Dynamique d’un circuit électrique et capteurs capacitifs

Introduction :

Un condensateur est un composant électronique formé de deux surfaces métalliques en regard séparées par un isolant. Un condensateur est essentiellement utilisé pour stabiliser une alimentation électrique ou pour emmagasiner des charges électriques, donc de l’énergie électrique.

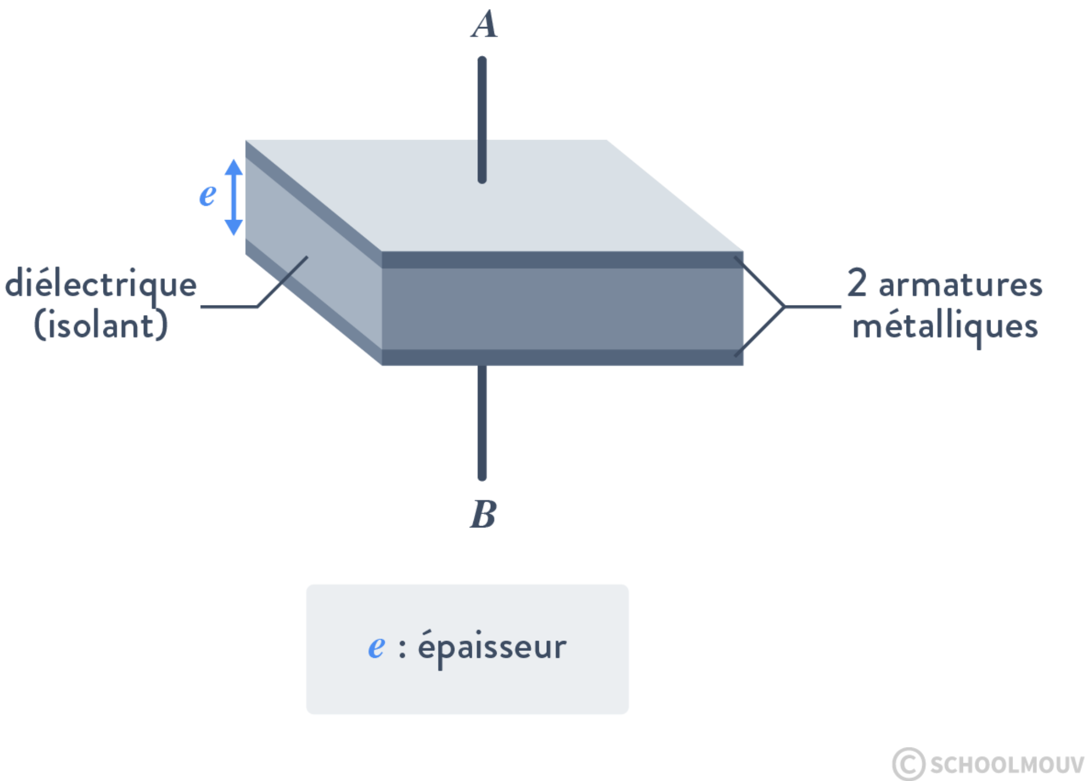
Préalablement à ce cours, nous fournirons une définition précise ainsi qu’une modélisation d’un condensateur.
Dans un second temps, nous montrerons comment les charges électriques peuvent s’accumuler sur les armatures du condensateur, ce qui nous permettra alors d’en déduire la relation liant la charge et la tension aux bornes du condensateur.
La deuxième partie de ce cours, consacrée à l’étude du circuit RC série, permettra de décrire l’évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur au cours de sa charge et de sa décharge.
Enfin, nous définirons de façon très brève la notion de capteur capacitif et en donnerons quelques applications courantes.

1 Les condensateurs

a. Modélisation d’un condensateur

Il existe différents condensateurs selon leur caractéristique géométrique. À titre d’exemple, on peut citer le **condensateur plan** formé de deux plaques métalliques parallèles.

Schématisation d'un condensateur plan



Définition

Condensateur :

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs métalliques voisins, appelés armatures, séparés par le vide (en pratique l'air) ou par un isolant appelé diélectrique (matériaux isolant).

Définition

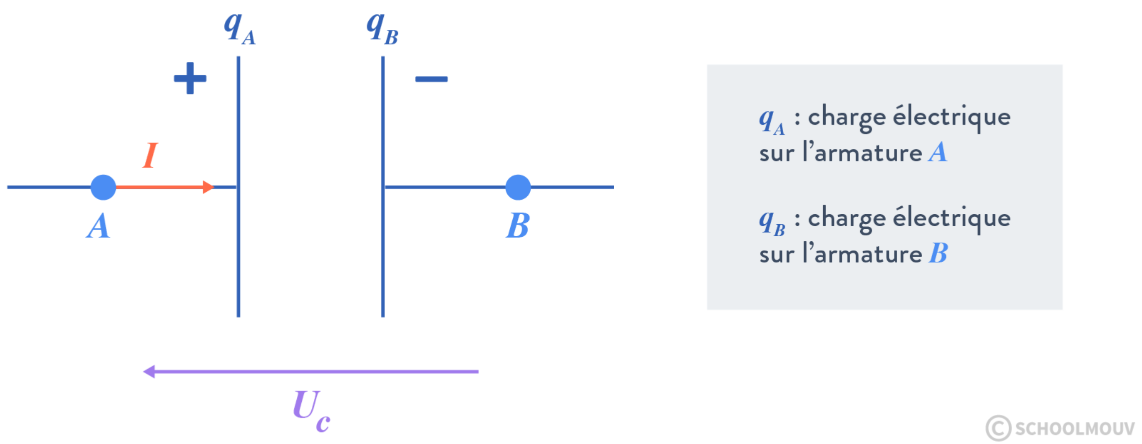
Milieu diélectrique :

Un milieu diélectrique ne possède pas de charges électriques qui se déplacent macroscopiquement.

À retenir

Pour symboliser le condensateur, on adopte la convention suivante :

Convention du condensateur



L'intensité du courant électrique I est fléché dans le sens opposé à la tension U_c à ses bornes.

b. Intensité du courant électrique

Définition

Intensité dans un conducteur :

L'intensité I du courant électrique, à un instant t, dans un conducteur est une grandeur algébrique qui correspond à la quantité de charge dq traversant la section pendant un intervalle de temps dt.

$$I(t) = +\frac{dq_A(t)}{dt} = -\frac{dq_B(t)}{dt}$$

Avec :

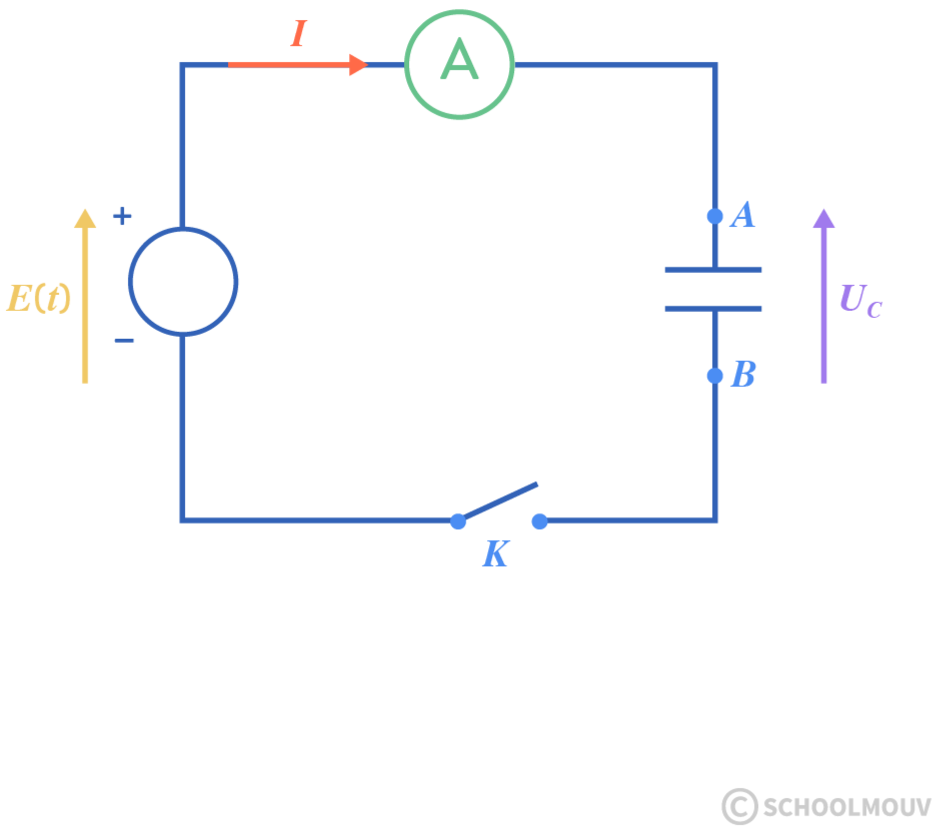
- $I(t)$ le courant électrique en A ;
- t le temps en s ;
- q_A la charge électrique sur l'armature A en C.

La modélisation du condensateur étant maintenant posée, montrons maintenant comment ce composant électronique est capable d'accumuler des charges électriques sur ses faces en regard : c'est l'effet capacitif.

c. Effet capacitif : accumulation de charges

Considérons le montage suivant :

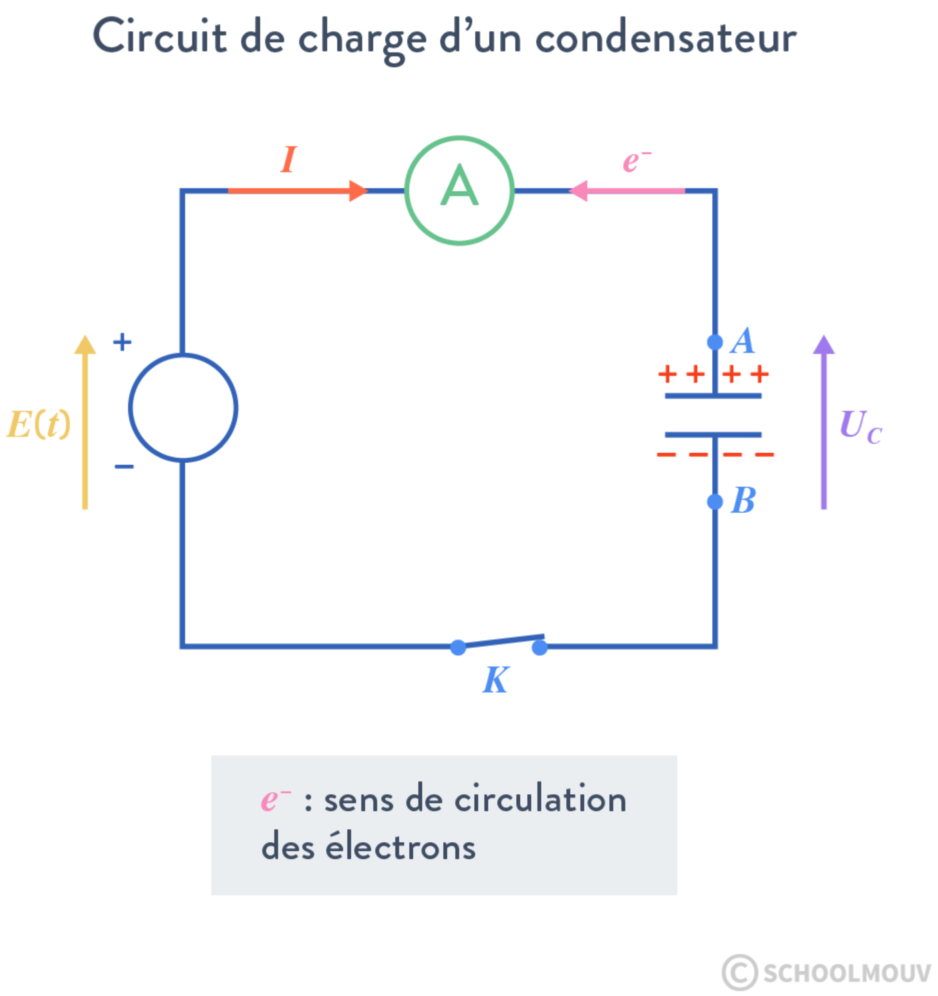
Circuit ouvert d'un condensateur



À retenir

> Dans un circuit électrique, les électrons se déplacent du pôle négatif de la source de tension vers le pôle positif.
> Par convention, le courant électrique I se déplace dans le sens inverse de celui des électrons.

Maintenant fermons l'interrupteur K, on remarque que l'ampèremètre détecte le passage d'un courant électrique. Le générateur va permettre la circulation d'une partie des électrons présents sur l'armature A qui vont alors s'accumuler sur l'armature B.



Ce passage du courant électrique dans le circuit va faire apparaître des quantités de charges $q_A > 0$ sur l'armature A, dues à la perte d'électrons, et $q_B < 0$ sur l'armature B, en raison d'un gain d'électrons.

→ On constate alors qu'une tension U_c apparaît entre les bornes A et B du condensateur. En fin de charge, plus aucun courant ne circule dans le circuit. Alors, d'après la loi d'additivité on peut écrire : $E = U_c$.
Le condensateur est dit alors « **chargé** ».

Définition

Charge électrique :

La charge électrique Q du condensateur est la valeur absolue de la charge qui s'accumule sur l'une de ses armatures.

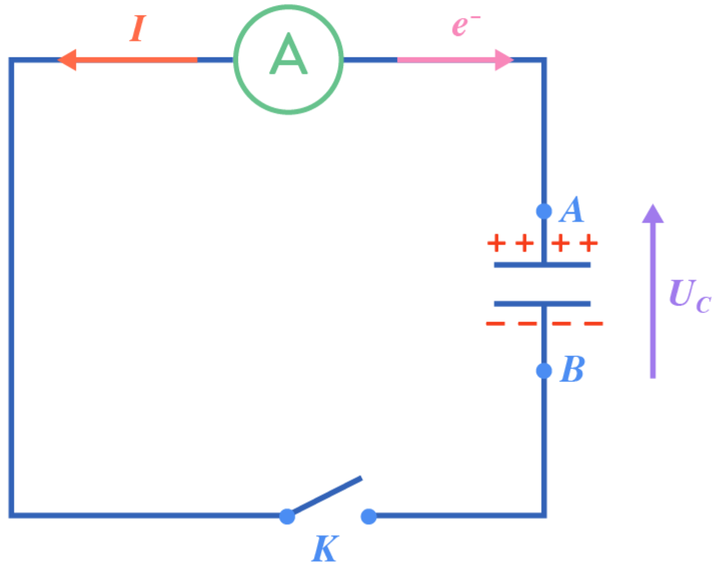
$$Q = |q_A| = |q_B|$$

Nous avons ainsi montré comment il est possible de « charger » un condensateur. Voyons maintenant comment il est possible d'opérer la décharge de ce condensateur, ce qui nous conduira à trouver de façon intuitive la relation existant entre la charge et la tension aux bornes du condensateur.

d. Relation entre charge et tension

Considérons le montage suivant :

Circuit de décharge d'un condensateur



e^- : sens de circulation des électrons

Court-circuitons un condensateur préalablement chargé en fermant l'interrupteur K. Les électrons de l'armature B vont circuler à travers le circuit pour compenser le défaut d'électrons dans l'armature A.

→ Le mouvement des électrons va prendre fin lorsque la tension aux bornes du condensateur U_c sera nulle : $U_c = 0 \text{ V}$. Sa charge électrique Q sera également nulle : $Q = 0 \text{ C}$.
On dit alors que le condensateur est « **déchargé** ».

À retenir

> Lorsqu'on court-circuite un condensateur chargé, sa tension à ses bornes ainsi que sa charge s'annulent.

En effet, nous avons pu constater au travers des deux expériences précédentes que plus la charge électrique Q du condensateur est élevée et plus la tension U_C à ses bornes est grande. De plus, nous avons vu que la tension U_C est nulle si la charge électrique Q du condensateur est nulle.

À retenir

De façon expérimentale, on peut remarquer qu'à chaque instant t, la charge $q_A(t)$ est proportionnelle à la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur. Le coefficient de proportionnalité qui lie ces deux grandeurs est appelé **capacité du condensateur**.

Définition

Charge du condensateur :

La charge q_A du condensateur, à un instant t, a pour expression :

$$q_A(t) = CU_c(t)$$

Avec :

- $q_A(t)$ la charge à l'instant t en coulomb (C) ;
- C la capacité en farad (F) ;
- $U_c(t)$ la tension aux bornes du condensateur en volt (V).

À retenir

La capacité C d'un condensateur est défini comme étant le coefficient de proportionnalité entre la charge et la tension aux bornes du condensateur.

Attention

Il ne faut pas confondre le symbole de la capacité d'un condensateur C exprimée en farad (F) avec le coulomb C, unité de la charge électrique Q.

Exemple

La tension aux bornes d'un condensateur de capacité $C = 150\ \text{nF}$ est $U_C = 40\ \text{mV}$.
Calculer la charge q_A accumulée sur son armature chargée positivement.

Nous savons que la charge q_A s'écrit :

$$q_A(t) = CU_c(t)$$

Alors,

$$\begin{aligned} q_A &= 150 \times 10^{-9} \times 40 \times 10^{-3} \\ &= 6,0 \times 10^{-9}\ \text{C} \end{aligned}$$

Exemple

Le tableau ci-dessous représente les valeurs mesurées de la charge électrique Q et de la tension U_C aux bornes d'un condensateur.

Tension U_C en V	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$
Charge Q en mC	$0,03$	$0,06$	$0,09$	$0,12$	$0,15$	$0,18$	$0,21$

Déterminer la valeur de la capacité C du condensateur.

On sait que la capacité C d'un condensateur est définie comme le coefficient de proportionnalité entre la charge électrique Q et la tension à ses bornes.

À l'aide du tableau de valeurs, on peut trouver la valeur de la capacité C.

Prenons ainsi, deux valeurs pour la tension U_c, soit : $U_1 = 0,2\ \text{V}$ et $U_2 = 0,5\ \text{V}$, correspondant respectivement à une charge Q : $Q_1 = 0,06\ \text{mC}$ et $Q_2 = 0,15\ \text{mC}$. Nous avons alors :

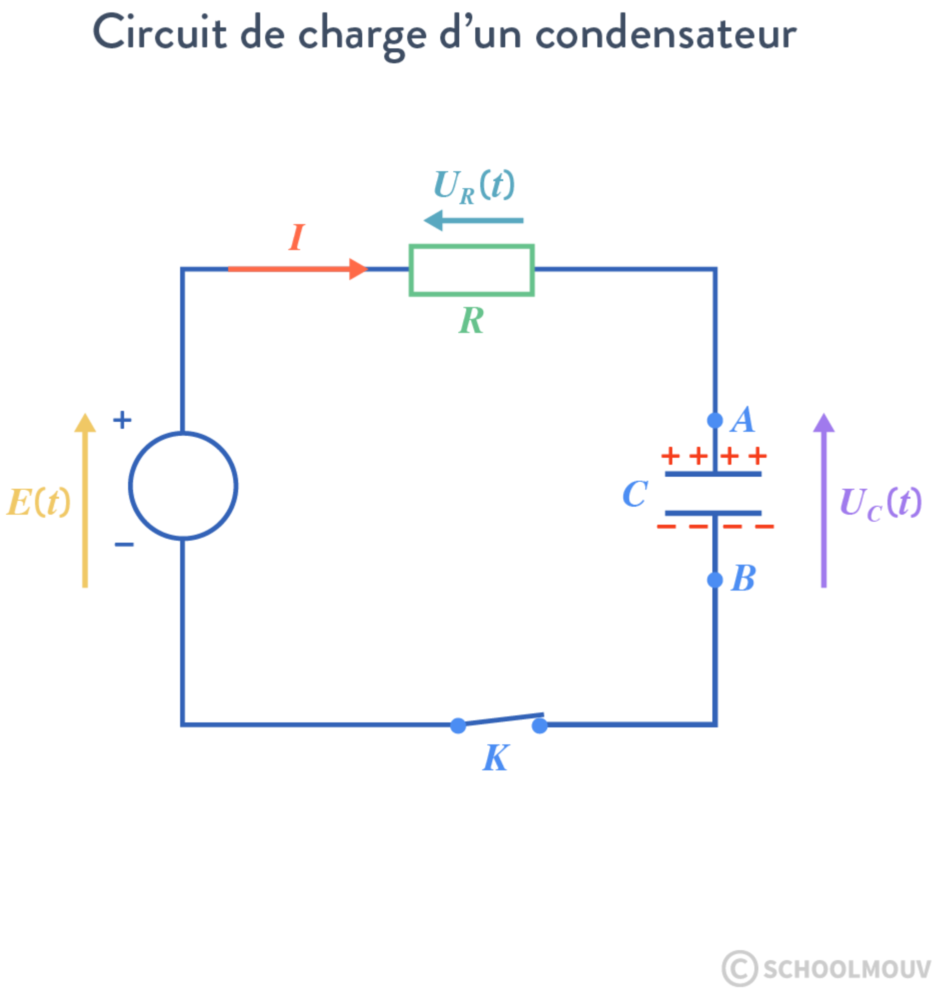
$$\begin{aligned} C &= \frac{(Q_2 - Q_1)}{(U_2 - U_1)} \\ &= \frac{(0,15 - 0,06) \times 10^{-3}}{(0,5 - 0,2)} \\ &= 3 \times 10^{-4}\ \mathrm{F} \end{aligned}$$

Soit, $C = 30\ \mathrm{mF}$.

Nous avons montré qu'il était possible de charger ou de décharger un condensateur. Nous allons maintenant décrire l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur au cours de sa charge et de sa décharge dans un circuit RC série.

2 | Circuit RC série : charge du condensateur

Considérons le montage en série suivant associant une résistance R et un condensateur de capacité C.



Essayons d'exprimer la tension aux bornes du condensateur $U_C(t)$ en fonction du temps t.

On sait que,

$$i(t) = \frac{dq_A(t)}{dt}$$

Et en outre nous avons montré que,

$$q_A(t) = C \times U_C(t)$$

→ De ces deux expressions nous pouvons exprimer l'intensité $i(t)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq_A(t)}{dt} \\ &= \frac{d(CU_c(t))}{dt} \end{aligned}$$

Soit,

$$i(t) = C\frac{dU_c(t)}{dt} \ (1)$$

- La **loi d'additivité** des tensions nous permet d'écrire :

$$U_R(t) + U_C(t) = E$$

- Or, selon la **loi d'Ohm**, nous pouvons écrire :

$$Ri(t) + U_C(t) = E \ (2)$$

→ On peut alors réécrire l'expression (2) :

$$RC\frac{dU_c(t)}{dt} + U_C(t) = E \ (2)$$

- Divisons maintenant chaque membre de cette égalité par RC :

$$\frac{dU_c(t)}{dt} + \frac{U_c(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$$

- Ensuite, posons τ, la constante de temps caractéristique, telle que $\tau = RC$.

$$\frac{dU_c(t)}{dt} + \frac{U_c(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

→ L'équation obtenue est une **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec un second membre**.

- La solution de cette équation différentielle est la somme de deux solutions :
  - $U_{c1}(t) = ke^{\frac{-t}{\tau}}$, solution de l'équation sans second membre avec k une constante à déterminer ;
  - $U_{c2}(t) = E$, solution particulière de l'équation avec second membre, avec E la tension aux bornes du générateur.

→ La solution générale peut donc s'écrire :

$$U_c(t) = U_{c1}(t) + U_{c2}(t)$$

$$U_c(t) = E + ke^{\frac{-t}{\tau}}$$

Déterminons la valeur de la constante k.
À $t = 0$, on sait que $U_c(0) = 0$, donc en remplaçant t par 0 dans l'expression précédente, on obtient :

$$U_c(0) = E + k = 0$$

Soit,

$$k = -E$$

→ La solution de l'équation différentielle est donc finalement :

$$U_c(t) = E(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

Définition

Équation différentielle du circuit RC lors de sa charge :

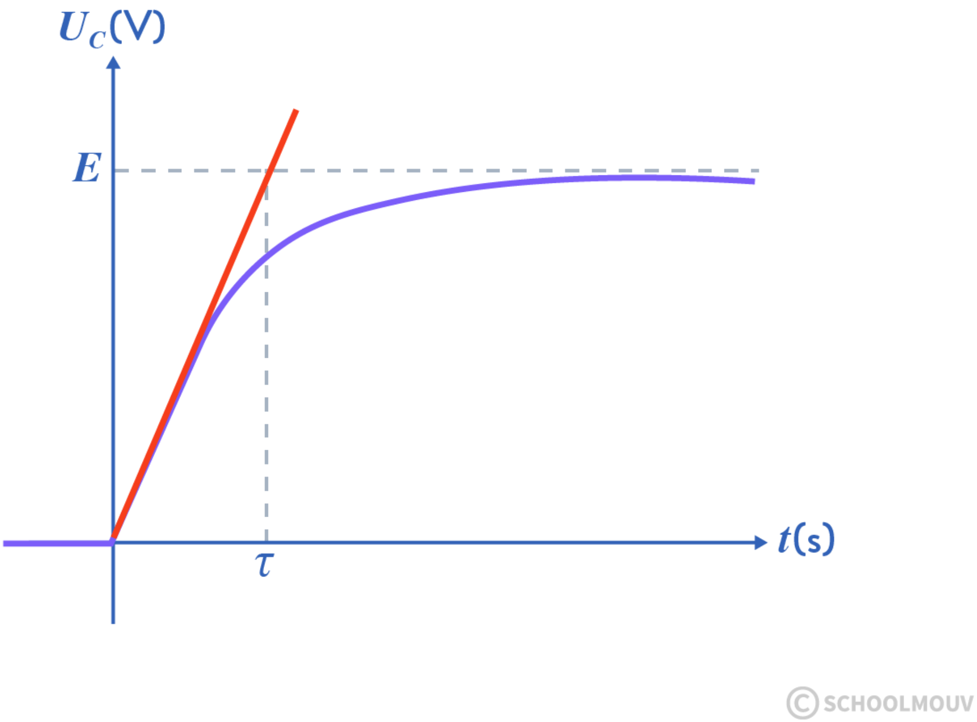
L'équation décrivant l'évolution temporelle de la tension $U_c(t)$ aux bornes d'un condensateur lors de sa charge s'écrit :

$$U_c(t) = E(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

Avec :

- $U_c(t)$ la tension aux bornes du condensateur en V ;
- E la tension aux bornes du générateur en V ;
- $\tau = RC$ la constante de temps en s.

Évolution temporelle de la tension $U_c(t)$ lors de la charge du condensateur



À retenir

La constante de temps $\tau = RC$ est appelée « temps caractéristique » du circuit RC et s'exprime en seconde. De plus, R s'exprime en ohm (Ω) et C en farad (F).

Exemple

1 Quelle est la valeur de la tension $U_c(t)$ lorsque $t = \tau$?

On sait que,

$$U_c(t) = E(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

Si $t = \tau$ alors,

$$U_c(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,63E$$

Lorsque t est égal au temps caractéristique τ du circuit RC, alors la valeur de U_c à cet instant avoisine $63\ \%$ de la valeur de la tension du générateur.

2. **La tension aux bornes d'un condensateur au cours de sa charge est $U_c = 8,0\ \text{V}$ lorsque $t = \tau$.**

Quelle est la valeur de la tension E du générateur ?
On sait d'après la question 1 que si $t = \tau$, alors $U_c \approx 0,63E$.
Donc,

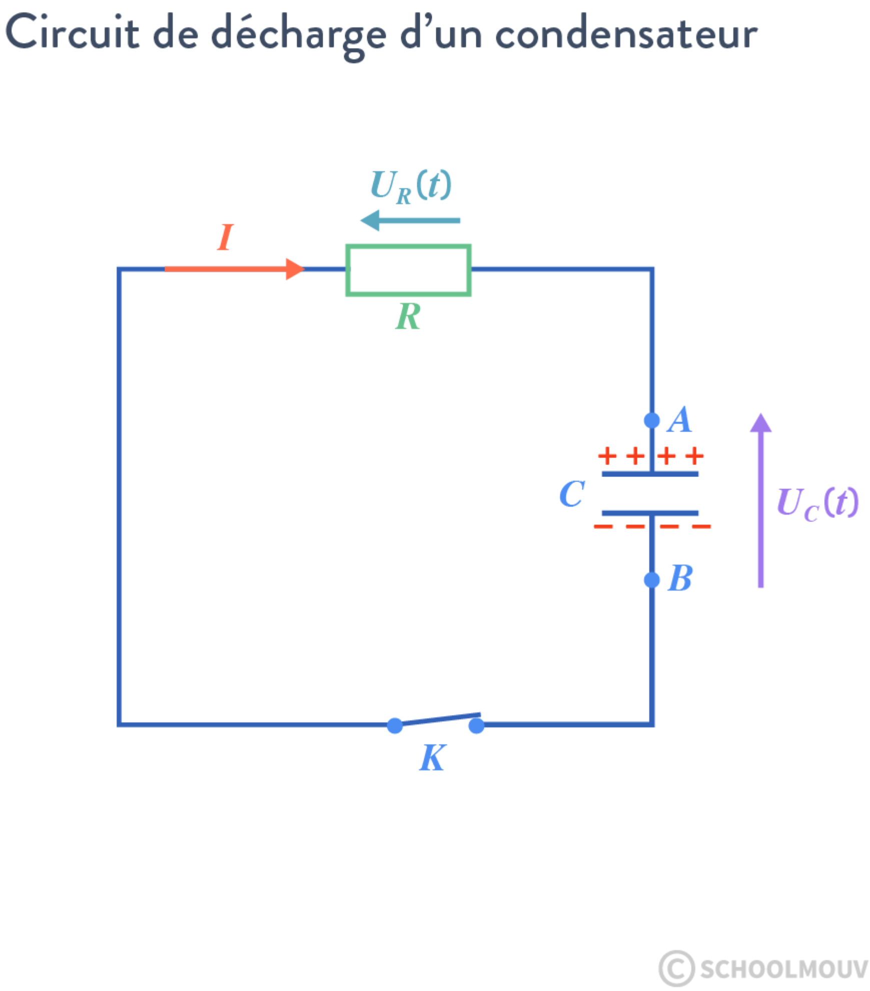
$$E = \frac{U_c}{0,63}$$

Soit,

$$E = \frac{8}{0,63} \approx 13\ \text{V}$$

3 | Circuit RC série : décharge du condensateur

Considérons le circuit suivant mettant en jeu une résistance R et un condensateur initialement chargé montés en série. Dans ce cas, $Uc = E$ à $t = 0$ (avant la décharge).



Essayons d'exprimer la tension aux bornes du condensateur $U_C(t)$ en fonction du temps t.

On sait que,

$$i(t) = \frac{dq_A(t)}{dt}$$

Et en outre nous avons montré que,

$$q_A(t) = C \times U_C(t)$$

→ De ces deux expressions nous pouvons exprimer l'intensité i(t) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq_A(t)}{dt} \\ &= \frac{d(CU_c(t))}{dt} \end{aligned}$$

Soit,

$$i(t) = C\frac{dU_c(t)}{dt} \quad (1)$$

- La **loi d'additivité** des tensions nous permet d'écrire :

$$U_R(t) + U_C(t) = 0$$

- Or, selon la **loi d'Ohm**, nous pouvons écrire :

$$Ri(t) + U_C(t) = 0 \quad (2)$$

→ On peut alors réécrire l'expression (2) :

$$RC\frac{dU_c(t)}{dt} + U_C(t) = 0 \quad (2)$$

- Divisons maintenant chaque membre de cette égalité par RC :

$$\frac{dU_c(t)}{dt} + \frac{U_c(t)}{RC} = 0$$

- Ensuite, posons τ, la constante de temps caractéristique, telle que $\tau = RC$.

$$\frac{dU_c(t)}{dt} + \frac{U_c(t)}{\tau} = 0$$

→ L'équation obtenue est une **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre**.

  - La solution de cette équation est $U_c(t) = ke^{\frac{-t}{\tau}}$, avec k une constante à déterminer.

Déterminons la valeur de la constante k.
On sait qu'à l'instant $t = 0$, nous avons $U_c(0) = E$ puisque le condensateur était chargé. On en déduit alors :

$$U_c(0) = k = E$$

→ La solution générale de l'équation peut enfin s'écrire :

$$U_c(t) = Ee^{\frac{-t}{\tau}}$$

Définition

Équation différentielle du circuit RC lors de sa décharge :

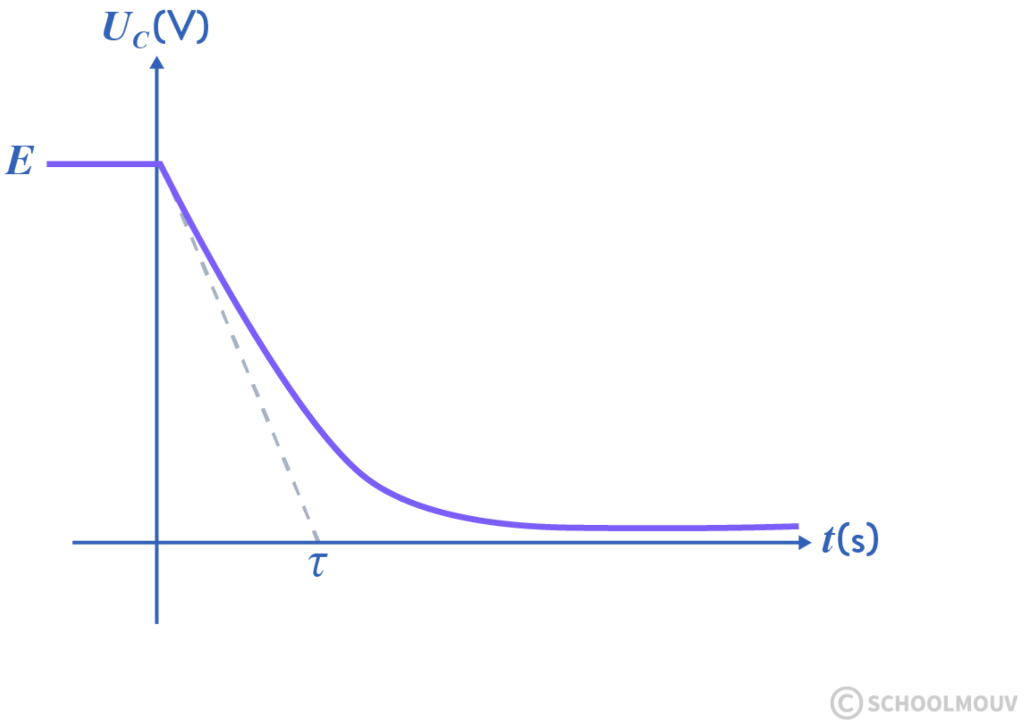
L'équation décrivant l'évolution temporelle de la tension $U_c(t)$ aux bornes d'un condensateur lors de sa décharge s'écrit :

$$U_c(t) = Ee^{\frac{-t}{\tau}}$$

Avec :

- $U_c(t)$ la tension aux bornes du condensateur en V ;
- E la tension aux bornes du générateur en V ;
- $\tau = RC$ la constante de temps en s.

Évolution temporelle de la tension $U_c(t)$ lors de la décharge du condensateur



Exemple

Quelle est la valeur de la tension $U_c(t)$ lorsque $t = \tau$?

On sait que,

$$U_c(t) = Ee^{\frac{-t}{\tau}}$$

Si $t = \tau$ alors,

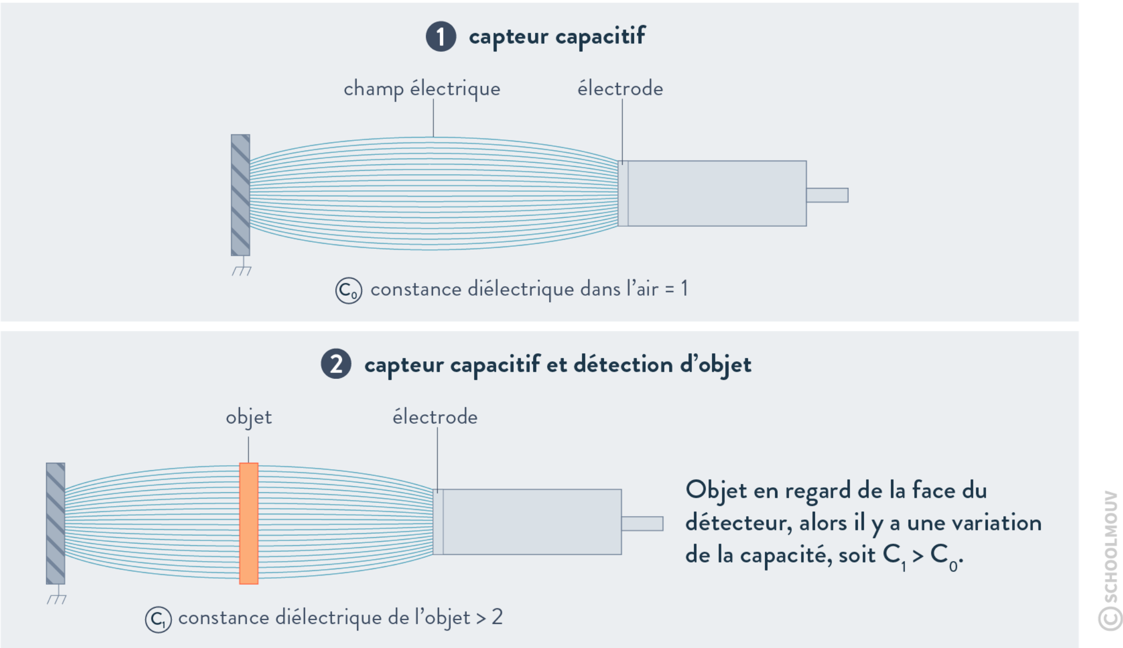
$$U_c(\tau) = E \times e^{-1} \approx 0,36E$$

Lorsque t est égal au temps caractéristique τ du circuit RC, alors la valeur de U_c à cet instant avoisine $36\ \%$ de la valeur de la tension du générateur.

4 | Capteurs capacitifs

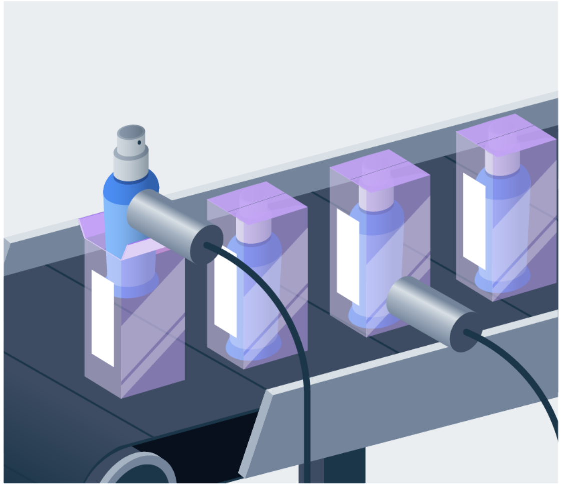
Un capteur capacitif est un condensateur ouvert utilisé comme capteur.

→ Le principe de fonctionnement, expliqué simplement, consisterait à dire que lorsqu'un objet pénètre dans la zone du capteur, on assiste à une modification du champ électrique régnant dans la zone ainsi que de la capacité du condensateur.



Ainsi, les capteurs capacitifs analysent la modification de la capacité causée par l'apparition d'un objet dans le champ électrique du condensateur.
Les capteurs capacitifs offrent plusieurs applications industrielles dont le contrôle de présence ou encore le contrôle qualité, la détection de déplacements…

contrôle final sur lignes d'emballage



emballages, contenu

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons pu aborder l'étude d'un composant électronique très courant : le condensateur.
Après avoir défini et modélisé le condensateur, nous avons pu montrer comment se produisait la charge et la décharge de ce composant électronique.
Une seconde partie de ce cours a été consacrée à l'étude du circuit RC série et à la description de l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur au cours de sa charge et de sa décharge dans un tel circuit.
Enfin, pour clore ce cours nous avons abordé brièvement la notion de capteur capacitif et donné quelques-unes de ses applications courantes.