

# A. Converse and Inverse

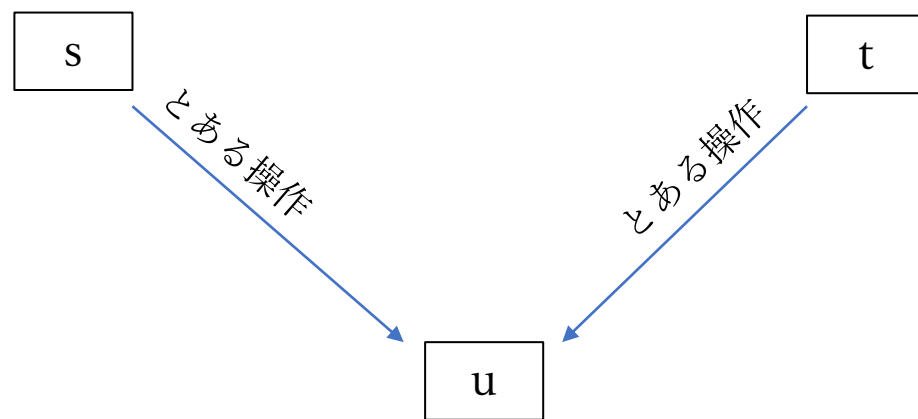
原案: misaizu, tardigrade、解説:misaizu

# 解法

- $s$ の取りうる状態をBFS等で全探索することで判定ができるが、間に合わないなので他の解法を考える

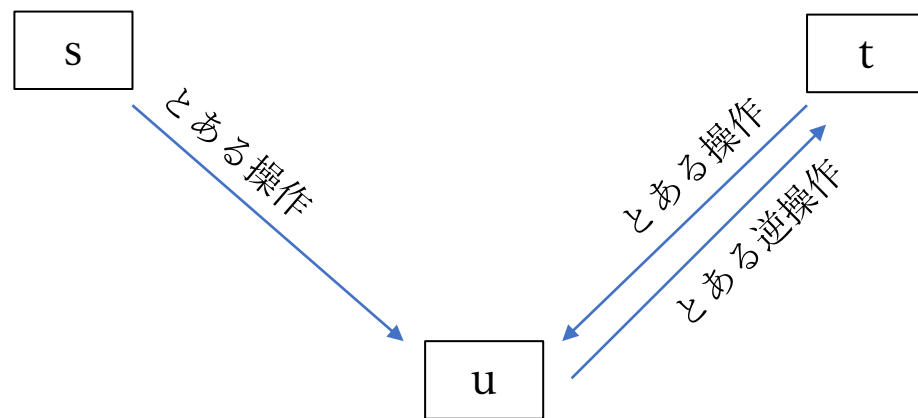
# 解法

- 直接 $s \rightarrow t$ は少し考えにくいので、 $s$ と $t$ を別の共通の形 $u$ にできるか考える



# 解法

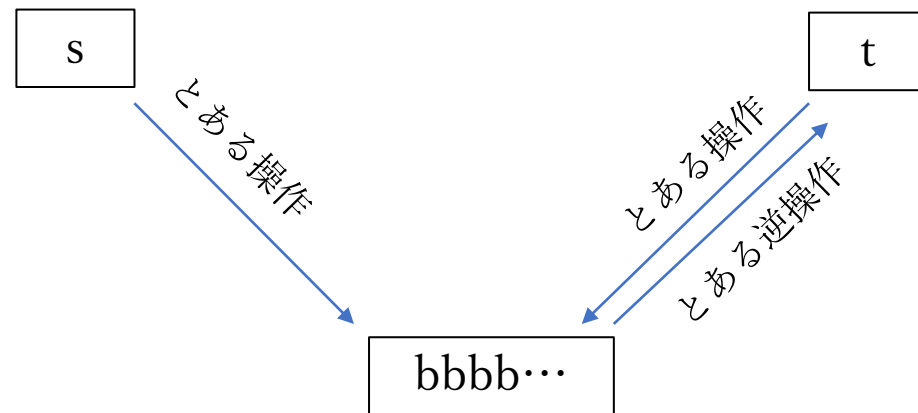
- 直接 $s \rightarrow t$ は少し考えにくいので、 $s$ と $t$ を別の共通の形 $u$ にできるか考える
- $s$ と $t$ を共通の $u$ にできれば、 $s$ を $u$ を経由して $t$ に一致させることができる



一旦 $s \rightarrow u$ にして、 $t \rightarrow u$ にする操作を逆順に行えば、 $s$ を $t$ に一致させることができる！

# 解法

- 最も単純な形として  $u = \text{'bbbb}\dots\text{'}$  を考える
- $s = \text{bpbqp}$  として、実験してみよう



# 解法

bpbqp

$\Downarrow [4, 5] \Uparrow$

bpbdb

$\Downarrow [3, 5] \Uparrow$

bppqp

$\Downarrow [2, 5] \Uparrow$

bbbdb

$\Downarrow [1, 3] \Leftrightarrow$

ddddb

$\Downarrow [1, 4] \Leftrightarrow$

bbbbbb

- 下向き (p, q) を上向き (b, d) にする

- d を b にする

- 2文字以上連続してるところはそのまま返せる

- 1文字のところでも、左右の2文字以上連続してるところを使って返せる

→ 必ず bbbbb... にできそう？

# $|s| \geq 4$ の時

(証明)

帰納法で証明

(i)  $|s| = 4$ の時

① 下向き  $(p, q)$  を全て上向き  $(b, d)$  にできるか

②  $d$  を全て  $b$  にできるか

↓

①  $b, d$  のみからなる文字列に変換できるか

②  $bdbddb \cdots \rightarrow bbbbbb \cdots$  にできるか

## $|s| \geq 4$ の時 (i)-①

下向き (p, q) を上向き (b, d) に変換できれば良いので、とりあえず p と q、b と d の区別は考えない

また、bpbb と bbpb のように位置が左右対称のものも、片方だけ考えればよい

pppp, bppp, bpbp, bbpb, bbbp  $\rightarrow$  bbbb を示せばよい

↓        ↓        ↓        ↓        ↓  
bbbb, bbbb, bbpb, pppb, pppp

↓        ↓        ↓  
pppb, bbbb, bbbb

↓  
bbbb



## $|s| \geq 4$ の時 (i)-②

先ほどと同様位置が左右対称のものと、全体を左右反転させると同じになるものは考えなくてよい

dddd, bddd, bdbd, bbdb, bbbd  $\rightarrow$  bbbbを示せばOK(詳細略)

↓       ↓       ↓       ↓       ↓  
bbbb, bbbb, bbdb, dddb, dddd

↓       ↓       ↓  
ddb, bbbb, bbbb

↓  
bbbb

$\therefore$  任意を  $s(|s| \geq 4)$  を bbbb... の形に変えることができる

## $|s| \geq 4$ の時 (ii)

$|s| = k$ の時任意の  $s$  を  $b b b b \dots$  に変換できると仮定すると

$|s| = k+1$ の時

$\underbrace{b d p q b d q p b \dots b q p}_{k+1}$

長さ  $k$  と長さ  $1$  の部分に分ける

$\underbrace{b d p q b d q p b \dots b q}_{k} \underbrace{p}_{1}$

## $|s| \geq 4$ の時 (ii)

仮定より、長さ $k$ の部分はbbbb…にできる

あとは長さ1の部分について、 $(b, d, p, q)$ の全パターンを試せばよい

bbbbbbbbbb      ...      bb p  
└──────────┘      └┘  
                 k                   1

## $|s| \geq 4$ の時 (ii)

(1) bの時 → 自明

(2) dの時

bbbbbbbbbb ... bb d



dddddddddd ... dd d



bbbbbbbbbb ... bb b

## $|s| \geq 4$ の時 (ii)

(3)  $p$ の時

bbbbbbbbbb ... bb p



pppppppppp ... pp p



bbbbbbbbbb ... bb b

$\therefore$  任意の  $s (|s| \geq 4)$  を  $bbbb \dots$  に変換できる

(4)  $q$ の時

bbbbbbbbbb ... bb q



pppppppppp ... pp q



qqqqqqqqqq ... qq q



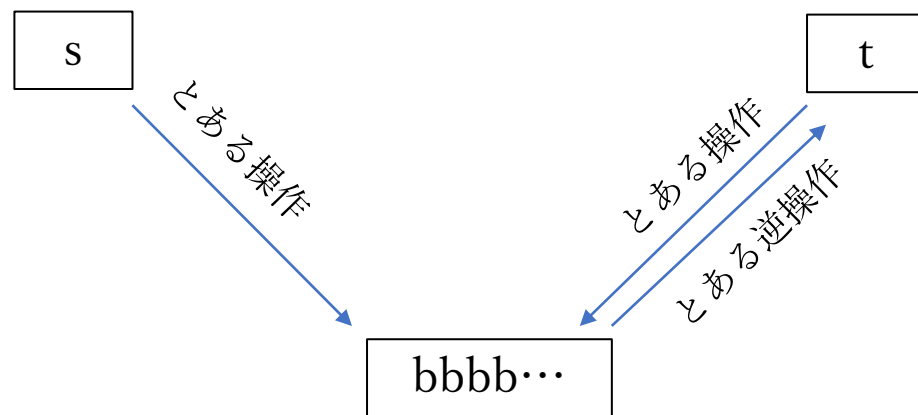
dddddddddd ... dd d



bbbbbbbbbb ... bb b

# $|s| \geq 4$ の時

よって、sを一度bbbb…に変換し、tをbbbb…に変換するような操作を逆順に行うことで、必ずsをtに一致させることができる



## $|s|=2, 3$ の時

- この場合、先ほどの法則は成り立たない( $s=bdb$ など)
- ただ、 $s$ の取りうる状態数が非常に少ない( $4^2=16$ と $4^3=64$ )  
→BFS等で全探索