Continuité des fonctions d'une variable réelle

Pour retrouver le cours correspondant de l'option « Mathématiques complémentaires » :

→ *Continuité de fonctions*

Introduction :

Ce cours de la spécialité « Mathématiques » va nous permettre de compléter encore l'étude de fonctions.
Nous aborderons ainsi le langage de la continuité avec quelques rappels, des définitions, des propriétés, des théorèmes, des méthodes et des exemples d'applications.

1 Continuité

a. Rappel sur la dérivabilité d'une fonction

Commençons par faire quelques petits rappels sur la dérivation de fonctions.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

→ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le **taux d'accroissement** entre a et $a+h$.

→ Dire que f est **dérivable** en a de nombre dérivé noté $f'(a)$ (réel), c'est dire que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

Astuce

Pour étudier la dérivabilité de f en a, on calcule la limite quand h tend vers 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$:

- si cette limite est un nombre réel, on dit que f est dérivable en a ;
- si cette limite est infinie, ou si elle n'existe pas (par exemple si la limite à gauche est différente de la limite à droite), on dit que f n'est pas dérivable en a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $a = 1$.

→ Cherchons si la fonction f est dérivable en 1.

1. Calculons d'abord le taux d'accroissement entre 1 et $1+h$ ($h \neq 0$):

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^3-1^3}{h} \\ &= \frac{(1+2h+h^2)(1+h)-1}{h} \\ &= \frac{1+2h+h^2+h+2h^2+h^3-1}{h} \\ &= \frac{h^3+3h^2+3h}{h} \\ &= h^2+3h+3\end{aligned}$$

2. Calculons maintenant la limite de ce taux quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h\to 0} h^2+3h+3 = 3$$

C. 3 est un nombre réel, donc il s'agit d'une limite finie.

→ f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

b. Notion de continuité sur un intervalle

Définition

Continuité d'une fonction sur un intervalle :

f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel de I.

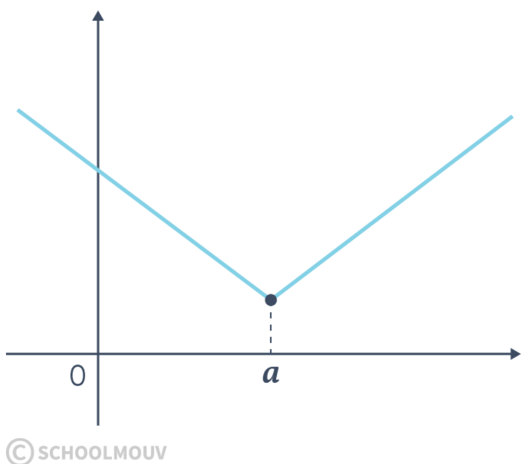
- f est continue en a si et seulement si f a une limite finie en a et si cette limite est égale à $f(a)$ (réel). C'est-à-dire que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout nombre réel de I.

Regardons les courbes représentatives de deux fonctions.

1

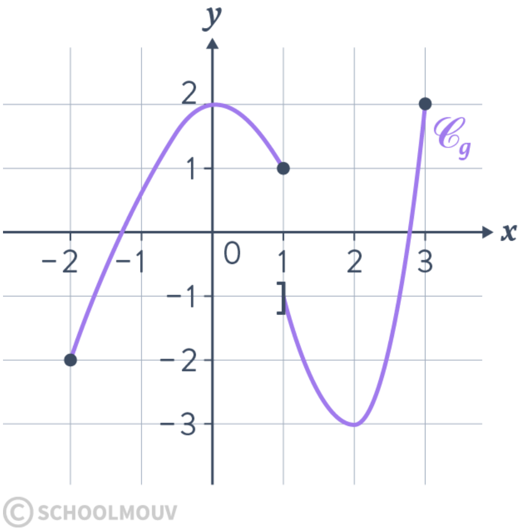


→ La fonction f est continue en a.

Astuce

On peut tracer la courbe représentative de la fonction sans lever le crayon.

2



→ La fonction g n'est pas continue sur $[-2 \ ; 3]$ car elle n'est pas continue en 1. En effet :

$$g(1) = 1 \neq \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = -1$$

Astuce

> On ne peut pas tracer la courbe de cette fonction sans lever le crayon.

Donnons quelques propriétés de la continuité de fonction.

Propriété

> - Les fonctions dérivables sur un intervalle I sont continues sur cet intervalle.
> - Si u et v sont deux fonctions continues sur I, alors $u + v$ et $u \times v$ sont continues sur I.
> - Si u et v sont deux fonctions continues sur I et si de plus v est non nulle sur I, alors $\frac{u}{v}$ est continue sur I.
>
> → En particulier, la fonction $\frac{1}{v}$ est continue sur I.

c. Continuité des fonctions usuelles

Propriété

Les fonctions affines, polynômes, inverse, racine carrée, exponentielle, sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

C'est-à-dire :

- les **fonctions affines** sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les **fonctions polynômes** sont continues sur $\mathbb{R}$;
- la **fonction inverse** est continue sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur$]0\ ;\ +\infty[$;
- la **fonction racine carrée** est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$;
- la **fonction exponentielle** est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Étudions la continuité de la fonction définie par $f(x)=(3x^2-2x+1)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x\mapsto 3x^2-2x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

→ Or, f est le produit de ces deux fonctions, donc on peut affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2 | Théorème des valeurs intermédiaires

Nous savons maintenant ce qu'est une fonction continue sur un intervalle. Dans cette partie, nous allons voir un théorème valable seulement pour une fonction f continue sur un intervalle.

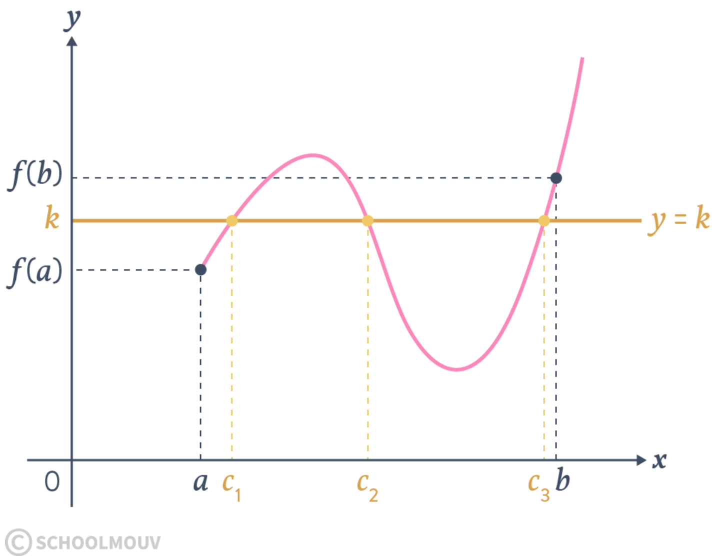
→ Cela nous permettra de déterminer l'existence (et éventuellement l'unicité) de solutions de l'équation $f(x)=k$ (k réel) sur cet intervalle.

a. Théorème concernant les fonctions continues

Théorème

Théorème des valeurs intermédiaires :

Si une fonction f est définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



À retenir

Le théorème des valeurs intermédiaires est un **théorème d'existence** : il affirme l'existence d'au moins une solution pour l'équation $f(x) = k$.

b. Corollaire pour les fonctions continues et strictement monotones

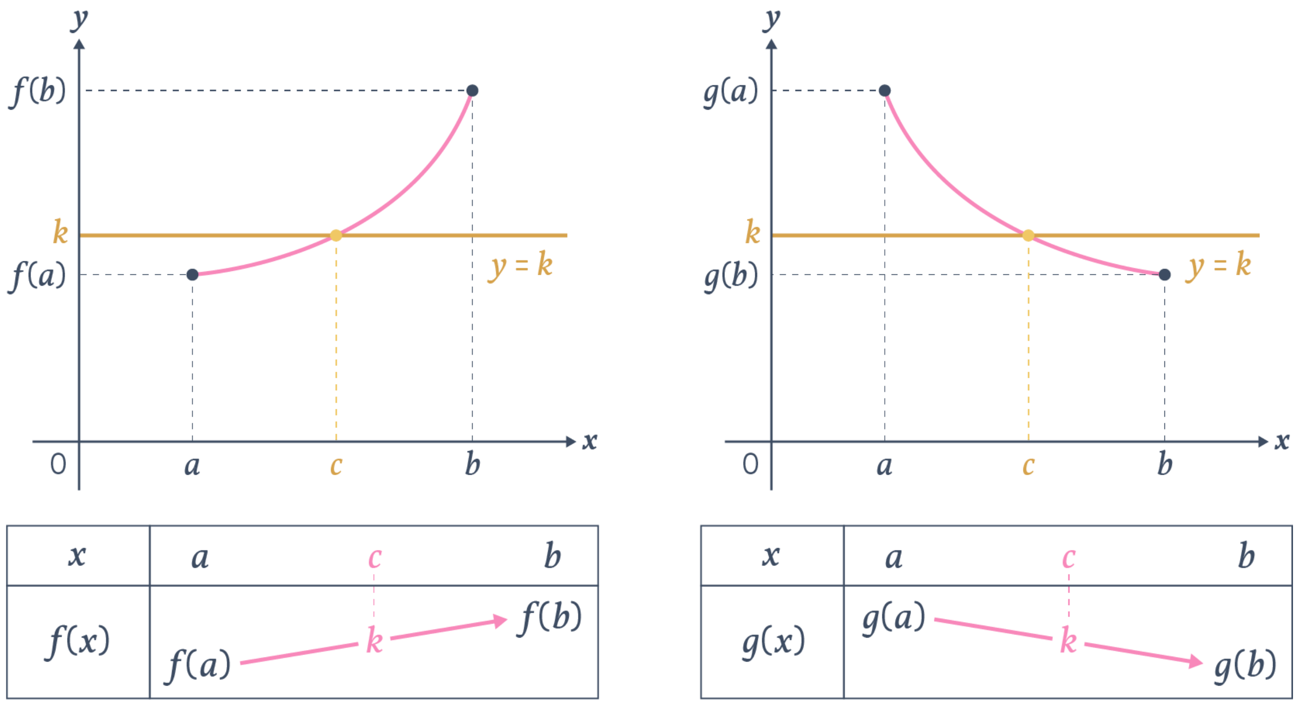
→ Un **corollaire** est un **théorème**, ou une proposition, qui est une **conséquence** directe d'un ou d'une autre.

Théorème

Corollaire :

Si une fonction f est définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ a une unique solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Illustrons ce corollaire pour mieux nous le représenter, avec les courbes représentatives et les tableaux de variations de deux fonctions f et g.



1. La fonction f est continue et strictement croissante sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

→ Le réel c est l'unique solution de l'équation $f(x)=k$ dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

2. La fonction g est continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

→ Le réel c est l'unique solution de l'équation $g(x)=k$ dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

À retenir

Ce corollaire est un **théorème d'unicité** : il affirme l'existence d'une unique solution pour l'équation $f(x)=k$, que, souvent, l'on ne peut résoudre facilement par le calcul.

→ On peut, dans ce cas, essayer de donner une valeur approchée de cette solution.

c. Un exemple

Nous allons maintenant illustrer ce corollaire par un exemple, qui nous permettra de mieux en comprendre les applications.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

→ Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Astuce

> L'expression « unique solution » doit immédiatement faire penser au corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

1. Commençons par étudier les variations de la fonction f, afin de voir si elle est **strictement monotone**.

→ Calculons la dérivée de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x \\ &= 6x^2 - 6x \\ &= 6x(x-1) \end{aligned}$$

→ Nous cherchons maintenant à construire les tableaux de signes et de variations.

Pour cela, il faut d'abord savoir pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée s'annule :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Calculons les extremums et les limites en l'infini.

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \times 0^3 - 3 \times 0^2 - 1 \\ &= \boxed{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 - 1 \\ &= \boxed{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \\ &\quad \text{[en factorisant par } x^3 \text{ que nous considérons non nul]} \\ &= \boxed{-\infty} \\ &\quad \left[\text{car } \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} 2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} = 2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \\ &= \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

Nous avons tous les éléments pour construire le tableau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

2 Recherchons les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Il apparaît clairement dans le tableau de variations que cette équation n'admet aucune solution sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$ puisque, sur cet intervalle, la fonction f ne s'annule pas.

En revanche, sur l'intervalle $[1 ~;~ +\infty[$, nous pouvons justifier de la manière suivante que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

À retenir

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'il s'agit d'une fonction polynôme : elle est donc continue sur $[1 ~;~ +\infty[$.
- La fonction f est strictement croissante sur $[1 ~;~ +\infty[$.
- $f(1) = -2 < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-2 ~;~ +\infty[$.

→ D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur l'intervalle $[1 ~;~ +\infty[$, donc finalement sur $\mathbb{R}$.

d. Méthode d'encadrement d'une solution

Astuce

Pour encadrer une solution, nous allons nous servir de la fonction table de notre calculatrice.

Reprenons notre exemple précédent : on sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans l'intervalle $[1 ~; +\infty[$.

→ Nous cherchons à encadrer la solution à 10^{-2} près.

Pour ce faire, nous allons opérer par étapes.

1. Entrer l'**expression de la fonction** dans la calculatrice : $2X^3 - 3X^2 - 1$.
2. Régler le **point de départ** de la table.

→ Nous réglons le point de départ sur 1 puisque nous nous intéressons à l'intervalle $[1 ~;~ +\infty[$.

3. Régler le **pas du tableau**.

→ Nous réglons le pas sur $\boxed{1}$, cela signifie qu'il donne toutes les images des nombres entiers (1, 2, 3, 4, etc.).

Nous observons maintenant la table correspondante :

X	Y
1	-2
2	3
3	26
4	79

Nous repérons facilement que $-2 < 0 < 3$ (on choisit toujours un encadrement avec les valeurs les plus proches de k, qui vaut ici 0).

→ Notre solution est encadrée de la manière suivante : $1 < a < 2$.

Il ne s'agit que d'un encadrement à l'unité, et non pas à 10^{-2}.
Nous recommençons donc les étapes 2 et 3.

→ Nous laissons le point de départ sur $\boxed{1}$, puisque nous nous intéressons maintenant à l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, et nous réglons le pas cette fois sur $\boxed{0,1}$.

Nous observons la table obtenue :

X	Y
$1,5$	-1
$1,6$	$-0,488$
$1,7$	$0,156$
$1,8$	$0,944$

Ici, nous avons : $-0,488 < 0 < 0,156$.

→ Notre solution est désormais encadrée de la manière suivante : $1,6 < a < 1,7$.

Il s'agit d'un encadrement à 10^{-1} près.
Nous continuons donc, en reprenant les étapes 2 et 3.

→ Nous réglons alors le point de départ du tableau sur $\boxed{1,6}$ et le pas sur $\boxed{0,01}$.

Nous obtenons finalement :

X	Y
$1,66$	$-0,1182$
$1,67$	$-0,0518$
$1,68$	$0,01606$
$1,69$	$0,08532$

Nous repérons : $-0,0518 < 0 < 0,01606$.

→ Un encadrement de a à 10^{-2} est : $1,67 < a < 1,68$.

→ Une valeur approchée de a à 10^{-2} près est donc : $a \approx 1,68$.

3 | Étude d'une suite définie par une relation de récurrence

Dans cette dernière partie, nous allons étudier un exemple de suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

→ Grâce à un théorème qui nécessite la continuité de la fonction f, nous allons pouvoir déterminer la limite de cette suite, si elle existe.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

Dans le cours sur le raisonnement par récurrence, nous avons montré que, pour tout entier naturel n :

$$0 < u_n \leq u_{n+1}$$

Nous avons donc montré que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs et que la suite (u_n) est croissante.

→ Nous souhaitons déterminer la limite de cette suite (u_n).

Théorème

> Soit (u_n) une suite de premier terme donné et dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n, où f est une fonction.
>
> Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l, alors $f(l) = l$.

Astuce

> La limité éventuelle d'une suite (u_n) dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n, où f est une fonction continue, est à chercher parmi les solutions de l'équation $f(l) = l$.
> Il faut ensuite démontrer que cette limite existe et que l'on peut appliquer le théorème.

Dans notre exemple, la fonction f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$, qui est continue sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$, donc sur l'intervalle $\mathbb{R}^{*+}$ (on s'intéresse à cet intervalle car le premier terme de notre suite est 1 et la suite est croissante).

1. Déterminons la limite éventuelle l de la suite (u_n) en résolvant l'équation $f(l) = l$.

$$\begin{aligned} f(l) = l &\Leftrightarrow \sqrt{l+1} = l \\ &\Leftrightarrow l + 1 = l^2 \text{ [car } l > 0\text{]} \\ &\Leftrightarrow l^2 - l - 1 = 0 \end{aligned}$$

→ $l^2 - l - 1 = 0$ est une équation du second degré.

Calculons son discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) \\ &= 1 + 4 \\ &= 5 \\ &> 0\end{aligned}$$

→ L'équation admet donc deux racines réelles distinctes :

- $l_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, qui est un nombre négatif, donc qui ne peut pas être limite de cette suite de nombres strictement positifs.
- $l_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, qui est un nombre positif.

f est continue en $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, donc la seule limite potentielle de la suite (u_n) est :

$$l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2 Pour pouvoir conclure, il faut montrer que la suite (u_n) est convergente.

Rappelons le théorème suivant, que nous avons vu dans le cours sur les limites de suites.

Théorème

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

→ La suite (u_n) étant croissante, montrons qu'elle est majorée pour pouvoir conclure qu'elle converge.

Montrons par récurrence qu'elle est majorée par sa limite éventuelle $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On note P_n : « $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ».

Initialisation

$$u_0 = 1 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \, \text{[car } 1 \leq \sqrt{5}\text{]}$$

→ P_0 est vraie.

Hypothèse de récurrence

Soit k un entier naturel.
Supposons que P_k est vraie, c'est-à-dire que $u_k \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Montrons que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} u_k &\leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ [hypothèse de récurrence]} \\ u_k + 1 &\leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \\ u_k + 1 &\leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{u_k + 1} &\leq \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ &\text{[car la fonction racine carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\text{]} \\ u_{k+1} &\leq \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \text{ [par définition de la suite]} \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de comparer $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

→ Comparons leur carré.

$$\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2&=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\\&=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\\&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : }\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}&=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\&\text{[car ils sont tous les deux positifs]}\\\text{Ainsi : }u_{k+1}&\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

→ P_{k+1} est vraie.

Conclusion :

Finalement, pour tout entier naturel n :

$$u_n\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

→ La suite (u_n) étant croissante et majorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, par le théorème précédent, elle converge.

C D'après ce qui précède, la seule limite possible de la suite (u_n) est :

$$l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

→ La suite (u_n) converge vers $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Conclusion :

Les derniers cours nous ont permis de découvrir, ou d'approfondir, de nombreuses notions : limites d'une fonction, nouvelles formules de dérivées, fonctions convexes et concaves sur un intervalle et, dans ce cours-ci, la continuité d'une fonction.
Nous avons ainsi tous les éléments pour mener des études de fonction très complètes.