Limites de suites

Introduction :

Étudier le comportement d'une suite conduit à déterminer la limite d'une suite lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque les termes de la suite deviennent de plus en plus grands.

Nous allons étudier en particulier deux cas :

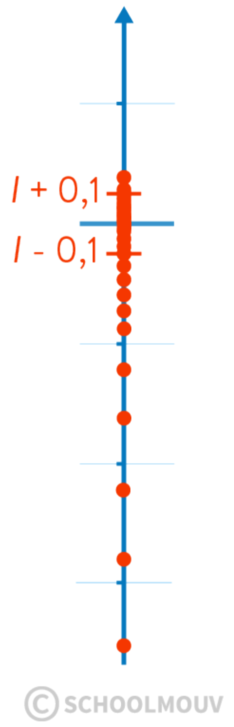
- celui où la limite de la suite est finie et vaut une valeur que l'on notera « l » ;
- celui où la limite est infinie, la suite tendra alors vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Nous verrons ensuite les théorèmes qui permettent de déterminer une limite de suite. Enfin, nous utiliserons les limites de suite pour déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction exponentielle.

1 Définition de la limite d'une suite

a. Limite finie

Regardons la représentation suivante d'une suite, avec les termes placés sur un axe gradué :



On peut constater que, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]l-0,1\ ;\ l+0,1[$. Les termes de la suite s'accumulent autour d'une certaine valeur l de cet intervalle.

➜ Ce phénomène traduit la notion de limite finie.

Définition

Limite finie :

Dire qu'un réel l est limite d'une suite (u_n) signifie que tout intervalle ouvert de centre l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

➜ On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

On dit que la suite (u_n) est convergente de limite l, ou que la suite (u_n) converge vers l.

À retenir

Donnons les limites de quelques suites de référence :

➜ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

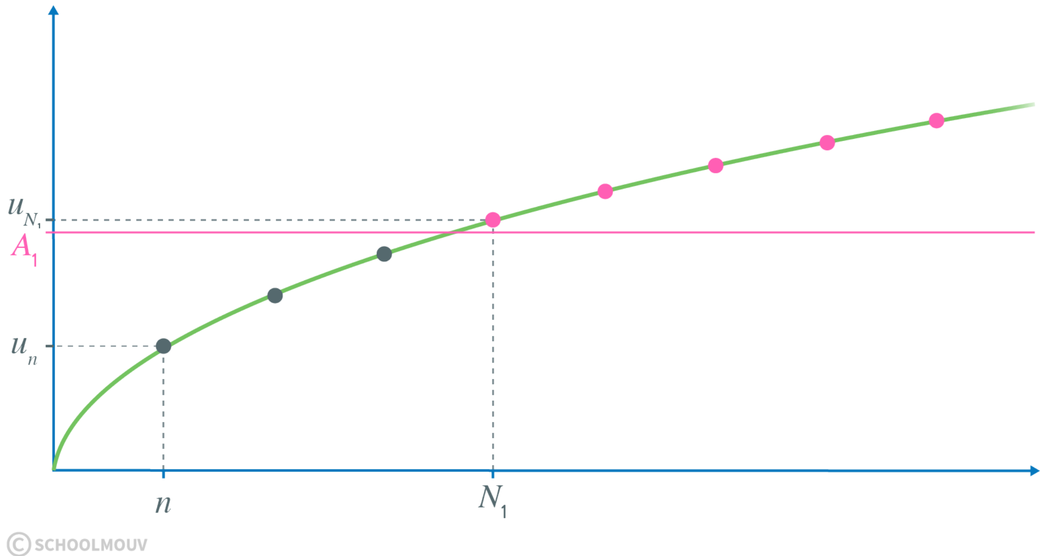
➜ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

→ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$

→ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

b. Limite infinie

Regardons maintenant la représentation suivante d'une autre suite :



On constate cette fois-ci que, sur l'axe des ordonnées, tous les termes de la suite, à partir de l'indice N_1, appartiennent à l'intervalle ouvert $]A_1, +\infty[$.

→ Autrement dit, plus n est grand, plus les termes u_n arrivent à dépasser tout nombre A.

Définition

Suite divergeant vers $+\infty$:

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $[A\ ;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

→ On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

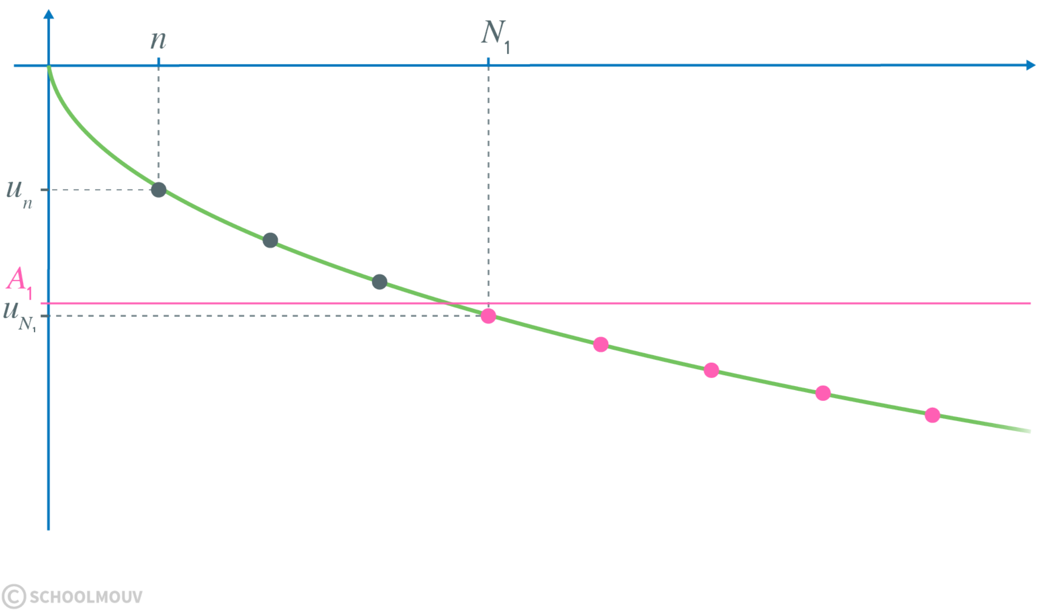
On dit alors que (u_n) est divergente ou que (u_n) diverge vers $+\infty$.

À retenir

Donnons quelques limites de suites de référence :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Étudions cette fois la représentation graphique suivante :



Définition

Suite divergeant vers $-\infty$:

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty\ ;\ A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

- On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

On dit alors que (u_n) est divergente ou que (u_n) diverge vers $-\infty$.

Théorème

La limite d'une suite, si elle existe, est uniqu

Attention

Une suite n'a pas nécessairement de limite. C'est le cas pour les suites alternées, c'est-à-dire qui alternent entre deux valeurs, ou pour celles dont les valeurs oscillent.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ alterne entre les valeurs -1 et 1, selon la parité de l'entier n :

- si n est pair, $u_n = 1$;
- si n est impair, $u_n = -1$.

➜ Cette suite n'a donc pas de limite.

2 Théorèmes sur les limites d'une suite

Nous venons de définir la notion de limite. Voyons maintenant des moyens efficaces pour déterminer la limite éventuelle d'une suite :

- en comparant deux suites entre elles ;
- en utilisant le théorème des gendarmes ;
- en utilisant les suites géométriques ;
- ou encore en utilisant le théorème de convergence des suites monotones.

Commençons par faire un rappel de vocabulaire.

Définition

Suite majorée, minorée et bornée :

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un nombre M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.

  ➜ M est appelé le majorant de (u_n).

- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un nombre m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$.

➜ m est appelé le minorant de (u_n).

- Une suite à la fois minorée et majorée est dite **bornée**.

a. Limite et comparaison

Dans certains cas, **comparer deux suites**, si l'on connaît la divergence de l'une, permet de déduire la divergence de l'autre.

Théorème

Théorème de comparaison des limites :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.

1. Si, pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 :

- $u_n \leq v_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

➜ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

2. Si, pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 :

- $u_n \leq v_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

➜ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration

Démontrons le premier point, c'est-à-dire la divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.

On sait que, pour un entier naturel $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq v_n$.
On a aussi : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Soit un réel $A > 0$.
Il existe donc un rang n_1 (entier naturel) tel que, pour tout entier naturel $n \geq n_1$:

$$u_n \geq A$$

En considérant l'entier naturel N, plus grande valeur entre n_0 et n_1, on a, pour tout entier naturel $n > N$:

$$v_n \geq u_n \text{ et } u_n > A$$

D'où : $v_n > A$ pour tout entier naturel $n > N$.
Autrement dit, pour tout réel $A > 0$, il existe un rang N tel que $v_n > A$ pour tout entier naturel $n > N$.

➜ Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

b. Le théorème des gendarmes

Le **théorème des gendarmes** permet de trouver la limite d'une suite dans le cas particulier où elle est encadrée par deux autres suites.

Astuce

Pour utiliser une image simple, imaginez deux gendarmes encadrant un suspect.

➜ Si les deux gendarmes vont dans la même direction, le suspect ne peut qu'aller dans cette direction !

Théorème

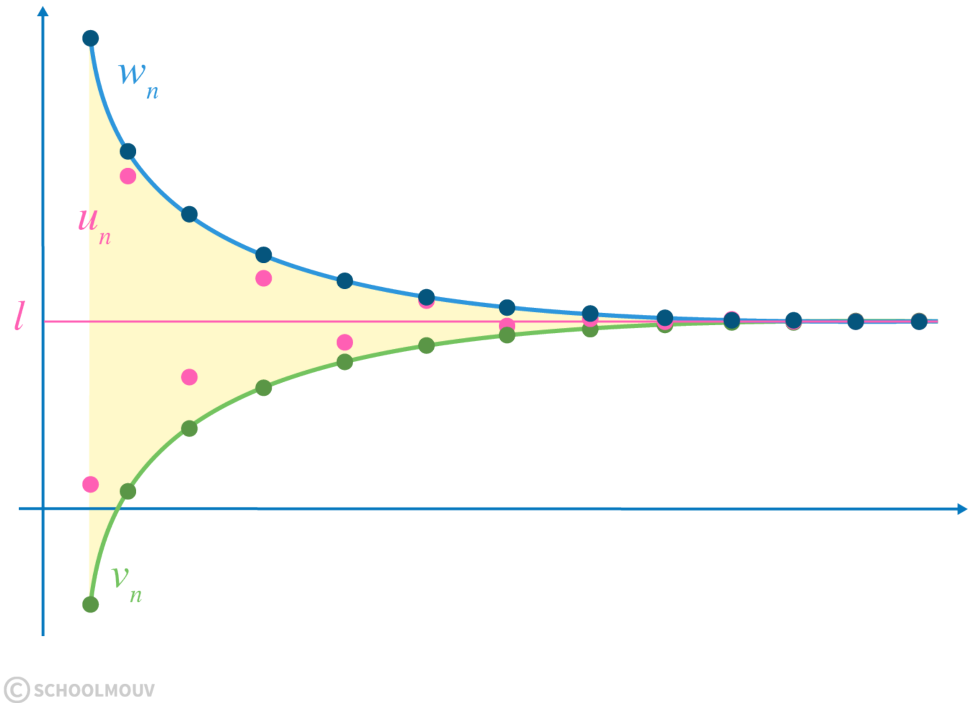
Théorème des gendarmes :

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Si :

- pour tout entier naturel supérieur à un certain entier naturel n_0, $v_n \leq u_n \leq w_n$,
- les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l,

➜ alors la suite (u_n) converge vers l.

Les suites (u_n), (v_n) et (w_n), avec $v_n \leq u_n \leq w_n$, sont représentées ci-dessous.



Les suites (v_n) et (w_n) convergent vers le réel l.

→ On voit que c'est aussi le cas de la suite (u_n).

Exemple

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{n + (-1)^n}{n} \text{ pour tout } n \geq 1$$

Pour pouvoir utiliser le théorème des gendarmes, il faut encadrer la suite (u_n). Pour cela on doit écrire des inégalités.

Pour tout $n \geq 1$:	$-1 \leq (-1)^n \leq 1$
On ajoute n à chaque membre :	$n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$
On divise tout par n ($n > 0$) :	$\dfrac{n-1}{n} \leq \dfrac{n+(-1)^n}{n} \leq \dfrac{n+1}{n}$
Ce qui équivaut à :	$1 - \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \dfrac{1}{n}$
Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc :	$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
Et donc, d'après le théorème des gendarmes :	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

C. Suites géométriques (q^n), q réel

En classe de première, nous avions vu le théorème de la limite de (q^n).

Rappelons-le ici. Nous démontrerons ensuite l'une des limites données.

Théorème

Théorème de la limite de (q^n) :

Soit q un nombre réel.

On a alors les limites suivantes :

- si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Démonstration

Démontrons que, si $q > 1$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Nous allons utiliser la formule de Bernoulli démontrée dans le cours précédent, sur le raisonnement par récurrence :

- pour tout réel x strictement positif et n entier naturel :

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Soit $q > 1$.

Il existe un réel $x > 0$ tel que $q = 1 + x$.

➜ On a donc : $q^n = (1+x)^n$.

D'après l'inégalité de Bernoulli, on a, pour tout entier naturel n :

$q^n = (1+x)^n \geq 1 + nx$

➜ La suite (q^n) est donc minorée par la suite $(1+nx)$.

$x > 0$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+nx) = +\infty$.

➜ La suite (q^n) est donc minorée par la suite $(1+nx)$, dont la limite est $+\infty$.

D'après le théorème de comparaison des limites, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

Exemple

Appliquons le théorème de la limite de (q^n) sur quelques suites.

1. Pour la suite $(u_n = (\sqrt{2})^n)$, on a : $q = \sqrt{2} > 1$.

➜ Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. Pour la suite $\left(v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, on a : $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$.

➜ Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

3. Pour la suite $(w_n = (-2)^n)$, on a : $q = -2 \leq -1$.

➜ Donc (w_n) n'a pas de limite.

d. Théorème de convergence des suites monotones

Dans certains cas, on peut déduire de la monotonie d'une suite sa convergence ou sa divergence.

Théorème

- Toute suite croissante majorée est **convergente**.
- Toute suite décroissante minorée est **convergente**.

De ce premier théorème découle un deuxième.

Théorème

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Enfin, nous pouvons donner une autre conséquence.

Théorème

- Si une suite (u_n) est croissante et admet pour limite l, alors, pour tout entier naturel n, $u_n \leq l$.
- Si une suite (u_n) est décroissante et admet pour limite l, alors, pour tout entier naturel n, $u_n \geq l$.

Démonstration

Par exemple, démontrons qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Soit un réel $A > 0$.
La suite (u_n) n'est pas majorée. En particulier, (u_n) n'est pas majorée par A.

→ Il existe donc un entier naturel N tel que $u_N > A$.

La suite (u_n) est croissante. Pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N$, puis $u_n > A$.

→ Pour tout réel $A > 0$, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n > A$.

→ Par définition, (u_n) a pour limite $+\infty$.

3 Opérations sur les limites

La partie précédente nous a donné des théorèmes qui nous permettent de calculer, dans certains cas, la limite d'une suite. Regardons maintenant les règles opératoires qui s'appliquent aux limites.

Lorsque deux suites (u_n) et (v_n) ont des limites connues, on peut en général en déduire la limite :

- de $(u_n + v_n)$: la limite correspond à la somme des limites de (u_n) et (v_n) ;

- de $(u_n \times v_n)$: la limite correspond au produit des limites de (u_n) et (v_n) ;
- et de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$: la limite correspond au quotient des limites de (u_n) et (v_n).

Nous allons donner ci-dessous les tableaux des règles opératoires : on peut les retrouver facilement, par exemple en se disant que, pour la somme, l'infini l'« emporte » sur le fini, ou que $+$ multiplié par $-$ donne $-$.

Attention

Toutefois, il existe des cas où il n'y a pas de règle générale (par exemple, dans une multiplication, qui de 0 ou de l'infini l'« emporte » ?).

➜ Nous parlons alors de **forme indéterminée** (FI).

Nous découvrirons, un peu plus loin, comment « lever » ces indéterminations.

À retenir

Limites de la somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limites du produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$l \times l'$	$\pm\infty$	FI

Limites du quotient de deux suites

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	l	l	0	$l \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	l'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Exemple

Soit la suite définie par $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$ pour tout entier naturel n.

Calculons les limites suivantes :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 = 2$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n + 5 = +\infty$

→ Par quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{3n+5} = 0$

À retenir

Le principe est toujours le même pour lever une indétermination :

→ il faut changer l'écriture de la suite en factorisant, la plupart du temps, par le terme de plus haut degré.

Exemple

Soit la suite définie par $u_n = 3n^2 - n - 5$ pour tout entier naturel n.

Calculons les limites suivantes :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} -n - 5 = -\infty$

→ Il s'agit donc d'une forme indéterminée $\infty - \infty$.

1. On factorise par le terme de plus haut degré, c'est-à-dire n^2 (que l'on suppose non nul car on s'intéresse à n grand) :

$$\begin{aligned} u_n &= n^2\left(\frac{3n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} - \frac{5}{n^2}\right) \\ &= n^2\left(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right) \end{aligned}$$

2 On calcule les limites des termes :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = 3$, car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$

➜ Donc, par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exemple

Soit la suite définie par $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$ pour tout entier naturel $n \geq 4$.

Calculons les limites suivantes :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n + 5 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} -2n + 7 = -\infty$

➜ Il s'agit d'une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Levons maintenant l'indétermination.

1 On factorise le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré, c'est-à-dire n :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n(3 + \frac{5}{n})}{n(-2 + \frac{7}{n})} \\ &= \frac{3 + \frac{5}{n}}{-2 + \frac{7}{n}} \end{aligned}$$

2 On calcule les limites du numérateur et du dénominateur.

On calcule d'abord : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7}{n} = 0$

Ainsi :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \frac{5}{n} = 3$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} -2 + \dfrac{7}{n} = -2$

➜ Par quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\dfrac{3}{2}$

Astuce

D'une manière générale, lorsque l'on veut déterminer la limite d'un polynôme ou d'un quotient de polynômes, on peut passer l'étape de la factorisation et ne garder que le terme de plus haut degré.

Exemple

Appliquons cette astuce sur un exemple simple :

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+n} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2}{n^2} \\ &= \lim_{n \to +\infty} 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

4 Limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction exponentielle

Dans cette dernière partie, nous allons utiliser les suites pour déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction exponentielle, qui a été vue en première.
Nous rejoignons ainsi la notion de limites de fonction, que nous traiterons dans le prochain cours.

Rappel

La fonction exponentielle est définie et strictement croissante sur l'ensemble des nombres réels.

Donnons ses limites aux bornes de son ensemble de définition, soit en $-\infty$ et en $+\infty$.

Théorème

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

Nous allons démontrer ces égalités en passant par les suites.

➜ Calculer la limite d'une fonction en $+\infty$ revient à calculer la limite de la suite associée en $+\infty$.

Démonstration

1 Nous cherchons la limite en $+\infty$ de la fonction exponentielle.

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n$$

La suite (e^n) est une suite géométrique de raison $\mathrm{e} \approx 2,718 > 1$.

➜ Elle diverge donc vers $+\infty$.

D'où :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x &= \lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n \\ &= +\infty\end{aligned}$$

2 Nous cherchons maintenant la limite en $-\infty$ de la fonction exponentielle.

En posant $X = -x$, on a : quand x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$.
Par ailleurs, on se souvient de la propriété : $\mathrm{e}^{xy} = (e^x)^y$.

On obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x &= \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n} \\ &= \lim_{n \to +\infty} (\mathrm{e}^{-1})^n \\ &= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n\end{aligned}$$

La suite $\left(\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n\right)$ est une suite géométrique de raison $0 < \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,37 < 1$.

➜ Elle converge donc vers 0.

D'où, enfin :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x &= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n \\ &= 0\end{aligned}$$

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons vu la définition d'une limite de suite quand elle existe, puis des théorèmes permettant de déterminer cette limite.
Nous avons ensuite vu les propriétés des opérations sur les limites et avons utilisé les limites de suites pour déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction exponentielle.

Cette dernière partie nous a permis de faire un lien entre limites de suites et limites de fonctions. Nous allons étudier ces dernières dans le prochain cours.