La dérivation

Cours

Sommaire

I La dérivée de la composée de deux fonctions

Les quatre opérations de base permettent d'étudier un grand nombre de fonctions. Dans certains cas, on peut également décomposer une fonction comme une composition de plusieurs fonctions usuelles pour simplifier son étude.

DÉFINITION

La composée de deux fonctions

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un intervalle J de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur l'intervalle J .

On appelle **composée de f suivie de g** la fonction h définie pour tout réel x de l'intervalle I par :
$h(x)=g(f(x))$

EXEMPLE

La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\sin\left(x^2\right)$ est la composée de la fonction f suivie de g où :

- f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$;
- g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sin(x)$.

PROPRIÉTÉ

La fonction composée de la fonction f suivie de la fonction g est notée $g\circ f$.

EXEMPLE

La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^2+2}$ vérifie $h = g \circ f$ où :

- f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2$;
- g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

PROPRIÉTÉ

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un intervalle J de $\mathbb{R}$ et g une fonction dérivable sur l'intervalle J .

Alors la fonction $h = g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I , on a :
$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

EXEMPLE

La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin\left(x^2\right)$ est la composée de la fonction f suivie de g où :

- f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$;
- g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(x)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a :
$f'(x) = 2x$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a :
$g'(x) = \cos(x)$

Par conséquent, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a :
$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$
$h'(x) = \cos\left(x^2\right) \times 2x$

II La dérivée seconde

Lorsque c'est possible, dériver la dérivée d'une fonction apporte des informations supplémentaires sur la représentation graphique de la fonction de départ. La fonction obtenue s'appelle la dérivée seconde.

DÉFINITION

Dérivée seconde d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si la dérivée f' de la fonction f est dérivable sur un sous-intervalle J inclus dans I , alors sa dérivée est appelée **dérivée seconde de la fonction** f .

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \sin(x)$ la fonction sinus définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \cos(x)$, soit la fonction cosinus.

Cette fonction étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f admet donc une dérivée seconde qui est la fonction :
$x \mapsto -\sin(x)$

PROPRIÉTÉ

Lorsqu'une fonction f admet une dérivée seconde sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note sa dérivée seconde :
f'' ou $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$

EXEMPLE

Soit f la fonction exponentielle.

On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f' = f$.

Par conséquent, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction f admet donc une dérivée seconde sur $\mathbb{R}$ et $f'' = (f')' = f' = f$.

La dérivée seconde de la fonction exponentielle est elle-même.

ASTUCE

Pour étudier les variations d'une fonction f dérivable sur un intervalle I, on étudie souvent le signe de $f'(x)$ sur I.

Si on n'est pas en mesure de déterminer le signe de $f'(x)$ sur I, on peut peut-être étudier les variations de f', dresser son tableau de variations et en déduire le signe de $f'(x)$.

Pour cela on peut, par exemple, étudier le signe de sa dérivée (si elle existe), soit le signe de $f''(x)$ sur I.

III La convexité

Outre les variations d'une fonction, on peut s'intéresser à la « courbure » de la représentation graphique d'une fonction, c'est-à-dire sa convexité.

A Les fonctions convexes

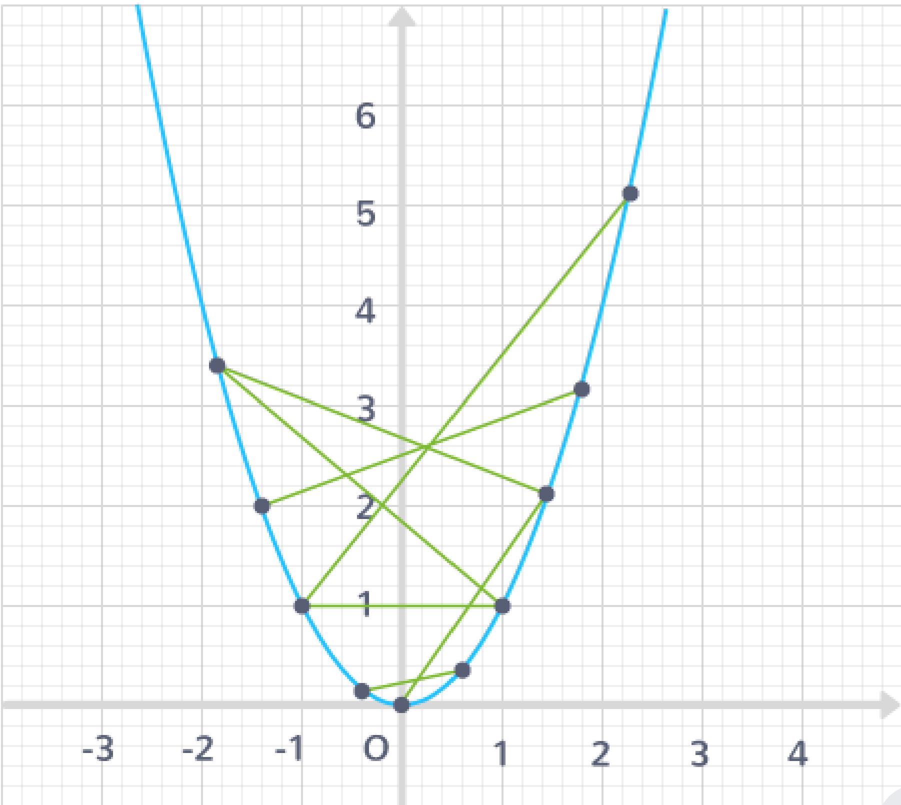
La notion de convexité permet de différencier les fonctions convexes des fonctions concaves. Mais comme pour les variations, de nombreuses fonctions changent de convexité sur leur ensemble de définition.

DÉFINITION

Fonction convexe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

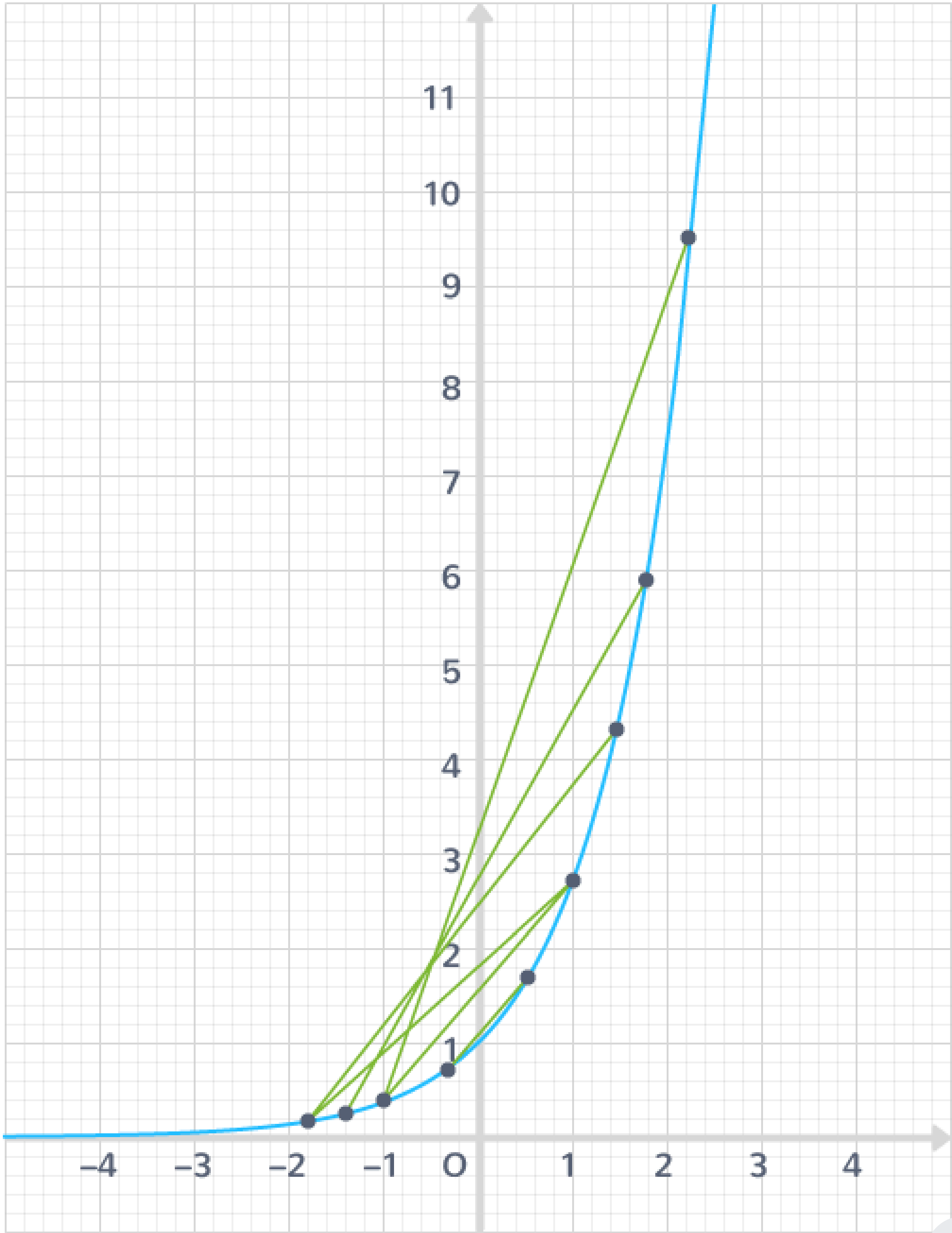
On dit que f **est convexe sur** I si sa courbe représentative dans un repère du plan est toujours située en dessous de ses sécantes.



EXEMPLE

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe représentative est bien située au-dessous de toutes ses sécantes.

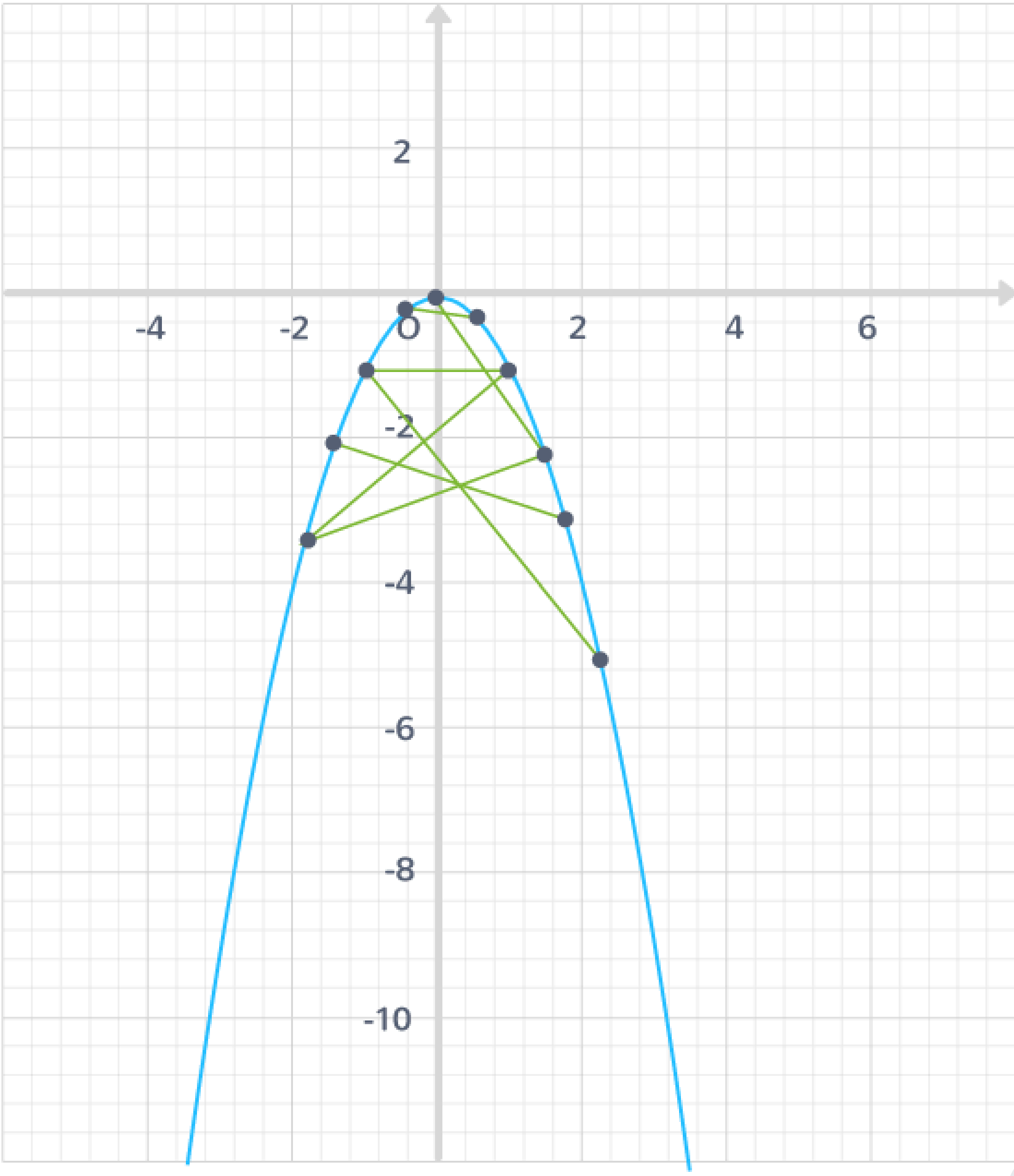


DÉFINITION

Fonction concave

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

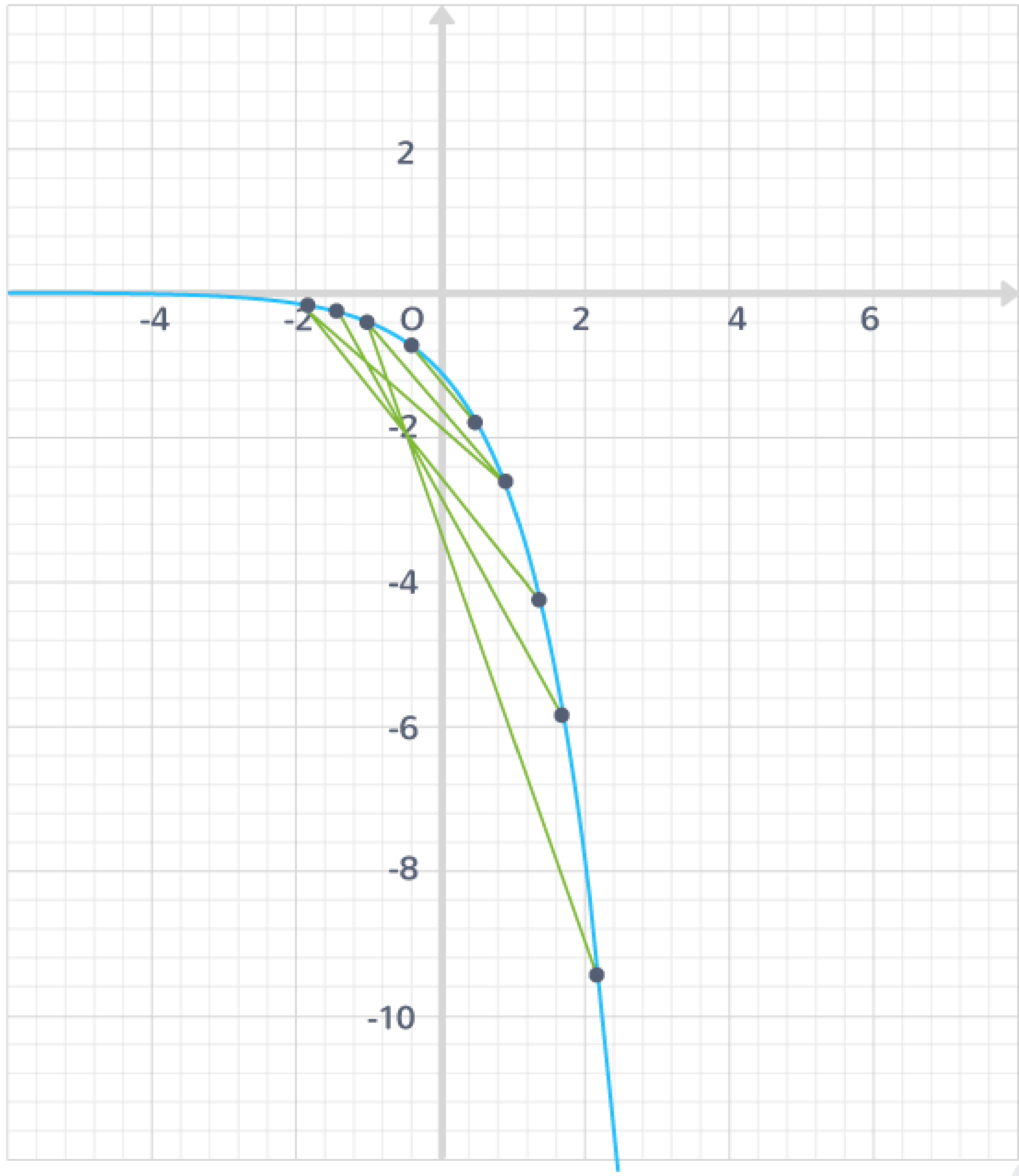
On dit que f **est concave sur** I si sa courbe représentative dans un repère du plan est toujours située au-dessus de ses sécantes.



EXEMPLE

La fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{x}$ est concave sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe représentative est bien située au-dessus de toutes ses sécantes.



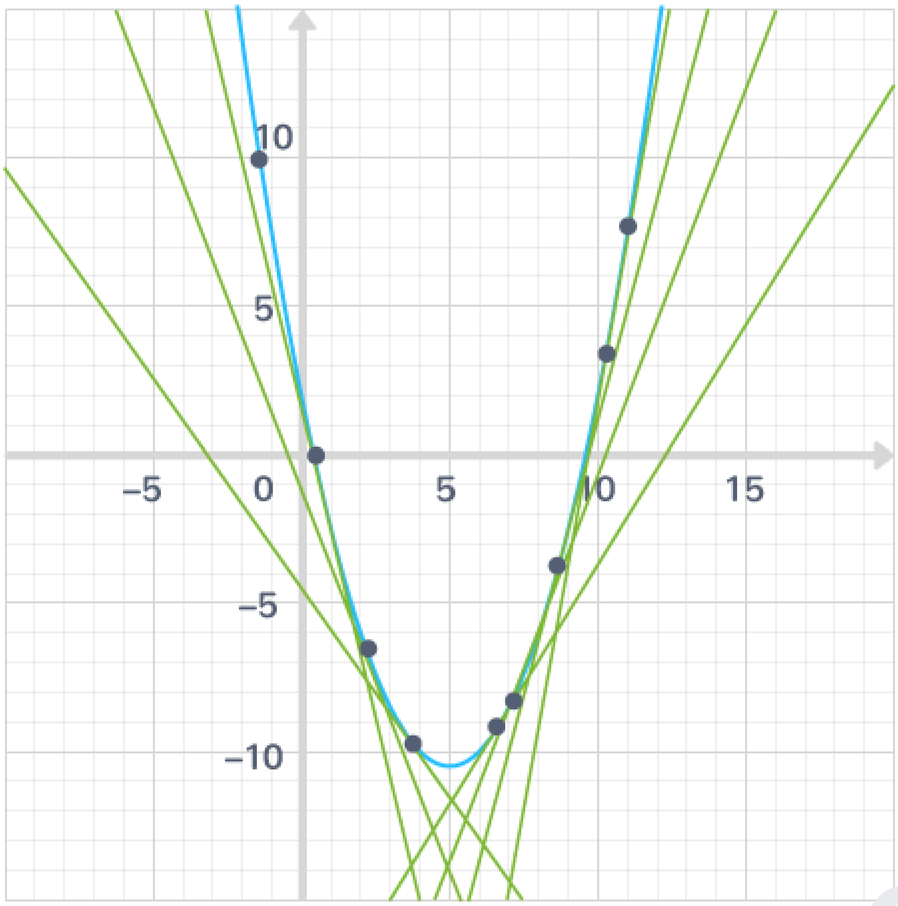
PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

La fonction f est convexe sur I si et seulement si sa courbe représentative dans un repère du plan est toujours située au-dessus de ses tangentes.

EXEMPLE

La fonction $x \mapsto 0{,}5x^2 - 5x + 2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative dans un repère est bien toujours située au-dessus de ses tangentes.



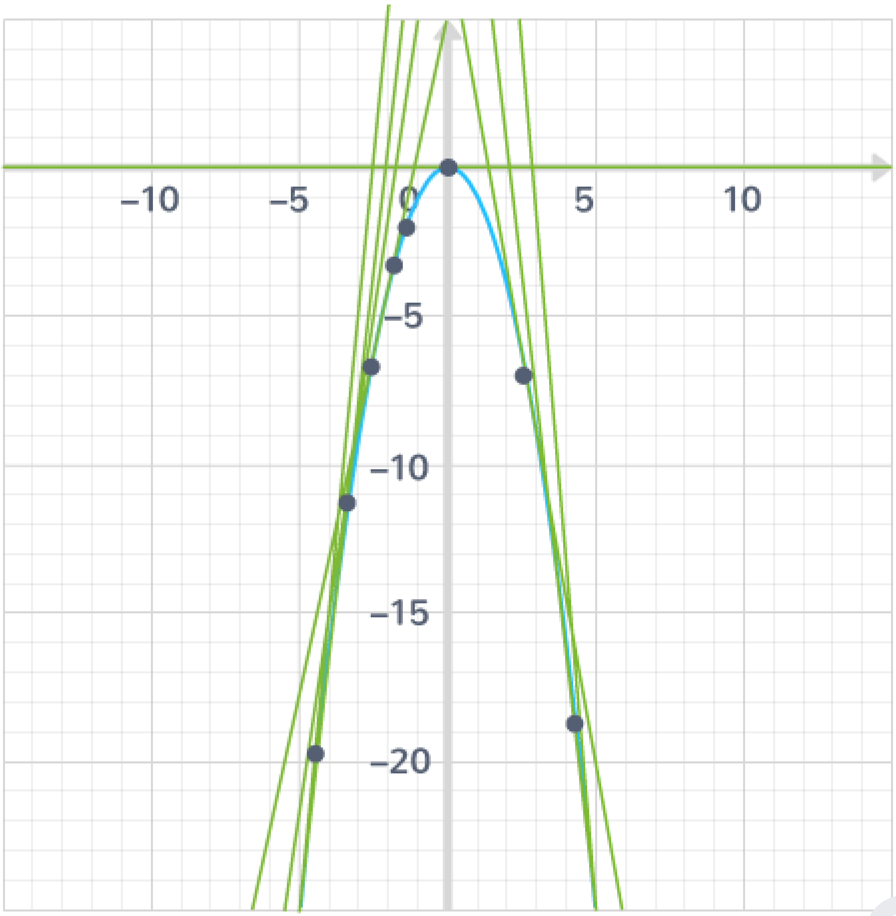
REMARQUE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

La fonction f est concave sur I si et seulement si sa courbe représentative dans un repère du plan est toujours située en dessous de ses tangentes.

EXEMPLE

La fonction $x \mapsto -x^2$ est concave sur $\mathbb{R}$.



PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est convexe si et seulement si sa dérivée f' est croissante sur I.
- f est concave si et seulement si sa dérivée f' est décroissante sur I.

EXEMPLE

Soit f la fonction carré sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée sur $\mathbb{R}$ est la fonction affine $x \mapsto 2x$ qui est croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction carré est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive sur I.
- f est concave si et seulement si sa dérivée seconde f'' est négative sur I.

DÉMONSTRATION

On va démontrer que si f'' est positive, alors la courbe de f est au-dessus de ses tangentes.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I telle que $f''(x) \geq 0$ sur I.

Soit a un réel de l'intervalle I .

Une équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse a est :
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

On cherche à montrer que $g(x) = f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$ est toujours positive sur I .

La fonction g est dérivable sur I , comme somme de fonctions dérivables, et, pour tout réel x de I , on a :
$g'(x) = f'(x) - f'(a)$

Comme $f''(x) \geq 0$ sur I , la fonction f' est croissante sur I .

On en déduit :

- $g'(x) \geq 0$ pour tout réel x de I tel que $x \geq a$;
- $g'(x) \leq 0$ pour tout réel x de I tel que $x \leq a$.

La fonction g est donc décroissante « avant a » et croissante « après a ».

Elle admet donc un minimum en a .

Or $g(a) = f(a) - [f'(a)(a - a) + f(a)] = 0$.

Par conséquent :
$g(x) \geq 0$ sur I

On a bien : la courbe de f est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse a .

Ceci étant valable quel que soit le réel a de l'intervalle I , la courbe de f est bien au-dessus de toutes ses tangentes.

Ainsi, si $f''(x)$ est positive sur I , la fonction f est convexe sur I .

EXEMPLE

Soit f la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

f est deux fois dérivable et pour tout réel x , on a :
$f''(x) = f'(x) = f(x) = \mathrm{e}^x$

Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, f'' est positive sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

B Les points d'inflexion

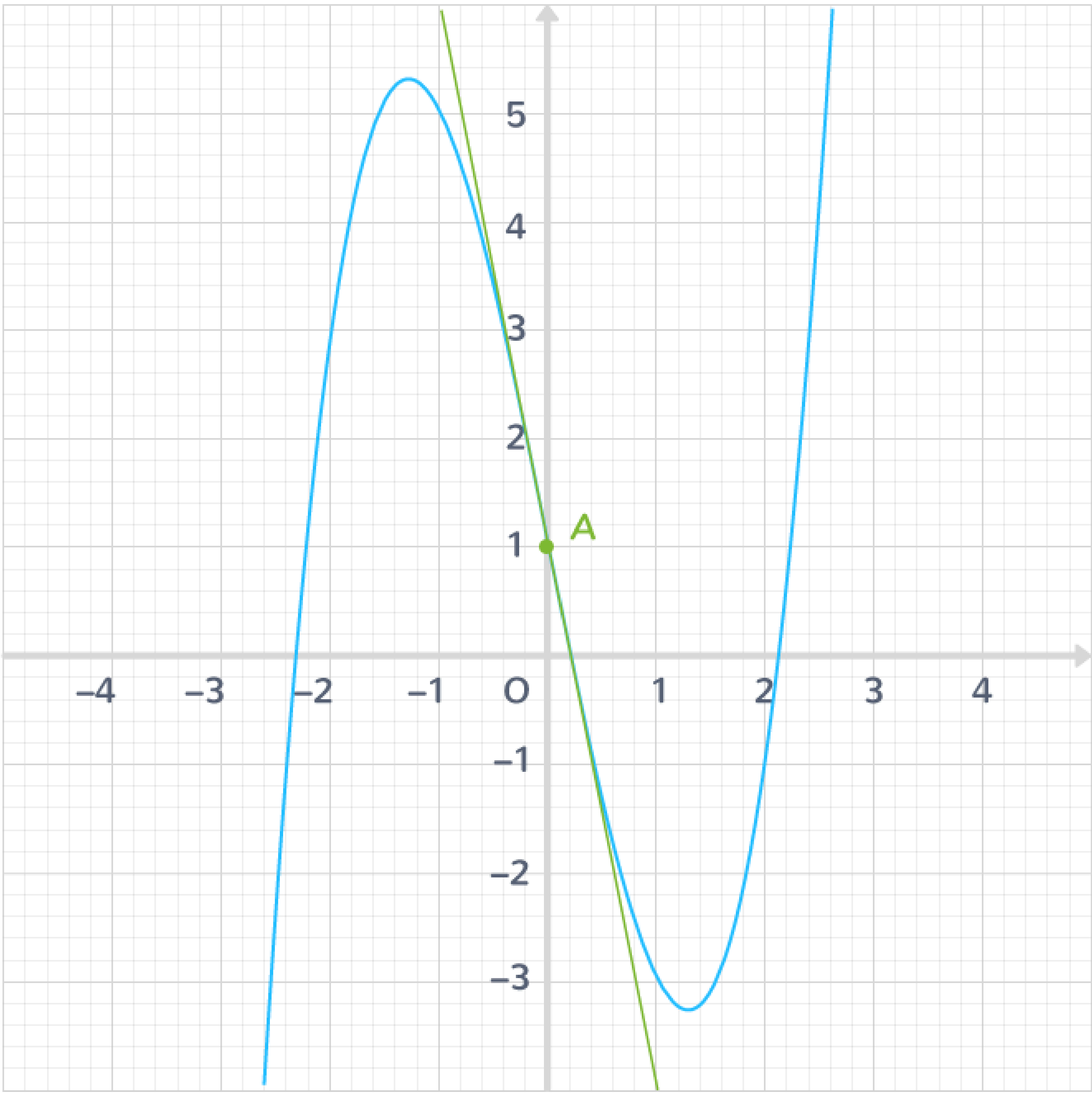
Lorsqu'une fonction change de convexité sur son ensemble de définition, cela crée des points d'inflexion aux endroits où la représentation graphique change de courbure.

DÉFINITION

Point d'inflexion

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et A un point de $\mathcal{C}$.

On dit que A est un **point d'inflexion pour** $\mathcal{C}$, si $\mathcal{C}$ admet une tangente en A et si elle traverse cette tangente en A.



PROPRIÉTÉ

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère et A un point d'abscisse a de sa courbe.

- Si A est un point d'inflexion pour $\mathcal{C}$, alors f change de convexité en a .
- Si de plus f est deux fois dérivable sur I , alors f'' s'annule et change de signe en a .

EXEMPLE

La fonction cube admet un point d'inflexion en l'origine.

En effet, soit f la fonction cube.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2$.

On a donc :
$f'(0) = 0$

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation :
$y = f'(0)x + f(0)$
$y = 0x + 0$
$y = 0$

La tangente en question est donc l'axe des abscisses.

Or la courbe de f traverse l'axe des abscisses au point A d'abscisse 0.

Le point A est un point d'inflexion pour la courbe de f .

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f''(x) = 6x$.

f'' s'annule bien en 0 et change de signe en 0.