H - Counting Repdigits

Writer : N_hara
Tester : titan, tsutaj

2023/05/04

閉区間 $[1, N]$ に含まれるゾロ目数の個数を L とし、小さい方から $i(1 \leq i \leq L)$ 番目のゾロ目数を n_i とします。
このとき、$r(i, j) =$ 数字 i を j 桁並べた数と定義すると

$$n_i = r(((i-1) \bmod 9) + 1, \lceil i/9 \rceil)$$

であることが容易に示せます。これにより、L の値を求めることができます。これは例えば、 N の桁数を M、N の先頭の数字が d のとき $N \geq r(d, M)$ であれば $L = 9(M-1) + d$、$N < r(d, M)$ であれば $L = 9(M-1) + d - 1$ と求められます。

$L < k \leq 9M$ の場合、明らかに答えは 0 です。以下では、$1 \leq k \leq L$ の場合を考えます。便宜上、$n_0 = 0, n_{L+1} = N + 1$ とおきます。
区間 $[l, r]$ にちょうど k 個のゾロ目数が含まれるとき、区間 $[l, r]$ に含まれるゾロ目数は整数 $i(1 \leq i \leq L - k + 1)$ を用いて $n_i, \ldots, n_{i+k-1}$ と表されます。このとき

$$n_{i-1} < l \leq n_i, n_{i+k-1} \leq r < n_{i+k}$$

が成り立つことから、区間 $[l, r]$ にちょうど k 個のゾロ目数が含まれるような組 (l, r) の個数の合計は

$$\sum_{i=1}^{L-k+1} m_i m_{i+k}$$

となります。ここで、$m_i = n_i - n_{i-1} (1 \leq i \leq L + 1)$ としました。これは畳み込みを用いて十分高速に計算することができます。
N の桁数 M に対して、全体の計算量は $O(M \log M)$ です。