

# C – Eclipse 2 解説

原案：Nerve

解説：olphe

# 問題概要

---

ある恒星の周りで  $N$  個の天体が公転している。

$N$  個の天体は  $X$  日ごとに恒星を始点とするある半直線上に揃う。

$i$  番目の天体の公転周期は  $L_i$  日以上  $R_i$  日以下の  $D_i$  であることが分かっている。

$N$  個の天体のありうる公転周期の組み合わせの個数を求めよ。

- $1 \leq N \leq 10^4$
- $1 \leq X \leq 10^{12}$
- $1 \leq L_i \leq R_i \leq X$

# 考察 ( $D_i$ の性質)

---

- ①  $LCM(D_1, D_2, \dots, D_N) = X$  が成り立つ
  - $D_i$  は全て  $X$  の約数としてよい
- ① が成り立つ条件
  - $X$  を素因数分解  $X = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times \dots \times p_K^{d_K}$
  - 各  $p_j^{d_j}$  は少なくとも1つの  $D_i$  の約数である

# 考察（ $X$ の制約）

- $X$  の約数の個数は多くとも1万個以下
  - 約数を列挙しておく
- $X \leq 10^{12}$  のとき、 $X$  の素因数の個数  $K$  は最大 11 個
  - $2^K$  通りの状態を持って、 $p_j^{d_j}$  を因数に持つかどうか管理

$X = 12 (= 2^2 \times 3^1)$  のとき

約数は1, 2, 3, 4, 6, 12

どちらも因数に持たない

片方だけ持つ

両方持つ

1, 2  
2通り

$1 \times 1$

4  
1通り

$2^2 \times 1$

3, 6  
2通り

$1 \times 3^1$

12  
1通り

$2^2 \times 3^1$

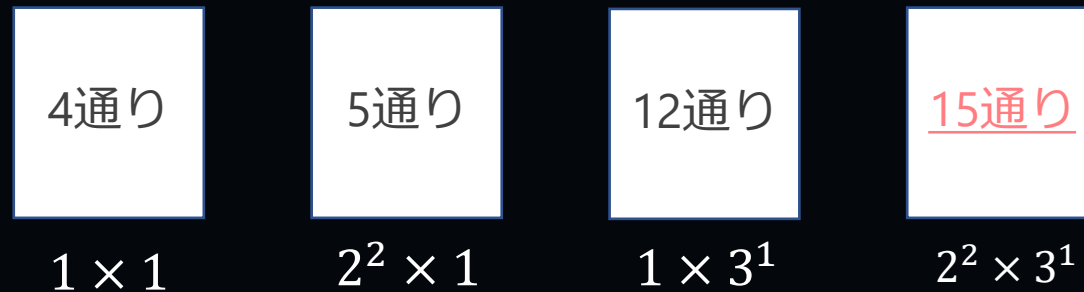
# 考察（状態の数え上げ）

- 列挙した約数のうち  $L_i$  以上  $R_i$  以下の数を  $2^K$  通りの状態に振り分け
- $i$  番目の天体の状態  $A$  と  $j$  番目の天体の状態  $B$  のLCMを取った  $C$  を計算
  - 式  $C_k = \sum_{(i|j = k)} A_i B_j$  「 $|$ 」はbitwise or
  - 上式はBitwise OR Convolutionによって  $\Theta(K2^K)$  で計算可能
- $N$  個の天体の周期候補を上での計算でまとめる（ $N - 1$  回の畳み込み）

$N = 2, X = 12 (= 2^2 \times 3^1)$  のとき

約数は1, 2, 3, 4, 6, 12

$L_1 = 1, R_1 = 12$   
 $L_2 = 1, R_2 = 12$  をまとめる



# 想定解法まとめ

---

- ①  $X$  を素因数分解して約数を列挙する
- ② 各天体について候補の約数を  $2^K$  通りの状態に振り分ける
  - ・ 状態は  $X = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times \dots \times p_K^{d_K}$  の各因数を持つか持たないかを表す
- ③ 各天体について順に  $N - 1$  回だけOR Convolutionを計算
- ④ 得られた結果の  $p_1^{d_1} \times \dots \times p_K^{d_K}$  に対応する組み合わせの個数が答え

時間計算量 :  $O(NK2^K + \sqrt{X})$