Mouvement dans un champ de gravitation

Introduction :

Depuis le début des années 1960, plus de quarante sondes, orbiteurs et atterrisseurs ont été envoyés vers la planète Mars. Conçus et construits par les agences spatiales américaine, européenne, russe, japonaise, ces véhicules équipés de capteurs servaient à étudier le climat, le sol, la géologie de la planète rouge, et à y chercher des traces d'une vie passée ou au moins d'eau liquide. À l'été 2020, un rover chinois (Tianwen-1), un rover américain (Mars 2020) et une sonde émiratie (Mars Hope) se sont mis en route, profitant de la « fenêtre de lancement » (intervalle de temps pendant lequel les conditions pour le lancement d'une fusée sont optimales), qui n'est ouverte que tous les 26 mois. Si une mission est lancée pendant cet intervalle de 3 semaines environ, la durée de son trajet de la Terre à Mars est minimale. Mais comment varie la durée de ce trajet ? Et comment la périodicité des fenêtres de lancement est-elle déterminée ?
Pour déterminer cela, il faut étudier les mouvements des planètes sur leurs orbites respectives.

Ce chapitre présente la forme et les caractéristiques de la **trajectoire d'un système mécanique** placé dans un **champ de gravitation**, et qui s'y maintient en **orbite**. Les **mouvements orbitaux des planètes** du système solaire et des **satellites géostationnaires** sont détaillés, ainsi que les **lois de Kepler** qui les décrivent.

1 Étude du mouvement dans un champ de gravitation

a. Force et champ de gravitation (rappels)

Nous considérons un point matériel P, de masse m (en kg), distant de r (en m) d'un corps sphérique de masse M (en kg), que nous modélisons par son centre de masse A.

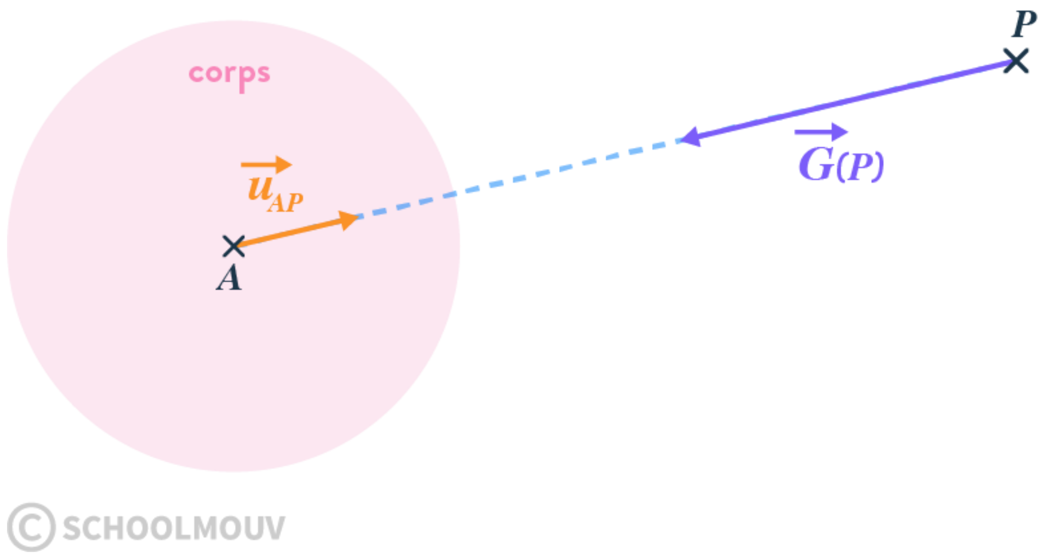
- La **force de gravitation** exercée par A sur P s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_{A/P} = -\mathrm{G} \cdot \frac{mM}{r^2} \cdot \vec{u}_{AP}$$

  - G est la constante universelle de gravitation, qui vaut : $6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$.
  - $\vec{u}_{AP}$ est le vecteur unitaire de mêmes direction et sens que $\overrightarrow{AP}$.

- Le corps de centre A crée au point P un **champ gravitationnel** $\vec{\mathcal{G}}(P)$ et nous avons :

$$\overrightarrow{F}_{A/P} = m\vec{\mathcal{G}}(P)$$
$$\text{avec : } \vec{\mathcal{G}}(P) = -\mathrm{G} \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_{AP}$$



b. Deuxième loi de Newton et accélération

À retenir

> Un **satellite** est un système (planète ou objet) en mouvement autour d'un astre attracteur soumis à son champ de gravitation.
> Une **orbite** est la trajectoire fermée du système soumis à l'effet du champ de gravitation.

Nous considérons un **satellite** de masse m, réduit à son centre de masse P, en **orbite** autour d'un **astre attracteur** de masse M et de centre de masse A. Les deux corps sont distants de $r = AP$.

→ Nous nous s'intéressons au système : {satellite}.

Nous nous plaçons dans un référentiel de centre A, orienté vers trois étoiles lointaines considérées comme fixes.

→ Nous supposons ce référentiel galiléen.

Nous considérons aussi que le satellite est suffisamment éloigné de tout autre corps céleste pour subir, de manière significative, uniquement la force de gravitation exercée par l'astre attracteur.

→ Le bilan des forces extérieures se résume donc à la force de gravitation exercée par l'astre attracteur en P : $\overrightarrow{F}_{A/P} = m\vec{\mathcal{G}}(P)$.

La deuxième loi de Newton nous permet ainsi d'écrire, avec $\vec{a}$ le vecteur accélération du satellite :

$$\Sigma\overrightarrow{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$
$$\text{Soit : } m\vec{\mathcal{G}}(P) = m\vec{a}$$

Nous trouvons donc :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{\mathcal{G}}(P) = -\mathrm{G} \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_{AP}}$$

c. Orbite circulaire : accélération et vitesse dans le repère de Frenet

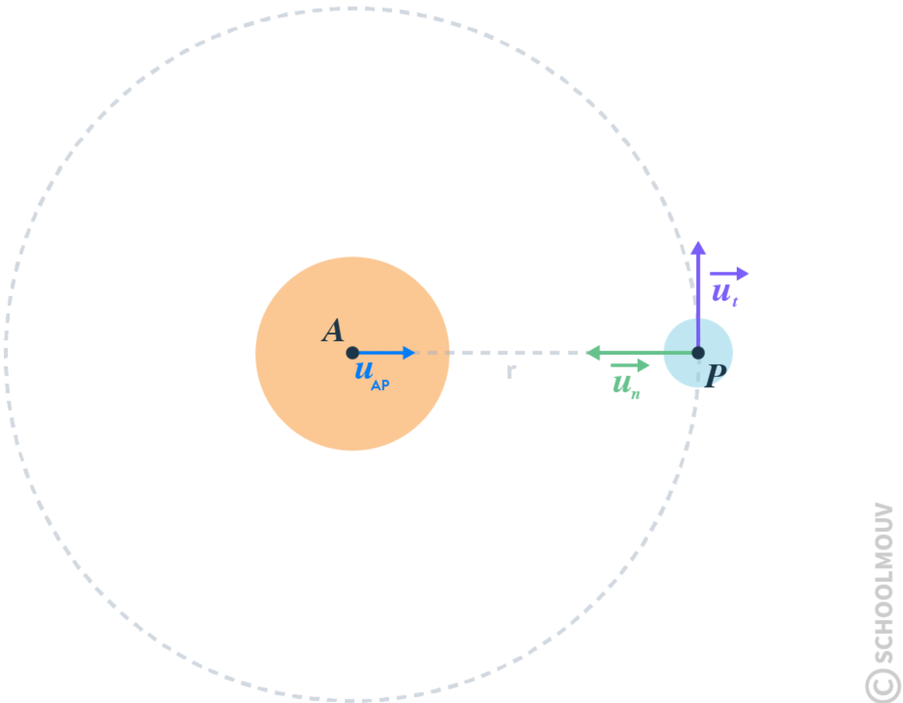
Nous considérons maintenant que le satellite est en orbite **circulaire** autour de l'astre attracteur.

→ La distance r entre les centres de masse reste constante.

Comme nous l'avons vu dans le cours « Modélisation d'un mouvement », la trajectoire étant circulaire, nous décidons de travailler dans un repère

de Frenet lié au point P : $(P\ ;\ \vec{u}_{\mathrm{t}},\ \vec{u}_{\mathrm{n}})$.
Le vecteur $\vec{u}_{\mathrm{n}}$ a pour direction (AP), et il est orienté vers le centre A.

→ Les vecteurs unitaires $\vec{u}_{AP}$ et $\vec{u}_{\mathrm{n}}$ sont opposés :
$\vec{u}_{AP} = -\vec{u}_{\mathrm{n}}$.



Nous connaissons aussi l'expression dans un repère de Frenet du vecteur accélération $\vec{a}$ d'un corps en mouvement circulaire, avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse du système (et v sa norme) :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{u}_{\mathrm{t}} + \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_{\mathrm{n}}$$

Or, d'après la deuxième loi de Newton, nous avons établi pour $\vec{a}$ l'expression :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -\mathrm{G} \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_{AP} \\ &= \mathrm{G} \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_{\mathrm{n}}\ [\text{car } \vec{u}_{AP} = -\vec{u}_{\mathrm{n}}] \\ &= 0 \cdot \vec{u}_{\mathrm{t}} + \frac{\mathrm{G}M}{r^2} \cdot \vec{u}_{\mathrm{n}} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'égalité :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{u}_\mathrm{t} + \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_\mathrm{n} = 0 \cdot \vec{u}_\mathrm{t} + \frac{GM}{r^2} \cdot \vec{u}_\mathrm{n}$$

Les composantes en $\vec{u}_\mathrm{t}$ et $\vec{u}_\mathrm{n}$ nous permettent d'en déduire les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \\ \\ \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{\mathrm{G}M}{r^2} \end{cases}$$

- La première égalité nous dit que la dérivée de la vitesse est nulle, donc la valeur de la vitesse est constante dans le temps.

→ Le mouvement d'un satellite en orbite circulaire est uniforme.

- La seconde égalité nous permet d'exprimer la valeur de la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{r} &= \frac{\mathrm{G}M}{r^2} \\ \text{Soit : } v^2 &= \frac{r\mathrm{G}M}{r^2} = \frac{\mathrm{G}M}{r} \\ \text{Donc : } v &= \sqrt{\frac{\mathrm{G}M}{r}} \end{aligned}$$

→ Nous trouvons bien une vitesse constante, puisque M et r sont constantes par hypothèse.

Nous savons aussi que, dans le cas d'un mouvement circulaire étudié dans un repère de Frenet, le vecteur vitesse est porté par $\vec{u}_\mathrm{t}$:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_\mathrm{t} = \sqrt{\frac{\mathrm{G}M}{r}} \cdot \vec{u}_\mathrm{t}$$

À retenir

Appliquer la deuxième loi de Newton et travailler dans le repère de Frenet $(P\ ;\ \vec{u}_\mathrm{t},\ \vec{u}_\mathrm{n})$ nous a ainsi permis de déterminer les caractéristiques du mouvement du centre de masse d'un système en

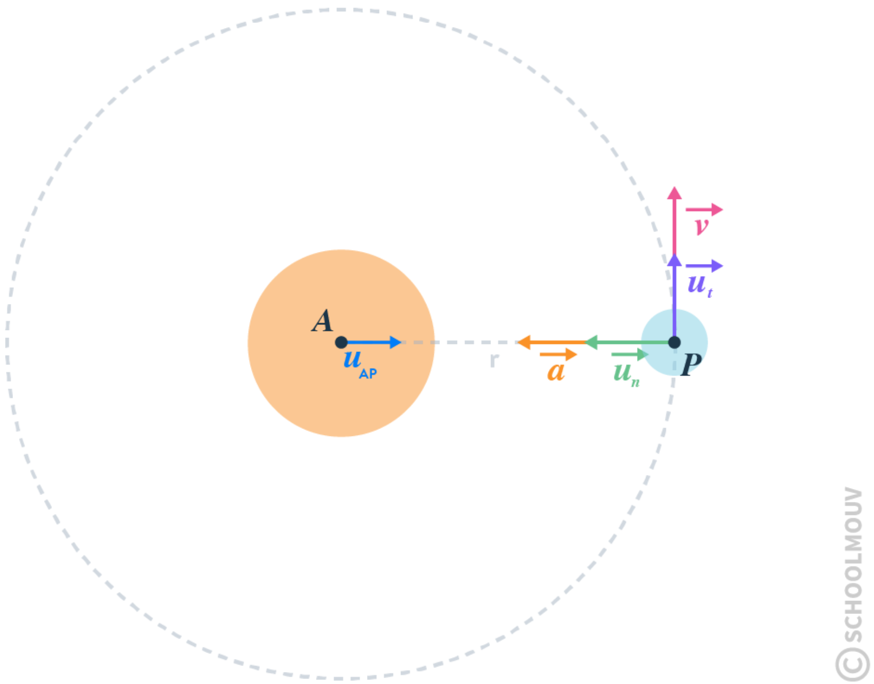
mouvement circulaire dans un champ de gravitation créé par un astre attracteur :

1. le mouvement du satellite est **uniforme** ;
2. les expressions des vecteurs vitesse et accélération sont :

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{\mathrm{G}M}{r}} \cdot \vec{u}_{\mathrm{t}}$$
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{G}M}{r^2} \cdot \vec{u}_{\mathrm{n}} = -\frac{\mathrm{G}M}{r^2} \cdot \vec{u}_{AP}$$

Avec :

- A et P, les centres de masse respectifs de l'astre et du satellite ;
- M, la masse de l'astre, en kg ;
- r, la distance entre A et P, en m ;
- $\mathrm{G} = 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$, la constante universelle de gravitation ;
- $\|\vec{v}\|$ en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ et $\|\vec{a}\|$ en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.



d. Orbite circulaire : période de révolution

Définition

Période de révolution :

La période de révolution, ou période orbitale, est le temps mis pour un système en orbite autour d'un astre attracteur, pour effectuer un tour complet de l'orbite.

Astuce

Nous parlons le plus souvent de « période de révolution » pour une planète ou un satellite naturel et de « période orbitale » pour un satellite artificiel.

Pour une orbite circulaire, la vitesse orbitale v est égale au rapport de la distance totale parcourue le long d'une orbite sur le temps mis pour la parcourir, c'est-à-dire le rapport du périmètre du cercle sur la période de révolution T :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$

En remplaçant v par la valeur de la vitesse que nous avons déterminée dans le paragraphe précédent, il vient :

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{\mathrm{G}M}{r}}} \\ &= 2\pi r\sqrt{\frac{r}{\mathrm{G}M}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathrm{G}M}} \text{ [car, pour tout } x > 0 : x\sqrt{x} = \sqrt{x^2}\sqrt{x} = \sqrt{x^3}] \end{aligned}$$

À retenir

Pour une trajectoire circulaire de rayon r, la période de révolution T (en s) est donnée par la relation :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\text{G}M}}$$

Exemple

Nous considérons que la station internationale est en orbite circulaire autour de la Terre.

- Son altitude est : $z = 408\,\text{km} = 4,08 \times 10^5\ \text{m}$.
- Le rayon de la Terre est $R_\text{T} = 6\,370\ \text{km} = 6,37 \times 10^6\ \text{m}$.

→ La distance entre les centres de masse est donc : $r = z + R_\text{T} = 6,78 \times 10^6\ \text{m}$.

- La masse de la Terre est : $M = 5,97 \times 10^{24}\ \text{kg}$.
- Nous donnons la valeur de la constante universelle de gravitation : $\text{G} = 6,67 \times 10^{-11}\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

La période orbitale T de la station internationale est :

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\text{G}M}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{(6,78 \times 10^6)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}} \\ &= 5,56 \times 10^3\ \text{s} \end{aligned}$$

→ La station internationale accomplit son orbite (considérée circulaire) autour de la Terre en un peu plus d’une heure et demie.

2 | Lois de Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) est un mathématicien allemand qui passe sa vie à décrire le mouvement des planètes du système solaire. À l'aide des observations astronomiques de Tycho Brahe (1546-1601), il cherche à déterminer les trajectoires des planètes et suppose alors qu'elles sont soumises à une force qui émane de l'astre attracteur (le Soleil pour les planètes, par exemple). Cette découverte est confirmée plus tard par Isaac Newton (1642-1727) avec la loi d'interaction gravitationnelle, qu'il élargit aux satellites en orbite autour d'une planète.
Puis, fervent partisan de l'héliocentrisme, il décrit les trajectoires des planètes comme étant, non pas circulaires, mais elliptiques où le Soleil occupe l'un des deux foyers de cette ellipse.
Enfin, une dizaine d'années plus tard, il énonce une autre loi qui permet de calculer les dimensions réelles du système planétaire grâce à la période de révolution d'une planète et de sa distance avec le Soleil.

Nous allons donc, dans cette partie, développer ces trois lois de physique aujourd'hui indispensables tant en astronomie que pour les voyages spatiaux.

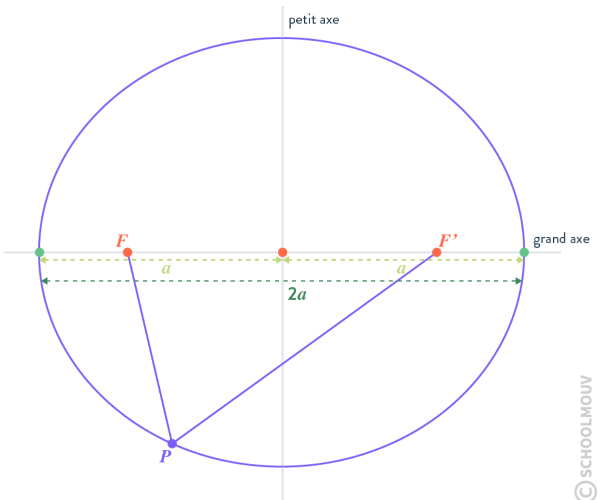
a. Première loi de Kepler : loi des orbites

À retenir

> Dans le référentiel héliocentrique, les planètes décrivent des **orbites elliptiques** autour du Soleil, qui en occupe un des foyers.

Une **ellipse** est une courbe plane fermée, un peu « allongée » en comparaison du cercle.
C'est l'ensemble des points P dont la somme des distances à deux points fixes, les foyers F et F', vaut :

$$PF + PF' = 2a$$

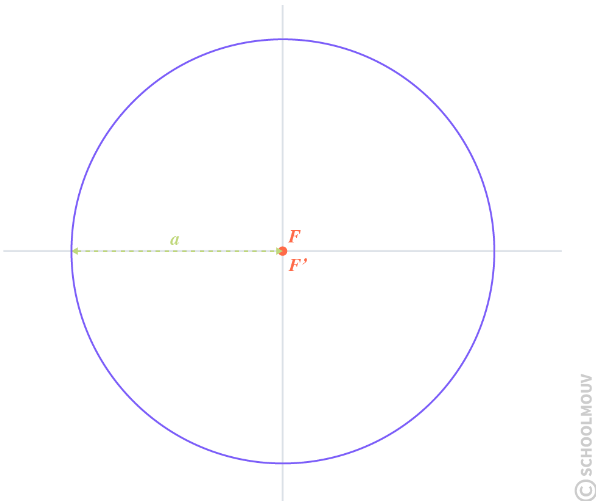


→ La longueur $2a$ est appelée grand axe de l'axe.

→ La longueur a est appelée demi-grand axe de l'axe.

En terminale, nous considérons que les trajectoires des planètes sont circulaires.
Un cercle est un cas particulier d'ellipse, dont les foyers sont confondus.

→ Le rayon r de ce cercle est alors égal au demi-grand axe a : $r = a$.

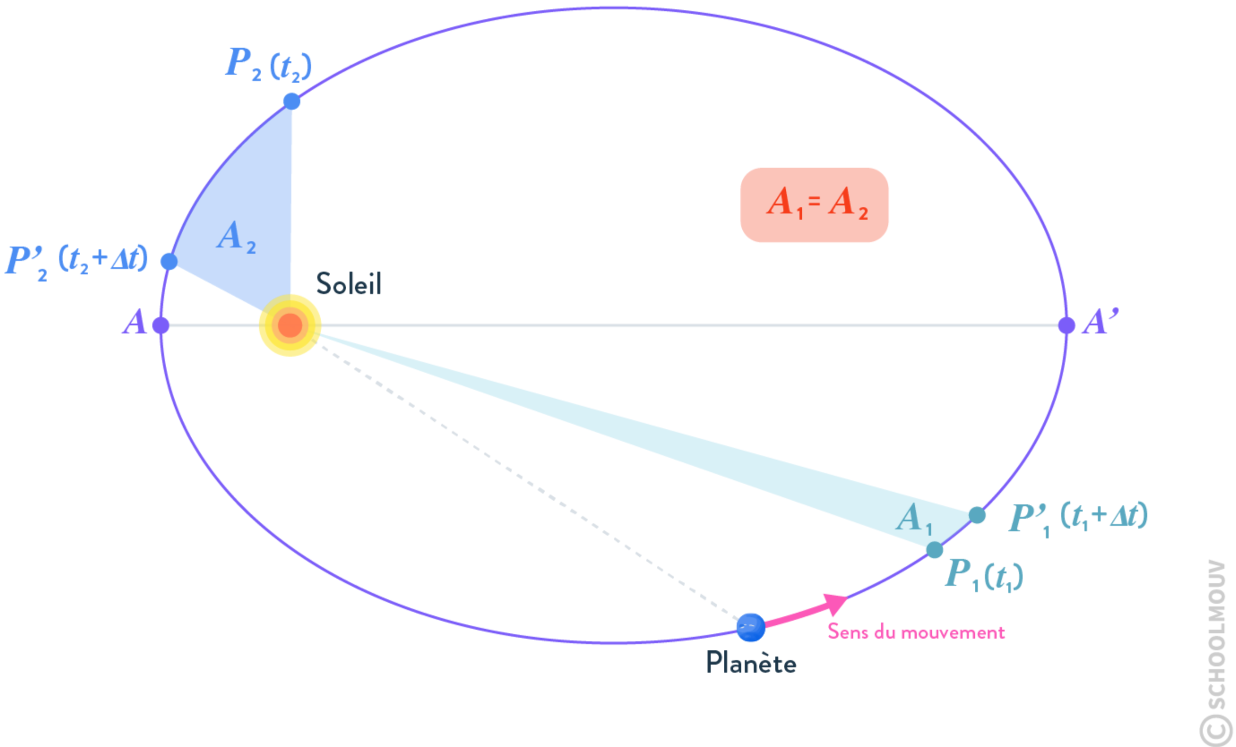


b. Deuxième loi de Kepler : loi des aires

À retenir

> Le rayon-vecteur liant le Soleil à une planète balaie, en des temps égaux, des aires égales.
>
> → Le rayon-vecteur est le segment reliant les centres de masse du Soleil et de la planète en orbite.

Soit Δt une durée fixée.
Et soit P_1, P'_1, P_2 et P'_2 respectivement les positions de P à t_1, $t_1 + \Delta t$, t_2 et $t_2 + \Delta t$.



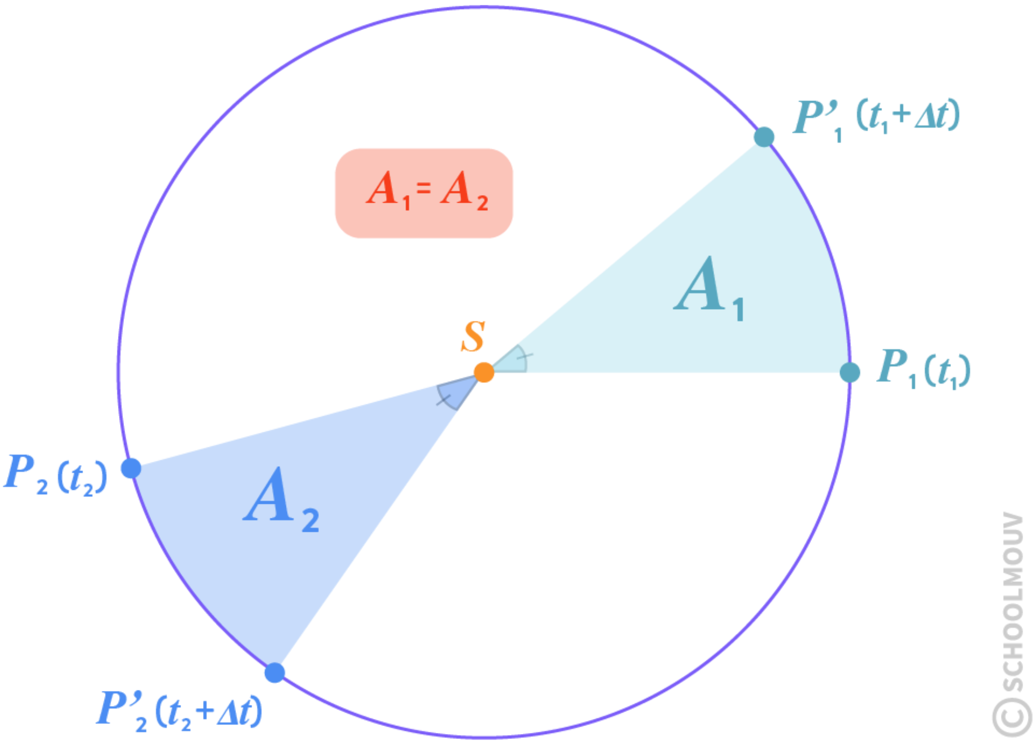
Astuce

> Le point A' est appelé **aphélie**, c'est le point de l'orbite d'une planète le plus éloigné du Soleil.
> Le point A est appelé **périhélie** c'est le point de l'orbite d'une planète le plus rapproché du Soleil.

Selon la loi des aires, l'aire $\mathcal{A}_1$ balayée par le segment $[SP]$ entre P_1 et P'_1 est égale à l'aire $\mathcal{A}_2$ balayée entre P_2 et P'_2.
Nous voyons que l'arc $\overparen{P_1P'_1}$ est plus court que l'arc $\overparen{P_2P'_2}$, alors qu'ils sont parcourus pendant la même durée Δt.

→ Ainsi, la deuxième loi de Kepler permet de dire que la vitesse de la planète n'est pas constante le long de son orbite : elle est plus rapide quand la planète est proche du Soleil.

En revanche, dans le cas d'une trajectoire circulaire, cette loi implique que la vitesse est constante.



En effet, si deux secteurs circulaires ont la même aire, alors les deux arcs de cercle les délimitant sont de même longueur :

$$\overset{\frown}{P_1P'_1} = \overset{\frown}{P_2P'_2}$$

Ils sont parcourus pendant une même durée Δt, la vitesse est donc constante.

→ Nous avons bien établi, dans la première partie, que la vitesse est constante dans le cas d'une orbite circulaire.

c. Troisième loi de Kepler : loi des périodes

À retenir

Le rapport du carré de la période de révolution sur le cube du demi-grand axe de l'orbite a la même valeur pour toutes les planètes du système solaire :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$$

Avec :

- a, le demi-grand axe de l'orbite, en m ;
- T, la période de révolution, en s.

→ Le rapport est une constante (souvent notée k), exprimée en seconde carré par mètre cube.

L'application de cette 3e loi a permis, historiquement, de déterminer la masse de la planète géante Jupiter, d'après l'observation des mouvements orbitaux de ses satellites naturels.
Cette dernière loi permet aussi de comprendre pourquoi les orbites des planètes du système solaire ne sont pas synchrones.

Plaçons-nous maintenant dans l'approximation des trajectoires circulaires, où le demi-grand axe a est égal au rayon r de la trajectoire.
Dans la première partie du cours, nous avons montré que, dans le cas d'une orbite circulaire, de rayon r, d'un satellite (la planète) autour d'un astre attracteur (le Soleil) de masse M, la période de révolution est égale à :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathrm{G}M}}$$

Élevons cette expression au carré :

$$T^2 = \left(2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathrm{G}M}}\right)^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{\mathrm{G}M}$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathrm{G}M}$$

→ Ce rapport est bien constant.

À retenir

Nous venons d'établir la troisième loi de Kepler dans le cas d'une orbite circulaire.
Pour chaque satellite d'un même astre attracteur de masse M, le

rapport du carré de la période de révolution sur le cube du rayon de l'orbite circulaire est **constant**, et il vaut :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathrm{G}M}$$

Avec :

- T, la période, en s ;
- r, le rayon de la trajectoire, en m ;
- M, la masse du Soleil, en kg ;
- $\mathrm{G} = 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$, la constante universelle de gravitation.

Ces lois de Kepler se généralisent à toute planète et à tout satellite en orbite autour d'un astre attracteur.

c. Application aux satellites géostationnaires

L'altitude à laquelle un satellite ou autre objet artificiel est placé en orbite autour de la Terre dépend de l'usage que nous souhaitons en faire. Nous distinguons :

- **l'orbite basse** (altitudes inférieures à $2\,000\ \mathrm{km}$) : satellites météorologiques et d'imagerie terrestre, systèmes globaux de télécommunication (Iridium), télescopes spatiaux, stations spatiales ;
- **l'orbite intermédiaire** (altitudes entre $2\,000\ \mathrm{km}$ et l'orbite géostationnaire) : satellites de navigation (GPS, Galileo) et de communication (Telstar) ;
- **l'orbite géostationnaire** : satellites de télécommunications (relais permanents pour les liaisons téléphoniques ou les émissions de télévision), satellites de météorologie (Meteosat).

→ Un satellite en **orbite géostationnaire** reste à la verticale d'un même point du globe terrestre, situé à l'équateur terrestre.

Étudions le mouvement de ce satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

→ Chaque axe du repère pointe constamment vers la même étoile.

- La masse de la Terre est : $M = 5,97 \times 10^{24}\ \text{kg}$.
- La constante universelle de gravitation vaut : $\text{G} = 6,67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.
- Nous considérons ici que la Terre tourne sur elle-même en $86\,164\ \text{s}$, soit $23\ \text{h}\ 56\ \text{min}\ 4\ \text{s}$. Cette durée, appelée jour sidéral, est un peu plus courte que $24\ \text{h}$, car le jour solaire est plus long en raison de la rotation de la Terre autour du Soleil.

→ Pour qu'un satellite artificiel soit en orbite géostationnaire, sa période orbitale doit être égale au jour sidéral : $T = 86\,164\ \text{s}$.

La troisième loi de Kepler, appliquée avec l'approximation des trajectoires circulaires, permet de déterminer l'**altitude de l'orbite géostationnaire**.

Nous avons, avec la troisième loi de Kepler, avec r le rayon de l'orbite géostationnaire :

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{r^3} &= \frac{4\pi^2}{\text{G}M} \\ \text{Soit : } r^3 &= \frac{T^2 \text{G}M}{4\pi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } r &= \sqrt[3]{\frac{T^2\text{G}M}{4\pi^2}} \\ &\quad \text{[car, pour tout } k \text{ réel, l'équation } x^3 = k \text{ admet une unique solution notée } \sqrt[3]{k}\text{]} \\ &= \sqrt[3]{\frac{86\,164^2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{4\pi^2}} \\ &= 4,21 \times 10^7\ \text{m} = 4,21 \times 10^4\ \text{km} \end{aligned}$$

Pour obtenir l'altitude z de l'orbite géostationnaire, il faut soustraire à r le rayon équatorial R de la Terre, égal à $6\,378\ \text{km}$:

$$\begin{aligned} z &= r - R \\ &= 4,21 \times 10^4 - 6\,378 \\ &= 3,57 \times 10^4\ \text{km} \end{aligned}$$

À retenir

Un satellite en orbite géostationnaire reste à la verticale d'un même point du globe terrestre, situé à l'équateur terrestre.
L'orbite géostationnaire se situe à une altitude d'environ $36\ 000\ \text{km}$ au-dessus de la surface terrestre.

Conclusion :

Nous avons vu les caractéristiques du mouvement d'un système mécanique en orbite autour d'un corps massif sous l'effet d'un champ de gravitation. Celui-ci reste en orbite circulaire uniforme une fois qu'il y a été placé à la vitesse adéquate.
Le mouvement d'un système en orbite circulaire uniforme est caractérisé par le rayon r de son orbite et sa période de révolution T. Ces deux grandeurs sont liées entre elles et à la masse M de l'objet au centre de l'orbite par la relation suivante :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

La plupart des satellites et stations placés en orbite autour de la Terre sont en orbite quasi circulaire uniforme. En particulier, un satellite géostationnaire, à une altitude de $36\ 000\ \text{km}$, se trouve toujours à la verticale d'un même point de l'équateur terrestre.
Nous pouvons aussi approcher les orbites des planètes du système solaire par des orbites circulaires. La 3^{e} loi de Kepler se traduit alors par l'équation ci-dessus, avec M la masse du Soleil.