Nombres complexes et trigonométrie

> Introduction :
>
> Le cours précédent nous a permis d'introduire l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul *via* la définition de son module et d'un argument. Ce cours va développer le passage d'une écriture algébrique à une écriture trigonométrique et inversement.
> Il va aussi permettre de définir et d'utiliser les formules de trigonométrie d'addition et de duplication.
> Enfin une troisième écriture du nombre complexe, l'écriture exponentielle, va à son tour être définie.

→ Dans tout ce cours, nous considérerons le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, que l'on appellera **plan complexe**.

1 Trigonométrie : formules d'addition et de duplication

a. Rappel sur le produit scalaire

Considérons un repère orthonormé $(0\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$ et deux vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{t}$ de coordonnées :

$$\vec{s}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Alors le produit scalaire $\vec{s}\cdot\vec{t}$ vaut :

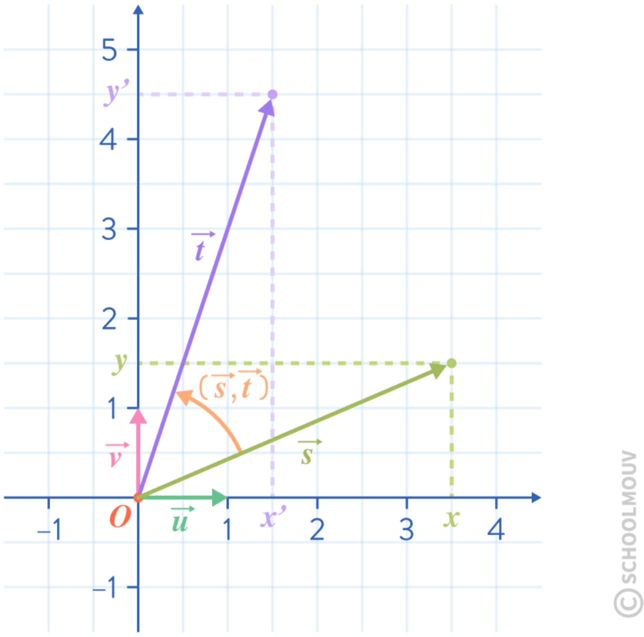
- avec les coordonnées :

$$\vec{s}\cdot\vec{t} = xx' + yy'$$

- avec la définition du produit scalaire :

$$\vec{s} \cdot \vec{t} = \|\vec{s}\| \times \|\vec{t}\| \times \cos(\vec{s}, \vec{t})$$

→ Pour rappel $\|\vec{s}\|$ est la norme du vecteur $\vec{s}$, c'est-à-dire sa longueur.



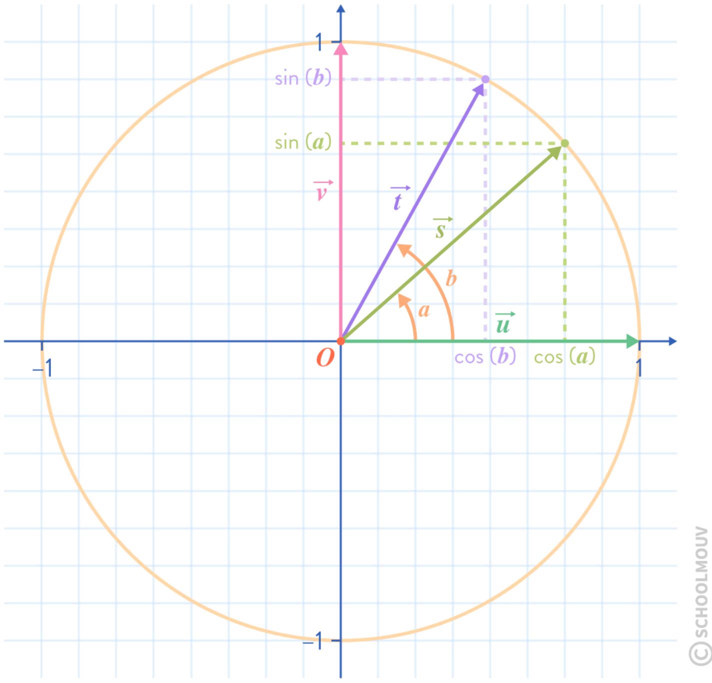
b. Formules d'addition

Pour exprimer les formules d'addition et de duplication de trigonométrie, on peut choisir des vecteurs de norme 1 tels que :

$$\vec{s}\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix} \text{ et } \vec{t}\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$$

Avec $a = (\vec{u}, \vec{s})$ et $b = (\vec{u}, \vec{t})$.

En effet, pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc la norme des deux vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{t}$ est bien 1.



Calculons alors le produit scalaire $\vec{s} \cdot \vec{t}$.

- Avec les coordonnées, nous obtenons :

$$\vec{s} \cdot \vec{t} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

- Et avec les angles et normes :

$$\begin{aligned}\vec{s} \cdot \vec{t} &= \|\vec{s}\| \times \|\vec{t}\| \times \cos(\vec{s},\, \vec{v}) \\ &= 1 \times 1 \times \cos(b-a) \\ &= \cos(b-a)\end{aligned}$$

→ On a donc :

$$\vec{s} \cdot \vec{t} = \cos(b-a) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

De plus, nous connaissons les propriétés du cosinus et du sinus d'angles associés.

→ Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos(x)\\ \sin(-x) &= -\sin(x)\\ \cos(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ \sin(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\end{aligned}$$

On peut en déduire l'ensemble des formules d'addition.

Propriété

Pour tous réels a, b on a :

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)\\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Démonstration

En effet, on a vu que :

$$\cos(a-b)=\cos(b-a)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos\big(a-(-b)\big)\\ &= \cos(a)\cos(-b)+\sin(a)\sin(-b)\\ &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

De même pour passer de cosinus à sinus :

$$
\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right) \\
&= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos(b)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(b) \\
&= \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)
\end{aligned}
$$

Et nous avons enfin :

$$
\begin{aligned}
\sin(a-b) &= \sin\big(a+(-b)\big) \\
&= \sin(a)\cos(-b)+\cos(a)\sin(-b) \\
&= \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)
\end{aligned}
$$

Prenons un exemple pour montrer l'utilité de ces formules.

Exemple

En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, on peut déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}
$$

Dans le cours précédent, nous avons démontré que le module d'un produit est égal au produit des modules. Nous avons aussi vu que l'argument d'un produit est la somme des arguments.

→ Nous allons ici, grâce aux formules d'addition que nous venons de voir, démontrer ces deux propriétés.

Démonstration

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, respectivement de modules r et r', et d'arguments $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$.

1. Écrivons la forme trigonométrique des nombres z et z' :

$$\begin{aligned} z &= r\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big) \\ z' &= r'\big(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')\big) \end{aligned}$$

2. Calculons zz' :

$$\begin{aligned} zz' &= \Big(r\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)\Big) \times \Big(r'\big(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')\big)\Big) \\ &= rr'\big(\cos(\theta)\cos(\theta') + \mathrm{i}\cos(\theta)\sin(\theta') \\ &\qquad + \mathrm{i}\sin(\theta)\cos(\theta') + \mathrm{i}^2\sin(\theta)\sin(\theta')\big) \\ &= rr'\Big(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \\ &\qquad + \mathrm{i}\big(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')\big)\Big) \\ &= rr'\big(\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')\big) \\ &\text{[avec les formules d'addition]} \end{aligned}$$

C. L'écriture trigonométrique étant unique, nous avons :

$$zz' = \underbrace{rr'}_{|zz'|}\big(\cos\underbrace{(\theta+\theta')}_{\arg(zz')} + \mathrm{i}\sin\underbrace{(\theta+\theta')}_{\arg(zz')}\big)$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}|zz'| &= rr' \\ &= |z| \times |z'|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg(zz') &= \theta + \theta' \\ &= \arg(z) + \arg(z')\end{aligned}$$

c. Formules de duplication

En posant $a = b$ et sachant que $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, on peut déduire des formules d'addition ci-dessus les formules de duplication.

Propriété

Pour tout réel a, on a :

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 1 - 2\sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1\end{aligned}$$

$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$$

Exemple

En se servant de la formule de duplication, on peut déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

En effet les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sont remarquables, donc connues, et on voit que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

→ On a alors :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)\\ &= 1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\\ &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Et, comme $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$, le sinus est positif. Donc :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

De la même façon, nous pouvons calculer le cosinus :

$$\begin{aligned}2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1=\frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Et comme $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$, le cosinus est aussi positif. Donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

2 | Écriture exponentielle d'un nombre complexe

a. Définition

Nous allons maintenant découvrir une troisième forme d'écriture pour les nombres complexes : l'**écriture exponentielle**.

Considérons deux nombres complexes z et z' non nuls dont le module est égal à 1 et dont des arguments respectifs sont θ et θ'.
En les écrivant sous leur forme trigonométrique, nous avons montré plus haut l'égalité :

$$\big((\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)\big((\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')\big) = \cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')$$

Considérons la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$\theta \mapsto f(\theta) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$$

Nous avons alors, pour tous réels θ et θ' :

$$f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta+\theta')$$

→ Cela nous évoque la propriété fonctionnelle de l'exponentielle :

$$\mathrm{e}^{\theta} \times \mathrm{e}^{\theta'} = \mathrm{e}^{\theta+\theta'}$$

À retenir

Par analogie avec la fonction exponentielle, nous notons, pour tout θ réel :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$$

→ Nous en déduisons les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} &= \cos(0) + \mathrm{i}\sin(0) \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \mathrm{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} &= \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) \\ &= -1\end{aligned}$$

Nous pouvons noter cette dernière égalité ainsi :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$

Cette formule, connue sous le nom d'**identité d'Euler**, est considérée par nombre de mathématiciens comme la plus « belle » formule mathématique.

→ En effet, elle relie les grandes constantes mathématiques (0, 1, π, e et i) par les trois opérations élémentaires (produit, somme et égalité).

Nous pouvons maintenant définir cette nouvelle forme.

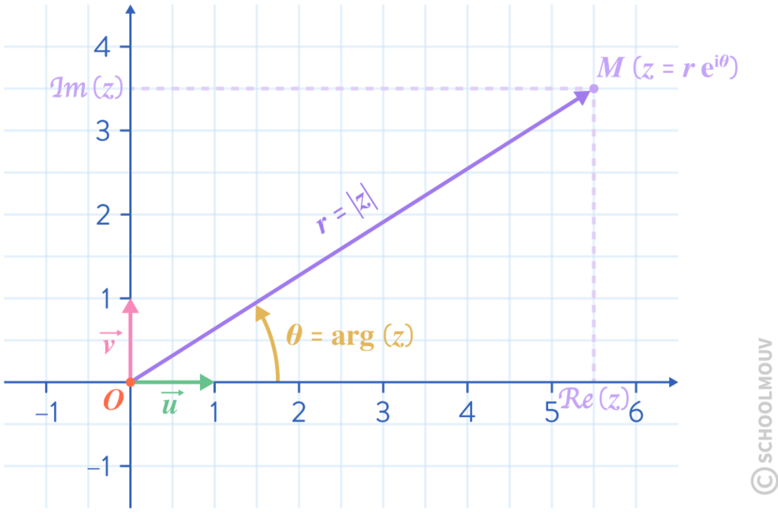
Définition

Écriture exponentielle d'un nombre complexe :

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r = |z|$ (module de z) et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$.

→ Cette écriture est appelée écriture exponentielle de z.

Et réciproquement, si on peut écrire $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec r un réel strictement positif, alors r est le module de z et θ un argument de z.



Attention

Dans l'écriture $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, pour que ce soit la forme exponentielle de z, il faut bien veiller à ce que r soit strictement positif.

Par exemple, $z = -3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ n'est pas écrit sous sa forme exponentielle !

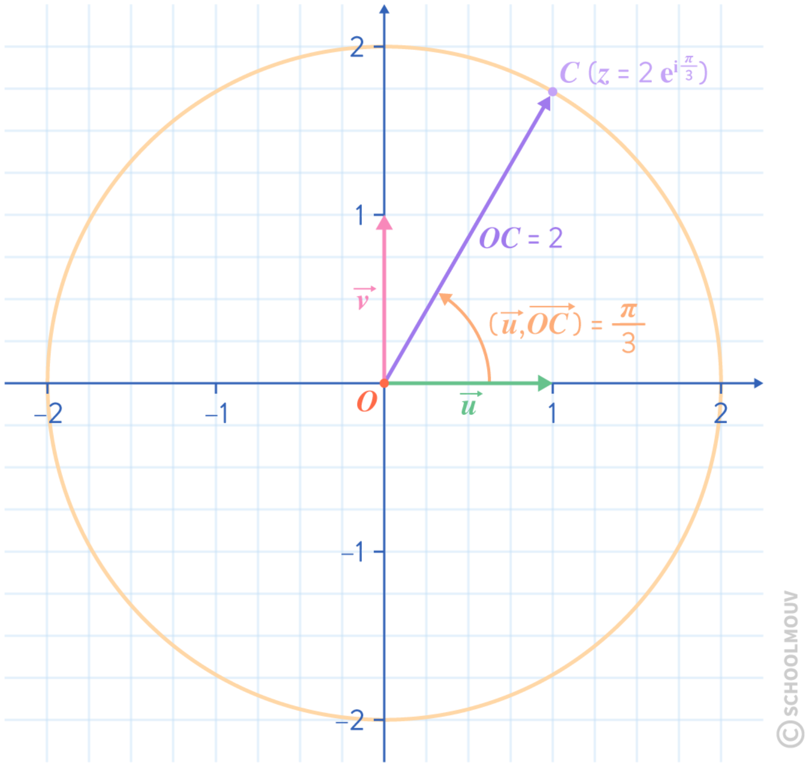
→ Nous verrons plus bas comment l'écrire sous sa forme exponentielle.

Exemple

Soit le nombre complexe $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
Pour placer le point C associé à z dans le plan complexe, nous remarquons que le module de z est égal à 2, donc la distance $OC = 2$ (module de z).

→ C est sur le cercle de centre O et de rayon 2.

Ensuite, on a la mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3}$, ce qui permet de placer le point C :



→ L'écriture trigonométrique de z est donc :

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

→ Ce qui nous permet d'en déduire son écriture algébrique :

$$\begin{aligned} z &= 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

b. Propriétés de la forme exponentielle

Nous allons maintenant donner un certain nombre de propriétés, listées ci-dessous, en lien avec la fonction exponentielle et les propriétés trigonométriques.

Propriété

On prend ici z et z' deux nombres complexes non nuls, dont les écritures exponentielles sont :

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$
$$z' = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$$

On a alors, avec n et k des entiers relatifs :

1. $z \times z' = r \times r' \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$
2. $z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$
3. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
4. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$
5. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$
6. $\overline{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

À retenir

Les écritures exponentielles des nombres complexes sont particulièrement adaptées pour calculer les produits, les quotients et les puissances de nombres complexes, en utilisant les propriétés ci-dessus.

Pour nous en convaincre, traitons quelques exemples.

Exemple

Soit les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$
$$z_2 = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$

→ z_1 et z_2 ont respectivement pour modules 3 et 2, et pour arguments $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

1 Calculons le produit de z_1 et z_2 (propriété 1).

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= 3 \times 2 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \\ &= 6\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$

2. Calculons z_1 à la puissance 4 (propriété 2).

$$\begin{aligned} z_1^4 &= 3^4 \times \mathrm{e}^{4\times \mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \\ &= 81 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \\ &= -81 \ \textcolor{gray}{[\text{car } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1]} \end{aligned}$$

3. Calculons le quotient de z_1 par z_2 (propriété 5).

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3}{2} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}} \end{aligned}$$

Reprenons maintenant l'exemple vu plus haut du complexe qui n'était pas sous sa forme exponentielle.

Exemple

Nous avons :

$$\begin{aligned} z &= -3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \\ &= 3 \times (-1) \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \\ &= 3 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \ \textcolor{gray}{[\text{car } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1]} \\ &= 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi + \frac{\pi}{6})} \ \textcolor{gray}{[\text{car } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}]} \\ &= 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} \\ &= 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi)} \\ &= 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \ \textcolor{gray}{[\text{car } \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]} \end{aligned}$$

→ z est cette fois sous sa forme exponentielle :

$$|z| = 3$$
$$\arg(z) = -\frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$$

3 | Passage d'une écriture à l'autre pour un même nombre complexe

Avant de découvrir comment passer d'une écriture à une autre, rappelons les trois que nous avons découvertes.

1. **Forme algébrique :**

$z = a + \text{i}b$, avec a et b des nombres réels.

→ Cette forme permet de faire apparaître la partie réelle a et la partie imaginaire b du complexe z.

2. **Forme trigonométrique :**

$z = r(\cos(\theta) + \text{i}\sin(\theta))$, avec $r = |z|$ le module de z (non nul), donc r est un réel toujours positif, et $\theta = \arg(z)$ un réel.

→ Cette forme permet de faire apparaître le module de z, associé au point M dans le plan complexe, qui est la distance OM, et un argument de z, c'est-à-dire une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

3. **Forme exponentielle :**

$z = r\text{e}^{\text{i}\theta}$, avec r un réel non nul positif et $\theta = arg(z)$ un réel.

→ La forme exponentielle reprend le module et un argument de z, mais est très utile pour les produits et les quotients de complexes, puisque ce type d'opération est simplifié par les propriétés de l'exponentielle, comme on l'a vu dans la section précédente.

Il faut donc maîtriser le passage d'une forme à l'autre, les formes trigonométrique et exponentielle étant totalement déterminées par la connaissance du module et d'un argument.

a. De la forme algébrique à la forme trigonométrique ou exponentielle

À retenir

Méthodologie :

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$, avec a et b des réels.
Pour passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ou exponentielle, il faut déterminer le module r et un argument θ.

1. Généralement, on calcule d'abord le module r :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. On écrit ensuite le quotient $\frac{z}{r}$:

$$\frac{z}{r} = \frac{a}{r} + \frac{b}{r}\mathrm{i}$$

3. On peut ainsi identifier les cosinus et sinus de θ :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r}$$
$$\sin(\theta) = \frac{b}{r}$$

→ Et nous trouvons θ.

Cela nécessite de bien connaître les valeurs des cosinus et des sinus des angles remarquables.

4. Connaissant le module r et un argument θ, on écrit alors la forme voulue.

Des propriétés de l'argument que nous avons vues dans le cours précédent, nous pouvons tirer quelques petites astuces.

Astuce

- Si z est un nombre réel strictement positif, alors $\arg(z) = 0\ [2\pi]$.

- Si z est un nombre réel strictement négatif, alors $\arg(z) = \pi\ [2\pi]$.
- Si z est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive, alors $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- Si z est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative, alors $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Exemple

Déterminons la forme trigonométrique et la forme exponentielle du complexe $z = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$.

→ $a = 2\sqrt{3}$ et $b = 2$.

1. Nous calculons son module :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{4 \times 3 + 4} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

2. Nous écrivons le quotient de z par r :

$$\begin{aligned} \frac{z}{r} &= \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4}\mathrm{i} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

3. Nous identifions ainsi les cosinus et sinus de θ :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

→ On en déduit :

$$\theta = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

4. Donc la forme trigonométrique de z est :

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Et la forme exponentielle de z est :

$$z = 4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$$

Prenons encore un exemple, tiré du sujet du bac 2019, qui nous permettra de manipuler diverses propriétés vues dans ce cours et le précédent.

Exemple

Soit le nombre complexe $u = \sqrt{3} + \text{i}$ et $\bar{u}$ son conjugué.

→ L'affirmation suivante est-elle vraie ?

$$u^{2\,019} + \bar{u}^{2\,019} = 2^{2\,019}$$

1. Pour manipuler un nombre complexe élevé à une puissance, nous savons maintenant que la forme exponentielle est la plus adaptée.

Nous allons donc écrire u sous sa forme exponentielle.

$$\begin{aligned} |u| &= \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{3+1} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
u &= 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) \\
&= 2 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{i}\right) \\
&= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}
$$

2. Élevons-le à la puissance demandée.

$$
\begin{aligned}
u^{2\,019} &= \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{2\,019} \\
&= 2^{2\,019} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 2\,019\times\frac{\pi}{6}} \quad \text{[car } \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\text{]}
\end{aligned}
$$

Nous allons maintenant simplifier cette expression.
Nous connaissons certaines valeurs particulières, comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.

→ Nous allons donc la faire apparaître, en effectuant la division euclidienne de $2\,019$ par 6, car nous avons $\frac{\pi}{6}$:

$$
\begin{aligned}
u^{2\,019} &= 2^{2\,019} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(336\times 6+3)\frac{\pi}{6}} \\
&= 2^{2\,019} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{336\times 6\times\pi}{6} + \frac{3\times\pi}{6}\right)} \\
&= 2^{2\,019} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(336\pi + \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= 2^{2\,019} \times \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^{336} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \\
&\text{[car } \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \text{ et } \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n\text{]} \\
&= 2^{2\,019} \times (-1)^{336} \times \mathrm{i} \\
&\text{[car } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1 \text{ et } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}\text{]} \\
&= 2^{2\,019}\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

3. Calculons $\bar{u}^{2\,019}$.

Puisque nous connaissons $u^{2\,019}$, nous pouvons aller plus vite :

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^{2\,019} &= \overline{u^{2\,019}} \\
&\text{[car } \bar{z}^n = \overline{z^n}\text{]} \\
&= \overline{2^{2\,019}\,\mathrm{i}} \\
&= -2^{2\,019}\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

C Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u^{2\,019}+\bar{u}^{2\,019} &= 2^{2\,019}\,\mathrm{i}-2^{2\,019}\,\mathrm{i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

→ L'affirmation proposée est fausse.

b. De la forme trigonométrique ou exponentielle à la forme algébrique

Nous l'avons déjà fait sur un exemple plus haut. Nous allons ici en donner une méthodologie.

À retenir

Méthodologie :

Pour passer de la forme trigonométrique ou exponentielle à la forme algébrique, on passe, le cas échéant, par la forme trigonométrique et on calcule les valeurs exactes des sinus et cosinus.

→ Là encore la connaissance des angles remarquables et des cosinus et sinus associés est importante.

En effet, si r est le module de z et θ un argument de z, alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(z) &= r\times\cos{(\theta)} \\ \text{et : } \mathfrak{Im}(z) &= r\times\sin{(\theta)} \end{aligned}$$

Exemple

Donnons la forme algébrique du complexe $z=6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
On a alors :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Re}(z) &= 6\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 6 \times \frac{1}{2} \\
&= 3 \\
\text{et : } \mathfrak{Im}(z) &= 6\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 6 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

→ Nous obtenons donc :

$$z = 3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3}$$

4 | Formule de Moivre, formules d'Euler

On peut relier les écritures exponentielle et trigonométrique qui correspondent à un même nombre complexe et, en utilisant les propriétés de l'exponentielle, en déduire des relations trigonométriques appelées formules de Moivre et formules d'Euler.

a. Formule de Moivre

Propriété

Pour tout nombre réel θ et tout entier relatif n, on a la relation suivante :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

→ On peut aussi l'écrire sous la forme suivante :

$$\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

Dans la première partie du cours, nous avons appris les formules de duplication. Or, ces formules de duplication ne font qu'exprimer les cosinus

et sinus de $2a$ (a réel) en fonction des cosinus et sinus de a.
Grâce à la formule de Moivre, nous pouvons exprimer, pour tout entier naturel n, $\cos(na)$ et $\sin(na)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$.

→ Ainsi cette formule permet-elle de déterminer les valeurs exactes des cosinus et sinus de multiples ou de fractions d'angle.

Exemple

Nous allons ici exprimer $\cos(3a)$ et $\sin(3a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$.

1. Nous savons que, pour tout a réel, $\cos(3a)$ est la partie réelle et $\sin(3a)$ la partie imaginaire du nombre complexe dont la forme trigonométrique est :

$$\cos(3a) + \mathrm{i}\sin(3a)$$

2. D'après la formule de Moivre, nous avons :

$$\cos(3a) + \mathrm{i}\sin(3a) = \big(\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)\big)^3$$

Pour développer, nous utilisons le binôme de Newton, que nous avons découvert dans le premier cours sur les nombres complexes :

$$\begin{aligned}
\cos(3a) + \mathrm{i}\sin(3a) &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cos^{3-k}(a)\, i^k \sin^k(a) \\
&= \binom{3}{0}\cos^3(a) + \binom{3}{1}\cos^2(a)\,\mathrm{i}\sin(a) \\
&\qquad + \binom{3}{2}\cos(a)\,\mathrm{i}^2\sin^2(a) + \binom{3}{3}\mathrm{i}^3\sin^3(a) \\
&= \cos^3(a) + 3\mathrm{i}\cos^2(a)\sin(a) \\
&\qquad - 3\cos(a)\sin^2(a) - \mathrm{i}\sin^3(a) \\
&= \big(\cos^3(a) - 3\cos(a)\sin^2(a)\big) \\
&\qquad + \mathrm{i}\big(3\cos^2(a)\sin(a) - \sin^3(a)\big)
\end{aligned}$$

3. Nous en déduisons ainsi :

$$\cos(3a) = \cos^3(a) - 3\cos(a)\sin^2(a)$$
$$\sin(3a) = 3\cos^2(a)\sin(a) - \sin^3(a)$$

Nous nous arrêtons là, mais nous pourrions aussi exprimer $\cos(3a)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$, et $\sin(3a)$ uniquement en fonction de $\sin(a)$, car nous savons que :

$$\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$$
$$\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$$

b Formules d'Euler

Propriété

Pour tout nombre réel θ, on a les relations suivantes :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$$
$$\sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Démonstration

Il suffit de repasser par la forme trigonométrique pour retrouver les résultats :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} &= \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) + \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta) \\ &= \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) + \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta) \\ &\quad [\text{car } \cos(-\theta) = \cos(\theta) \text{ et } \sin(-\theta) = -\sin(\theta)] \\ &= 2\cos(\theta)\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \cos(\theta)$$

De même :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(-\theta) - i\sin(-\theta) \\ &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ &= 2i\sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin(\theta)$$

Les formules d'Euler peuvent, par exemple, servir à calculer des primitives.

Exemple

Considérons la fonction $f : x \mapsto \cos^3(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

→ Nous cherchons F, une primitive de f.

Mais nous ne pouvons calculer aisément une primitive de f avec cette expression.
Nous allons donc chercher à exprimer $\cos^3(x)$ en fonction d'une somme de cosinus, c'est-à-dire à **linéariser** $\cos^3(x)$.

1. Nous savons que :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Donc, pour tout x réel :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^3}{2^3} \\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^3+3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2+\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^3}{8} \\
&\footnotesize{\text{[avec le binôme de Newton]}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{8} \\
&\footnotesize{\text{[car } \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \text{ et } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}\text{]}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{8}+\frac{3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)}{8} \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)
\end{aligned}$$

2. Et nous savons alors calculer une primitive de f.

En effet, une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ est :

$$x \mapsto \sin(x)$$

Et une primitive de $x \mapsto \cos(3x) = \frac{1}{3} \times 3\cos(3x)$ est :

$$x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3x)$$

→ Nous en déduisons finalement que, pour tout x réel :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x) \\
&= \frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)
\end{aligned}$$

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons explicité les formules de duplication et d'addition, ainsi que la forme exponentielle d'un nombre complexe et son lien avec la forme trigonométrique. Les relations de passage entre les différentes formes possibles pour un nombre complexe ont été présentées, comme l'utilisation que l'on peut faire de chaque forme en fonction du type de calcul ou de l'utilisation qui est faite des nombres complexes.

Les prochains cours mettront en application les différentes formes pour résoudre des problèmes algébriques ou géométriques impliquant les nombres complexes.