Tratamento de Problemas NP-Difíces
Branch-and-Bound

Cid C. Souza
Eduardo C. Xavier

Instituto de Computação/Unicamp

12 de maio de 2011

Introdução

- Aplicado a problemas onde se quer otimizar uma *função objetivo*.
- Exploração do espaço de estados: todos os filhos de um nó da árvore de espaço de estados são gerados ao mesmo tempo.
- Em cada nó da árvore, a *função classificadora* estima o melhor valor da função objetivo no subespaço das soluções representadas por aquele nó.
- Os nós são *amadurecidos* por:
  1. inviabilidade (não satisfazer as restrições implícitas);
  2. limitante (função classificadora indica que ótimo não pode ser atingido naquela subárvore)
  3. otimalidade (ótimo da subárvore já foi encontrado).

Conceitos

Inicialmente assumimos problemas de minimização.

- Uma estrutura de dados é utilizada para armazenar nós ativos:
  - ADD(X): Adiciona o nó X na estrutura.
  - NEXT(): Retorna o próximo nó da estrutura ou indicação de que está vazia.
- Dado um nó X a função de custo z deste nó é:
  - Se X é uma solução inviável $z(X) = \infty$.
  - Se X é uma solução viável $z(X)$ é igual ao custo da solução.
  - Se X é parte de uma solução $z(X)$ é igual ao custo da melhor solução que pode ser gerada a partir de X.

Conceitos

- A função z é difícil de ser calculada.
- Na estratégia BaB utilizamos uma função $\underline{z}$ que aproxima z.
  - Para qualquer nó X temos que $\underline{z}(X) \leq z(X)$.
  - $\underline{z}$ é um **limitante inferior** para z.
  - Se X é uma solução completa então $\underline{z}(X) = z(X)$.
- Também é utilizada uma função $\overline{z}$
  - $\overline{z}(X)$: valor máximo que uma solução tendo a parte X terá.
  - $\overline{z}$ é um **limitante superior**.
  - $z(X) \leq \overline{z}(X)$.
- Denotamos por U o menor valor de $\overline{z}(X)$ dentre nós ativos X.

Conceitos

Bound (considerando problemas de minimização):

- Um nó ativo X será avaliado somente se $\underline{z}(X) \leq U$.
- Caso contrário o nó é amadurecido (descartado).
- Quando um nó corrente é tal que $\overline{z}(X) < U$, atualizamos o valor de U.

Algoritmo

Considerando problemas de **minimização**.

$\textsc{BaB}$ (T)

    NósAtivos.ADD(T);   MelhorSol $\leftarrow \{\}$; $U \leftarrow \infty$;
    Enquanto (NósAtivos não está vazia) **faça**
        $E \leftarrow$ NósAtivos.NEXT();
        Para cada filho X de E **faça**
            Se X é uma solução viável: $\underline{z}(X) = \overline{z}(X) = z(X)$
            Se X é inviável: $\underline{z}(X) = \overline{z}(X) = \infty$
            Se X é solução parcial calcula $\underline{z}(X)$ e $\overline{z}(X)$
                    por heurísticas.
            Se $\underline{z}(X) \leq U$ **então**
                Se X é uma solução completa **então**
                    MelhorSol $\leftarrow X$
                    $U \leftarrow z(X)$
                Senão
                    NósAtivos.ADD(X) e $U \leftarrow \min\{U, \overline{z}(X)\}$
    Fim-Enquanto

Algoritmo

- Se a estrutura *NósAtivos* for uma Fila, a busca se dará em largura.
- Se a estrutura *NósAtivos* for uma Pilha, a busca se dará em profundidade.
- É também comum implementar a estrutura como um Heap de mínimo.
    - Estratégia do melhor limitante (*best bound*).
    - Uma busca gulosa pelos nós mais promissores.
    - No caso de minimização escolher nó com menor $\underline{z}(X)$.
- Vamos assumir o uso de um Heap com estratégia *best bound*.

Algoritmo

Considerando problema de **minimização** .

BaB-Best (T)
    NósAtivos.ADD(T); $U \leftarrow \infty$;
    Enquanto (NósAtivos não está vazia) **faça**
        $E \leftarrow$ NósAtivos.NEXT();
        Se E for uma solução completa então **retorne** E
        Para cada filho X de E **faça**
            Se X é uma solução viável: $\underline{z}(X) = \overline{z}(X) = z(X)$
            Se X é inviável: $\underline{z}(X) = \overline{z}(X) = \infty$
            Se X é solução parcial calcula $\underline{z}(X)$ e $\overline{z}(X)$
                por heurísticas.
            Se $\underline{z}(X) \leq U$ **então**
                NósAtivos.ADD(X) e $U \leftarrow \min\{U, \overline{z}(X)\}$
    Fim-Enquanto

Teorema

A solução retornada por BaB-Best *é uma solução ótima.*

Prova. Seja E o nó retornado pelo algoritmo. Todos os nós descartados possuem custo maior que U e portanto maior do que E.

No instante que E é retornado da estrutura temos que $z(E) = \underline{z}(E) \leq \underline{z}(X)$ para qualquer nó ativo X. Para qualquer nó Y que ainda será gerado como descendente de algum nó X temos $z(Y) \geq \underline{z}(X) \geq \underline{z}(E)$.

Portanto E é uma solução ótima. $\square$

Sequenciamento de Tarefas com *Deadlines* (STD)

- Temos n tarefas $(p_1, d_1, t_1), (p_2, d_2, t_2) \ldots, (p_n, d_n, t_n)$.
  - p_i: Penalidade se a tarefa não for executada até o tempo d_i.
  - t_i: Tempo de processamento da tarefa.
- Um subconjunto J de tarefas deve ser escolhido para ser processado sem sofrer penalidades.
- O **custo** da solução é a penalidade incorrida das tarefas não pertencentes a J.
- Vamos assumir que existe um algoritmo que checa se um conjunto J de tarefas podem ser executadas sem penalidade.

Sequenciamento de Tarefas com *Deadlines* (STD)

- Representaremos um nó por uma tupla $X = (x_1, \ldots, x_n)$.
  - $x_i \in \{0, 1\}$ indica se tarefa i faz ou não parte de J.
- O conjunto selecionado no nó X é J_X.
- Podemos usar a função classificadora $\underline{z}(X)$ como:
  - Seja m o maior índice na tupla X já foi setado.

$$\underline{z}(X) = \sum_{j<m \text{ e } j \notin J_X} p_J$$

- Note que $\underline{z}(X) \leq z(X)$.

Sequenciamento de Tarefas com *Deadlines* (STD)

- Podemos calcular o limite superior $\overline{z}(X)$ como:

$$\overline{z}(X) = \sum_{j \notin J_X} p_J$$

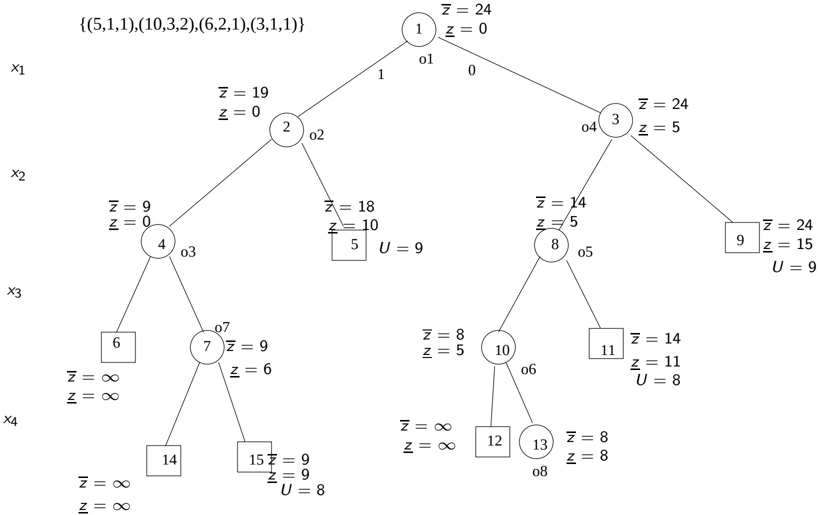
- Se X representar uma solução completa então temos:

$$z(X) = \underline{z}(X) = \overline{z}(X) = \sum_{j \notin J_X} p_J$$

- No slide seguinte temos a árvore gerado considerando a instância:

$$\{(5,1,1),(10,3,2),(6,2,1),(3,1,1)\}$$

Sequenciamento de Tarefas com *Deadlines* (STD)



Traveling Salesman Problem **(TSP)**

- Temos um grafo não direcionado $G = (V, E)$ com custos positivos nas arestas.
- Achar um ciclo de custo mínimo passando por todos os vértices.
- Custos dados por uma matriz de adjacência.

Traveling Salesman Problem **(TSP)**

- Representaremos um nó por uma tupla $X = (x_1 = 1, x_2, \ldots, x_n)$.
  - $x_i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ indica quem é o *i*-ésimo vértice no ciclo.
- O ciclo parcial no nó X é $C_X = (x_1 = 1, x_2 = v_2, \ldots, x_k = v_k)$.
- Podemos usar a função classificadora $\underline{z}(X)$ como:
  - Para cada $v \in V \setminus V(C_X)$ ache duas arestas incidentes de peso mínimo e_v^1, e e_v^2.
  - Ache aresta de peso mínimo e_1 incidente a 1 e e_k incidente a v_k.
  - $\underline{z}(X) = \sum_{e \in E(C_X)} c(e) + \frac{e_1 + e_k + \sum_{v \in V \setminus V(C_X)} (e_v^1 + e_v^2)}{2}$

Traveling Salesman Problem **(TSP)**

Considere a matriz de custos: $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 12 & 8 & 11 \\ 7 & 0 & 13 & 7 & 10 \\ 12 & 13 & 0 & 9 & 12 \\ 8 & 7 & 9 & 0 & 10 \\ 11 & 10 & 12 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

- Inicialmente:

  $$\underline{z}(1) = [(7+8)+(7+7)+(9+12)+(7+8)+(10+10)]/2 = 84/2 = 42.5$$

- Após inserir o vértice 2:

  $$\underline{z}(1,2) = 7 + [8 + 7 + (9 + 12) + (7 + 8) + (10 + 10)]/2 = 42.5$$

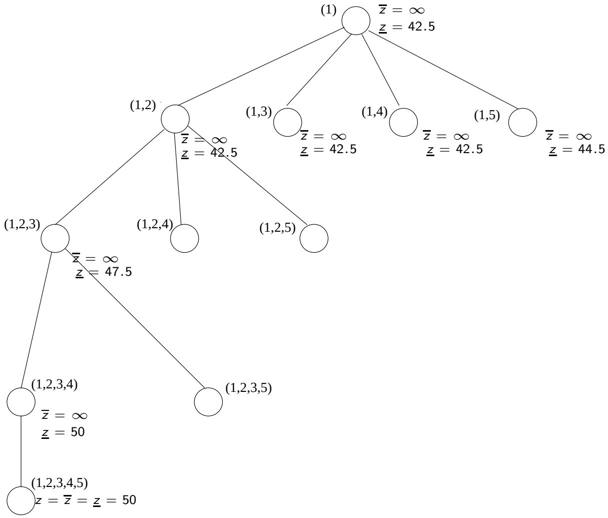
- Após inserir o vértice 5:

  $$\underline{z}(1,2,5) = 7 + 10 + [8 + 10 + (9 + 12) + (7 + 8)]/2 = 44$$

  mas note que no vértice 4 o custo mínimo de 7 é para o vértice 2 (é inviável). Podemos melhorar para

  $$\underline{z}(1,2,5) = 7 + 10 + [8 + 10 + (9 + 12) + (9 + 8)]/2 = 45$$

Traveling Salesman Problem **(TSP)**



Traveling Salesman Problem **(TSP)**

- Podemos calcular $\overline{z}(X)$ com um idéia parecida:
  - Para cada vértice ache as duas arestas de maior peso incidente.
  - Ache a aresta de maior peso incidente em 1 e em v_k.
  - Some os custos destas arestas e divida por 2 e some ao custo de C_X.
- Assim como antes deve-se considerar apenas arestas válidas, ou seja, que não incidam em vértices no “meio”de C_X.

Conceitos

Podemos alterar o algoritmo para considerar problemas de maximização:

- Se X é inviável então $z(X) = -\infty$.
- Para todo X teremos $\overline{z}(X) \geq z(X) \geq \underline{z}(X)$.
- L terá o maior valor dentre $\underline{z}(X)$.
  - Existe um nó que vai gerar uma solução com valor pelo menos L.
- Um nó ativo X será avaliado somente se $\overline{z}(X) \geq L$.
- Caso contrário o nó é amadurecido (descartado).
- Quando um nó corrente é tal que $\underline{z}(X) > L$, atualizamos o valor de L.

Algoritmo

Considerando problemas de **maximização** .

BaB (T)
NósAtivos.ADD(T); MelhorSol $\leftarrow \{\}$; $L \leftarrow -\infty$;
Enquanto (NósAtivos não está vazia) **faça**
$E \leftarrow$ NósAtivos.NEXT();
Para cada filho X de E **faça**
Se X é uma solução viável: $\underline{z}(X) = \overline{z}(X) = z(X)$
Se X é inviável: $\underline{z}(X) = \overline{z}(X) = -\infty$
Se X é solução parcial calcula $\underline{z}(X)$ e $\overline{z}(X)$
por heurísticas.
Se $\overline{z}(X) \geq L$ **então**
Se X é uma solução completa **então**
MelhorSol $\leftarrow X$
$L \leftarrow z(X)$
Senão
NósAtivos.ADD(X) e $L \leftarrow \max\{L, \underline{z}(X)\}$
Fim-Enquanto

Algoritmo

Considerando a estratégia *best-bound* para **maximização**.

```
BaB-Best (T)
    NósAtivos.ADD(T);   L ← −∞;
    Enquanto (NósAtivos não está vazia) faça
        E ← NósAtivos.NEXT();
        Se E for uma solução completa então retorne E
        Para cada filho X de E faça
            Se X é uma solução viável: z_(X) = z̄(X) = z(X)
            Se X é inviável: z_(X) = z̄(X) = −∞
            Se X é solução parcial calcula z_(X) e z̄(X)
                        por heurísticas.
            Se z̄(X) ≥ L então
                        NósAtivos.ADD(X) e L ← max{L, z_(X)}
    Fim-Enquanto
```

Mochila Binária (BKP)

- Dados n itens com pesos positivos $w_1, \ldots, w_n$ e valores positivos $c_1, \ldots, c_n$, encontrar um subconjunto de itens de **valor máximo** e cujo peso não exceda a capacidade da mochila dada por um valor positivo W.
- *Função classificadora*: como estimar o valor da *função objetivo* ?
- *Relaxação*: posso levar qualquer fração de um item.
- Algoritmo para o problema relaxado quando os itens estão ordenados de forma que $\frac{c_1}{w_1} \geq \frac{c_2}{w_2} \geq \ldots \geq \frac{c_n}{w_n}$.
- *Por quê funciona ?*

Mochila Binária (BKP)

CALCULA-$\overline{z}$ (W, C, k)(* função classificadora para BKP *)

$j \leftarrow k + 1$;
$W' \leftarrow W$;
$C' \leftarrow C$;
Enquanto $W' \neq 0$ **faça**
$x_j \leftarrow \min\{\frac{W'}{w_j}, 1\}$;
$W' \leftarrow W' - w_j x_j$;
$C' \leftarrow C' + c_j x_j$;
$j \leftarrow j + 1$;
enquanto
Retornar C';
fim

Mochila Binária (BKP)

- Exemplo:

$$\begin{array}{ll} \max & 12x_1 + 16x_2 + 20x_3 + 8x_4 \\ & 4x_1 + \ \ 7x_2 + \ \ 9x_3 + \ \ 6x_4 \quad \leq 10 \\ & x_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

- Parte explorada da árvore de espaço de estados (próxima transparência).
- Legenda: $(W', \underline{z}_{n_i}, \overline{z}_{n_i})$ onde W' é a capacidade restante na mochila, $\underline{z}_{n_i}$ é o custo da solução parcial correspondente ao nó e $\overline{z}_{n_i}$ é o valor do limitante obtido pela função classificadora no nó.

Mochila Binária (BKP)