Primitives et équations différentielles

Pour retrouver le cours correspondant de l'option « Mathématiques complémentaires » :

→ *Primitives et équations différentielles*

Introduction :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Nous pouvons être amenés à résoudre une équation de la forme : $y' = f$, où l'inconnue est la fonction y.
C'est-à-dire de déterminer une fonction dérivable sur I dont la dérivée est connue. Ces équations sont appelées « équations différentielles ».

Pour cela, dans un premier temps, ce cours de la spécialité « Mathématiques » introduira la notion de primitives d'une fonction sur un intervalle, puis donnera des méthodes permettant de les calculer. Comme nous le verrons dans le cours suivant sur le calcul intégral, une primitive sert aussi à calculer des intégrales qui, concrètement, représentent des aires.
Dans un second temps, nous verrons comment résoudre des équations différentielles du premier ordre.

1 Notion de primitive

En première, nous avons découvert la notion de dérivée d'une fonction, que nous avons complétée en terminale. Ici, pour résoudre une équation différentielle du type $y' = f$, il nous faut en quelque sorte faire le chemin inverse, c'est-à-dire trouver une fonction dont la dérivée est f, que nous connaissons.

→ Cette fonction inconnue est appelée **primitive**.

a. Définitions et vocabulaire

Définition

Primitive :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I.
On appelle primitive d'une fonction f sur I une fonction F dérivable sur I dont la dérivée est égale à f.

➜ Pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

Prenons un premier exemple simple, avec la fonction carrée.

Exemple

La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 2x$.

➜ On dit alors que la fonction $x \mapsto x^2$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$.

Donnons maintenant les premières propriétés.

Propriété

- Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, les fonctions de la forme $F + k$, où k est une fonction constante, sont aussi des primitives de f.

Une seule de ces primitives prend une valeur y_0 donnée en un x_0 de I donné.

➜ La condition initiale $y_0 = F(x_0)$ permet donc de définir de façon unique une primitive de la fonction f parmi l'ensemble des primitives de f.

Démonstration

Démontrons que deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Pour une fonction f définie et continue sur un intervalle I, soit F et G deux primitives de la fonction f sur I.

1. Nous avons :

Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.

➜ $F'(x) = G'(x)$

2. Développons l'égalité.

Pour tout $x \in I$:

$$G'(x) - F'(x) = 0$$
$$(G' - F')(x) = 0$$
$$(G - F)'(x) = 0$$

➜ Une primitive de la fonction nulle étant une fonction constante, on en déduit, avec k réel :

$$(G - F)(x) = k \Leftrightarrow G(x) = F(x) + k$$

Ⓒ Finalement, deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Exemple

On a vu précédemment que la fonction $F : x \mapsto F(x) = x^2$ est une primitive de la fonction f : $x \mapsto f(x) = 2x$.

Alors, toutes les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 + k$, où k est une constante réelle, sont des primitives de la fonction f.

➜ La fonction $G(x) = x^2 + 2$ est la primitive de $f(x) = 2x$ telle que $F(0) = 2$.

Intéressons-nous à la fonction que nous avons découverte cette année : le logarithme népérien.

À retenir

Par définition, la fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en $x = 1$.

b. Vérifier qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f

Avant de calculer des primitives, nous allons d'abord apprendre à vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction sur un intervalle donné.

Exemple

La fonction définie par $F(x) = \ln(x + 1) + \frac{1}{x+1}$ est-elle une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$?

1 On part de la **supposée primitive** F et on calcule sa dérivée.

→ La fonction F est définie sur $\mathbb{R}^+$.

On reconnaît la forme $\ln(u)$, dont la dérivée est $\frac{u'}{u}$, et la forme $\frac{1}{u}$, dont la dérivée est $-\frac{u'}{u^2}$, avec u définie par $u(x) = x + 1$, qui est bien une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

→ La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x+1} + \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

2 On met les expressions au même dénominateur, à savoir $(x+1)^2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x+1} \times \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x}{(x+1)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

C On vient de démontrer que, en dérivant la fonction F, on obtenait la fonction f.

→ La fonction F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$.

2 Calculs de primitives

Dans cette partie, nous allons voir qu'il existe un formulaire pour déterminer des primitives d'une fonction.

→ Nous utiliserons un **tableau de primitives**, qui est à connaître.

a. Primitives de fonctions usuelles

À retenir

Fonction f	Une primitive F	Ensemble de définition
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ [avec $n \neq -1$ entier relatif]	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	$\mathbb{R}^{*+}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$x \mapsto \text{e}^x$	$x \mapsto \text{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$

Donnons aussi les propriétés de linéarité des primitives.

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

Soit maintenant F et G deux primitives de f et g respectivement.

Soit enfin un réel k.

Nous avons alors :

- la fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$;
- la fonction kF est une primitive de kf.

Nous allons maintenant donner quelques exemples de calcul d'une primitive pour les fonctions définies de la manière suivante.

Exemple

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -4x + 5$$

- D'après la deuxième formule du tableau, une primitive de la fonction $x \mapsto x$ est :

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2$$

- De même, une primitive de la fonction $x \mapsto -4x$ est :

$$x \mapsto -4 \times \frac{1}{2}x^2 = -2x^2$$

- Enfin, une primitive de la fonction $x \mapsto 5$ est :

$$x \mapsto 5x$$

➜ La fonction f admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ (parmi une infinité d'autres) la fonction F définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui associe à tout réel x :

$$F(x) = -2x^2 + 5x$$

Exemple

(2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 2x + 4$$

- Toujours d'après la deuxième formule du tableau, une primitive de la fonction $x \mapsto x^3$ est :

$$x \mapsto \frac{1}{4}x^4$$

- De même, une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$ est :

$$x \mapsto 2 \times \frac{1}{2}x^2 = x^2$$

- Enfin, une primitive de la fonction $x \mapsto 4$ est :

$$x \mapsto 4x$$

➜ La fonction g admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ (parmi une infinité d'autres) la fonction G définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui associe à tout réel x :

$$G(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 4x$$

Exemple

(3) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$h(x) = \frac{1}{x^3}$$

- La première étape consiste à transformer l'écriture de $h(x)$ pour se ramener à une forme du tableau :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x^3} \\ &= x^{-3} \end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la deuxième formule du tableau, une primitive de la fonction $x \mapsto x^{-3}$ est :

$$x \mapsto -\frac{1}{2}x^{-2}$$

➜ La fonction h admet pour primitive sur $\mathbb{R}^{*+}$ (parmi une infinité d'autres) la fonction H définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, qui associe à tout réel strictement positif x :

$$\begin{aligned} H(x) &= -\frac{1}{2}x^{-2} \\ &= -\frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

b. Primitives plus complexes

Étudions maintenant le calcul de primitives de fonctions composées.

À retenir

Soit u une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I.

Fonction f	Une primitive F
$u'u^n$ [avec $n \neq -1$ entier relatif et, si $n < 0$, u ne s'annulant pas sur I]	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{u}$ [avec $u > 0$ sur I]	$\ln(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ [avec $u > 0$ sur I]	$2\sqrt{u}$

Là aussi, donnons quelques exemples de calcul d'une primitive pour les fonctions définies de la manière suivante.

Exemple

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3 \times (2x - 1)(x^2 - x + 4)^5$$

- On considère la fonction $u : x \mapsto x^2 - x + 4$, et on constate que la fonction $v : x \mapsto 2x - 1$ est la dérivée de u.

→ La fonction peut donc se définir par :

$$f(x) = 3 \times u'(x) \times u^5(x)$$

- D'après la première formule du tableau :

$$\begin{aligned} F(x) &= 3 \times \frac{1}{5+1} \times u^{5+1}(x) \\ &= 3 \times \frac{1}{6} \times (x^2 - x + 4)^6 \\ &= \frac{1}{2} \times (x^2 - x + 4)^6 \end{aligned}$$

→ La fonction f admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ (parmi une infinité d'autres) la fonction F définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui associe à tout réel x :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times (x^2 - x + 4)^6$$

Exemple

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^4}$$

- On considère la fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$, et on constate que la fonction $v : x \mapsto 2x$ est la dérivée de la fonction u.

→ La fonction peut donc se définir par :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{u'(x)}{u^4(x)} \\ &= u'(x)u^{-4}(x) \end{aligned}$$

- Toujours d'après la première formule du tableau :

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{-4+1} \times u^{-4+1}(x) \\ &= \frac{1}{-3} \times (x^2+1)^{-3} \\ &= -\frac{1}{3 \times (x^2+1)^3} \end{aligned}$$

➜ La fonction g admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ (parmi une infinité d'autres) la fonction G définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui associe à tout réel x :

$$G(x) = -\frac{1}{3 \times (x^2+1)^3}$$

Exemple

3. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}$$

- On considère la fonction $u : x \mapsto \mathrm{e}^x + 2$, strictement positive sur $\mathbb{R}$, et on constate que la fonction $v : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est la dérivée de la fonction u.

➜ La fonction peut donc se définir par :

$$h(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

- D'après la formule du tableau correspondante, et comme u est strictement positive sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H(x) &= \ln(u(x)) \\ &= \ln(\mathrm{e}^x + 2) \end{aligned}$$

➜ La fonction h admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ (parmi une infinité d'autres) la fonction H définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui associe à tout réel x :

$$H(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 2)$$

3 Équations différentielles du premier ordre

Maintenant que nous avons défini la notion de primitives, résolvons des équations différentielles dites du premier ordre.

a. Équations différentielles du premier ordre sans second membre

Définition

Équation différentielle du premier ordre sans second membre :

Une équation différentielle du premier ordre sans second membre est une équation d'inconnue une fonction y dérivable, qui s'écrit sous la forme : $y' = ay$, avec $a \in \mathbb{R}$.

→ Elle peut aussi s'écrire sous la forme $y' - ay = 0$, d'où l'expression « sans second membre ».

Théorème

Les solutions de cette équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = k\mathrm{e}^{ax} \text{ [avec } k \in \mathbb{R}]$$

Démonstration

Démontrons que les solutions de l'équation $y' = ay$, avec $a \in \mathbb{R}$, sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = k\mathrm{e}^{ax}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Soit a un nombre réel.

→ Résolvons l'équation différentielle $y' = ay$.

1. Supposons qu'il existe une fonction f solution de cette équation différentielle, telle que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout x réel :

$$f'(x) = af(x)$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = a$$

- On détermine la primitive de chaque fonction :

→ $\frac{f'}{f}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$, on reconnaît ici une formule du second tableau et on en déduit qu'une primitive de f est $\ln(|f|)$.

→ a est un nombre réel, on reconnaît ici une formule du premier tableau et on déduit qu'une primitive est $x \mapsto ax$ avec $b \in \mathbb{R}$.

- On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} = a &\Leftrightarrow \ln\left(|f(x)|\right) = ax + b \\ &\quad\text{[avec } b \in \mathbb{R}\text{, deux primitives différant d'une constante]} \\ &\Leftrightarrow |f(x)| = \mathrm{e}^{ax+b} \\ &\Leftrightarrow |f(x)| = \mathrm{e}^{b}\mathrm{e}^{ax} \\ &\Leftrightarrow |f(x)| = k\mathrm{e}^{ax} \text{ [avec } k = \mathrm{e}^{b} > 0\text{]} \\ &\Leftrightarrow f(x) = k\mathrm{e}^{ax} \text{ [car } k\mathrm{e}^{ax} > 0\text{, pour tout } x \text{ réel]}\end{aligned}$$

(2) Montrons maintenant que les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$, avec $k \in \mathbb{R}$, sont solutions de l'équation différentielle $y' = ay$.

Soit x un nombre réel, on a :

$$\begin{aligned}f'(x) - af(x) &= ka\mathrm{e}^{ax} - ka\mathrm{e}^{ax} \\ &\quad\text{[car } (\mathrm{e}^{u})' = u'e^{u} \text{ et, en prenant} \\ &\quad u(x) = ax \text{ , on a } u'(x) = a\text{]} \\ &= 0\end{aligned}$$

(C) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions f définies par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{ax} \text{ [avec } k \in \mathbb{R}\text{]}$$

Prenons un premier exemple simple.

Exemple

Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$ sont les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = k\mathrm{e}^{3x} \text{ [avec } k \in \mathbb{R}\text{]}$$

Astuce

À l'aide d'une condition initiale sur la fonction y, nous pouvons déterminer la valeur k et la fonction y sera une solution unique à cette équation.

Nous allons cette fois prendre un exemple où une condition initiale est donnée.

Exemple

Trouvons la solution de l'équation différentielle $y' = -5y$ qui vérifie $y(0) = 2$.

1. Les solutions de l'équation $y' = -5y$ sont les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = k\text{e}^{-5x} \text{ [avec } k \in \mathbb{R}]$$

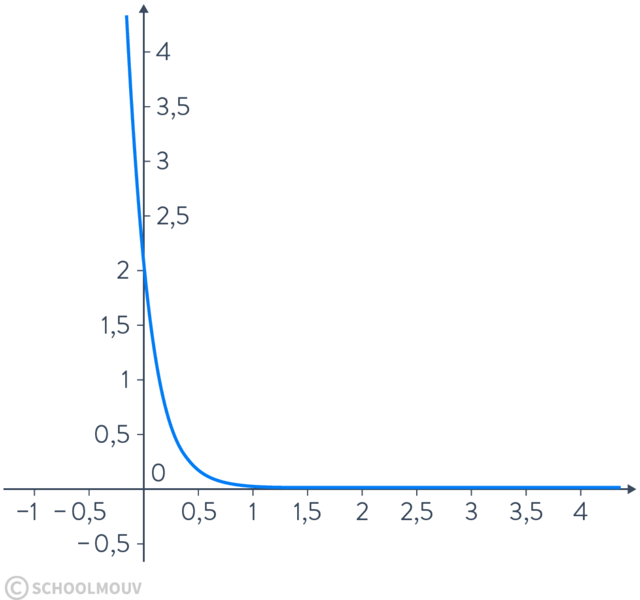
2. Déterminons la valeur de k avec la condition initiale :

$$\begin{aligned} y(0) = 2 &\Leftrightarrow k\text{e}^0 = 2 \\ &\Leftrightarrow k = 2 \end{aligned}$$

→ L'unique solution de l'équation qui vérifie la condition initiale est donc la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = 2\text{e}^{-5x}$$

3. Nous pouvons aussi donner la représentation graphique de la fonction y.



Astuce

Si on change la valeur k dans l'expression de la fonction par son opposé $-k$, nous obtenons une courbe symétrique à la première courbe par rapport à l'axe des abscisses.

b. Équations différentielles du premier ordre avec second membre constant

Définition

Équation différentielle du premier ordre avec second membre constant :

Une équation différentielle du premier ordre avec second membre constant est une équation, d'inconnue une fonction y dérivable, qui s'écrit sous la forme : $y' = ay + b$, avec $a \neq 0$ et b deux réels.

➜ Elle peut aussi s'écrire sous la forme $y' - ay = b$, d'où l'expression « avec second membre constant ».

Soit l'équation différentielle $y' = ay + b$, avec $a \neq 0$ et b deux réels.
Étudions d'abord la fonction constante $g : x \mapsto -\frac{b}{a}$. Alors nous avons, pour tout réel x :

$$\text{d'une part : } g'(x) = 0$$

$$\begin{aligned}\text{d'autre part : } ag(x) + b &= a \times (-\frac{b}{a}) + b \\ &= -b + b \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\text{donc : } g'(x) = ag(x) + b$$

➜ La fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle.

Et nous avons la propriété suivante.

Propriété

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$ et b deux réels) sont les fonctions de la forme $x \mapsto f(x) + g(x)$, avec :

- f solution quelconque de l'équation différentielle $y' = ay$;
- g solution particulière constante de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

À partir des solutions que nous avons données, dans la partie précédente, pour les équations différentielles du premier ordre sans second membre, nous pouvons déduire la propriété suivante.

Propriété

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$ et b deux réels) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = k\text{e}^{ax} - \frac{b}{a} \text{ [avec } k \in \mathbb{R}]$$

Exemple

Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y + 4$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = ke^{3x} - \frac{4}{3}$, avec k un nombre réel.

Astuce

À l'aide d'une condition initiale sur la fonction y, nous pouvons déterminer la valeur de k et la fonction y solution sera unique.

Exemple

Trouvons la solution de l'équation différentielle $y' = -6y + 3$ qui vérifie $y(0) = 1$.

- Les solutions de l'équation $y' = -6y + 3$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} y(x) &= ke^{-6x} + \frac{3}{6} \\ &= ke^{-6x} + \frac{1}{2} \text{ [avec } k \text{ un nombre réel]} \end{aligned}$$

- Déterminons la valeur de k avec la condition initiale :

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\Leftrightarrow ke^0 + \frac{1}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow k + \frac{1}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow k = 1 - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

→ L'unique solution de l'équation qui vérifie la condition initiale est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2}e^{-6x} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(e^{-6x} + 1) \end{aligned}$$

C. Équations différentielles du premier ordre du type $y' = ay + f$ (a réel, f une fonction)

Méthode :

1 Il s'agit de résoudre une équation différentielle (E) de la forme $y' = ay + f$, avec a un réel non nul et f une fonction donnée.

2 Supposons que nous connaissons ou que nous avons trouvé une solution particulière y_0 à cette équation différentielle.

➜ $y_0' = ay_0 + f$

$$
\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow y' = ay + f \\
&\Leftrightarrow y' - y_0' = ay + f - (ay_0 + f) \\
&\text{[car } y_0' = ay_0 + f\text{]} \\
&\Leftrightarrow (y - y_0)' = a(y - y_0) \\
&\Leftrightarrow y - y_0 \text{ est solution de l'équation différentielle } Y' = aY \\
&\Leftrightarrow y - y_0 = ke^{ax} \text{ [avec } k \in \mathbb{R}\text{]} \\
&\Leftrightarrow \boxed{y = y_0 + ke^{ax}}
\end{aligned}
$$

C Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont donc de la forme suivante : la somme d'une solution particulière de cette équation et de toutes les solutions de l'équation différentielle $Y' = aY$.

➜ La deuxième équation différentielle est la première équation différentielle sans la fonction f, elle est donc plus simple à résoudre.

Exemple

On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :

$$y'(x) = 2y(x) + 2(e^{2x} - 1)$$

Montrons d'abord que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E).

1 La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur cet ensemble.

- Calculons sa dérivée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= 2e^{2x} + 4xe^{2x} \\
&= (4x + 2)e^{2x}
\end{aligned}
$$

- Calculons $2h(x) + 2(e^{2x} - 1)$.

$$\begin{aligned} 2h(x) + 2(e^{2x} - 1) &= 4xe^{2x} + 2 + 2e^{2x} - 2 \\ &= (4x + 2)e^{2x} \\ &= h'(x) \end{aligned}$$

➜ La fonction h est donc bien solution de l'équation différentielle (E).

(2) Comme nous l'avons vu précédemment, si nous connaissons une solution particulière de l'équation différentielle (E), il faut ensuite déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$.

➜ Par théorème, ces solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = ke^{2x}$, avec k un nombre réel.

(c) Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} h(x) + y(x) &= 2xe^{2x} + 1 + ke^{2x} \text{ [avec } k \in \mathbb{R}] \\ &= \boxed{(2x + k)e^{2x} + 1} \end{aligned}$$

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons défini la notion de primitives d'une fonction f continue sur un intervalle I.
Dans la pratique, nous déterminerons les primitives d'une fonction à l'aide des tableaux de primitives.
Nous avons ensuite appris à résoudre des équations différentielles du premier ordre.

Dans le prochain cours, nous verrons les primitives s'avèrent utiles pour calculer des aires.