий $\bar{f}$ і с-ма $\{v_1, v_2\}$.
Для того, щоб виразити $\bar{f}$ через базис $\{v_1, v_2\}$, необхідно знати, як отримати коеф. c_1, c_2.
Знайдемо скалярний добуток лівої і правої частин рівності (2).

$$(\bar{f}, \bar{v}_1) = (c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2, \bar{v}_1) = c_1\underbrace{(\bar{v}_1, \bar{v}_1)}_{=1} + \underbrace{c_2(\bar{v}_2, \bar{v}_1)}_{=0} = c_1$$

$$(\bar{f}, \bar{v}_2) = c_2$$

1). Чи утворюють вектори $\bar{v}_1$ і $\bar{v}_2$ базис, якщо $v_1 = (\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$ і $v_2 = (-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$

① $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \bar{v}_1 \perp \bar{v}_2$

② $\|v_1\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

$\|v_2\| = 1$ $\quad$!!! $\{v_1, v_2\}$ утворюють базис

2) Розкласти вектор $\bar{f} = (\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2})$ по базису $\{v_1, v_2\}$, якщо

$v_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$; $\quad v_2 = (-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$c_1 = (\bar{f}; \bar{v}_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$c_2 = (\bar{f}, v_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$$\bar{f} = 2\bar{v}_1 + \sqrt{3}\bar{v}_2$$

Перехід від векторного простору до простору ф-цій

В загальному випадку $\|\bar{f}\|$, якщо він складається із N вибірок

$$\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$$

$$\|\bar f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} f_i^2}$$

Розглянемо норму $\bar f$ у випадку простору нескінченної розмірності (простору ф-цій).

Норма $f(t)$ на відрізку $a \le t \le b$

$$\|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}$$

Чим більший інтервал, тим більше значення норми. Тому зручніше пронормувати норму $f(t)$ на величині інтервалу $[a, b]$.

$$\|f(t)\| = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\,dt}$$

У випадку багатовекторної норми, щоб уникнути впливу розмірності N, викор. співвідношення:

$$\|\bar f\| = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i^2}$$

Якщо два вектори $\bar f$ і $\bar g$ в N-мірному просторі розташовані під кутом θ один до одного, то їх скалярний добуток можна визначити як

$$(\bar f, \bar g) = \|\bar f\| \cdot \|\bar g\| \cos\theta = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_N g_N =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} f_i g_i$$

Враховуючи співвідношення для коеф. кореляції в двовимірному випадку, отримаємо:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i g_i}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_i^2}}$$

Якщо ф-ції $f(t)$ і $g(t)$ розміщені в просторі ф-цій під кутом θ, то коеф. кореляції можна визначити так, як і у випадку векторів, викор. норму і скалярний добуток:

$$r = \frac{(f(t), g(t))}{\|f(t)\| \; \|g(t)\|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t) g(t)\,dt}}{\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\,dt}\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b g^2(t)\,dt}}$$

$$0 \le r \le 1$$

Викор. скалярний добуток, можна визначити кут між ф-ціями $f(t)$ і $g(t)$ або в загальному вип. визначити перпендикулярність ф-цій.

Якщо скалярний добуток $(\bar f(t), \bar g(t)) = 0$, то ф-ції взаємноперпендикулярні.

Викор. ортонормований базис, можна представити вектор у вигляді лінійної комбінації базисних ф-цій.

Для N-мірного $\bar{f}$ така лінійна комбінація

$$\bar{f} = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_N\bar{v}_N$$

$$c_k = (\bar{f}, \bar{v}_k), \quad k = 1, \dots, N$$

Розглянемо деяку множину ф-цій $\{\varphi_k(t)\}$. Будемо вважати, що будь-які дві ф-ції з цього сімейства ф-цій на інтервалі $\{a, b\}$ є взаємоперпендикулярні, якщо скалярний добуток ф-цій рівний 0,

$$(\varphi_m(t), \varphi_n(t)) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi_m(t)\varphi_n(t)\,dt$$

$$m = 0, 1, \dots, \quad m \neq n$$
$$n = 0, 1, \dots$$

то сімейство цих ф-цій наз. системою ортогональних ф-цій. Якщо норма кожної з цих ф-цій рівна 1

$$(\varphi_m(t), \varphi_m(t)) = \|\varphi_m(t)\|^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi_m^2(t)\,dt = 1$$

то таке сімейство наз. ортонормованою с-мою ф-цій.

З допомогою ортонормованої с-ми ф-цій ф-цію $f(t)$ можна виразити наст. чином

$$f(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_N\varphi_N(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i(t)$$

З цього співвідношення зрозуміло, що коеф. c_k виражають долю складової $\varphi_k(t)$ в ф-ції $f(t)$.

$$c_k = (f(t)\cdot\varphi_k(t)) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\varphi_k(t)\,dt.$$

1). Знайдемо, чи утворює с-ма ф-цій $\{1, \sin t, \sin 2t, \dots\}$ на відрізку $[-\pi, \pi]$ с-му ортонормованих ф-цій.

$$(1, \sin kt) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\sin kt\,dt = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{k}\cos kt\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi k}(\cos k\pi - \cos(-k\pi)) = 0$$

$$(\sin mt, \sin nt) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mt\cdot\sin nt\,dt =$$

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m+n)t - \cos(m-n)t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{m+n}\sin(m+n)t\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{m-n}\sin(m-n)t\Big|_{-\pi}^{\pi}\right\} = 0$$

!!! С-ма ф-цій ортогональна.

$$\|\sin mt\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mt\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2mt}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{ \frac{1}{2}t \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4m}\sin 2mt \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} = \frac{1}{2\pi}(\pi - 0) = \frac{1}{2} \neq 1$$

С-ма не є ортонормованою.

Висновки.

1) Якщо для неперервного сигналу $f(t)$ виконана вибірка із N значень, то цей сигнал можна представити у вигляді N-мірного вектора, який відповідає 1 точці N-мірного простору.

2) Величина ~~вектора~~ сигналу визнач. нормою вектора

Скалярний добуток векторів - це добуток проекції одного вектора на довжину другого.
Коеф. кореляції визначає кут між векторами, а також ступінь подібності. Якщо $r=0$, то вектори, що відображають сигнали, є взаємоперпендикулярні.

3) Множина взаємноперпендикулярних векторів норма яких рівна 1, наз. ортонормованим базисом. Будь-які вектори можна розкласти по базису, складові якого отримують із допомогою скалярного добутку.