Tema 1: Interpolación a trozos por elementos finitos en un intervalo de la recta real

1. Sea $f(x) = (3+x)\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ $x \in \mathbb{R}$. Use el polinomio interpolador de Lagrange cuadrático con nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ para aproximar $f(2)$, $f(2.4)$, $f(3.5)$ y $f(4)$.

2. Escriba, para las siguientes funciones $f(x)$, el término del error $E_2(x)$ del polinomio interpolador de Lagrange cuadrático con nodos $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$.

   (a) $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$ (b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

3. A partir de los datos $\ln 9 = 2.1972$, $\ln 9.5 = 2.2513$ y $\ln 10 = 2.3026$, aproximar $\ln 9.2$ mediante interpolación lineal y cuadrática. Acotar el error cometido.

4. Aproxima el valor de $\sqrt[7]{1/2}$ mediante el polinomio interpolador cuadrático de la función $f(x) = 2^x$ con los nodos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$. Acota el error cometido.

5. ¿Cuál es el polinomio interpolador de Lagrange de grado 20 con nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1, \ldots, x_{19} = 19$, $x_{20} = 20$ de la función $f(x) = x^5 + 3x^{12}$?

6. Se considera la función
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$
calcular y representar gráficamente el polinomio de interpolación de grado 14 con puntos de interpolación equiespaciados en el intervalo $[-5, 5]$.

7. Haciendo uso de la transformación lineal $F : [-1,1] \to [-5,5]$, con $F(x) = 5x$, repetir el ejercicio anterior utilizando como puntos de interpolación $x_i = F(\hat{x}_i)$, donde los puntos $\hat{x}_i \in [-1,1]$ vienen dados por la fórmula
$$\hat{x}_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \qquad 0 \le i \le n.$$

8. Dado el intervalo $[0,2]$, se genera un mallado D_h formado por elementos de anchura $h = 0.5$ y sea V_h el espacio de elementos finitos generado con polinomios de grado 1 ó 2. Se considera la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ y sea $f_h \in V_h$ una aproximación de f en el espacio V_h verificando que $f(x_i) = f_h(x_i)$ para todo x_i nodo del mallado. Se pide:

   a) Calcular $|f(0.8) - f_h(0.8)|$.
   b) Repetir el ejercicio utilizando $h = 1/2^j$, $j = 2, 3, 4$.
   c) Para que valor de h podemos afirmar que el error está por debajo de una tolerancia $\delta = 10^{-6}$.

9. Calcular la aproximación $f_h \in V_h$ de la función f del ejercicio 6 en un mallado formado por 7 elementos de igual anchura h utilizando polinomios de grado 1, 2 y 4. Representar gráficamente la solución obtenida.

10. Repetir el ejercicio 9 utilizando para construir V_h:

   a) $h = \frac{5}{6}$ y polinomios de grado 1.
   b) $h = \frac{5}{3}$ y polinomios de grado 2.
   c) $h = \frac{10}{3}$ y polinomios de grado 4.
   d) $h = \frac{5}{12}$ y polinomios de grado 1.
   e) $h = \frac{5}{6}$ y polinomios de grado 2.
   f) $h = \frac{5}{3}$ y polinomios de grado 4.

11. Determinar el valor de h para que la aproximación $f_h \in V_h$ de la función f verique que

$$\|f - f_h\|_{L^\infty([a,b])} < \delta$$

suponiendo que el mallado asociado a V_h es equiespaciado, que el grado de los polinomios para construir V_h es $m = 1$ ó 2, que $\delta = 10^{-8}$ y para las siguientes funciones f:

a) $f : [0, 10] \to \mathbb{R},\ f(x) = x\text{sen}x$.

b) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \text{sen}(\pi x)$.

c) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \text{arctg}(10x)$.

d) $f : [-5, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2}$.