Utilisation des nombres complexes en géométrie

Introduction :

Ce cours clôt les chapitres sur les complexes en se concentrant sur leurs applications en géométrie.
Nous utiliserons principalement l'écriture exponentielle des nombres complexes et nous ferons aussi appel aux connaissances des propriétés géométriques de la géométrie plane.

1 Applications géométriques

Considérons le plan complexe muni du repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$ et deux points A et B, d'affixes respectives z_A et z_B, et un troisième point M, d'affixe z.
Nous allons voir ce que nous pouvons déduire des affixes des trois points.

a. Égalité de module

On rappelle que :

- l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$;
- l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$ est $z_{\overrightarrow{AM}} = z - z_A$;
- l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$ est $z_{\overrightarrow{BM}} = z - z_B$.

Intéressons-nous aux modules de ces deux vecteurs :

$$|z - z_A| = AM$$
$$|z - z_B| = BM$$

→ Si $|z - z_A| = |z - z_B|$ alors $AM = BM$.

Nous en déduisons aisément les propriétés suivantes.

Propriété

L'ensemble des points M tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est l'ensemble des points M à équidistance de A et de B.

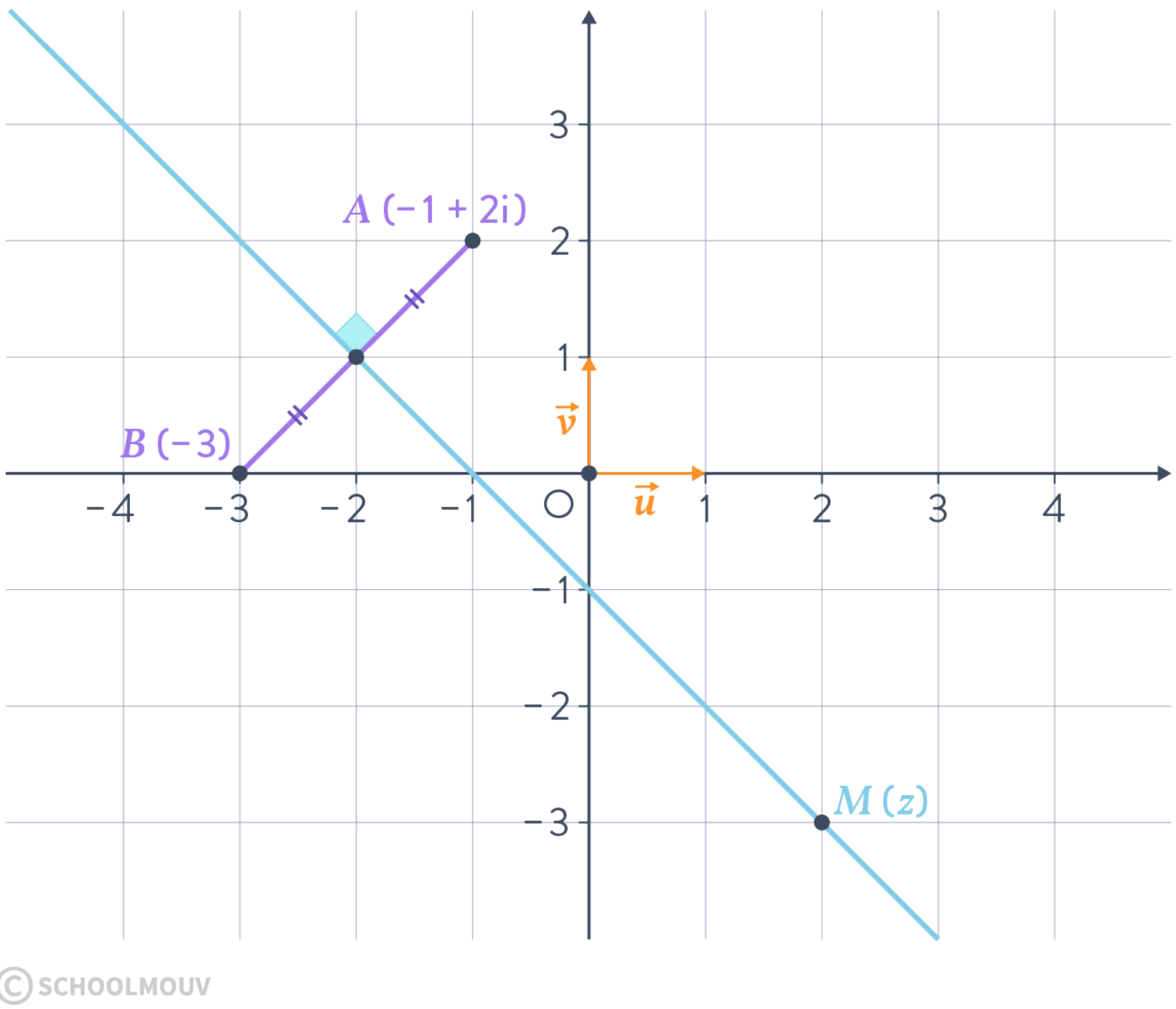
➜ Donc cet ensemble est la médiatrice du segment $[AB]$.

Exemple

On cherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z + 1 - 2\text{i}| = |z + 3|$. Ce qui est équivalent à :

$$|z - (-1 + 2\text{i})| = |z - (-3)|$$

➜ Il s'agit donc de l'ensemble des points de la médiatrice de $[AB]$ avec le point A d'affixe $z_A = -1 + 2\text{i}$ et le point B d'affixe $z_B = -3$.



De la même façon, regardons ce que l'on peut dire de l'ensemble des points M tels que $|z - z_A| = AM = r$, avec r un réel positif.

Propriété

L'ensemble des points M tels que $|z - z_A| = r$, avec r un réel positif, est l'ensemble des points M situés à la distance r du point A.

→ Donc cet ensemble est le cercle de rayon r et de centre A.

Exemple

1. Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 3 + 4\text{i}| = 4$.

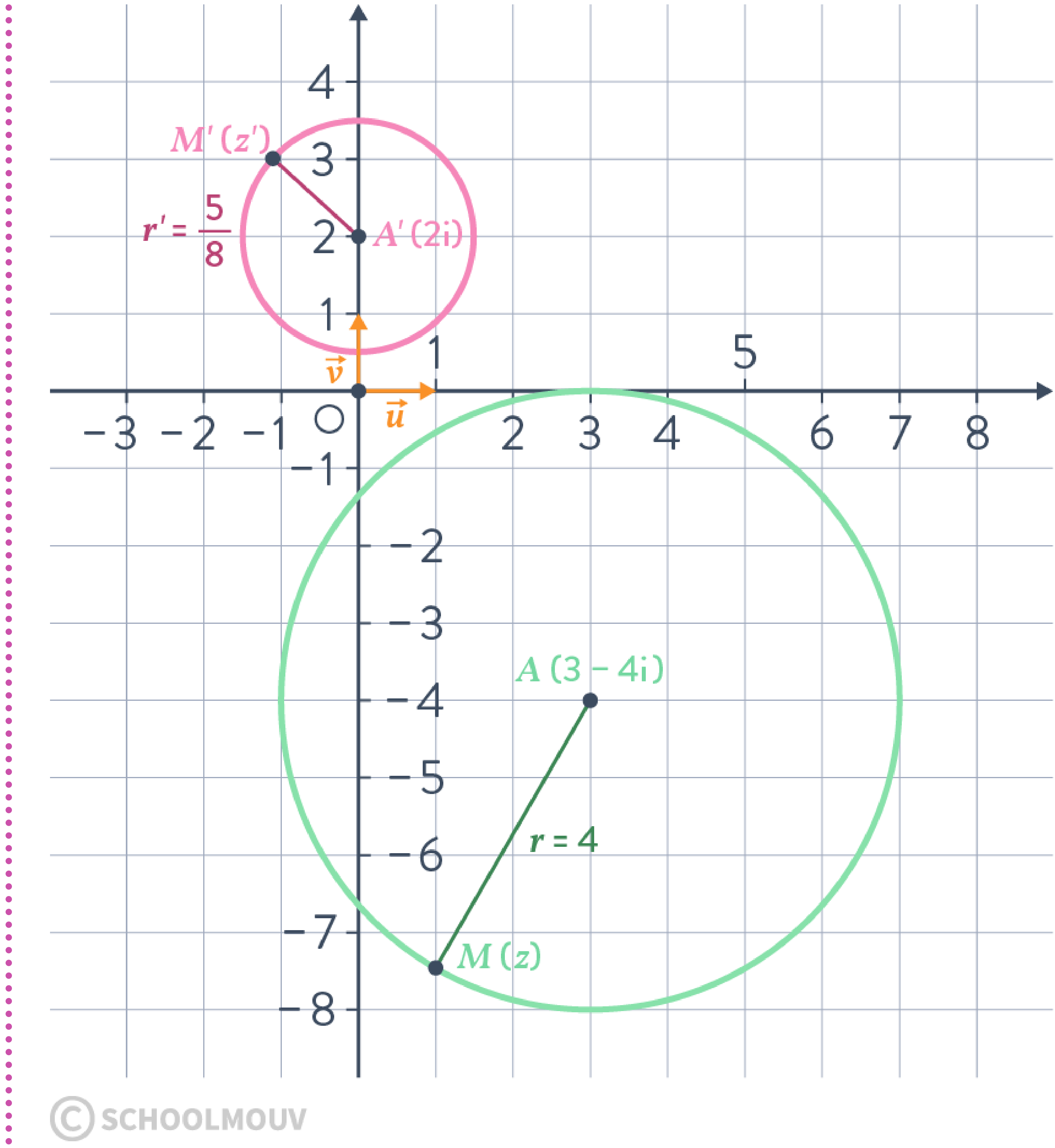
→ Il s'agit des points du cercle de rayon 4 et de centre A, d'affixe $z_A = 3 - 4\text{i}$.

2. Déterminons maintenant l'ensemble des points M' d'affixe z' tels que $|2\text{i}z' + 4| = 3$.

Cette équation nous fait penser à la propriété que nous venons de voir, mais elle n'est pas sous la forme que nous souhaitons. Nous allons donc la transformer :

$$\begin{aligned}
|2\text{i}z' + 4| = 3 &\Leftrightarrow |2\text{i}z' - (-4)| = 3 \\
&\Leftrightarrow |2\text{i}z' - 4\text{i}^2| = 3 \text{ [car } \text{i}^2 = -1\text{]} \\
&\Leftrightarrow |2\text{i}(z' - 2\text{i})| = 3 \\
&\Leftrightarrow |2\text{i}| \times |z' - 2\text{i}| = 3 \\
&\text{[car le module d'un produit est égal au produit des modules]} \\
&\Leftrightarrow 2 \times |z' - 2\text{i}| = 3 \text{ [car } |\text{i}| = 1\text{]} \\
&\Leftrightarrow |z' - 2\text{i}| = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

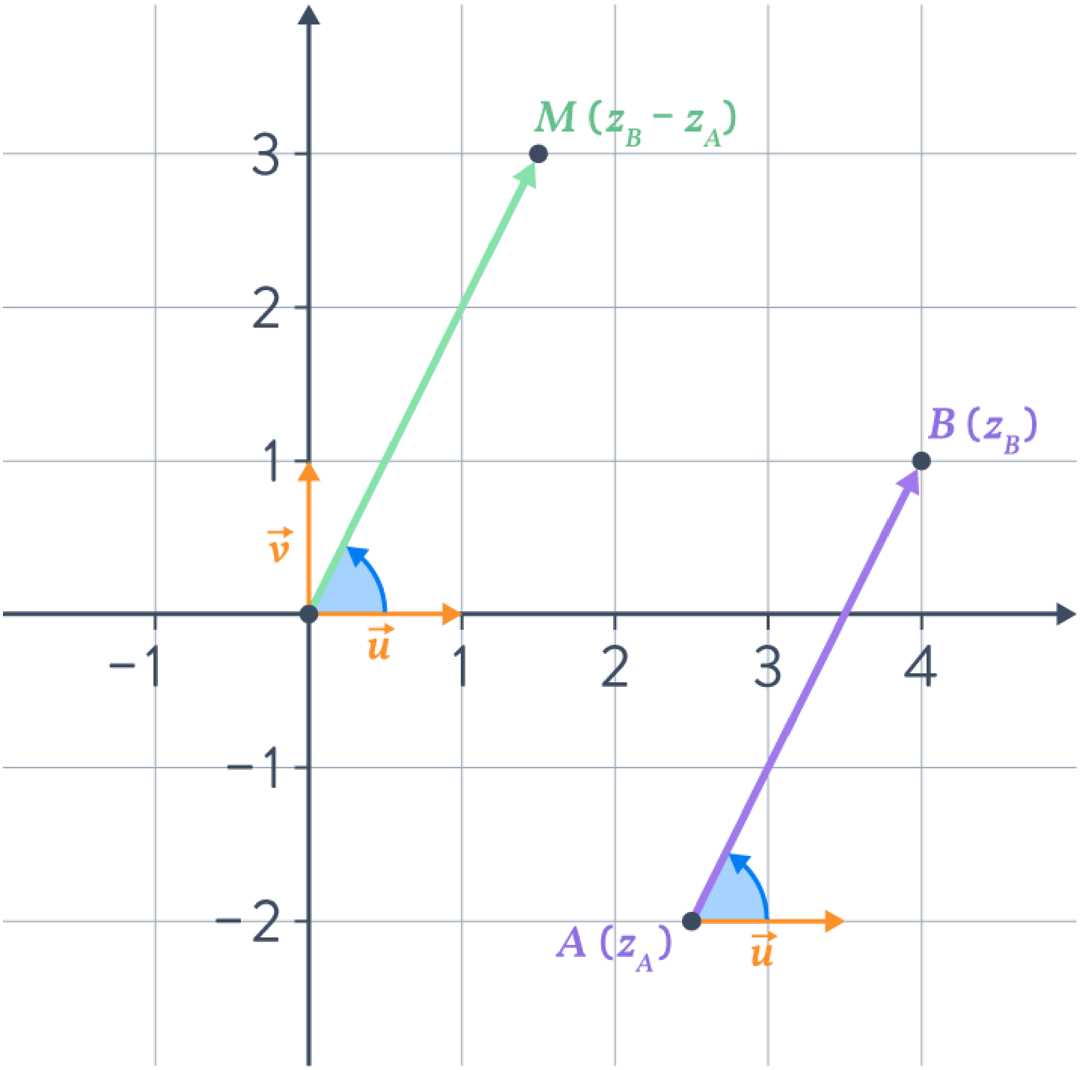
→ Il s'agit donc des points du cercle de rayon $\frac{3}{2}$ et de centre A' d'affixe $z_{A'} = 2\text{i}$.



b. Géométrie et arguments

Nous avons vu que le module est lié à la notion de distance ou de longueur dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, et la définition de l'argument fait référence à un angle.
Nous allons voir dans cette partie comment utiliser l'argument d'un nombre complexe en géométrie.

1. Commençons par regarder l'argument du complexe $z_B - z_A$, à l'aide d'une figure avec le point A d'affixe z_A et B d'affixe z_B.



On sait que $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et on considère le point M d'affixe $z = z_B - z_A$.
Alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et on a la relation angulaire suivante :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\,[2\pi]$$

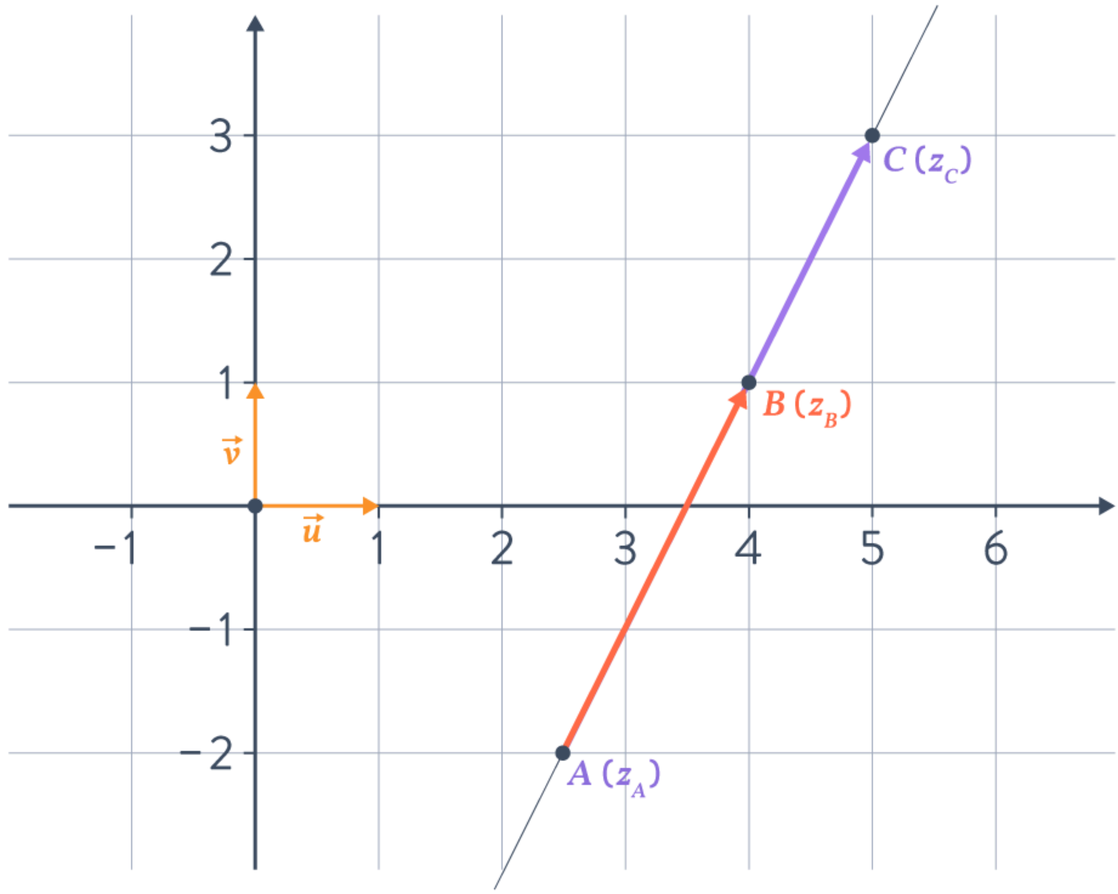
➜ Autrement dit :

$$\begin{aligned}(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) &= (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\,[2\pi] \\ &= \arg(z_B - z_A)\,[2\pi]\end{aligned}$$

② Que penser maintenant de trois points A, B, et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que : $\arg(z_C - z_A) = \arg(z_B - z_A)\,[2\pi]$?

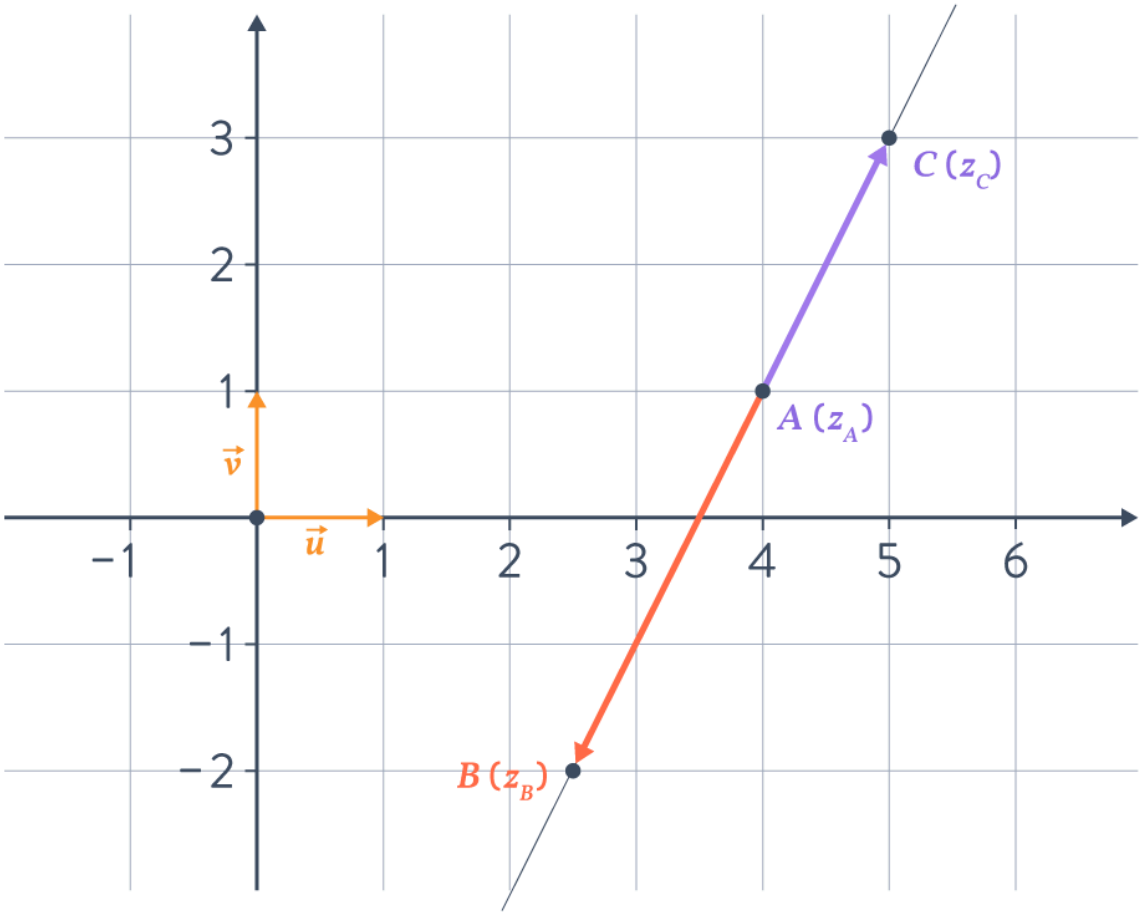
Cela signifie que : $(\vec{u},\ \overrightarrow{AB}) = (\vec{u},\ \overrightarrow{AC})\,[2\pi]$.

➜ Donc les points A, B et C sont alignés, et B et C sont du même côté vis-à-vis de A.



De même, si $\arg(z_C - z_A) = \arg(z_B - z_A) + \pi\,[2\pi]$, cela signifie que : $(\vec{u},\ \overrightarrow{AB}) = (\vec{u},\ \overrightarrow{AC}) + \pi\,[2\pi]$.

➜ Donc les points A, B et C sont alignés et B et C sont de part et d'autre de A.



On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit z_A, z_B et z_C les affixes respectives de trois points A, B et C du plan complexe.
$\arg(z_C - z_A) = \arg(z_B - z_A)\,[\pi]$ si et seulement si les points A, B et C sont alignés et donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

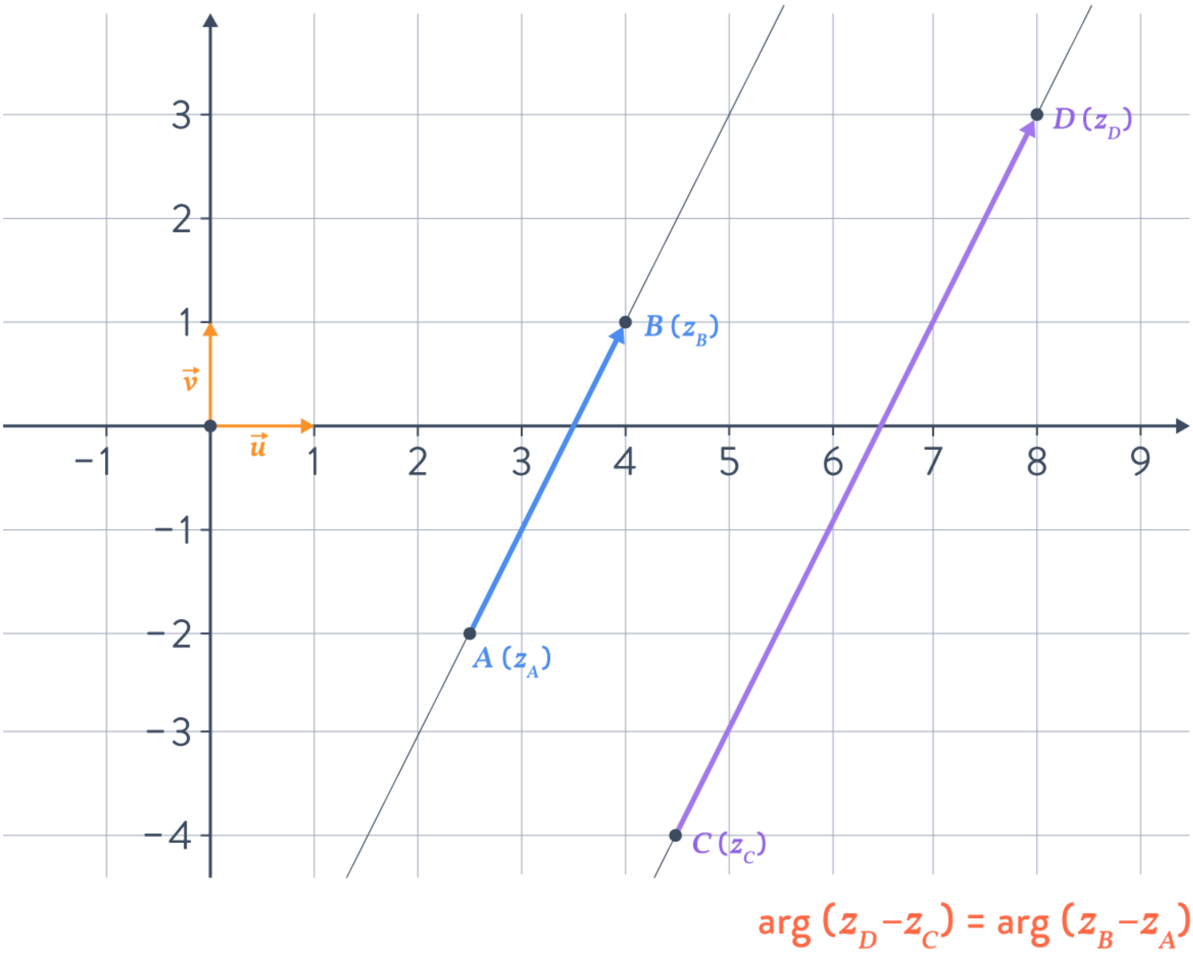
3. Supposons maintenant quatre points : A d'affixe z_A, B d'affixe z_B, C d'affixe z_C et D d'affixe z_D.

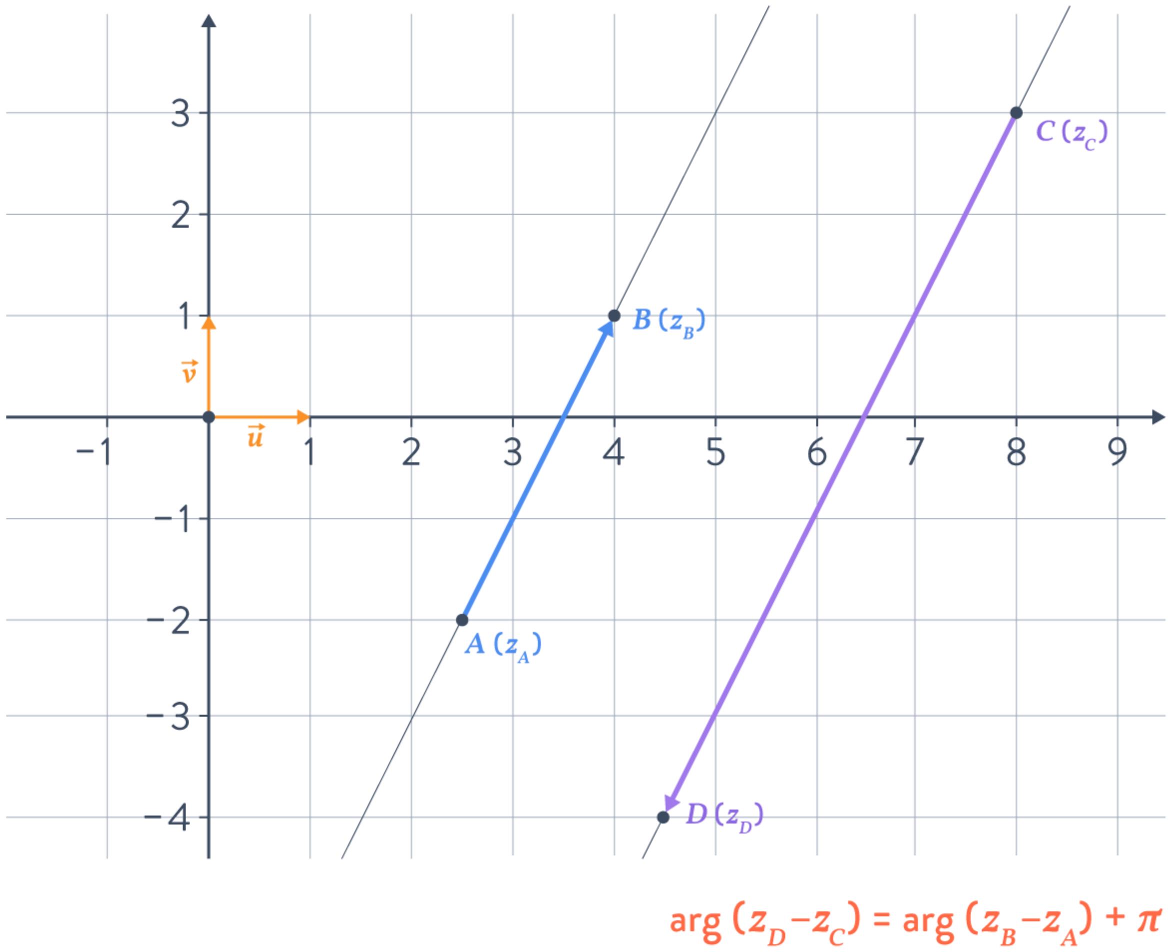
Que pouvons-nous déduire si $\arg(z_D - z_C) = \arg(z_B - z_A)\,[\pi]$?

Vectoriellement, nous avons donc :

$$(\vec{u},\, \overrightarrow{AB}) = (\vec{u},\, \overrightarrow{CD})\,[\pi]$$

➜ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.





Propriété

Soit z_A, z_B , z_C et z_D les affixes respectives de quatre points A, B, C et D du plan complexe.
$\arg(z_D - z_C) = \arg(z_B - z_A)\,[\pi]$ si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles et donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Considérons encore trois points : A d'affixe z_A, B d'affixe z_B et C d'affixe z_C.

D'après la relation de Chasles sur les angles orientés, nous avons :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC})\,[2\pi] \\ &= -(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC})\,[2\pi] \\ &= -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_C - z_A)\,[2\pi] \\ &= \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\,[2\pi]\ \text{[car } \arg\left(\tfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\text{]}\end{aligned}$$

Si les points A, B et C sont alignés, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0\,[\pi]$. Nous avons donc la propriété suivante.

Propriété

Soit z_A, z_B et z_C les affixes respectives de trois points A, B et C du plan complexe.
$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\,[\pi]$ si et seulement si les points A, B et C sont alignés et donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

De la même façon, pour quatre points : A d'affixe z_A, B d'affixe z_B, C d'affixe z_C et D d'affixe z_D, nous avons :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_D - z_C)\,[2\pi] \\ &= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\,[2\pi]\end{aligned}$$

Et nous avons la propriété suivante.

Propriété

Soit z_A, z_B , z_C et z_D les affixes respectives de quatre points A, B, C et D du plan complexe.
$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0\,[\pi]$ si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles et donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

C. Exemples

Nous allons maintenant prendre plusieurs exemples, pour montrer l'utilité des nombres complexes en géométrie.

Exemple

Soit quatre points du plan :

- A d'affixe $z_A = -4 - 3\text{i}$,
- B d'affixe $z_B = 3 - 2\text{i}$,
- C d'affixe $z_C = 4 + 5\text{i}$,
- D d'affixe $z_D = -3 + 4\text{i}$.

➜ Que peut-on dire du quadrilatère $ABCD$?

Nous avons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= z_B - z_A \\ &= 3 - 2\text{i} - (-4 - 3\text{i}) \\ &= 3 - 2\text{i} + 4 + 3\text{i} \\ &= 7 + \text{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC} &= z_C - z_D \\ &= 4 + 5\text{i} - (-3 + 4\text{i}) \\ &= 7 + \text{i} \\ &= \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

➜ $ABCD$ est donc un parallélogramme.

Exemple

Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = -2$, $z_B = 1 + \text{i}$ et $z_c = -1 - 3\text{i}$.

➜ On s'intéresse aux positions relatives de (AB) et (AC).

Pour cela, nous allons étudier l'angle :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{-1 - 3\text{i} - (-2)}{1 + \text{i} - (-2)} \\ &= \frac{1 - 3\text{i}}{3 + \text{i}} \\ &= \frac{(1 - 3\text{i})(3 - \text{i})}{(3 + \text{i})(3 - \text{i})} \\ &\text{[en mutipliant par le conjugué du dénominateur]} \\ &= \frac{3 - \text{i} - 9\text{i} - 3}{9 + 1} \\ &= \frac{-10\text{i}}{10} \\ &= -\text{i}\end{aligned}$$

Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \\ &= \arg(-\mathrm{i}) \\ &= -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{aligned}$$

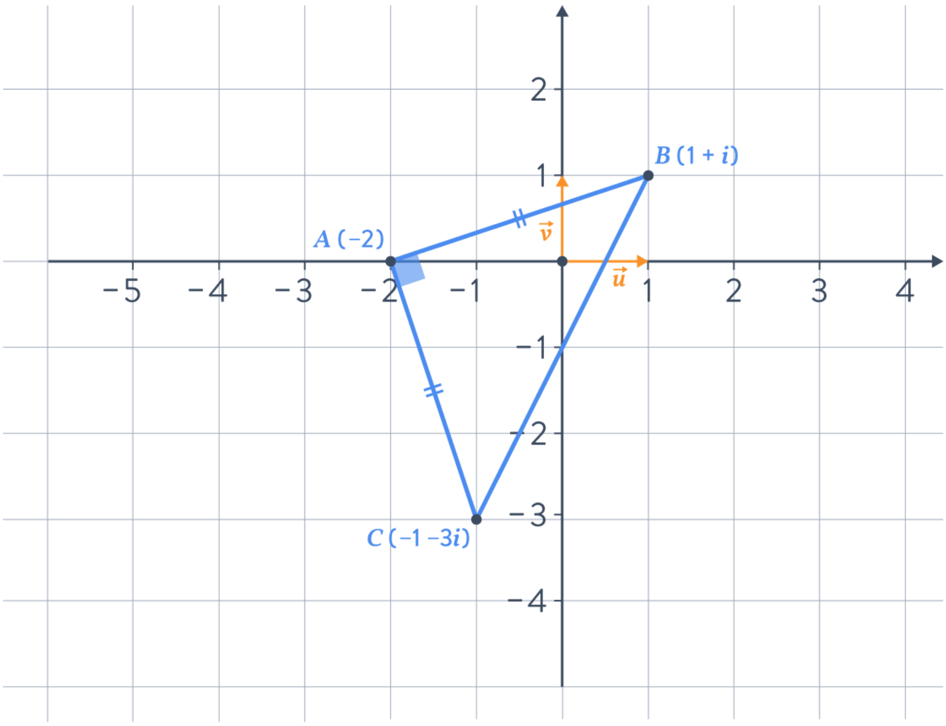
➜ (AB) et (AC) sont perpendiculaires en A.

On peut aussi remarquer que :

$$\begin{aligned}\frac{AC}{AB} &= \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} \\ &= \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| \\ &= |-\mathrm{i}| \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } AC = AB$$

➜ Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.



Exemple

Quels sont les ensembles de points M d'affixe z tels que :

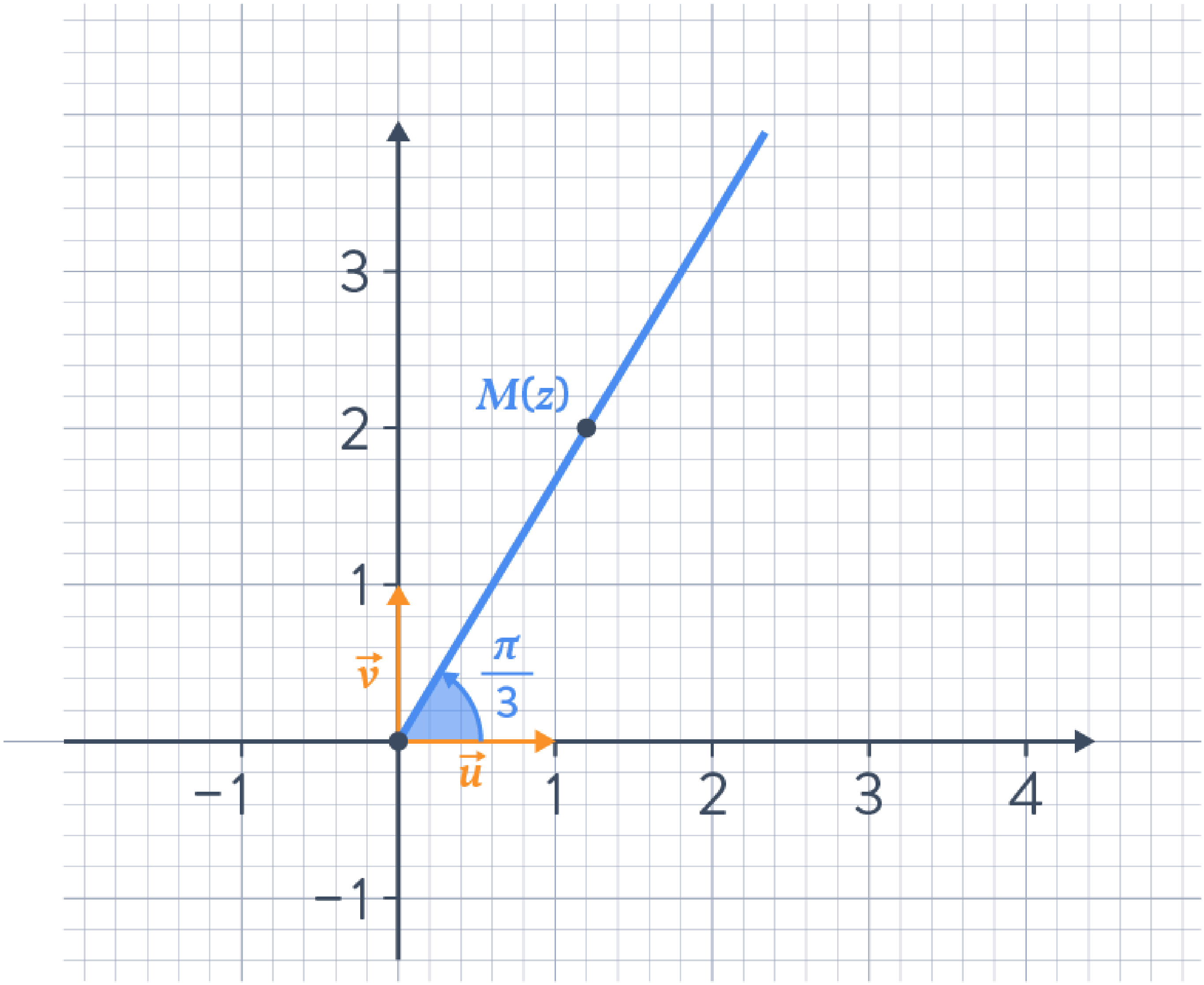
1. $\arg(z) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$?
2. $\arg(z) = \frac{\pi}{3}\ [\pi]$?
3. $\arg(z - 4 + \mathrm{i}) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$?

1. $\arg(z) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ signifie que :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

➜ Il s'agit de la demi-droite ouverte $]OM)$ (le point O est exclu) telle que :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3}$$

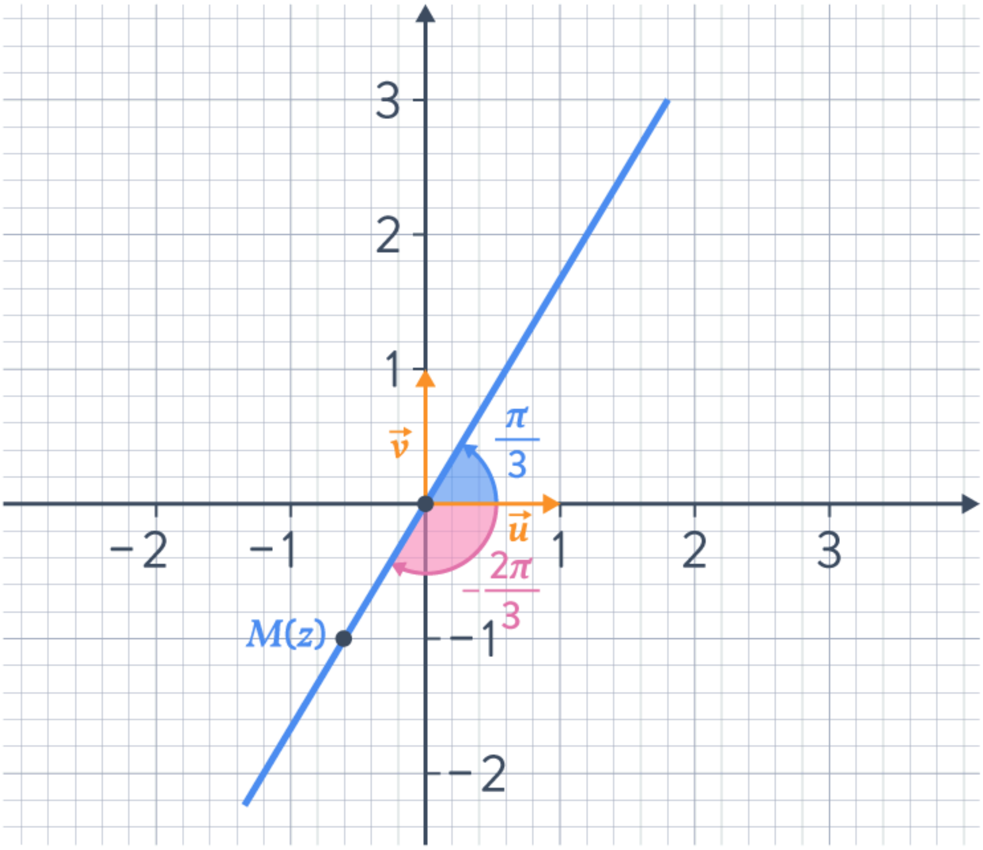


2. Pour $\arg(z) = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$, il y a cette fois deux valeurs possibles pour l'angle géométrique, car l'argument est donné modulo π, donc :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$$

$$\text{Ou : } (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$$

➜ Il s'agit de la droite (OM) privée du point O.



3 Enfin, pour $\arg(z - 4 + \mathrm{i}) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, on peut définir le point A d'affixe $4 - \mathrm{i}$, on a alors :

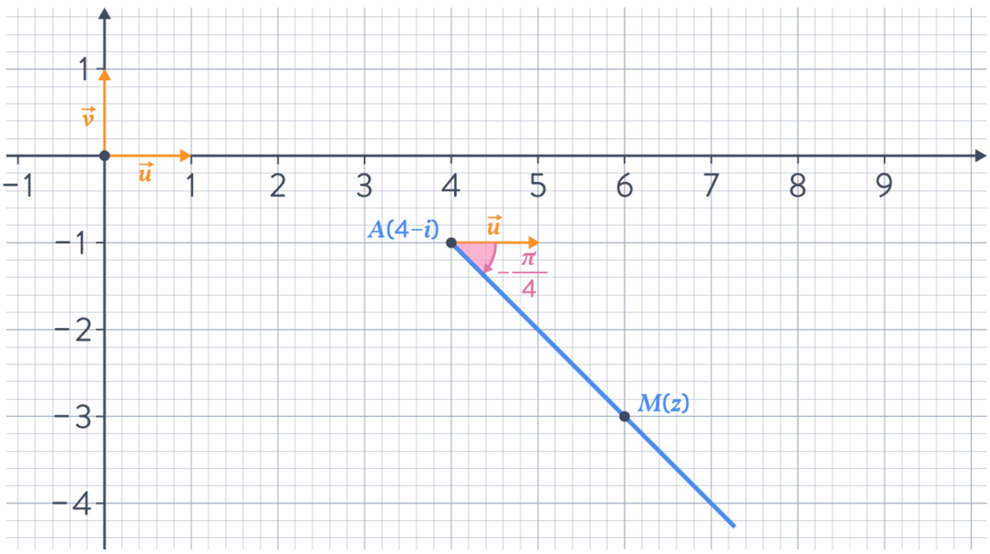
$$\arg(z - 4 + \mathrm{i}) = \arg(z - z_A) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

Donc $z - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$, ce qui se traduit par :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{4}$$

On a tracé sur la figure un représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine A, pour placer ensuite correctement le point M.

➜ Cela correspond à la demi-droite ouverte $]AM)$ (le point A est exclu).



2 Racines n-ièmes de l'unité

a. Définitions et propriétés

Commençons par rappeler la définition que nous avons vue dans le cours sur les nombres complexes d'un point de vue géométrique.

Définition

Ensemble $\mathbb{U}$:

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.
L'ensemble des points qui leur sont associés dans le plan complexe forme un cercle de centre O et de rayon 1, appelé cercle trigonométrique.

Rappel

Nous avions aussi vu que cet ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit et par passage à l'inverse, c'est-à-dire que, si deux nombres complexes z et z' appartiennent à $\mathbb{U}$, alors leur produit et leurs inverses appartiennent aussi à $\mathbb{U}$.

Cette stabilité de $\mathbb{U}$ permet d'introduire la notion de racine n-ième de l'unité.

Définition

Racine n-ième de l'unité :

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle racine n-ième de l'unité un nombre complexe z vérifiant : $z^n = 1$.

➜ On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Nous allons maintenant voir comme résoudre une équation de la forme $z^n = 1$, c'est-à-dire comment nous allons déterminer les racines n-ièmes de l'unité.

Pour ce type d'équation faisant intervenir la puissance n-ième de z, il est préférable et surtout beaucoup plus simple d'utiliser la forme exponentielle d'un nombre complexe, écriture, comme nous l'avons déjà dit, particulièrement utile pour les produits, les quotients et les puissances de nombres complexes.

La forme exponentielle d'un nombre complexe non nul z est :

$$z = |z| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Dans le cas présent, nous allons devoir résoudre : $z^n = 1$.
Mais si $z^n = 1$, alors $|z^n| = |z|^n = 1$.

➜ Ce qui implique : $|z| = 1$.

On peut donc en déduire que les seuls complexes possibles doivent s'écrire sous la forme, avec n un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned} z^n &= (1 \times \mathrm{e}^{i\theta})^n \\ &= (\mathrm{e}^{i\theta})^n \\ &= \mathrm{e}^{ni\theta} \end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e}^{ni\theta} = 1$ si et seulement si il existe un entier k tel que : $n\theta = 0 + 2k\pi$.

➜ On a alors :

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}$$

On rappelle que, du fait de la périodicité des angles, si on ajoute un multiple de 2π à θ, on aura un argument de z qui correspondra au même angle, donc au même complexe.
Par conséquent, k peut prendre toutes les valeurs possibles entre 0 et $n - 1$, mais, en dehors de ces valeurs, on retombera sur un angle déjà vu.

➜ Nous pouvons donc restreindre les valeurs de k à l'ensemble $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}$.

Nous avons donc déterminé les racines n-ièmes de l'unité comme étant tous les complexes de module 1 et d'argument $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, avec k entier relatif tel que $0 \leq k \leq n-1$.

➜ Elles sont donc de la forme, avec k entier compris entre 0 et $n-1$:

$$\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$$

Montrons maintenant que ces racines ω_0, ω_1, …, ω_{n-1} sont distinctes.

➜ C'est-à-dire que, pour k et $k^{'}$, compris entre 0 et $n-1$, si $\omega_k = \omega_{k^{'}}$, alors cela signifie que $k = k^{'}$.

Nous travaillons donc avec n un entier naturel non nul et nous supposons qu'il existe de tels entiers k et $k^{'}$. Et nous avons :

$$\omega_k = \omega_{k^{'}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k^{'}\pi}{n}}$$

Cela signifie qu'il existe un entier l tel que :

$$\begin{aligned} \frac{2k\pi}{n} = \frac{2k^{'}\pi}{n} + 2l\pi &\Leftrightarrow 2k\pi = 2k^{'}\pi + 2nl\pi \\ &\Leftrightarrow k = k^{'} + nl \\ &\Leftrightarrow k - k^{'} = nl \end{aligned}$$

Or, n ne peut pas diviser $k - k^{'}$, car $n \geq |k - k^{'}|$.

➜ Donc $l = 0$ et $k = k^{'}$.

Nous venons de démontrer les propriétés suivantes, qui vont nous permettre de trouver les racines n-ièmes de l'unité.

Propriété

L'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions distinctes ($n \in \mathbb{N}^*$).

➜ Ces solutions sont :

$$\mathbb{U}_n = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\ ;\ k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n-1\}$$

Nous avons vu que le module des racines n-ièmes était toujours égal à 1. Elles appartiennent donc toutes à $\mathbb{U}$.

- Dans un repère orthonormé les points qui leurs sont associés appartiennent tous au cercle trigonométriques.

De plus, on admet la propriété suivante.

Propriété

Si n est un entier naturel tel que $n \geq 3$, alors les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique.

b. Exemples

Nous allons maintenant étudier quelques cas particuliers, avec $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$.

1. **Dans le cas $n = 1$, il y a une seule solution possible.**

- $z^1 = 1$ si et seulement si $z = 1$, ce qui se retrouve aussi avec la propriété ci-dessus en remplaçant n par 1 :

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_1 &= \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times 0\times\pi}{1}}\} \\ &= \{\mathrm{e}^0\} \\ &= \{1\}\end{aligned}$$

2. **Dans le cas $n = 2$, il y a deux solutions possibles.**

- L'ensemble des solutions de $z^2 = 1$ est :

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_2 &= \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times 0\times\pi}{2}},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times 1\times\pi}{2}}\} \\ &= \{\mathrm{e}^0,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\} \\ &= \{1,\ -1\}\end{aligned}$$

3. **Dans le cas $n = 3$, il y a trois solutions possibles.**

L'ensemble des solutions de $z^3 = 1$ est :

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_3 &= \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times 0\times\pi}{3}},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times 1\times\pi}{3}},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times 2\times\pi}{3}}\} \\ &= \{\mathrm{e}^0,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\}\end{aligned}$$

Par convention, nous notons :

$$\begin{aligned}\mathrm{j} &= \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \\ &= -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{j}^2 &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}})^2 \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} \end{aligned}$$

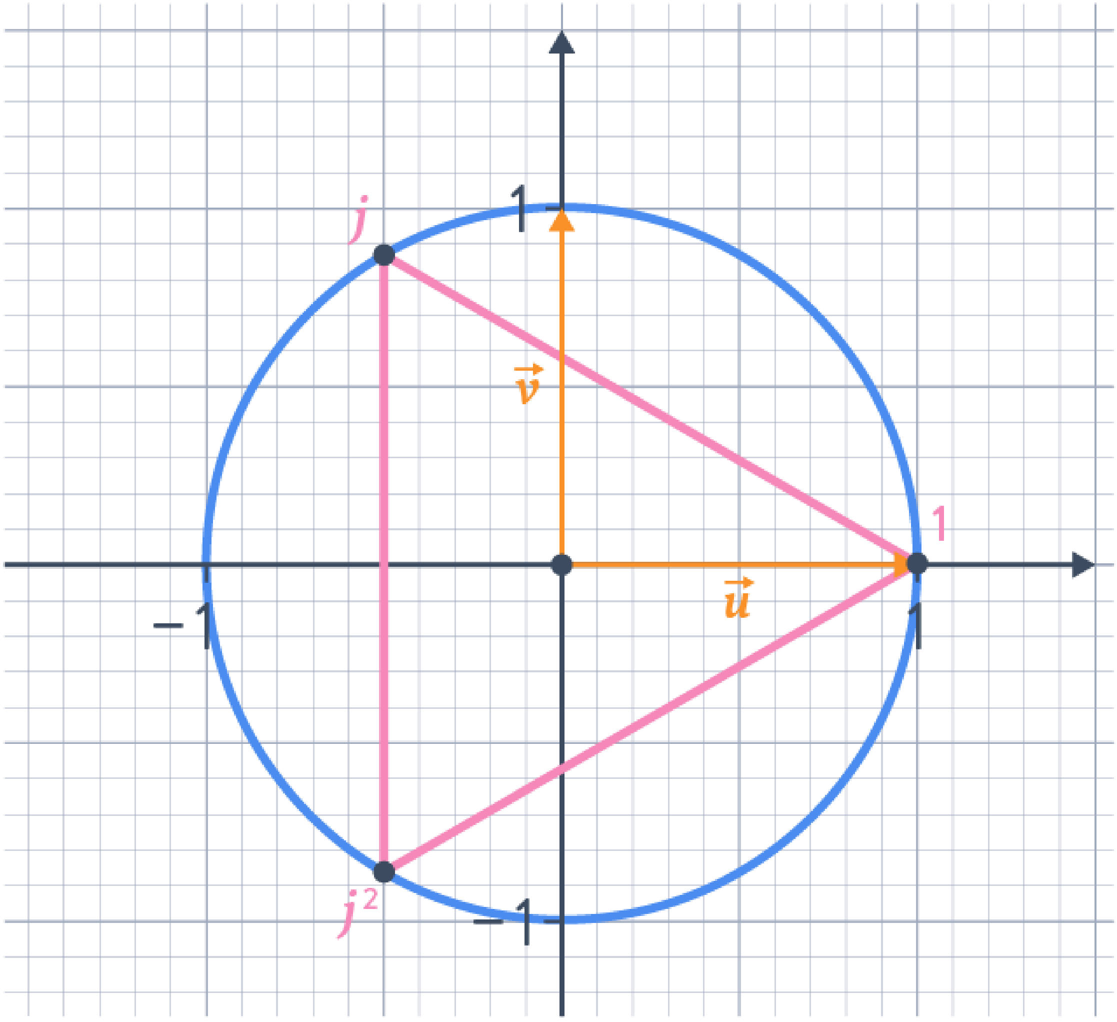
Nous pouvons aussi remarquer que :

$$\begin{aligned} \mathrm{j}^2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \bar{\mathrm{j}} \end{aligned}$$

➜ Et nous obtenons :

$$\mathbb{U}_3 = \{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}$$

➜ Les points dont les affixes sont les racines 3-ièmes de l'unité sont les sommets d'un **triangle équilatéral**.



Nous pouvons calculer aisément la longueur c des côtés de ce triangle équilatéral et donc en déduire ses périmètre P et aire A :

$$\begin{aligned} c &= |\mathrm{j} - 1| \\ &= \left|-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| \\ &= \left|-\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 3c \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

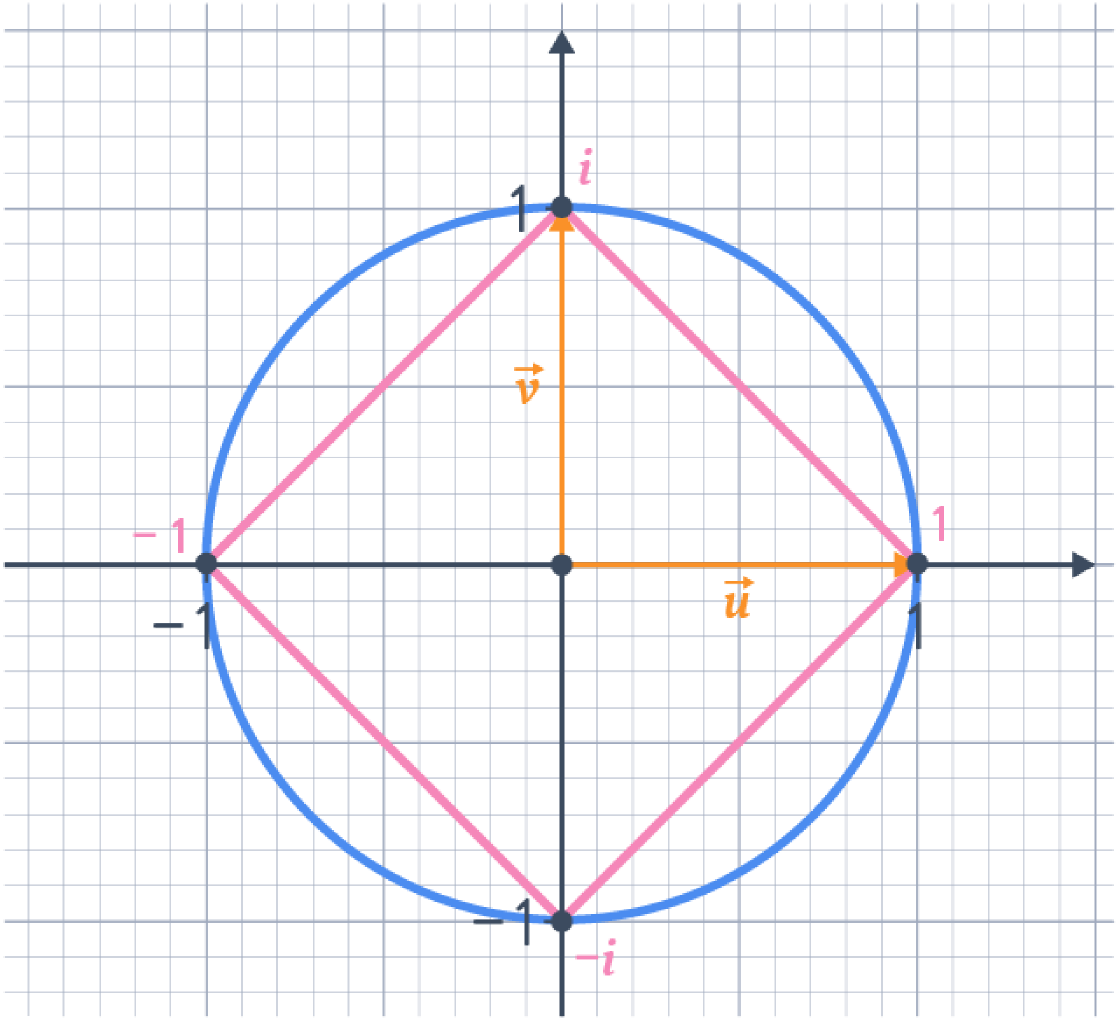
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \times c^2 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

4 **Dans le cas $n = 4$, il y a quatre solutions possibles**.

➜ L'ensemble des solutions de $z^4 = 1$ est :

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_4 &= \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times0\times\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times1\times\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times2\times\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times3\times\pi}{4}}\} \\ &= \{\mathrm{e}^0, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\} \\ &= \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\} \end{aligned}$$

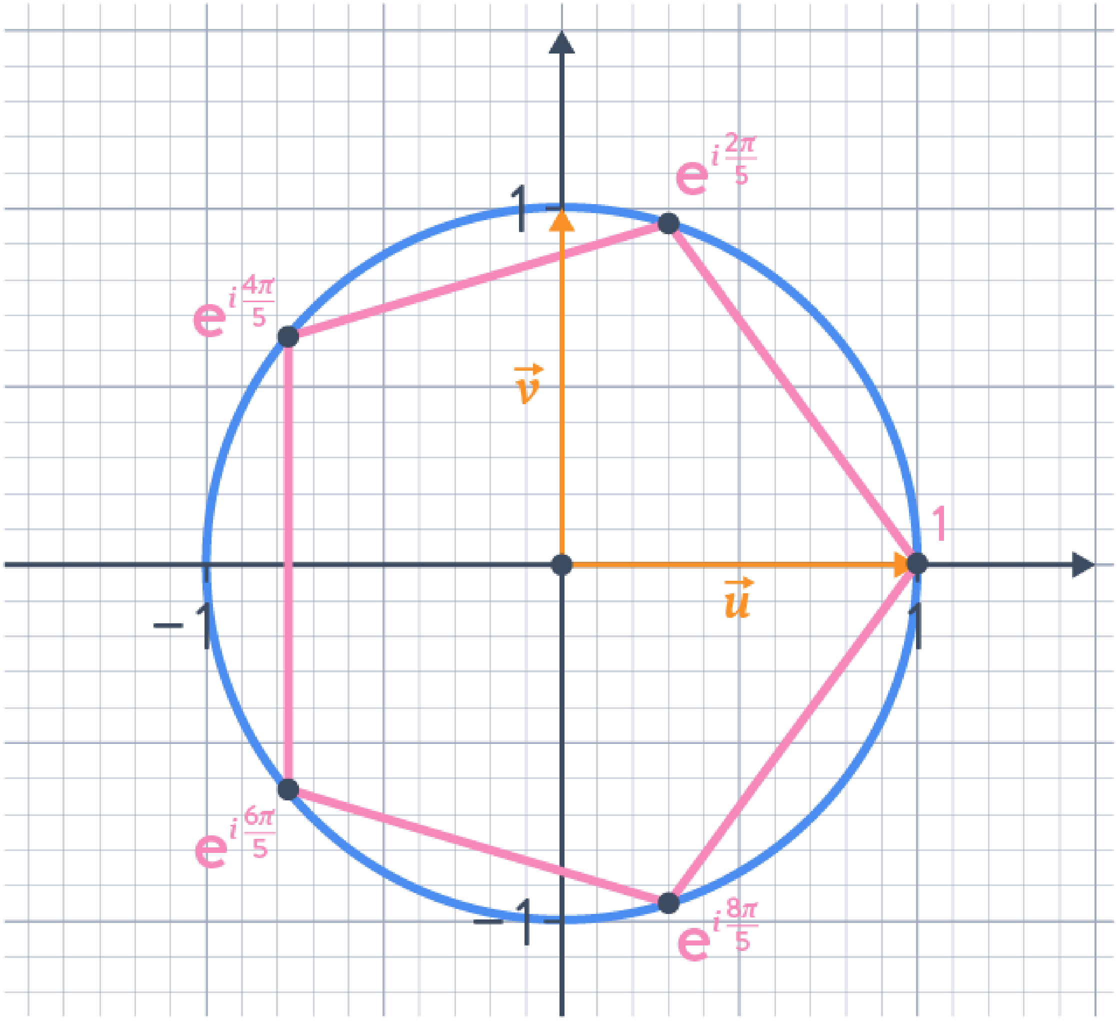
➜ Les points dont les affixes sont les racines 4-ièmes de l'unité sont les sommets d'un **carré**.



4 **Dans le cas $n = 5$, il y a cinq solutions possibles**.

➜ L'ensemble des solutions de $z^5 = 1$ est :

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_5 &= \{e^{i\frac{2\times 0\times\pi}{5}}, e^{i\frac{2\times 1\times\pi}{5}}, e^{i\frac{2\times 2\times\pi}{5}}, e^{i\frac{2\times 3\times\pi}{5}}, e^{i\frac{2\times 4\times\pi}{5}}\} \\ &= \{1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\}\end{aligned}$$



Récapitulons ce que nous venons de voir et ce qu'il faut retenir.

À retenir

Les équations de la forme $z^n = 1$ admettent exactement n solutions distinctes (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Leur ensemble solution est :

$$\mathbb{U}_n = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\ ;\ k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n-1\}$$

Chacune des solutions correspond à l'affixe d'un point situé sur le cercle trigonométrique. On remarquera que :

- le point d'affixe 1 appartient bien sûr à tous les ensembles des racines n-ièmes ;
- les autres se construisent en divisant l'angle total de 2π en n angles de même mesure, donc par rotations successives d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et de centre O.

➜ À partir de $n \geq 3$, les points associés aux affixes des racines sont les sommets de polygones réguliers.

Connaître les racines $n\text{-ièmes}$ de l'unité permettra notamment de calculer les racines $n\text{-ièmes}$ de tout nombre complexe non nul et aussi d'étudier divers polygones réguliers.

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons appris à utiliser les nombres complexes pour la résolution de problèmes géométriques. En effet, l'étude des quotients de complexes permet de déduire des propriétés géométriques, comme l'alignement, le parallélisme et la formation de figures géométriques aux propriétés spécifiques (triangle rectangle, triangle isocèle, parallélogramme…).
Enfin, la résolution d'équations du type $z^n = 1$ nous a amenés à l'étude des racines $n\text{-ièmes}$ et à la construction des polygones réguliers associés aux affixes que constituent ces racines $n\text{-ièmes}$.

Ce chapitre permet aussi de prendre conscience de l'intérêt de l'écriture exponentielle des complexes pour la résolution de certains problèmes impliquant les complexes.
Les applications géométriques liées à ce chapitre sont variées et les approches présentées ici peuvent s'étendre à l'étude d'autres propriétés géométriques.