

D-Beam Beam Beam

原案・解説 itigo

2023 年 5 月 4 日

以下 $C = A - B$ とします. C に対して操作を行った結果 0 行列にできる時 Yes, 不可能な時 No となります.

まず, 問題文中の 1, 2 つめの二つの操作だけで 0 行列にできる行列について考えます. 実はこの行列は次のような性質を満たすものと言えます.

$D_{i,j} = C_{i,j} - C_{i+1,j} - C_{i,j+1} + C_{i+1,j+1}$ としたとき, D が 0 行列となるもの. ただし $i+1 = N+1$ の時は $i+1 = 1, j+1 = N+1$ の時は $j+1 = 1$ とする

・ 必要性: 上記二つの操作により行列 D は不変量である. よって D が 0 行列でない時操作によって C を 0 行列にすることができない.

・ 十分性: D が 0 行列の時, $U_{i,j} = C_{i,j} - C_{i+1,j}$ は各行が等しい行列になる. よって各行に適切な x を足すことにより全て行を同じ数列にすることができ, 各列に適切な x を足すことで 0 行列にできる

よって本問題は行列 D をもう一つの操作によって 0 行列にできる時 Yes, 不可能な時 No と出力する問題に言い換えることができる. この 3 つ目の操作を D に対して行った時, 次のような操作となる.

・ 整数 $k(1 \leq i \leq N)$, 任意の整数 x を選び, $i - j \equiv k \pmod{N}$ であるような全ての $A_{i,j}$ を $A_{i,j} + 2x$ に更新し, $i - j + 1 \equiv k \pmod{N}$ または $i - j - 1 \equiv k \pmod{N}$ であるような全ての $A_{i,j}$ を $A_{i,j} - x$ に更新する.

ある整数 k に対して $i - j \equiv k \pmod{N}$ を満たす $A_{i,j}$ 同士は操作によって同じ値を足されることしかないので, 全て等しいことが必要条件となる.

今、整数 k に対して上記操作で選択した値を x_k とし、 $i - j \equiv k \pmod{N}$ を満たす $A_{i,j}$ の値を e_k とする.

この時次の連立方程式を満たす整数解 x_1, x_2, \dots, x_N が存在するとき D を 0 行列にすることが可能である.

$$e_1 = 2x_1 - x_2 - x_N, e_2 = 2x_2 - x_3 - x_1, \dots, e_N = 2x_N - x_1 - x_{N-1}$$

この連立方程式を吐き出し法によって求めることにより x_1, x_2, \dots, x_N が整数解を持つ時 Yes, 持たない時 No となる.