M2 – Ingénierie Economique et Financière

PROJET D'ECONOMETRIE

AMATO Virgile - Maïssane LAKEHAL-AYAT

Introduction

Nous allons, dans l'Exercice 1 de ce projet, étudier le modèle MS-AR associé au Chicago Board Option Exchange Volatility Index, plus simplement appelé VIX, hebdomadaire, sur la période allant d'Octobre 1997 à Octobre 2017.
Le VIX est construit avec la volatilité implicite de l'indice S&P 500 sur les options et mesure ainsi une estimation de la volatilité sur les 30 jours qui suivent. Le VIX mesure donc le taux d'incertitude sur les marchés financiers et est souvent interprété comme le niveau de risque global des marchés financiers.

Pour ce faire, nous procèderons de la manière suivante :

- Estimation du retard p* optimal pour la/les variables explicatives, à l'aide du critère d'Akaike (AIC)
- Estimation du modèle AR(p*) associé à la série du VIX
- Estimation du modèle MS-AR(p*, p*) associé à la série du VIX
- Test de diagnostics
- Test du modèle non-linéaire MSAR contre le modèle linéaire AR.

Dans l'Exercice 2, nous étudierons le modèle MS-AR(4,4) bien connu de Hamilton sur le PIB américain.

Enfin, dans l'Exercice 3, nous simulerons un processus MS-AR(1,1) à probabilités de transition variables, que nous estimerons par la suite, afin de vérifier que les coefficients estimés sont proches des coefficients paramétrés pour la simulation, dans le but de vérifier que notre méthode d'estimation est bonne.

EXERCICE 1 : Modélisation d'une série temporelle à l'aide d'un modèle MS-AR.

Question 1 : Après avoir sélectionné une série stationnaire, estimez par maximum de vraisemblance le processus AR(p) linéaire associé à cette série.

Afin d'estimer le modèle AR(p) sur le VIX, nous procéderons de la manière suivante :

- Estimation du retard p* optimal du modèle AR(p)
- Estimation par maximum de vraisemblance des coefficients du modèle AR(p*)
- Test de significativité des coefficients
- Test de diagnostics sur les résidus (absence d'autocorrélation, absence d'effets ARCH, normalité)

1) Estimation du retard p optimal

Afin d'estimer le retard p optimal, on choisit de faire varier p entre 1 et 5, et de choisir le retard qui minimise le critère d'information d'Akaike.
Voici un tableau récapitulatif de nos résultats :

AIC du modèle AR(p) en fonction de p	
p	**AIC**
1	*5312,70*
2	*5288,14*
3	*5289,93*
4	*5291,17*
5	5293,09

Le retard p optimal est donc de 2.
P* = 2, et notre modèle est de la forme :

$$Y_t \sim AR(2)$$
$$Y_t = c + \emptyset_1 \times Y_{t-1} + \emptyset_2 \times Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Le niveau du retard optimal semble assez logique.
En effet, d'après la construction du VIX, qui représente l'anticipation de la volatilité (volatilité implicite), il semble normal que les périodes précédentes influencent en partie l'anticipation futur.
On constate néanmoins qu'au-delà de deux périodes, le niveau du VIX précèdent n'influe plus significativement sur le niveau du VIX actuel.
Selon ce modèle, le VIX est donc la volatilité anticipé (volatilité implicite) estimé à partir du niveau de la volatilité implicite des 2 derniers mois.

2) **<u>Estimation des coefficients du modèle par maximum de vraisemblance</u>**

Nous estimons donc un AR(2) par la méthode du maximum de vraisemblance.
Pour cela, nous procéderons de la manière suivante :

- Détermination de la fonction de vraisemblance/log-vraisemblance
- Maximisation de la fonction de log-vraisemblance à l'aide d'un algorithme d'optimisation numérique de type Newton-Raphson, permettant de trouver les points critiques d'une fonction de plusieurs variables : on obtient grâce à cela les coefficients optimaux estimés du modèle

a) **<u>Détermination de la fonction de vraisemblance</u>**

On sait que :

$$\varepsilon_t = Y_t - c - \emptyset_1 \times Y_{t-1} - \emptyset_2 \times Y_{t-2}$$

Or, par hypothèse :

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

La fonction de densité est donc de la forme :

$$f(\varepsilon_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times e^{-\frac{1}{2} \times \left(\frac{Y_t - c - \emptyset_1 \times Y_{t-1} - \emptyset_2 \times Y_{t-2}}{\sigma}\right)^2}$$

D'où nous pouvons déduire la vraisemblance, qui est le produit des fonctions de densité pour chaque t :

$$\mathcal{L} = \prod f(\varepsilon_t) = \prod [\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times e^{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{Y_t - c - \emptyset_1 \times Y_{t-1} - \emptyset_2 \times Y_{t-2}}{\sigma}\right)^2}]$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \prod e^{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{Y_t - c - \emptyset_1 \times Y_{t-1} - \emptyset_2 \times Y_{t-2}}{\sigma}\right)^2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times e^{-\frac{1}{2}\times\Sigma\left(\frac{Y_t - c - \emptyset_1 \times Y_{t-1} - \emptyset_2 \times Y_{t-2}}{\sigma}\right)^2}$$

Ainsi que la log-vraisemblance :

$$\ln(\mathcal{L}) = \ln(\prod f(Y_t)) = \sum \ln(f(Y_t))$$
$$= -n\ln(\sigma) - n\frac{\ln(2\pi)}{2} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(Y_t - c - \emptyset_1 \times Y_{t-1} - \emptyset_2 \times Y_{t-2})$$

Qui est la fonction à maximiser afin de trouver les coefficients estimés du modèle.

b) Estimation des coefficients du modèle

Voici les résultats récapitulatifs de l'estimation du modèle, obtenue en maximisant la fonction $\ln(\mathcal{L})$ à l'aide d'un algorithme d'optimisation numérique :

AR(2)				
	Coefficient estimé	Ecart-Type	T-stat	P-critique
c	1,152	0,246	4,684	0,00016%
X(-1)	0,784	0,031	25,440	0,00000%
X(-2)	0,160	0,031	5,175	0,00001%
Log-Vraissemblance	2641,1			
SCR	9665,8			
AIC	5228,1			
Variance Résiduelle	9,3119			

On observe que le modèle AR(2) associé au VIX présente une constante assez forte, qui peut représenter un niveau de volatilité implicite « constant », « de base », sans prise en compte des niveaux précédents, et donc de l'état actuel des anticipations de marchés.
La valeur des deux coefficients nous laisse à penser que, assez logiquement, l'influence des valeurs du VIX précédentes, à un temps donné, est décroissante à mesure que l'on s'en éloigne.
C'est-à-dire, le coefficient associé à X(-1) est plus grand de 0,6 points que le coefficient associé à X(-2) : l'influence des niveaux du VIX à 1 mois est plus forte que l'influence des niveaux du VIX à 2 mois.

3) Test de significativité des coefficients du modèle

On peut voir que les 3 coefficients du modèle ont une statistique du test supérieure à $T^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-k-1\right) = T^{-1}\left(1-\frac{5\%}{2}, 1043-2-1\right) = 1{,}6463$.

Les 3 coefficients du modèle sont donc significativement différents de 0.

4) Test sur les résidus

Voici un tableau récapitulatif de nos résultats :

Test de Diagnostics du modèle AR(2)		
Test…	**P Critique**	**Conclusion**
… D'autocorrélation Résiduelle	*5,83%*	Non rejet de H0
… D'effets ARCH sur les Résidus	*0,00%*	Rejet de H0
… de Normalité des Résidus	*0,10%*	Rejet de H0
… de Signficativité des coefficients	*[0,00016% / 0% / 0,000013%]*	Rejet de H0

Ainsi, les coefficients de notre modèle sont significatifs et les résidus de notre modèle sont :

- Non autocorrélés
- Hétéroscédastiques
- Non normaux

Le principal problème que nous voulions éviter était l'autocorrélations des erreurs, qui ne donne plus une variance minimum pour les estimateurs de notre modèle.
L'hétéroscédasticité et la non normalité des erreurs ne modifiant pas ni le biais ni la variance de nos estimateurs, nous pouvons conclure que le modèle est malgré tout bien spécifié.

<u>Question 2 :</u> Estimez le modèle MS-AR correspondant (même p optimal), à deux états, où la variable de changement de régime suit une chaine de Markov d'ordre 1.

Nous allons maintenant estimer le modèle MS-AR correspondant à la série.

Nous allons estimer un modèle MS-AR :
- à deux régimes
- où la variable de changement de régime, St, suit une chaine de Markov d'ordre 1.

Nous allons donc devoir estimer les probabilités optimales, en plus des coefficients du modèles : p* + 2 (constante) + 2 (variances résiduelles) + 2 (probabilités optimales) = p* + 6 paramètres à estimer.

Le modèle est donc de la forme :

$$Yt = c_{S_t} + \emptyset_1 \times Y_{t-1} + \emptyset_2 \times Y_{t-2} + \sigma_{S_t} \times \varepsilon_t$$

Où $S_t \sim CM(1)$
Et où la matrice des probabilités de transition est la suivante :

$\begin{pmatrix} p11 & 1-p22 \\ 1-p11 & p22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$

Pour estimer le modèle MS-AR, nous procèderons de la manière suivante :
- Détermination de la fonction de vraisemblance et de l'algorithme de calcul (itératif) des probabilités filtrées du modèle : c'est l'Algorithme de Filtrage.
  On détermine ainsi définir une fonction qui calcule de manière itérative les probabilités filtrées et la vraisemblance du modèle : vraisemblance.m

- Initialisation d'un vecteur de paramètres initiaux, qui sera le point de départ de l'algorithme d'optimisation numérique de type Newton-Raphson (le même que celui du modèle AR avec en plus le calcul des probabilités filtrées) que nous allons utiliser pour l'estimation
- On optimise ensuite cette fonction pour en trouver le maximum : c'est le maximum de vraisemblance, et on obtient ainsi les coefficients estimés du modèle, ainsi que les probabilités optimales de la matrice de transition et les probabilités filtrées (P[St=i | I(t)])
  On utilise pour cela la fonction maxVraissemblance.m
- Enfin, on optimise ensuite, à l'aide d'un algorithme itératif de lissage, qui calcule les probabilités lissées en itérant de la fin au début de la série des probabilités filtrées : c'est l'Algorithme de Lissage.
  On utilise pour cela issage.m, obtenant ainsi les probabilités lissées du modèle (P[St=i | I(T)])

1) Détermination de la fonction de vraisemblance :

La fonction de vraisemblance est le produit de la somme pondérée par leurs probabilités filtrées des vraisemblances, pour chaque t, des deux états, pondérés par leurs probabilités filtrées :

$$\mathcal{L} = \prod f(\varepsilon_t) = \prod [\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \times e^{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{Y_t - c_{St} - \emptyset_1 \times Y_{t-1} - \emptyset_2 \times Y_{t-2}}{\sigma_i}\right)^2} \times P[S_t = i \,|I(t)]\,]$$

2) Initialisation d'un vecteur de paramètres initiaux :

Nous utiliserons les coefficients estimés du modèle AR, ainsi que les probabilités de transition que nous avons posées.

3) Optimisation de la fonction de vraissemblance et calcul des probabilités filtrées

Nous maximisons la fonction de vraisemblance à l'aide d'un algorithme d'optimisation numérique, et calculons, en parallèle, les probabilités filtrées (elles sont de toute manière nécessaire au calcul de la vraisemblance), de manière itérative.

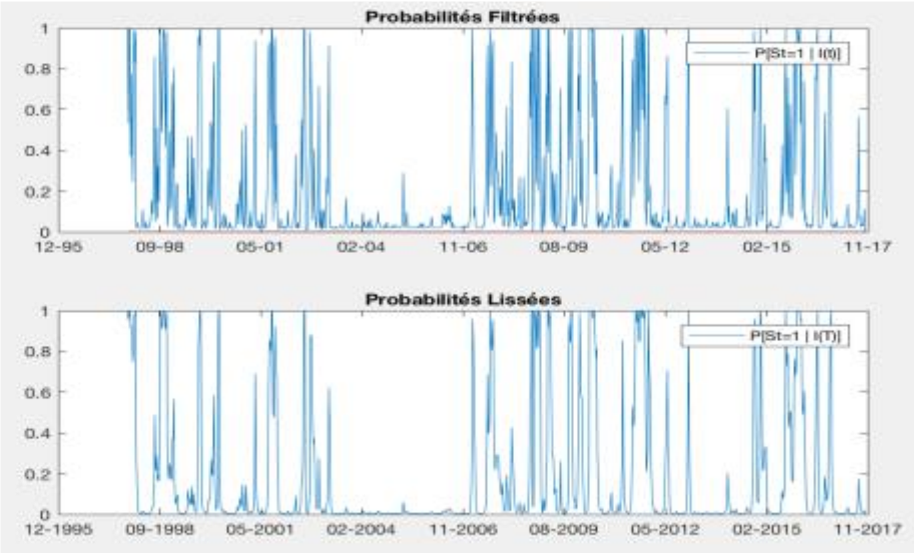
Voici un tableau récapitulatif de nos résultats :

MS-AR(2,2)				
	Paramètres de départ	Coefficients estimés	T-stat	P-critique
C régime 1	1,195	1,665	3,029	0,1257%
C régime 2	1,150	1,105	4,389	0,0006%
X(-1)	0,788	0,750	22,664	0,0000%
X(-2)	0,175	0,190	5,777	0,0000%
Variance Résiduelle Régime 1	3,056	22,045	8,948	0,0000%
Variance Résiduelle Régime 2	3,052	2,515	8,882	0,0000%
P11 Optimale	0,8898			
P22 Optimale	0,9421			
Log vraissemblance	2641,068			
Durée Moyenne Régime 1	9,0078			
Durée Moyenne Régime 2	17,381			
Y Moyen Régime 1	20,7036			
Y Moyen Régime 2	20,297			

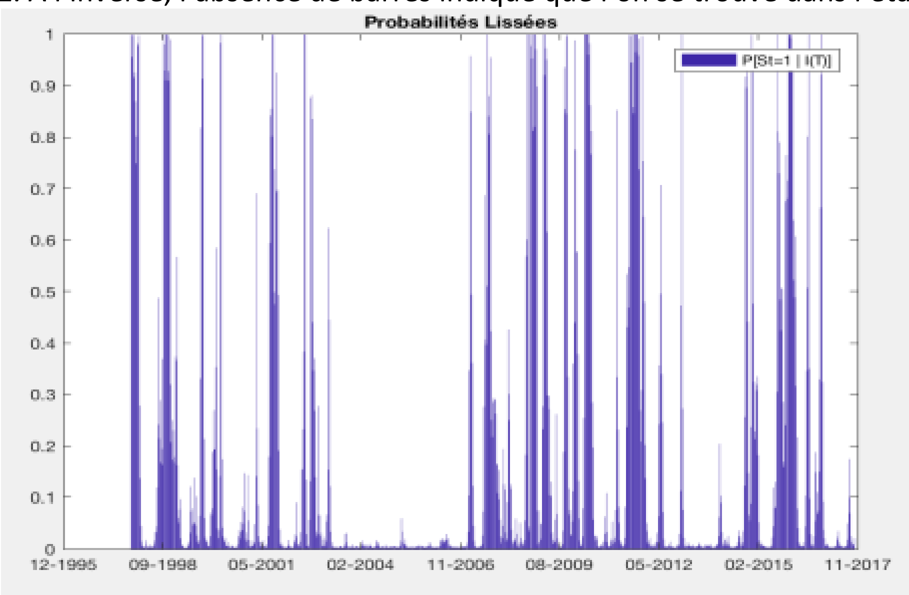
On trouve deux états qui sont caractérisés par une constante du régime 1 plus forte de 0,56 points environ que celle du régime 2, et un écart type résiduel largement plus élevé (20 points !). On pourrait penser que le régime 1 est ici l'état « de crise », ou d'inquiètudes sur les marchés financiers, caractérisé par un niveau plus fort de volatilité implicite (constante plus élevé), et aussi une volatilité plus élevée de cet indicateur, prêt à exploser à n'importe quel moment, caractérisé par une variance résiduelle extrèmement élevé dans notre modèle.

Leurs durées moyennes reflètent plutôt bien cette hypothèse : le régime 1 présente une durée moyenne moins élevé, et les périodes de crises sont généralement (et heureusement) plus rares que les périodes « normales » dans une économie.
En revanche, les deux régimes présentent étrangement des moyennes, quoique légèrement plus élevée dans le régime 1 (40 points mais en réalité seulement 2% en relatif), très proches : 20,7036 pour le régime 1 contre 20,297 pour le régime 2.

Aussi, voici les représentations graphiques des probabilités filtrées et lissées, sous forme de courbes :



Ainsi que les probabilités lissées, sous formes de barres, pour mieux observer les dates des régimes estimés, les barres symbolisant les périodes où l'on se trouve, d'après le modèle dans l'état 1. A l'inverse, l'absence de barres indique que l'on se trouve dans l'état 2 :



Ces nous permettent de voir quelle période correspond à chaque état.
Nous observons plutôt bien les périodes où l'on se trouve dans l'état 1 :

- 1998-1999 : Début de la bulle technologique des années 2000
- 2001-2002 : Eclatement de la bulle technologique et bulle immobilière américaine

- 2007-2010 : Crises des sub-primes américaine et crise de la dette européenne

Cela semble corroborer nos hypothèses de départ, en effet, comme nous l'avons dit, l'état 1 avec une constante plus forte et des résidus très volatils, renvoi à des anticipations de crises sur les marchés financiers (car anticipation d'augmentation de la volatilité).
On peut même remarquer que le VIX à tendance à entrer dans le régime 1 (signifiant anticipation de crises), quelques périodes seulement avant des grandes crises économiques :

- Le VIX commence à passer dans le Régime 1 en 1998, quelques années avant l'éclatement des bulles technologiques et immobilières américaine
- Il commence à passer dans le Régime 1 en 2007, soit une année avant une des plus grandes crises financières mondiales qu'est la crise des sub-primes américaines suivi de la crises de la dette européenne.

Ainsi les probabilités lissées du régime 1 semble plutôt bien suivre les crises financières, et renforcent notre hypothèse que le régime 1 correspond aux régimes des crises économiques et financières.

<u>Question 3 :</u> Vérifiez à l'aide de tests de diagnostics l'absence d'autocorrélation dans les résidus généralisés du modèle.

Afin d'effectuer les tests usuels sur les résidus du modèle, nous devons calculer les résidus généralisés de celui-ci.
En effet, puisque les résidus sont différents dans les deux régimes, et que la variable de changement de régime est inobservée, nous ne savons pas dans quel régime nous sommes à chaque instant, et ne pouvons ainsi pas calculer les résidus de la manière habituel.

Pour remédier à cela, nous calculons les résidus généralisés.
Ceux-ci sont obtenus en calculant, comme deux modèles séparés et « classiques », les résidus de chaque régime : $\varepsilon_t = Y_t - c - \emptyset_1 \times Y_{t-1} - \emptyset_2 \times Y_{t-2}$

Puis, on additionne les résidus des deux régimes, en les pondérant par leurs probabilités filtrées à chaque instant, et en les divisant par leurs écart types résiduels respectifs, selon la formule suivante :

$$\varepsilon_t^{GEN} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\varepsilon_{i\,|\,St=i}}{\sigma_i} \times P[S_t = i\,|I(t)]$$

Voici un tableau d'exemple pour quelques résidus :

Résidus généralisés MS-AR(2,2)				
t	Résidu régime 1	Résidu régime 2	Proba Filtrée	Résidu Généralisé
20	0,052	0,683	0,028	0,652
100	-0,243	-1,890	0,271	-0,308
300	-0,009	0,151	0,026	0,145
500	-0,118	-0,800	0,204	-0,429
700	-0,041	-0,131	0,095	-0,129
900	-0,025	0,015	0,031	0,014
1040	-0,007	0,167	1,000	0,078
Ecart Type Résiduel Régime 1	21,998			
Ecart Type Résiduel Régime 2	2,522			

Après avoir calculés ces résidus généralisés, on peut librement effectuer les tests usuels sur les résidus, de la même manière que sur les résidus habituels.

Voici un tableau récapitulatif des tests de diagnostics de notre modèle :

Test sur les résidus généralisés modèle MS-AR(2,2)		
Test...	P Critique	Conclusion
... D'autocorrélation	84,79%	Non rejet de H0
... D'effets ARCH	8,50%	Non rejet de H0
... de Normalité	0,24%	Rejet de H0
... de Signficativité des coefficients	[0,13% / 0% / 0% / 0% / 0% / 0%]	Rejet de H0

Ainsi, les coefficients de notre modèle MSAR sont significatifs et les résidus de notre modèle sont :

- Non autocorrélés
- Homoscédastiques
- Non normaux

Le principal problème que nous voulions éviter était l'autocorrélations des erreurs, qui ne donne plus une variance minimum pour les estimateurs de notre modèle, ainsi que la non-significativité des coefficients.
La non normalité des erreurs ne modifiant pas ni le biais ni la variance de nos estimateurs, nous pouvons conclure que le modèle est malgré tout bien spécifié.

<u>Question 4 :</u> Comparez les critères d'informations D'Akaike et de Schwartz du modèle linéaire AR et du modèle non-linéaire MS-AR.

Afin de comparer la pertinence et la qualité des deux modèles linéaire (AR) et non-linéaire (MS-AR) estimé, nous allons comparer leurs critères d'information d'Akaike (AIC) et de Schwartz (SIC).

Voici un tableau présentant nos résultats :

AIC/SIC des 2 modèles		
	Modèle AR	Modèle MS-AR
k	3,00	6,00
n	1040,00	1040,00
Log-Vraissemblance	2641,10	2458,04
AIC	5,07	4,73
SIC	5,05	4,76

Les coefficients d'Akaike permettent de mesurer la qualité d'un modèle économétrique, en tenant compte du fait que la vraisemblance et le R2 d'un modèle augmentent mécaniquement avec l'ajout d'un nouveau paramètre. Ainsi, le critère favorise une vraisemblance plus élevée, mais pénalise l'ajout de nouveau paramètres, pour offrir un critère comparable quel que soit les modèles.
Plus le coefficient (AIC ou SIC) est faible, et plus le modèle est pertinent.

On peut observer le modèle MS-AR semble être le plus pertinent, puisqu'il dispose de critères AIC et SIC nettement plus faible que le modèle AR linéaire.

Cela confirmerait que le VIX n'est pas linéaire et que l'on peut bien identifier des périodes où ses variations se définissent différemment.

Question 5 : Testez le modèle MS-AR non-linéaire contre le modèle AR linéaire

Nous allons maintenant tester le modèle MS-AR contre le modèle AR linéaire, afin de vérifier que nous utilisons un modèle MS-AR non linéaire à bon escient, et que ce dernier apporte plus d'informations, et est donc plus pertinent, que le modèle AR linéaire.

Pour cela, nous allons procéder de la manière suivante :

- Estimation de deux modèles : AR(1) et MS-AR(1,1), et récupération de leurs log-vraisemblances.
- Génération de 10 vecteurs aléatoires normalement distribués, puis estimation des modèles AR(1) et MS-AR(1,1) correspondant. Enfin, calcul des statistiques du test pour ces distributions.
- On peut, grâce à ces observations, établir une probabilité critique : pourcentage des 10 statistiques du test simulées supérieures à la statistique du test observée.

On commence par estimer :

- Un modèle AR(1) sur notre série temporelle.
- Un modèle MS-AR(1,1) sur notre série temporelle.

Voici deux tableaux récapitulatifs de ces estimations :

AR(1)				
	Coefficient estimé	Ecart-Type	T-stat	P-critique
c	1,363	0,24519	5,558	0%
X(-1)	0,934	0,01108	84,285	0%
Log-Vraissemblance	2654,348573			
SCR	9915,095375			
AIC	5,094432263			
Variance Résiduelle	9,533745553			

MS-AR(1,1)				
	Paramètres de départ	Coefficients estimés	T-stat	P-critique
C régime 1	1,350	-2,202	-5,572559292	0%
C régime 2	1,358	2,577	9,362911139	0%
X(-1) régime 1	0,932	1,198	58,46670038	0%
X(-1) régime 2	0,924	0,831	65,6397932	0%
Variance Résiduelle Régime 1	3,090	4,742	8,901799757	0%
Variance Résiduelle Régime 2	3,093	6,508	14,33314252	0%
P11 Optimale	0.1632			
P22 Optimale	0.5245			
Log vraissemblance	2539,168185			

On peut ensuite, à l'aide de ces estimations, calculer la statistique du test :

LM = $2 * (\mathcal{L}_{MSAR} - \mathcal{L}_{AR})$ = -230,360776

Enfin, nous générons 10 vecteurs aléatoires, normalement distribués et de même taille que notre série temporelle.
Nous estimons les 10 modèles AR(1) et MS-AR(1,1) pour chacune des séries temporelles, et prenons soin de calculer les 10 statistiques du test associées.
Enfin, nous pouvons calculer une probabilité critique, comme étant le pourcentage de statistiques du test des séries simulées supérieures à la statistique du test calculée sur notre série temporelle.

Voici un tableau récapitulatif des résultats du test :

Test MSAR Vs AR	
	Log Vraissemblance
Modèle AR	*2654,35*
Modèle AR	*2539,17*
Stat Du Test	-230,36
Valeur Critique	-8,97
P-Critique	100,00%

Après estimation de la probabilité critique, nous trouvons une p-value de : 1

On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse nulle de linéarité du modèle.
Le modèle non linéaire MS-AR(2,2) n'est pas plus pertinent, dans le sens où il n'apporte pas plus d'informations, que le modèle AR(2) linéaire.

EXERCICE 2 : Datation des récessions américaines avec un processus MS-AR.

Question 1 : Sur la série du PNB américain étudiée par Hamilton, estimez le processus AR(4) avec saut de la constante exclusivement.

Nous étudions, à la manière de Hamilton, un modèle AR(4) de la forme :

$$Y_t \sim MS - AR(4,4)$$

$$Y_t = c_{S_t} + \emptyset_1 \times Y_{t-1} + \emptyset_2 \times Y_{t-2} + \emptyset_3 \times Y_{t-3} + \emptyset_4 \times Y_{t-4} + \sigma \times \varepsilon_t$$

→ Seule la constante c dépend de la chaine de Markov St.

Aussi, St, la variable de changement de régime, est une chaine de Markov d'ordre 1.

La procédure d'estimation est la même que pour le modèle MS-AR(2,2) sur le VIX (Exercice 1, Question 2) : Seule la fonction de vraisemblance change, on change le x de la fonction de densité.

Voici un tableau récapitulatif de notre estimation :

MS-AR(4,4) - Hamilton				
	Paramètres de départ	Coefficients estimés	T-stat	P-critique
C régime 1	*1,141*	*0,483*	*5,950*	0,000
C régime 2	*-0,351*	*-0,194*	*-1,663*	0,049
X(-1) régime 1	*-0,003*	*0,112*	*1,163*	0,124
X(-1) régime 2	*0,006*	*0,065*	*0,794*	0,214
X(-1) régime 3	*-0,011*	*-0,126*	*-1,572*	0,059
X(-1) régime 4	*0,007*	*-0,136*	*-1,668*	0,049
Variance Résiduelle	*0,746*	*0,117*	*6,259*	0,000
P11 Optimale	0.9125			
P22 Optimale	0.6682			
Log vraissemblance	*70,92611019*			

Au vu des coefficients, on peut constater les choses suivantes :

- Le régime 1 semble correspondre aux périodes de croissance de l'économie (constante positive) tandis que le régime correspond aux états de récession (constante négative).
- Les niveaux passés du PIB ont une légère influence sur son niveau actuel (entre -0,16 et 0,11)
- La variance résiduelle et son effet sur le niveau actuel du VIX est également léger (0,117)
- Autre détail : la variable décalée de une période et de deux périodes influence positivement le niveau actuel du PIB, tandis que le niveau décalé de 3 et 4 périodes influencent négativement le niveau actuel d PIB.

<u>Question 2 :</u> Décrire les caractéristiques des deux régimes obtenus (Taux de croissance moyen, durée moyenne…).

Voici un tableau récapitulatif des caractéristiques des deux régimes :

Caractéristique régime 1 et 2		
	Régime 1	Régime 2
Durée Moyenne	11,434	3,014
Taux de croissance moyen	0.45568	-0.22197
Variance	0.011933	0.011933
Max	0.81625	0.1386"
Min	0.24908	-0.42858

On peut observer :

- Une durée moyenne beaucoup plus élevé dans le régime 1, qui serait donc vraisemblablement, le régime « de base », ce qui semble logique puisque l'on a dit à la question 1 qu'il correspondait aux périodes de croissance de l'économie.
- Que le taux de croissance moyen est positif dans le régime 2, et négatif dans le régime 1 : corrobore notre hypothèse que le régime 1 correspond aux période « normales » de l'économie, tandis que le régime 2 correspond aux périodes de récession.

Les caractéristiques des deux régimes semblent ainsi aller dans le sens des hypothèses faites en analysant les coefficients estimés du modèle :

- Le régime 1 correspondrait à une économie dans un état de croissance, ou tout du moins dans un climat économique « normal » : taux de croissance moyen du régime 1 positif et assez important (0,45), Durée moyenne presque 4 fois plus importante (régime de base = régime plus long en général), valeur maximum et minimum respectivement plus forte et plus faible que le régime 2.
- A l'inverse, le régime 2 correspondrait aux états de récessions dans l'économie : durée moyenne faibles (les crises sont en générales des événements temporaires, de courte durée), taux de croissance moyen négatif (-0,22), et valeur maximum faible (0,14) pour une valeur minimum très inférieure à 0 (-0,43)

<u>Question 3 :</u> Comparez graphiquement les dates de récession obtenues après estimation aux dates fournies par le NBER.

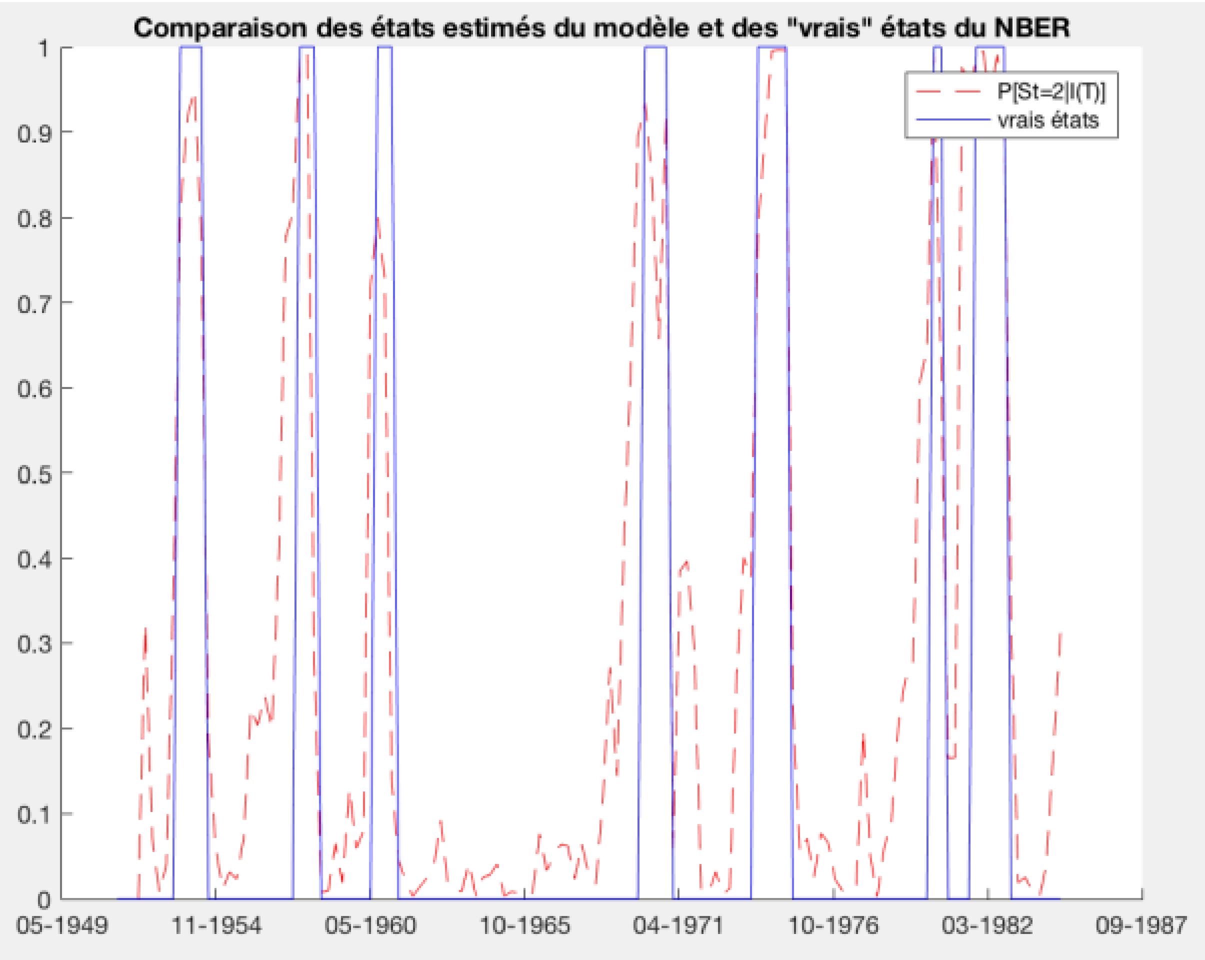
Nous allons maintenant comparer graphiquement les dates de récessions fournies par le NBER (« vrais » états) aux états estimés.

Les états estimés ne sont rien d'autres que les probabilités lissées.
En effet, à l'issue de notre alogrithme de lissage, on obtient un vecteur PL, composée des n probabilités : P[St=1 | I(T)], qui est donc très proche de 1 quand on est dans l'état 1, et très

proche de 0 quand on est dans l'état 2, à la manière d'une variable binaire qui vaudrait 1 dans l'état 1, et 0 dans l'état 2.
Le NBER nous fournit quant à lui un vecteur qui vaut 1 dans l'état 1, et qui vaut 0 dans l'état 2.
Les deux vecteurs sont donc comparables,

→ Nous allons donc comparer graphiquement le vecteur du NBER au vecteur PL

Voici ce graphique montrant les « vraies » dates de récessions aux Etats-Unis, publiées par le NBER, ainsi que les dates estimées issues de notre estimation du modèle MS-AR :



On peut observer que les probabilités lissées estimées du modèle suivent presque parfaitement les « vrais » états données par le NBER.
Ainsi les probabilités lissées du modèle semblent être un indicateur plutôt fiable des « vrais » états du modèle.

<u>Question 4 :</u> Vérifiez que les résidus du modèle satisfont les propriétés usuelles (absence d'autocorrélation, absence d'effets ARCH et normalité).

Les résidus généralisés sont calculés de la même manière que dans l'Exercice, Question 4.
La seule différence est qu'ici la variance résiduelle n'est pas variable en fonction du régime, les résidus de chaque régime sont donc divisés par le même écart type.

Voici un tableau récapitulatif des tests de diagnostics effectués sur les résidus généralisés du modèle :

Test sur les résidus généralisés modèle MS-AR(1,1) d'Hamilton		
Test…	P Critique	Conclusion
… D'autocorrélation	1,80%	Rejet de H0
… D'effets ARCH	18,94%	Non rejet de H0
… de Normalité	4,25%	Rejet de H0
… de Signficativité des coefficients	[0% / 5% / 12% / 21% / 6% / 5%/ 0%]	Rejet de H0

Ainsi, les coefficients de notre modèle MSAR ne sont pas significatifs et les résidus de notre modèle sont :

- Autocorrélés
- Homoscédastiques
- Non normaux

Les coefficients ne sont pas significatifs, et les résidus sont autocorrélés et non normaux : le modèle est donc mal spécifié.
En revanche, les probabilités lissées semblaient bien suivre les « vrais » états, et les deux régimes semblaient bien correspondre à un régime de récession VS un régime de croissance.

C'est sans doute la raison pour laquelle Hamilton a quand même étudié cette série pour définir son modèle MS-AR, mais a modifié le modèle, afin, d'obtenir des coefficients significatifs et des résidus non-autocorrélés, en centrant les coefficients du modèle par la constante du modèle, décalée dans le temps.

EXERCICE 3 : Simulation et estimation d'un MS-AR à probabilités de transition variables.

Question 1 : Générez 500 observations d'une variable Z(t), suivant un AR(1)

Nous allons, dans cette question, générer un processus AR(1), quasi-aléatoirement, de la forme suivante :

$$Y_t = c + \emptyset_1 \times Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec, d'après l'énoncé, $\emptyset_1 = 0{,}5$.

On pose Z(1) = 1, On génère un vecteur R de 500 observations normales centrées réduites (le résidu), et on génère le vecteur Z en faisant en boucle de 2 jusqu'à 500 sur :
Z(i) = 0,5 * Z(i-1) + R.

Voici un aperçu de la construction de notre vecteur Z :

Résidus généralisés MS-AR(2,2)			
t	0,5*Z(t-1)	Résidu	Z(t)
20	-0,411	-0,648	-1,059
100	-0,156	1,430	1,274
200	0,498	0,665	1,163
300	-1,033	0,873	-0,160
400	0,656	-0,231	0,425
500	0,485	1,113	1,598

Ce vecteur Z(t) que nous venons de construire vas être la future variable exogène dont vont dépendre nos probabilités de transition variables.

Question 2 : Générez un processus MS-AR(1,1) dont les probabilités de transition varient dans le temps et dépendent de la variable Z(t)

Après avoir généré ce vecteur Z exogène dont dépendent les probabilités de transition, nous pouvons simuler une variable suivant un processus MS-AR à probabilités de transition variables.

Selon l'énoncé, nous utiliserons les valeurs de paramètres suivants :

$\alpha_0 = 1{,}5$
$\alpha_1 = 0{,}5$
$\beta_0 = 1$
$\beta_1 = -0{,}5$
$c_1 = 0{,}5$
$c_2 = -0{,}5$
$\emptyset = 0{,}5$
$\sigma_1 = 0{,}3$
$\sigma_2 = 0{,}2$

On construit deux vecteurs (P11 et P22) de probabilités de transition variables, indexés par le temps, de la manière suivante :

P11(t) = $\Phi(\alpha_0 + \alpha_1 \times Z_t)$
P22(t) = $\Phi(\beta_0 + \beta_1 \times Z_t)$

Où, Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Voici un aperçu de nos vecteurs de probabilités de transition :

Vecteur de Proabilités de Transition					
t	Z(t)	Alpha(0) + Alpha(1) * Z(t)	P11(t)	Beta(0) + Beta(1) * Z(t)	P22(t)
20	-1,059	0,970	0,834	1,530	0,937
100	1,274	2,137	0,984	0,363	0,642
200	1,163	2,081	0,981	0,419	0,662
300	-0,160	1,420	0,922	1,080	0,860
400	0,425	1,712	0,957	0,788	0,785
500	1,598	2,299	0,989	0,201	0,580

On peut ensuite générer le processus Y ~ MS-AR(1,1), à, l'aide de nos deux vecteurs de probabilités de transition variables.

<u>Question 3 :</u> Estimez ce modèle MS-AR(1,1) à probabilités de transition variables, et vérifiez que vous retrouvez les valeurs utilisées dans la simulation

On procède ensuite à l'estimation du modèle MS-AR, de la même manière que dans les questions 1 et 2, la seule différence étant que les probabilités ergodiques sont recalculées à chaque itération, en fonction des vecteurs de probabilités de transition variables, là où les probabilités de transition étaient fixes auparavant.

Voici un tableau récapitulatif de notre estimation :

Estimation du modèle MS-AR(1,1) - Probabilités de Transition Variables				
	Paramètres de la simulation	Coefficients estimés	T-stat	P-critique
Alpha 0	1,500	1,532	11,525	0,00%
Beta 0	1,000	1,012	7,128	0,00%
C1	0,500	0,514	23,616	0,00%
C2	-0,500	-0,454	-26,317	0,00%
X(-1)	0,500	0,507	27,706	0,00%
Variance Résiduelle 1	0,300	0,096	12,362	0,00%
Variance Résiduelle 2	0,200	0,037	8,189	0,00%
Alpha 1	0,500	0,619	5,034	0,06%
Beta 1	-0,500	-0,534	-3,908	0,12%
Log vraissemblance	203,4794957			

On retrouve bien, pour nos coefficients estimés, la valeur des paramètres de la simulation : notre modèle MS-AR à probabilités de transition variables est bien estimé.

<u>Question 4 :</u> Comparez les états simulés aux états estimés par les probabilités filtrées et lissées

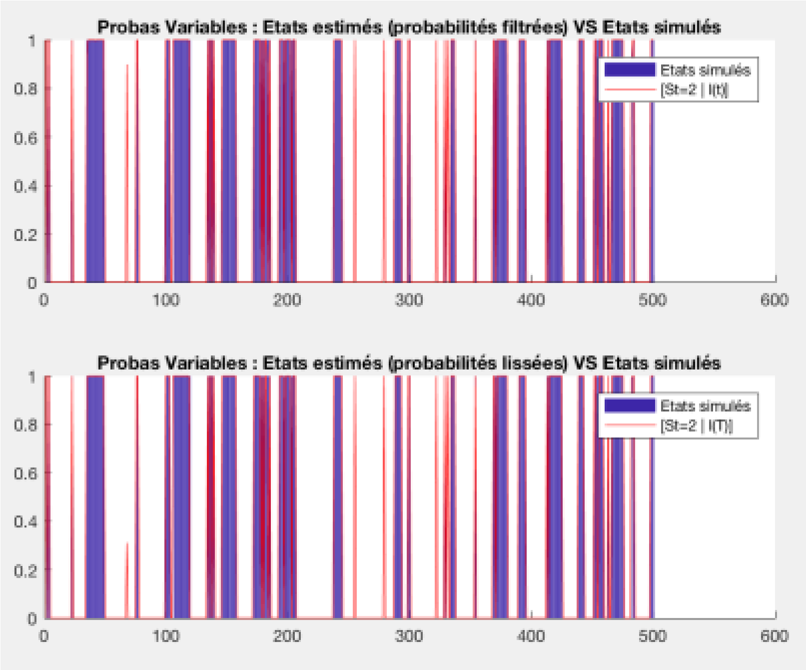
Les états estimés ne sont rien d'autres que les probabilités lissées du modèle.

En effet, à l'issue de notre algorithme de lissage, on obtient un vecteur PL, composée des n probabilités : P[St=1 | I(t)], qui est donc très proche de 1 quand on est dans l'état 1, et très proche de 0 quand on est dans l'état 2, à la manière d'une variable binaire qui vaudrait 1 dans l'état 1, et 0 dans l'état 2.
Notre variable d'état S quant à elle, vaut 1 dans l'état 1 « de base » et à 2 dans l'état 2 « de récession ».
Donc si on soustrait 1 au vecteur S, on obtient une variable qui vaut 1 dans l'état 2, et qui vaut 0 dans l'état 1.
De même, 1 – PF est un vecteur qui vaut : 1 - P[St=1 | I(t)] = P[St=2 | I(t)].
C'est l'inverse de PF, il est donc très proche de 0 dans l'état 1, et très proche de 1 dans l'état 2 : exactement comme le vecteur S !

On compare donc les probabilités filtrées et lissées du modèle, aux vrais états simulés de la chaine de Markov obtenue lors de la simulation du modèle MS-AR.

→ On compare (1-PL) à (S-1)

Voici un graphique les comparant :



On voit que les probabilités (tant filtrées que lissées), suivent plutôt bien les états simulés de notre modèle : La courbe rouge est au niveau du 0 lorsque l'on est dans l'état 1, et il n'y a pas de barre bleue. En revanche, la courbe rouge est au niveau du 1 lorsque l'on est dans l'état 2, et il y une barre bleue.

La courbe rouge épouse plutôt bien les mouvements de la barre bleu : les états estimés sont très proches des états simulés, et nos probabilités lissées sont un bon indicateur des « vrais » états du modèle MS-AR à probabilités de transition variables