

HUPC2023 Day2 農工大セット

E : ゴミ処理

原案 : olphe

スライド作成 : bin101

問題概要

- N 個のゴミ処理機と X 個のゴミがある
- i 番目のゴミ処理機に a 個のゴミを捨てると、
副産物として $v_i \oplus a$ 個のゴミが出てきてしまう
- ゴミの数は最小で何個にできるか

重要な性質①

すべての v_i が偶数のとき、
ゴミの数 X の偶奇は不変

● 証明

➤ a 個のゴミを捨てた場合、ゴミの変化量は、

$$-a + a \oplus v_i$$

➤ v_i は偶数なので、最下位bitは0

→ a と $a \oplus v_i$ の最下位bitは等しい

→ ゴミの変化量の最下位bitは0

重要な性質②

奇数の v_i が存在するとき、
ゴミの数 X を必ず0にできる

● 証明

➤ X に対して、以下の2つの操作が可能

① $+(v_i - 2)$: 1個のゴミを捨てると、 $v_i - 1$ 個のゴミが出てくる

② $-v_i$: v_i 個のゴミを捨てると、0個のゴミが出てくる

➤ v_i は奇数より、 v_i と $v_i - 2$ の最大公約数は1

→ $a(v_i - 2) + b(-v_i) = -1$ が成り立つ自然数 a, b が存在する

(一次不定方程式の性質より)

①の操作を a 回、②の操作を b 回行うことで、
ゴミの数を1個減らすことができる

考察

- 重要な性質①

すべての v_i が偶数のとき、
ゴミの数 X の偶奇は不変

- 重要な性質②

奇数の v_i が存在するとき、
ゴミの数 X を必ず0にできる

- 重要な性質①より、すべての v_i が偶数のときの答えは、

“ $\left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor$ と $\frac{v_i}{2} (1 \leq i \leq N)$ の答え” $\times 2$ + “ X の最下位bit”

これを奇数の v_i がでてくるまで再帰的に行うことを考えると、

$X \bmod 2^{k-1}$ (k は下から k bit目が1となる v_i が存在する、最小な自然数)が答え