La description du mouvement et la deuxième loi de Newt...

Cours

Sommaire

RÉSUMÉ

Les vecteurs position, vitesse et accélération permettent de décrire le mouvement d'un système. Leur écriture n'est pas la même dans un repère fixe ou dans un repère mobile. Un repère mobile est utilisé notamment dans le cas des mouvements circulaires. L'étude de la dynamique d'un système permet d'expliquer les causes et les propriétés d'un mouvement. La deuxième loi de Newton relie le vecteur accélération d'un système à la somme des forces extérieures qu'il subit.

I Les vecteurs pour décrire un mouvement

Pour décrire le mouvement d'un point, on utilise le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération. Les coordonnées de ces vecteurs dépendent du type de repère utilisé. Si les vecteurs vitesse et accélération sont colinéaires, le mouvement est rectiligne et, s'ils sont perpendiculaires, le mouvement est circulaire.

A Les vecteurs décrivant le mouvement d'un point

Pour décrire le mouvement d'un point, on utilise les vecteurs position $\overrightarrow{OM}(t)$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{a}(t)$. Les coordonnées de ces vecteurs ne s'écrivent pas de la même façon si le repère utilisé est fixe ou mobile.

1. Les vecteurs position, vitesse et accélération dans un repère fixe

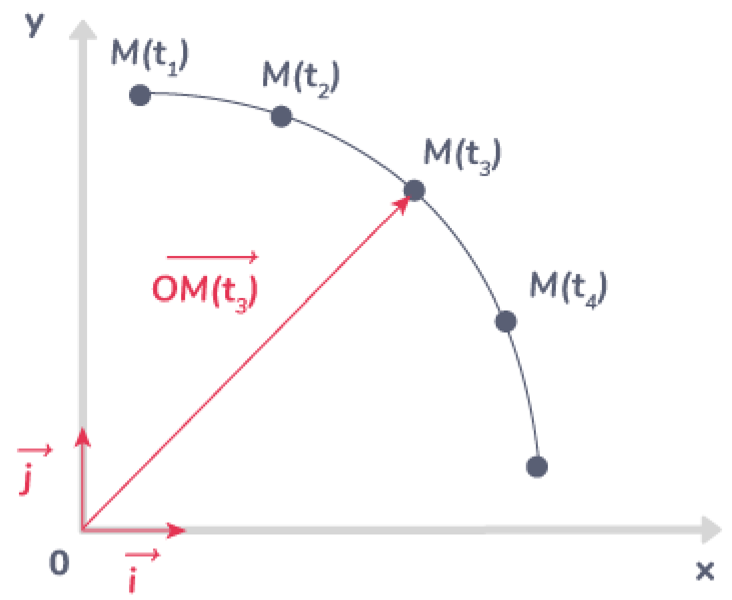
Les coordonnées du point mobile dans un repère fixe permettent de définir un vecteur position. Ce vecteur permet de suivre le mouvement du système. Les vecteurs vitesse et accélération sont alors la dérivée première et seconde du vecteur position.

DÉFINITION

Vecteur position

Le vecteur position permet de suivre le mouvement d'un point mobile dans un repère fixe.

EXEMPLE



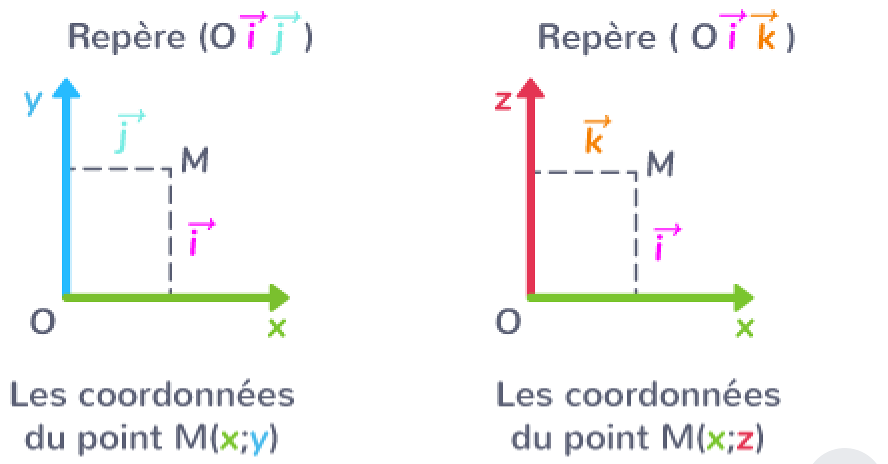
Vecteur position d'un point mobile

REMARQUE

Parfois l'axe vertical est noté $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$ et l'ordonnée du système, correspondant à son altitude, est notée z . Dans toutes les équations de ce cours, il faut alors remplacer l'ordonnée notée y par z .

EXEMPLE

La coordonnée verticale du repère peut être associée à y ou à z .

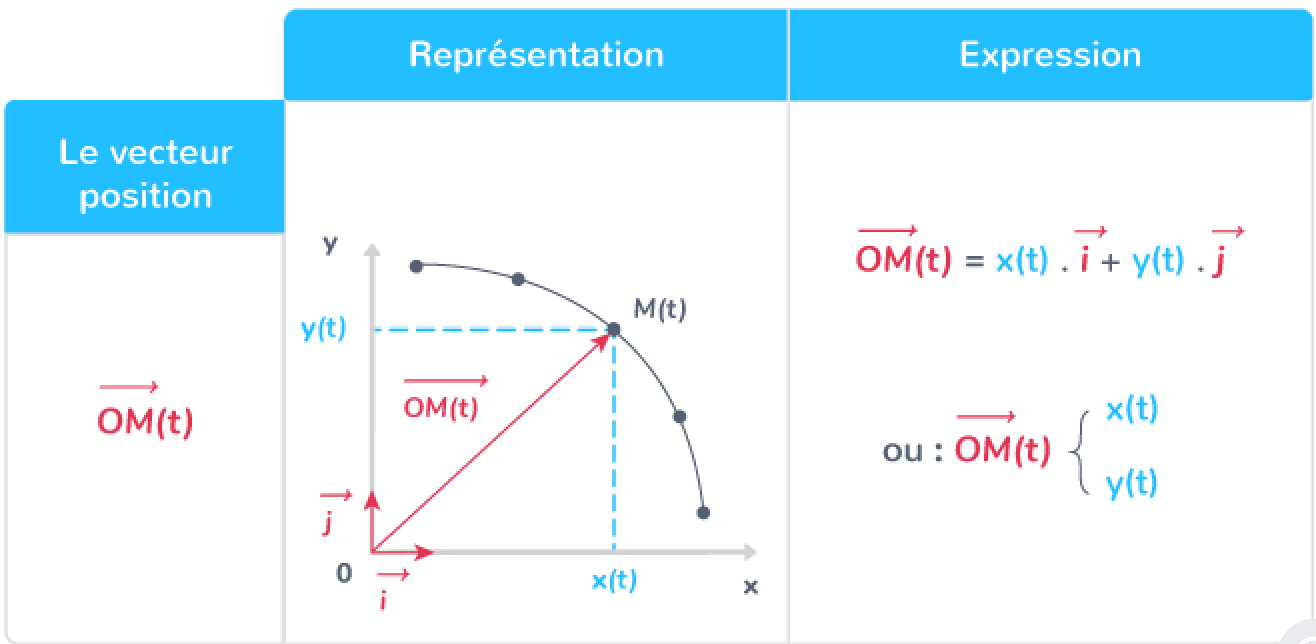


PROPRIÉTÉ

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et pour une date t_i, le vecteur position lie l'origine O au point $M\ (t_i)$ et est donc noté $\overrightarrow{OM\ (t_i)}$.

Ses composantes sont alors égales aux coordonnées du point mobile M dans ce repère :

EXEMPLE



Représentation et expression du vecteur position

Les variations du vecteur position, en norme ou en direction, sont suivies à l'aide du vecteur vitesse.

REMARQUE

La dérivée, par rapport au temps, d'une fonction $f(t)$ est notée soit $\dfrac{df}{dt}$, soit $f'(t)$.

EXEMPLE

La dérivée, par rapport au temps, du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ d'un point mobile est notée soit $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, soit $\overrightarrow{OM}'(t)$.

ASTUCE

Les dérivées qu'il faut savoir déterminer dans la suite du cours seront toujours les mêmes (A, B et C étant des constantes, ne dépendant pas du temps) :

Type de fonction	**Expression de la dérivée**
$f(t) = C$	$\frac{df}{dt} = 0$
$f(t) = B \times t + C$	$\frac{df}{dt} = B$
$f(t) = A \times t^2 + B \times t + C$	$\frac{df}{dt} = 2 \times A \times t + B$

EXEMPLE

Soit la fonction :

$$f_{(t)} = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times t + h$$

Sa dérivée est :

$$f'_{(t)} = \frac{df}{dt} = -g \times t + v_0 \times \sin(\alpha)$$

DÉFINITION

Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ d'un point est la dérivée temporelle de son vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$:

$$\mathbf{\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}}$$

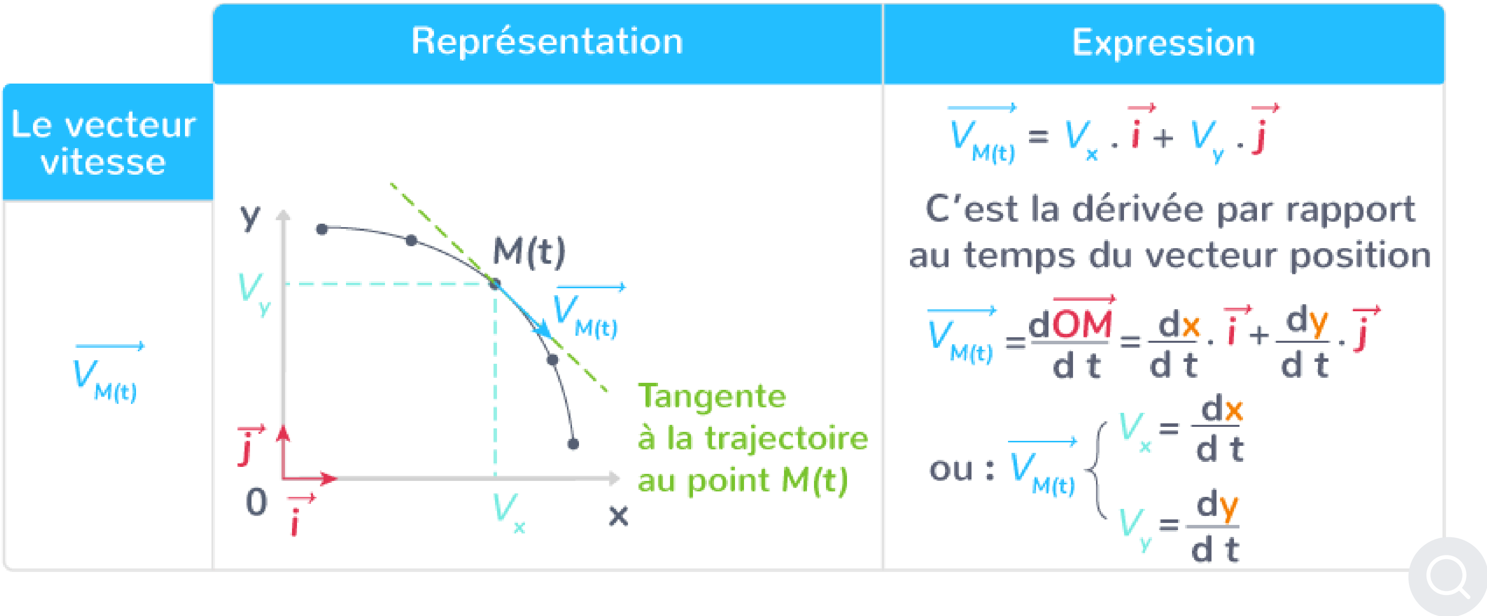
PROPRIÉTÉ

Le vecteur vitesse d'un point est caractérisé par :

- **sa valeur** v (exprimée en m.s^{-1}) ;
- **sa direction**, donnée par la tangente à la trajectoire au point M ;
- **son sens** qui correspond au sens du mouvement à l'instant t.

Les composantes du vecteur vitesse d'un point s'obtiennent en dérivant celles de son vecteur position par rapport au temps.
Sur un graphique :

- $\mathrm{v}_x\left(\mathrm{t}\right) = \dfrac{dx}{dt}$
- $\mathrm{v}_y\left(\mathrm{t}\right) = \dfrac{dy}{dt}$



Représentation et expression du vecteur vitesse

EXEMPLE

Soit le vecteur position suivant :

$$\overrightarrow{OM_{(t)}} \begin{cases} x_{(t)} = v_0 \times \cos\left(\alpha\right) \times t \\ \\ y_{(t)} = -\dfrac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times \sin\left(\alpha\right) \times t \end{cases}$$

Les composantes du vecteur vitesse du centre de gravité du système s'obtiennent en dérivant celles du vecteur position par rapport au temps :

$$\overrightarrow{v_{M(t)}} \begin{cases} v_{x(t)} = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \times \cos\left(\alpha\right) \\ \\ v_{y(t)} = \dfrac{dy}{dt} = -g \times t + v_0 \times \sin\left(\alpha\right) \end{cases}$$

Les variations du vecteur vitesse, en norme ou en direction, sont suivies à l'aide du vecteur accélération.

DÉFINITION

Le vecteur accélération

Le vecteur accélération $\vec{a}\left(t\right)$ d'un point est la dérivée temporelle de son vecteur vitesse $\vec{v}\left(t\right)$:

$$\vec{\mathbf{a}}\left(\mathbf{t}\right) = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{v}}\left(\mathbf{t}\right)}{\mathbf{dt}}$$

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ étant la dérivée temporelle du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, le vecteur accélération $\overrightarrow{a}(t)$ est aussi la dérivée seconde du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$:

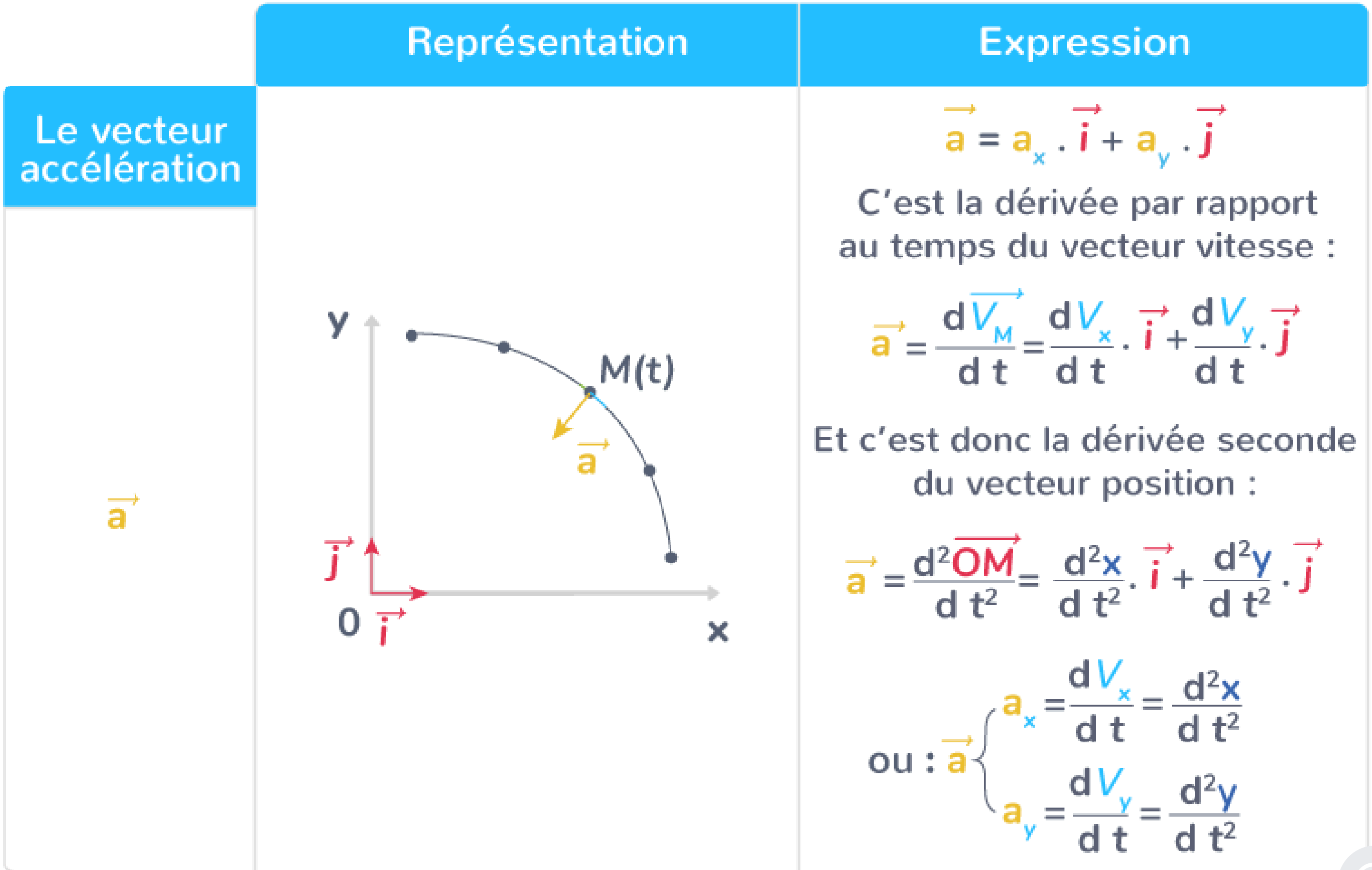
$$\overrightarrow{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{d}^2\overrightarrow{\mathbf{OM}}(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}^2}$$

PROPRIÉTÉ

Le vecteur accélération d'un point mobile est caractérisé par :

- **sa valeur** a (exprimée en $\mathrm{m.s}^{-2}$) ;
- **sa direction**, définie par la variation de direction du vecteur vitesse ;
- **son sens**, défini par la variation de norme du vecteur vitesse.

Les composantes du vecteur accélération d'un point s'obtiennent en dérivant celles de son vecteur vitesse par rapport au temps.



Représentation et expression du vecteur accélération

EXEMPLE

Soit le vecteur vitesse suivant :

$$\overrightarrow{v_{(t)}} \begin{cases} v_{x(t)} = v_0 \times \cos(\alpha) \\ \\ v_{y(t)} = -g \times t + v_0 \times \sin(\alpha) \end{cases}$$

Les composantes du vecteur accélération du centre de gravité du système s'obtiennent en dérivant celles du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\overrightarrow{a_{(t)}} \begin{cases} a_{x(t)} = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \\ a_{y(t)} = \dfrac{dv_y}{dt} = -g \end{cases}$$

2. Les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans un repère mobile

Lorsque le mouvement du système est circulaire, il est plus facile de le décrire dans un repère mobile. Les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération ont alors une expression particulière.

DÉFINITION

Repère mobile (ou repère de Frenet)

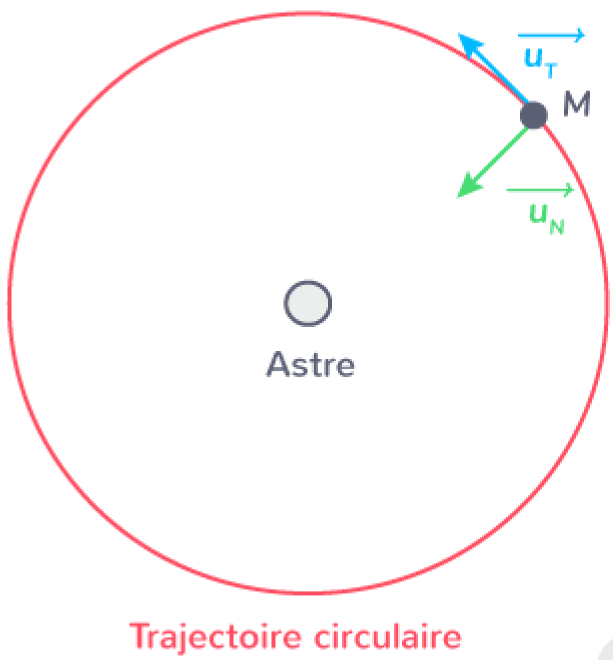
Le repère mobile (ou repère de Frenet), $\left(M, \overrightarrow{u_N}, \overrightarrow{u_T}\right)$ est un repère utilisé dans les cas où le point mobile est en mouvement autour d'un point fixe.

Ce repère est défini à partir :

- de son origine, située au niveau du point mobile M ;
- d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_N}$ qui est perpendiculaire à la trajectoire du point mobile M et pointant vers le centre de la trajectoire circulaire ;
- d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_T}$ qui est tangent à la trajectoire du point mobile M .

EXEMPLE

Les repères mobiles sont très utilisés pour décrire le mouvement circulaire de planètes ou de satellites autour d'un astre.



Repère mobile (ou repère de Frenet)

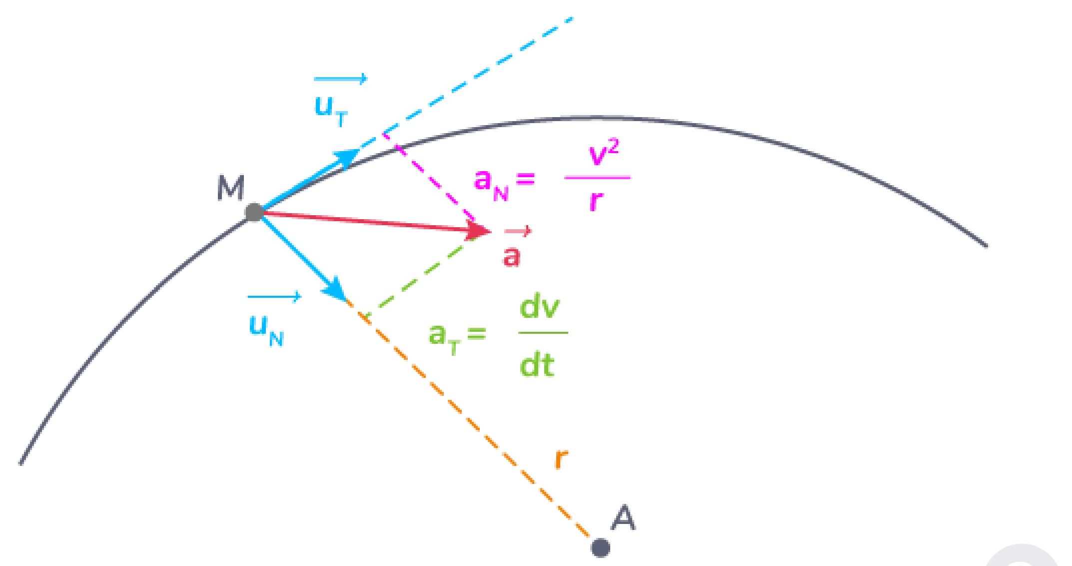
PROPRIÉTÉ

Dans un repère mobile $\left(M, \overrightarrow{u_N}, \overrightarrow{u_T}\right)$ les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ du point mobile M sont liées à sa vitesse $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{r} \end{cases}$$

La constante r est la distance qui sépare le point mobile et le point autour duquel il est en mouvement.

EXEMPLE



Composantes du vecteur accélération dans le repère mobile

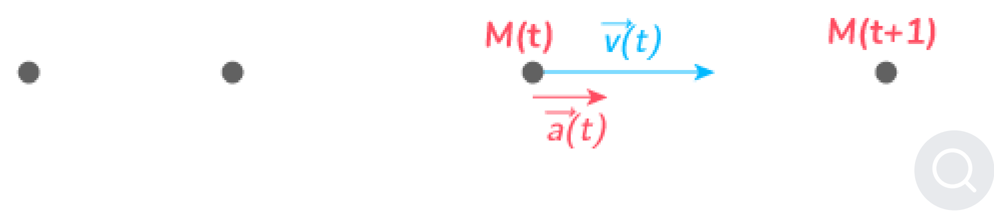
B Le mouvement rectiligne uniformément accéléré

Lorsque la trajectoire du point mobile est une droite et que son accélération est constante, son mouvement est dit « rectiligne uniformément accéléré ».

PROPRIÉTÉ

Dans un mouvement rectiligne, la trajectoire du point mobile est une droite. Les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v_{(t)}}$ et accélération $\overrightarrow{a_{(t)}}$ sont alors colinéaires.

EXEMPLE



Vecteurs vitesse et accélération d'un mouvement rectiligne

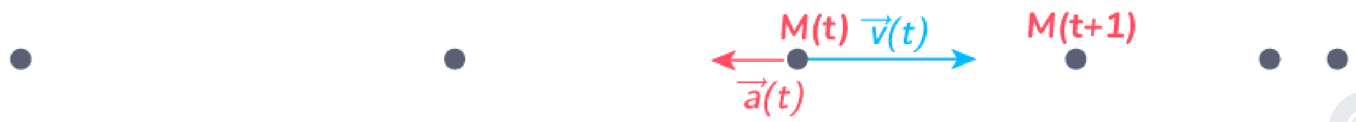
PROPRIÉTÉ

Les mouvements rectilignes sont qualifiés différemment en fonction du vecteur accélération :

- Si $\overrightarrow{a_{(t)}} = \overrightarrow{0}$, la vitesse est constante et le mouvement est **rectiligne uniforme**.
- Si $\overrightarrow{a_{(t)}} = \overrightarrow{constante}$, le mouvement est rectiligne **uniformément varié**. Le mouvement est accéléré si les vecteurs $\overrightarrow{v_{(t)}}$ et $\overrightarrow{a_{(t)}}$ sont de même sens et ralenti s'ils sont opposés.

EXEMPLE

Ci-dessous, la répartition des points d'un solide suivant un mouvement rectiligne uniformément ralenti. Les vecteurs vitesse et accélération sont bien colinéaires mais de sens contraires.



Vecteurs vitesse et accélération d'un mouvement rectiligne uniformément ralenti

C Le mouvement circulaire uniforme

Lorsque la trajectoire du point mobile est un cercle et que sa vitesse est constante, son mouvement est dit « circulaire uniforme ».

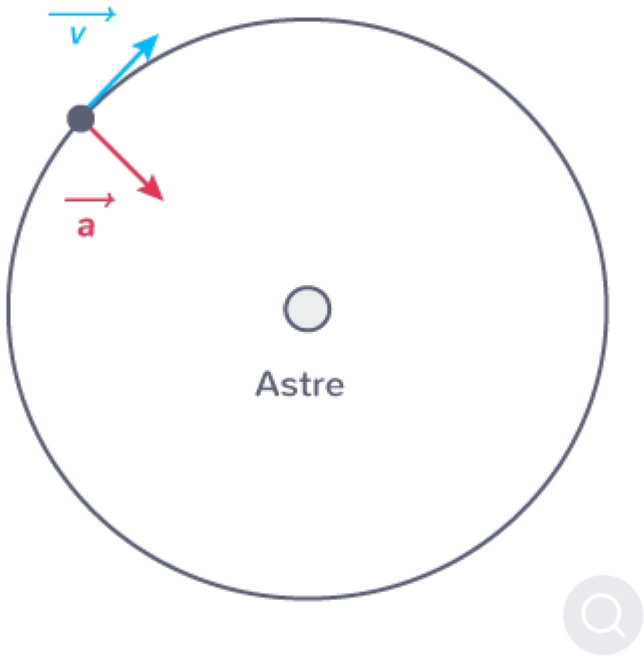
PROPRIÉTÉ

Dans un mouvement circulaire uniforme, la trajectoire du point mobile est un cercle et sa vitesse est constante. Les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v_{(t)}}$ et accélération $\overrightarrow{a_{(t)}}$ sont alors perpendiculaires :

- Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{(t)}}$ est tangent à la trajectoire circulaire, orienté dans le sens du mouvement.
- Le vecteur accélération $\overrightarrow{a_{(t)}}$ est dirigé vers le centre du cercle.

EXEMPLE

On reprend l'exemple de la trajectoire d'un corps autour d'un astre. Si son mouvement est circulaire et uniforme, on a :



Vecteurs vitesse et accélération d'un mouvement circulaire

II L'étude de la dynamique d'un système

L'étude de la dynamique d'un système nécessite de définir la notion de centre de masse et les conditions d'un référentiel galiléen. Dans ces conditions, la deuxième loi de Newton s'applique. L'équilibre d'un système est un cas particulier. Dans ce cas, les forces extérieures que subit le système se compensent.

A Le centre de masse d'un système

Le centre de masse d'un système est le point par rapport auquel la masse est uniformément répartie. Pour un système homogène, ce centre de masse est confondu avec son centre géométrique. C'est le point sur lequel on peut appliquer les forces extérieures pour déterminer leur résultante.

DÉFINITION

Centre de masse

Le centre de masse d'un système est le point situant la position moyenne de sa masse. Pour un système homogène, ce point est confondu avec son centre géométrique.

EXEMPLE

Le centre de masse d'un adulte se situe à peu près au niveau de son nombril. Le centre de masse d'un système {cycliste + vélo} est plus bas car la masse du vélo en dessous du cycliste est à prendre en compte.

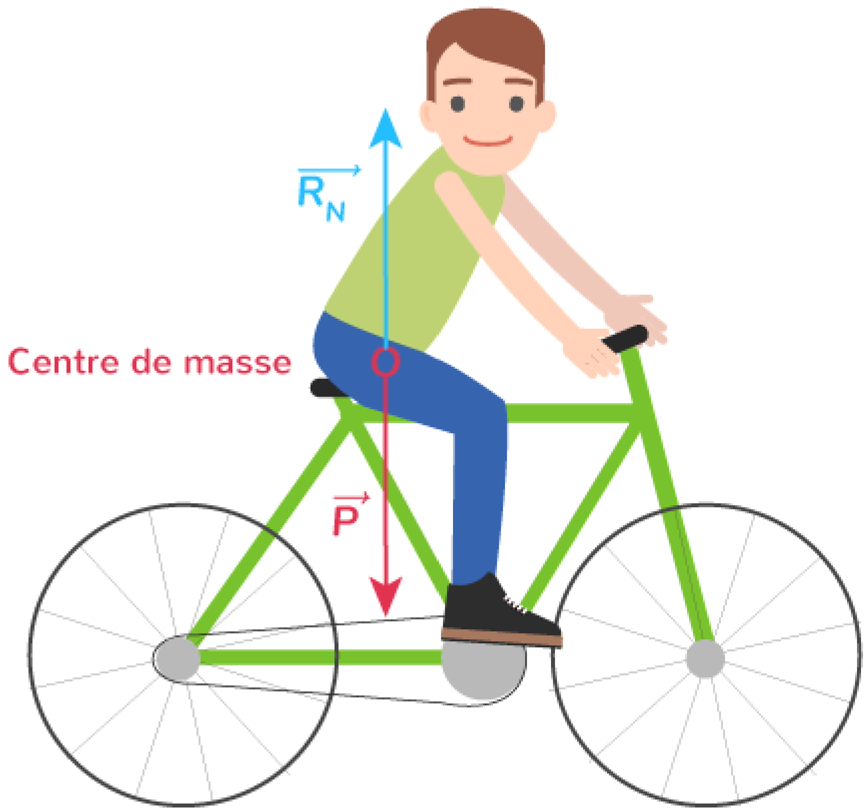
Centre de masse du système {cycliste + vélo}

PROPRIÉTÉ

Le centre de masse d'un système est le point sur lequel on peut appliquer les forces extérieures pour déterminer leur résultante.

EXEMPLE

Les forces qui s'exercent sur le système {cycliste + vélo} sont son poids $\overrightarrow{P}$ et la réaction normale du sol $\overrightarrow{R_N}$. Pour interpréter l'effet de ces forces sur le mouvement de ce système, on les applique à partir de son centre de masse.



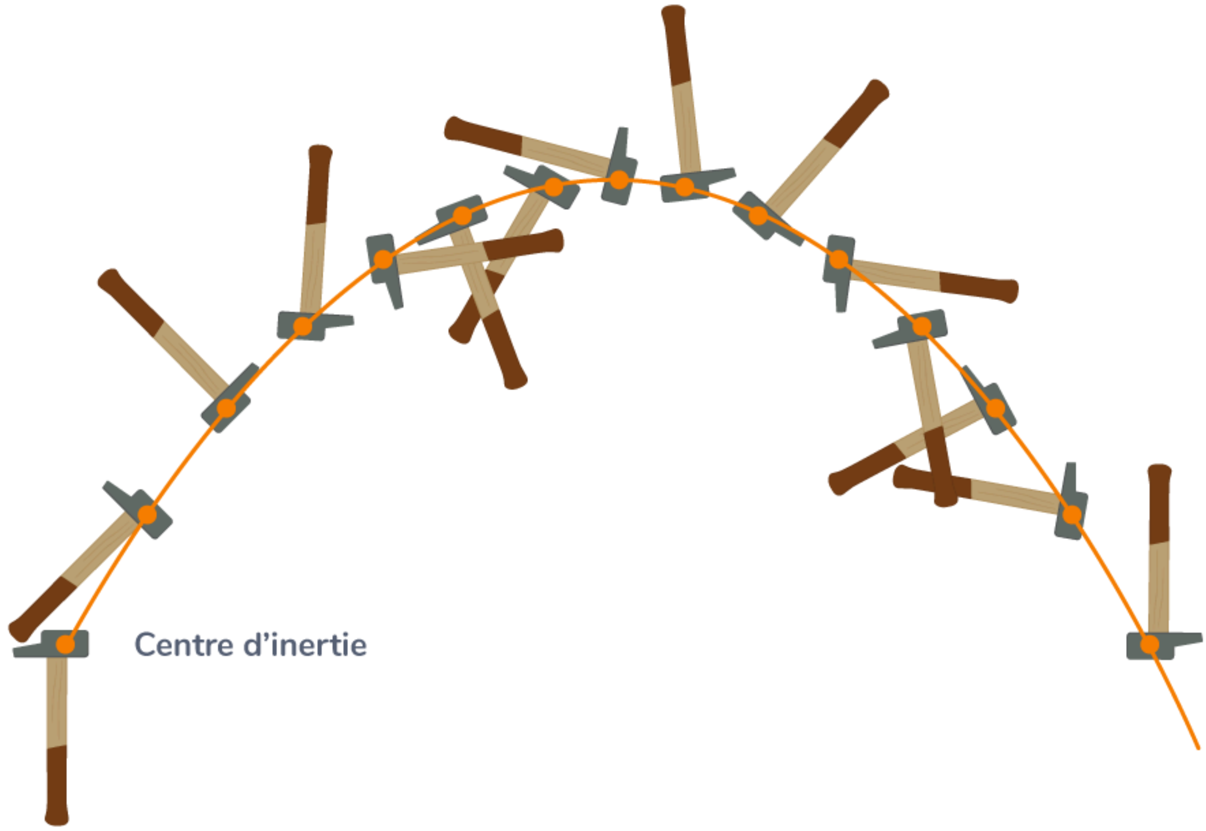
Forces qui s'appliquent sur le système {cycliste + vélo}

REMARQUE

Le centre de la masse d'un solide homogène est aussi confondu avec son centre d'inertie, qui est le point du solide qui a le mouvement le plus simple. Il est donc judicieux de limiter l'étude du mouvement d'un corps à son centre de masse. C'est pour cette raison que nous assimilerons généralement un corps à son centre de masse pour l'étude de son mouvement.

EXEMPLE

Lors du mouvement d'un marteau, le centre d'inertie est le point qui a le mouvement le plus simple.



Mouvement du centre de masse d'un marteau

B Les référentiels galiléens

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel on peut appliquer les lois de Newton. Tout référentiel lié à un solide en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui aussi galiléen.

DÉFINITION

Référentiel galiléen

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel les lois de Newton sont applicables.

EXEMPLE

Le référentiel héliocentrique est un référentiel galiléen.

PROPRIÉTÉ

Les référentiels géocentrique et terrestre peuvent aussi être considérées comme galiléens, mais pour des mouvements d'assez courtes durées.

EXEMPLE

Les durées des mouvements étudiés ne doivent pas dépasser 24 heures dans le référentiel géocentrique et quelques minutes au maximum dans le référentiel terrestre.

PROPRIÉTÉ

Si dans un référentiel galiléen on associe à un solide au repos ou en mouvement rectiligne un nouveau référentiel, il sera aussi galiléen.

EXEMPLE

Un véhicule au repos ou en mouvement rectiligne et uniforme dans le référentiel terrestre est un référentiel galiléen. Par contre, si le véhicule accélère, ralentit ou change de direction, le véhicule n'est plus un référentiel galiléen.

C La deuxième loi de Newton

La deuxième loi de Newton permet d'expliquer les causes et les propriétés d'un mouvement. La deuxième loi de Newton relie le vecteur accélération d'un système à la somme des forces extérieures qu'il subit.

LOI

Deuxième loi de Newton ou relation fondamentale de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces extérieures $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$ appliquées à un système est égale au produit de sa masse m et du vecteur accélération de son centre de masse $\overrightarrow{a}$:

$$\sum \overrightarrow{\mathbf{F_{ext}}} = \mathbf{m} \times \overrightarrow{\mathbf{a}}$$

PROPRIÉTÉ

Si le mouvement du centre de masse d'un système est connu, alors la deuxième loi de Newton permet de déduire le **vecteur résultante des forces extérieures** appliquées au système. En effet, d'après la relation $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \times \overrightarrow{a}$, donc le vecteur résultante des forces extérieures $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$ a :

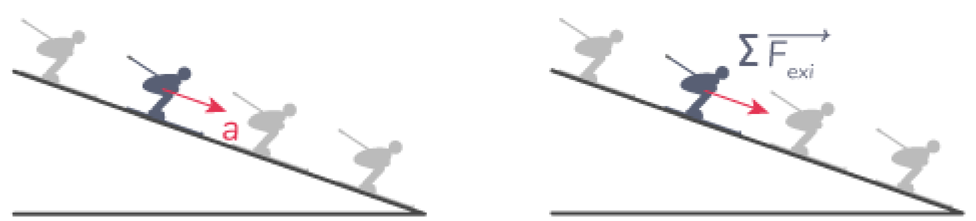
- la même **direction** et le même **sens** que le vecteur accélération du centre de masse $\overrightarrow{a}$;
- la **valeur** $\left\|\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right\|_{(\text{N})} = m_{(\text{kg})} \times a_{(\text{m.s}^{-2})}$.

EXEMPLE

Un skieur descend une piste, donc son vecteur accélération est parallèle à la pente.

D'après la deuxième loi de Newton :
$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \times \overrightarrow{a}$

Le vecteur résultante des forces extérieures $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$ a donc la même direction et le même sens que le vecteur accélération du centre de masse $\overrightarrow{a}$.



Vecteurs accélération d'un skieur et résultantes des forces qu'il subit

Reste à déterminer la valeur de la résultante des forces extérieures sur le skieur. Si la masse du système {skieur + équipement} est $m = 90 \text{ kg}$ et que la valeur de son accélération est $a = 3{,}0 \text{ m.s}^{-2}$, alors d'après la deuxième loi de Newton la valeur de la résultante des forces extérieures qu'il subit est :

$$\left\|\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right\|_{(\text{N})} = m_{(\text{kg})} \times a_{(\text{m.s}^{-2})}$$

$$\left\|\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right\| = 90 \times 3{,}0$$

$$\left\|\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right\| = 2{,}7 \times 10^2 \text{ N}$$

À l'aide de la deuxième loi de Newton, on a donc pleinement déterminé la résultante des forces extérieures.

PROPRIÉTÉ

Si les forces que subit un système sont connues, alors la deuxième loi de Newton permet de déduire le **vecteur accélération** du centre de masse du système. En effet, d'après la relation $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \times \overrightarrow{a}$, le vecteur accélération peut aussi s'écrire : $\overrightarrow{a} = \dfrac{\sum \overrightarrow{F_{ext}}}{m}$, donc le vecteur accélération du centre de masse $\overrightarrow{a}$ a :

- la même **direction** et le même **sens** que le vecteur résultante des forces extérieures $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$;
- la **valeur** $a_{(\text{m.s}^{-2})} = \dfrac{\left\|\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right\|_{(\text{N})}}{m_{(\text{kg})}}$.

EXEMPLE

Une moto en mouvement rectiligne accéléré sur une route horizontale est soumise à trois forces extérieures : son poids, la réaction normale du sol et la force exercée par le moteur.

Ici, le poids et la réaction normale se compensent, et on a :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R_N} = \overrightarrow{0}$$

Donc la somme des forces extérieures que subit la moto se réduit à la force $\overrightarrow{F}$ exercée par le moteur :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{F}$$
$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}$$

D'après la deuxième loi de Newton, on a :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \times \overrightarrow{a}$$

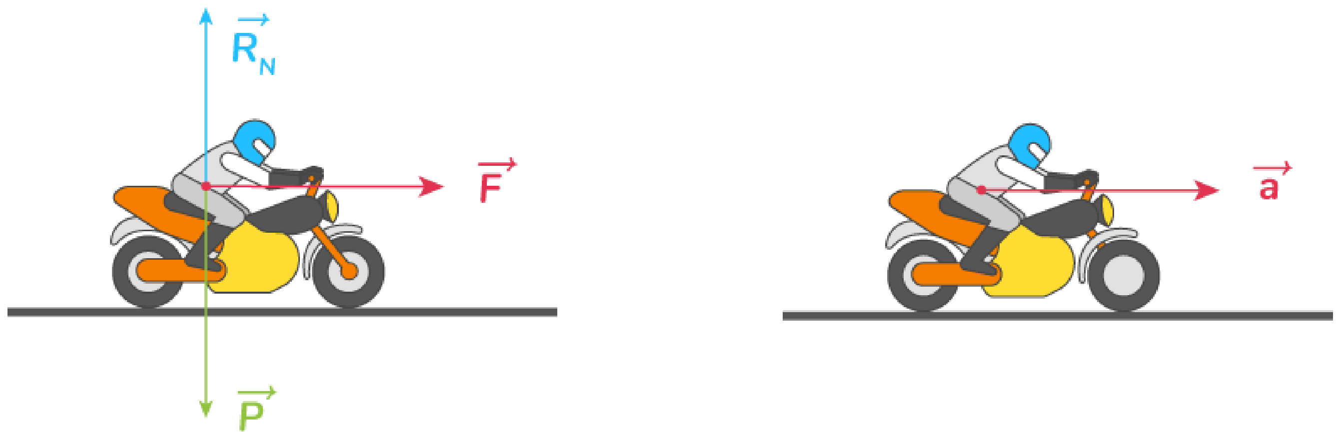
Soit :

$$\overrightarrow{F} = m \times \overrightarrow{a}$$

Donc, on obtient :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

On en déduit le sens et la direction du vecteur accélération, ce sont les mêmes que ceux de la force motrice $\vec{F}$.



Forces subies par une moto et son vecteur accélération

Si la valeur de la force motrice $\vec{F}$ est $F = 500 \text{ N}$ et que la masse de la moto est $m = 200 \text{ kg}$, alors d'après la seconde loi de Newton la valeur de son accélération est :

$$a_{(\text{m.s}^{-2})} = \frac{F_{(\text{N})}}{m_{(\text{kg})}}$$

$$a = \frac{500}{200}$$

$$a = 2{,}50 \text{ m.s}^{-2}$$

D L'équilibre d'un système

Un système est en équilibre dans un référentiel galiléen si ses vecteurs accélération et vitesse sont des vecteurs nuls. C'est le cas si les forces extérieures que le système subit se compensent.

PROPRIÉTÉ

Dans un référentiel galiléen, un système est en équilibre (ou au repos) si ses vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ sont égaux à des vecteurs nuls.

EXEMPLE

Lorsqu'un livre est en équilibre dans le référentiel terrestre, ses vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ sont égaux à des vecteurs nuls.

Livre en équilibre

PROPRIÉTÉ

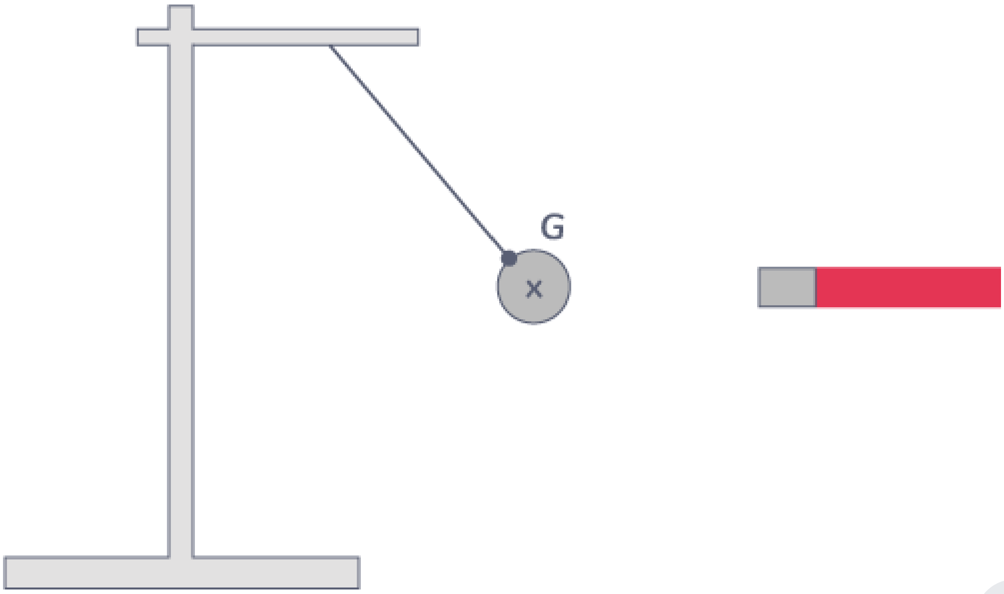
D'après la deuxième loi de Newton, pour qu'un système soit en équilibre et que son vecteur accélération soit égal au vecteur nul, alors il faut que la résultante des forces extérieures soit égale au vecteur nul :

$$\sum \overrightarrow{\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

Dans cette situation, on dit que les forces se compensent : leurs effets s'annulent.

EXEMPLE

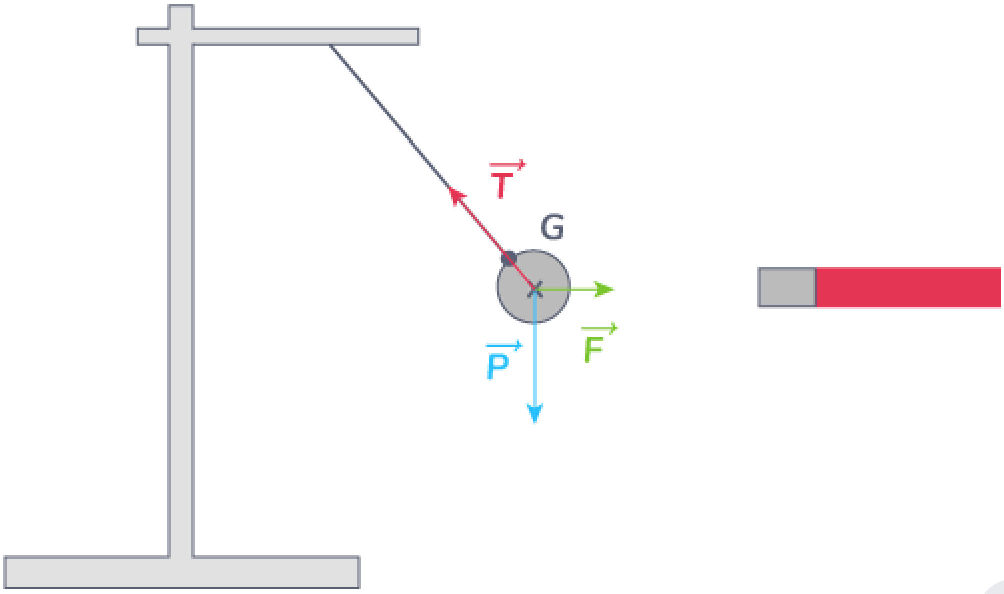
Dans le référentiel terrestre, une bille métallique est maintenue en équilibre sous l'action d'un aimant :



Bille en équilibre

Les forces extérieures qui s'exercent sur le système {bille} sont :

- son poids $\overrightarrow{P}$;
- la tension du fil $\overrightarrow{T}$;
- la force exercée par l'aimant $\overrightarrow{F}$.



Forces extérieures qui s'exercent sur la bille

La bille étant en équilibre, la résultante des forces extérieures est égale au vecteur nul :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$$

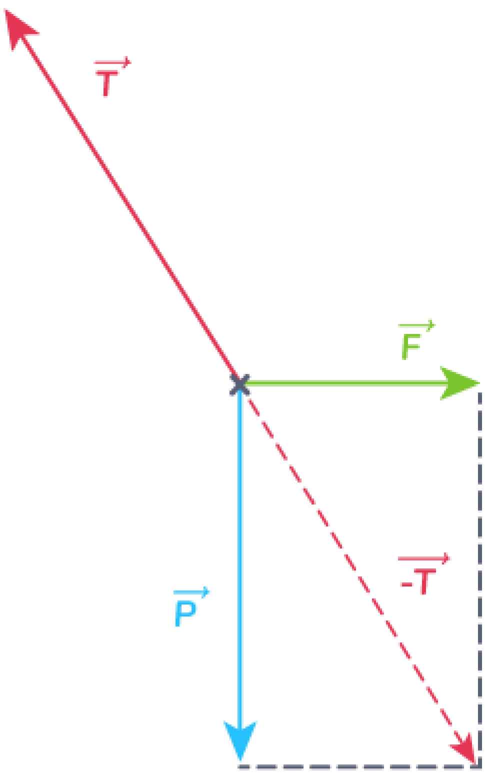
On en déduit que les trois forces se compensent :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

Donc, on obtient :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} = -\overrightarrow{T}$$

Ce résultat est cohérent avec la direction et le sens de ces vecteurs qu'on retrouve par somme vectorielle :



Les forces qui s'exercent sur la bille se compensent