C – Eclipse 2　解説

原案：Nerve
解説：olphe

問題概要

ある恒星の周りで N 個の天体が公転している。

N 個の天体は X 日ごとに恒星を始点とするある半直線上に揃う。

i 番目の天体の公転周期は L_i 日以上 R_i 日以下の D_i であることが分かっている。

N 個の天体のありうる公転周期の組み合わせの個数を求めよ。

・$1 \leq N \leq 10^4$

・$1 \leq X \leq 10^{12}$

・$1 \leq L_i \leq R_i \leq X$

考察（D_i の性質）

- ① $LCM(D_1, D_2, \ldots, D_N) = X$ が成り立つ
  - D_i は全て X の約数としてよい
- ① が成り立つ条件
  - X を素因数分解　$X = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times \cdots \times p_K^{d_K}$
  - 各 $p_j^{d_j}$ は少なくとも1つの D_i の約数である

考察（ X の制約）

- X の約数の個数は多くとも1万個以下
  - 約数を列挙しておく
- $X \leq 10^{12}$ のとき、X の素因数の個数 K は最大 11 個
  - 2^K 通りの状態を持って、$p_j^{d_j}$ を因数に持つかどうか管理

$X = 12\ (= 2^2 \times 3^1)$ のとき

約数は$1, 2, 3, 4, 6, 12$

どちらも因数に持たない	片方だけ持つ		両方持つ
1, 2 2通り	4 1通り	3, 6 2通り	12 1通り
1×1	$2^2 \times 1$	1×3^1	$2^2 \times 3^1$

考察（状態の数え上げ）

- 列挙した約数のうち L_i 以上 R_i 以下の数を 2^K 通りの状態に振り分け
- i 番目の天体の状態 A と j 番目の天体の状態 B のLCMを取った C を計算
  - 式 $C_k = \sum_{(i|j = k)} A_i B_j$　「｜」はbitwise or
  - 上式はBitwise OR Convolutionによって $\Theta(K2^K)$ で計算可能
- N 個の天体の周期候補を上の計算でまとめる（$N - 1$ 回の畳み込み）

$N = 2,\ X = 12\ (= 2^2 \times 3^1)$ のとき

約数は$1, 2, 3, 4, 6, 12$

$L_1 = 1, R_1 = 12$
$L_2 = 1, R_2 = 12$ をまとめる

4通り	5通り	12通り	15通り
1×1	$2^2 \times 1$	1×3^1	$2^2 \times 3^1$

想定解法まとめ

① X を素因数分解して約数を列挙する

② 各天体について候補の約数を 2^K 通りの状態に振り分ける

・状態は $X = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times \cdots \times p_K^{d_K}$ の各因数を持つか持たないかを表す

③ 各天体について順に $N - 1$ 回だけOR Convolutionを計算

④ 得られた結果の $p_1^{d_1} \times \cdots \times p_K^{d_K}$ に対応する組み合わせの個数が答え

時間計算量：$O(NK2^K + \sqrt{X})$