Lois à densité

Introduction :

Dans ce cours, nous allons introduire les lois de probabilité à densité, qui sont nécessaires dans tous les problèmes de probabilités dont la variable n'est pas discrète mais continue (c'est-à-dire qu'elle peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné).
Ce type de loi intervient par exemple lorsqu'on s'intéresse à un temps d'attente (au téléphone, à une caisse, pour un bus…) ou encore lorsqu'on s'intéresse à la durée de vie d'un composant électronique, ou même tout simplement pour un tirage aléatoire d'un nombre dans un intervalle donné.
Après avoir défini ce que l'on appelle une loi à densité et les termes de densité de probabilité, fonction de répartition, espérance et variance, nous étudierons plus spécifiquement deux cas de loi à densité que l'on rencontre souvent : la loi uniforme et la loi exponentielle.

1 Notion de loi à densité

Dans le cas d'une loi à densité, la variable aléatoire associée est continue, c'est-à-dire qu'elle peut prendre une infinité de valeurs possibles dans un intervalle donné.

➜ Comment dans ce cas estimer les probabilités ?

Il faut garder à l'esprit deux points essentiels liés aux probabilités : une probabilité est une valeur positive (ou nulle) comprise entre 0 et 1 (0 et 1 inclus). De plus, si on considère l'ensemble des cas possibles, alors la somme des probabilités est de 1 ($100\,\%$ des cas).
Ceci reste valable qu'il s'agisse d'une loi à densité ou d'une loi de probabilité liée à une variable discrète.

a. La densité de probabilité

Dans le cas d'une variable continue qui prend ses valeurs dans un intervalle I, on ne s'intéresse pas à la probabilité qu'elle prenne une valeur précise, mais à la probabilité qu'elle appartienne à tout intervalle de I.

➜ Pour cela, nous définissons une **fonction de densité**.

Définition

Fonction de densité :

Soit une fonction f sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$ de $\mathbb{R}$.
On dit que f est une densité de probabilité, aussi appelée fonction de densité, sur I, si :

- f est continue et positive sur I ;
- l'aire (en unité d'aire) du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f sur l'intervalle I est égale à 1 ; autrement dit, l'intégrale de f sur I est égale à 1 :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$$

Prenons deux exemples pour bien comprendre.

Exemple

1. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 2x$.

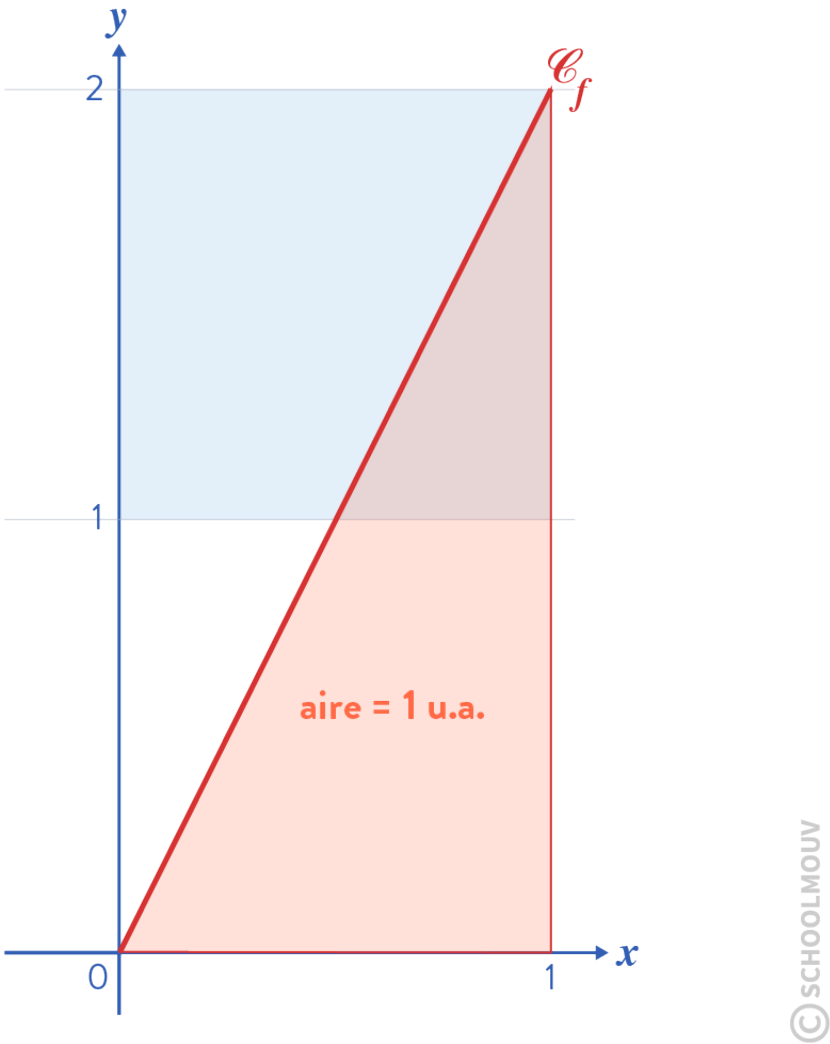
f est bien continue et positive sur cet intervalle. La première condition est vérifiée.

Nous avons de plus :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 2x\mathrm{d}x \\ &= [x^2]_0^1 \\ &= 1^2 - 0^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

La deuxième condition est aussi vérifiée.

→ La fonction f est bien une fonction de densité sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

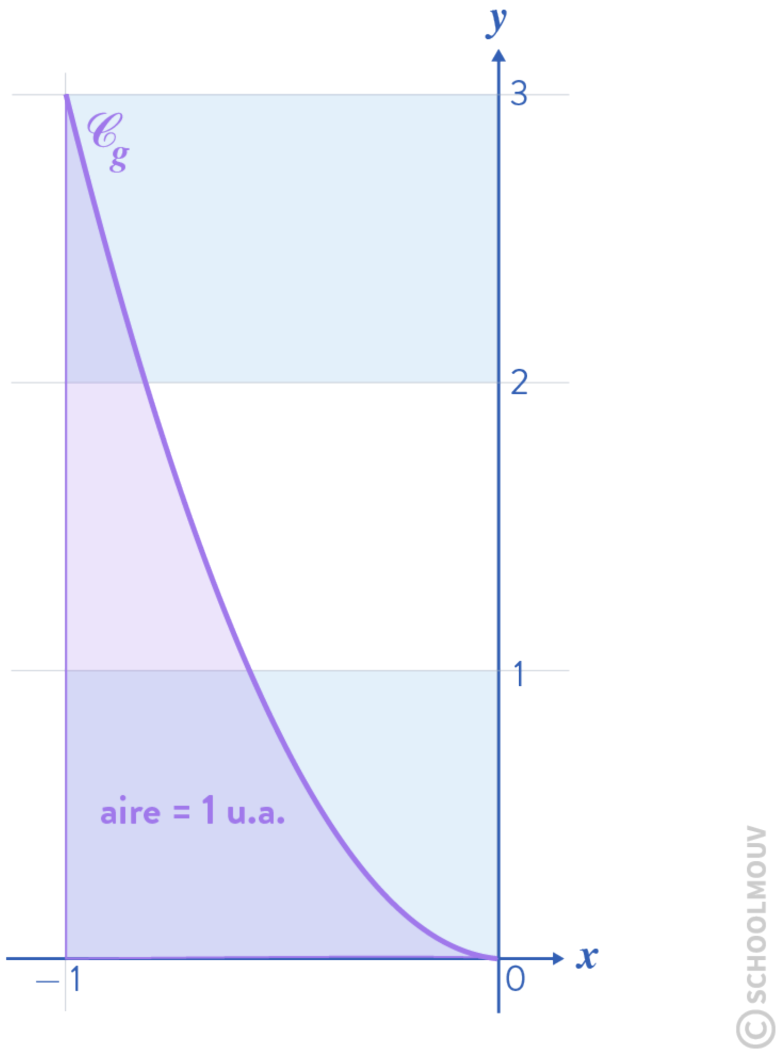


Représentation graphique de la fonction de densité f

2. Soit la fonction $g(x) = 3x^2$ définie et positive sur l'intervalle $I = [-1\ ;\ 0]$. Nous avons de plus :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} g(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} 3x^2\mathrm{d}x \\ &= [x^3]_{-1}^{0} \\ &= 0^3 - (-1)^3 \\ &= -(-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

➜ Cette fonction g est bien une fonction de densité sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.



Représentation graphique de la fonction de densité g

Remarquons que l'intervalle I considéré peut être non borné, comme par exemple $[a\ ;\ +\infty[$ (a réel), comme nous le verrons notamment dans la dernière partie de ce cours, quand nous aborderons la loi exponentielle.

➜ Nous notons alors :

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$$

Exemple

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Montrons qu'il s'agit d'une fonction de densité.

1. Pour tout $x \geq 0$, e^{-x} est strictement positif.

➜ f est donc strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2 Une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ est la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$.

Pour tout réel $b > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= [-\mathrm{e}^{-x}]_0^b \\ &= -\mathrm{e}^{-b} - (-\mathrm{e}^0) \\ &= -\mathrm{e}^{-b} + 1\end{aligned}$$

Quand b tend vers $+\infty$, $-b$ tend vers $-\infty$ et e^{-b} tend vers 0.

➜ Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty} -\mathrm{e}^{-b} + 1 \\ &= 0 + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

b. Variable aléatoire et probabilité

Maintenant que nous avons défini ce qu'était une fonction de densité, voyons le lien avec les probabilités.

Définition

Variable aléatoire suivant une loi de fonction de densité f :

Soit f une densité de probabilité sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi de densité de probabilité f sur I si, pour tout intervalle $[c\ ;\ d]$ inclus dans I, la probabilité que X soit compris dans cet intervalle, autrement dit : $p(X \in [c\ ;\ d])$, est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = c$ et $x = d$.

➜ Ce que l'on traduit par :

$$\begin{aligned}p(X \in [c\ ;\ d]) &= p(c \leq X \leq d) \\ &= \int_c^d f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

➜ X est la variable aléatoire associée à f.

➜ X suit la loi de densité f.

Cette définition nous permet d'écrire, pour tout réel $c \in I$:

$$\begin{aligned} p(X = c) &= p(c \leq X \leq c) \\ &= \int_c^c f(x)\mathrm{d}x \\ &= 0 \end{aligned}$$

En effet, puisque X peut prendre une infinité de valeurs dans I, la probabilité pour qu'il prenne une valeur précise est nulle.

À retenir

Nous pouvons aussi en tirer les conséquences suivantes :

$$p(c \leq X \leq d) = p(c < X \leq d) = p(c \leq X < d) = p(c < X < d)$$

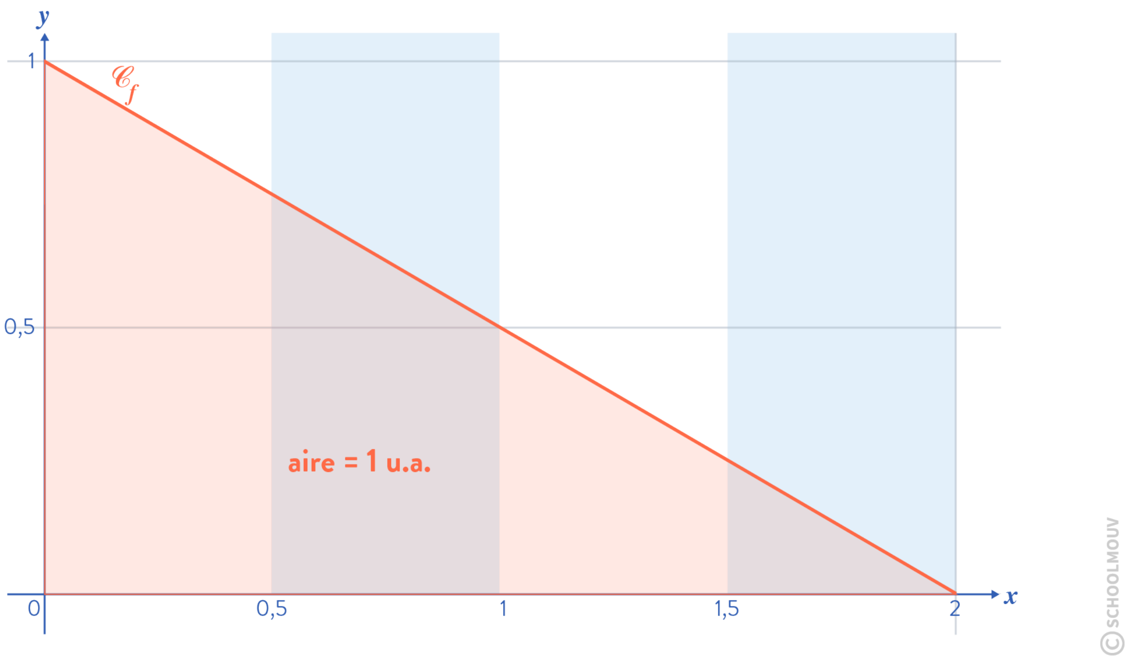
La meilleure façon de se représenter cette notion est de la traiter à travers un exemple.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ 2]$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

1. Montrons tout d'abord que f est une fonction de densité.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) \mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{4}x^2 + x\right]_0^2 \\ &= -\frac{1}{4} \times 2^2 + 2 - \left(-\frac{1}{4} \times 0^2 + 0\right) \\ &= -1 + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

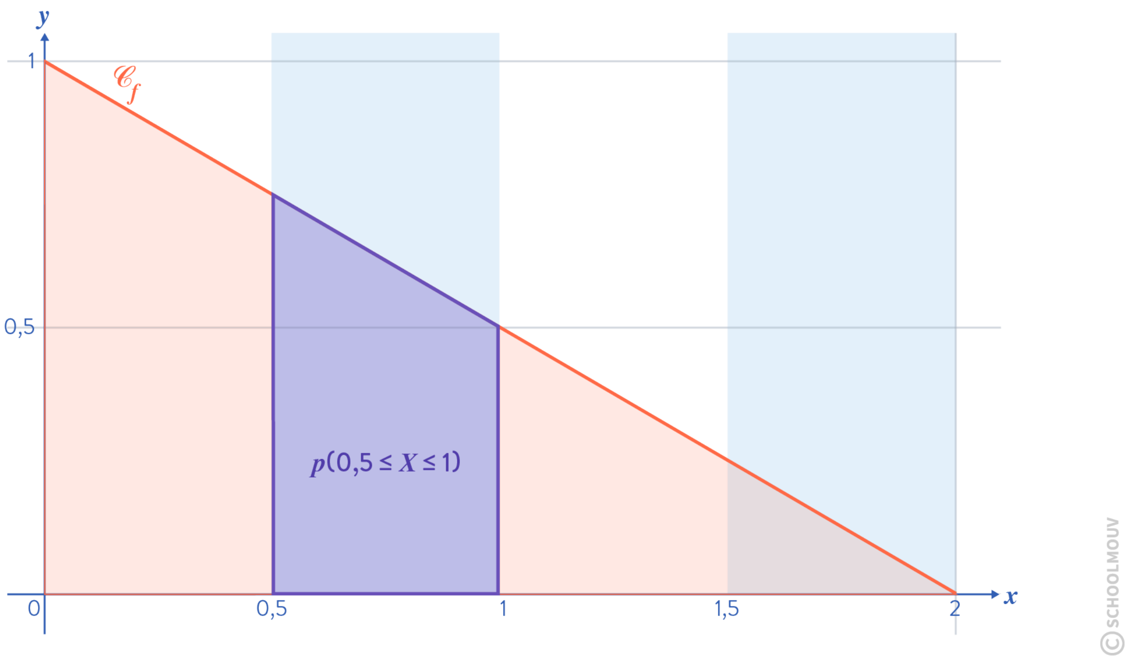


Représentation graphique de la fonction de densité f

➜ f est bien une fonction de densité.

2 Soit X la variable aléatoire associée à la fonction de densité f. Calculons la probabilité que X soit compris entre $\frac{1}{2}$ et 1.

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^2 + x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= -\frac{1}{4} \times 1^2 + 1 - \left(-\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$



Fonction de densité et probabilité

→ La probabilité pour que X appartienne à l'intervalle $[\frac{1}{2} \ ; \ 1]$ est égale à $0,3125$.

C. Fonction de répartition

Le calcul de probabilité avec une loi à densité implique donc d'intégrer la fonction f, ce qui est possible puisque celle-ci est continue. Le calcul de cette intégrale nécessite de déterminer une primitive F de la fonction f.

Définition

Fonction de répartition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité f sur $I = [a \ ; \ b]$.
On appelle fonction de répartition de la variable X la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = p(X \leq x)$$

La fonction de répartition F est en fait la primitive de f sur l'intervalle $[a \ ; \ b]$ qui s'annule en a.

→ Sa connaissance permet de calculer directement la probabilité $p(X \in [c \ ; \ d])$, pour tous c et d de I tels que $c \leq d$:

$$\begin{aligned} p(c \leq X \leq d) &= p(X \leq d) - p(X \leq c) \\ &= F(d) - F(c) \end{aligned}$$

Exemple

Soit la fonction de densité $g : x \mapsto g(x) = 3x^2$ définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.

➜ On donne aussi la fonction de répartition associée : $G : x \mapsto G(x) = x^3 + 1$.

En effet, nous avons, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= 3x^2 \\ \text{et : } G(-1) &= (-1)^3 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soit maintenant X la variable aléatoire qui suit la loi de densité g sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.

➜ Nous avons par exemple :

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{3}{4} \leq X \leq -\frac{1}{2}\right) &= G\left(-\frac{1}{2}\right) - G\left(-\frac{3}{4}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 1 - \left(\left(-\frac{3}{4}\right)^3 + 1\right) \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{27}{64} \\ &= \frac{19}{64} \end{aligned}$$

d. Indicateurs d'une variable aléatoire suivant une loi à densité

Il est souvent intéressant de connaître la valeur « moyenne » que peut prendre la variable aléatoire X associée à une loi de densité f sur l'intervalle I.
Mais, comme vous le savez, on ne peut pas à proprement parler de valeur « moyenne » puisqu'il s'agit de probabilité, on parle plutôt d'espérance.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de densité f sur $[a\ ;\ b]$.
L'espérance de X, notée $E(X)$, est alors donnée par :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$

Rappelons-nous que l'espérance est un paramètre de position, cela correspond théoriquement à la moyenne des valeurs observées prises par la variable aléatoire lors d'un nombre infini de répétitions de l'expérience.

Exemple

1. Soit f la fonction de densité définie sur $[0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = 2x$.

   Soit X la variable aléatoire qui suit la loi de densité f.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x2x\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 2x^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \times 1^2 - \frac{2}{3} \times 0^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

➜ L'espérance de X sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ est $\frac{2}{3}$.

2. Soit g la fonction de densité définie sur $[-1\ ;\ 0]$ par : $g(x) = 3x^2$.

   Soit Y la variable aléatoire qui suit la loi de densité g.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-1}^0 xg(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^0 x3x^2\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^0 3x^3\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{3}{4}x^4\right]_{-1}^0 \\ &= \frac{3}{4} \times 0^4 - \frac{3}{4} \times (-1)^4 \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

➜ L'espérance de Y sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$ est $-\frac{3}{4}$.

Nous en avons désormais l'habitude, donner l'espérance ne suffit pas dans la plupart des cas, car il est tout aussi important de mesurer la dispersion autour de l'espérance des valeurs prises par la variable aléatoire.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de densité f sur $[a\ ;\ b]$.

La variance de X, notée $V(X)$, et son écart-type, noté $\sigma(X)$ sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_a^b (x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \end{aligned}$$

Exemple

Soit f la fonction de densité définie sur $[0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = 2x$.

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi de densité f.

Nous avons calculé plus haut l'espérance de X : $E(X) = \frac{2}{3}$.

➜ Nous pouvons donc calculer la variance et l'écart-type :

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_0^1 (x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \times 2x\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) \times 2x\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{9}x\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{\frac{1}{18}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

2 Loi uniforme sur un intervalle $[a\ ;\ b]$

Considérons une personne qui attend un ami, celui-ci pouvant arriver à n'importe quel moment dans le quart d'heure qui suit. Considérons aussi qu'il n'y a pas de raison pour que le retardataire arrive à un moment plutôt qu'à un autre.
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de minutes que doit attendre la première personne.

- Si on arrondit à la minute supérieure le temps d'attente, alors X est une variable aléatoire discrète, qui suit une loi uniforme sur $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 15\}$.

  ➜ Nous avons étudié ce cas dans le cours précédent.

- En revanche, si on considère que X peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 15, il s'agit d'une variable continue.

  ➜ De manière analogue, on dit que X suit une **loi uniforme** sur $[0\ ;\ 15]$.

a. Définitions et propriétés

Commençons par définir une loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$.

Définition

Loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$:

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$ si celle-ci a pour fonction de densité la fonction constante f, définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = 1$$

➜ On note cette loi uniforme $U([0\ ;\ 1])$.

Dans ce cas, une primitive de f est $x \mapsto x$.

➜ Nous pouvons alors calculer la probabilité pour que X appartienne à un intervalle $[c\ ;\ d]$ (avec c et d des réels de $[0\ ;\ 1]$) :

$$\begin{aligned} p(c \leq X \leq d) &= [x]_c^d \\ &= d - c \end{aligned}$$

À retenir

Ainsi, la probabilité pour que X appartienne à tout intervalle $[c\ ;\ d]$ (avec c et d des réels de $[0\ ;\ 1]$) est égale à la longueur de l'intervalle $[c\ ;\ d]$.

Nous pouvons maintenant généraliser à tout intervalle $[a\ ;\ b]$ de $\mathbb{R}$.

Définition

Loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ **:**

Soit a et b des réels tels que $a < b$.
Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ si celle-ci a pour fonction de densité la fonction constante f, définie sur $[a\ ;\ b]$ par :

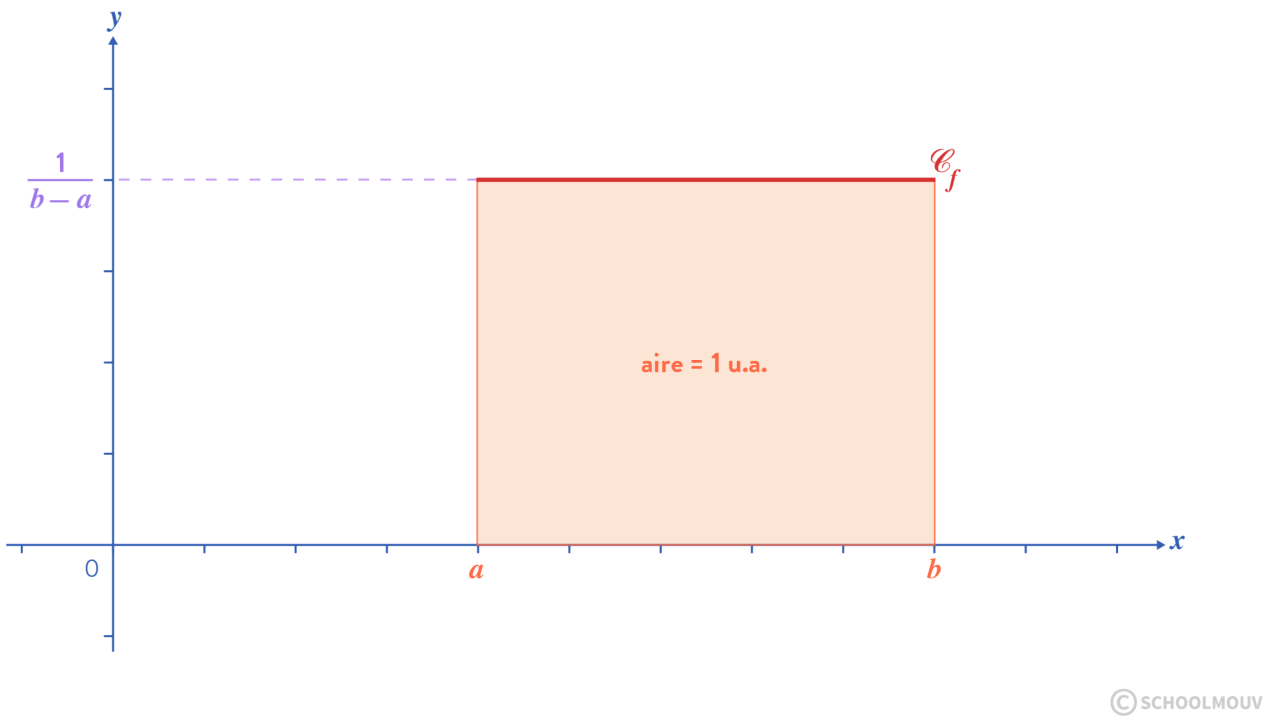
$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

➜ On note cette loi uniforme $U([a\ ;\ b])$.

Puisque $a < b$, on a bien $b - a > 0$ et $\frac{1}{b-a} > 0$. La fonction f est donc positive sur $[a\ ;\ b]$.
De plus, une primitive de f étant $x \mapsto \frac{x}{b-a}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x &= \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b \\ &= \frac{b-a}{b-a} \\ &= 1\end{aligned}$$

➜ Les deux conditions définissant une densité de probabilité sont bien vérifiées.



Loi uniforme sur [a ; b] et fonction de densité

Nous l'avons vu plus haut, la fonction de répartition donne, pour tout réel x, la probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à x. Nous avons alors la propriété suivante.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme $U[a\ ;\ b]$.

La fonction de répartition F associée est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < a \\ F(x) = \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a\ ;\ b] \\ F(x) = 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

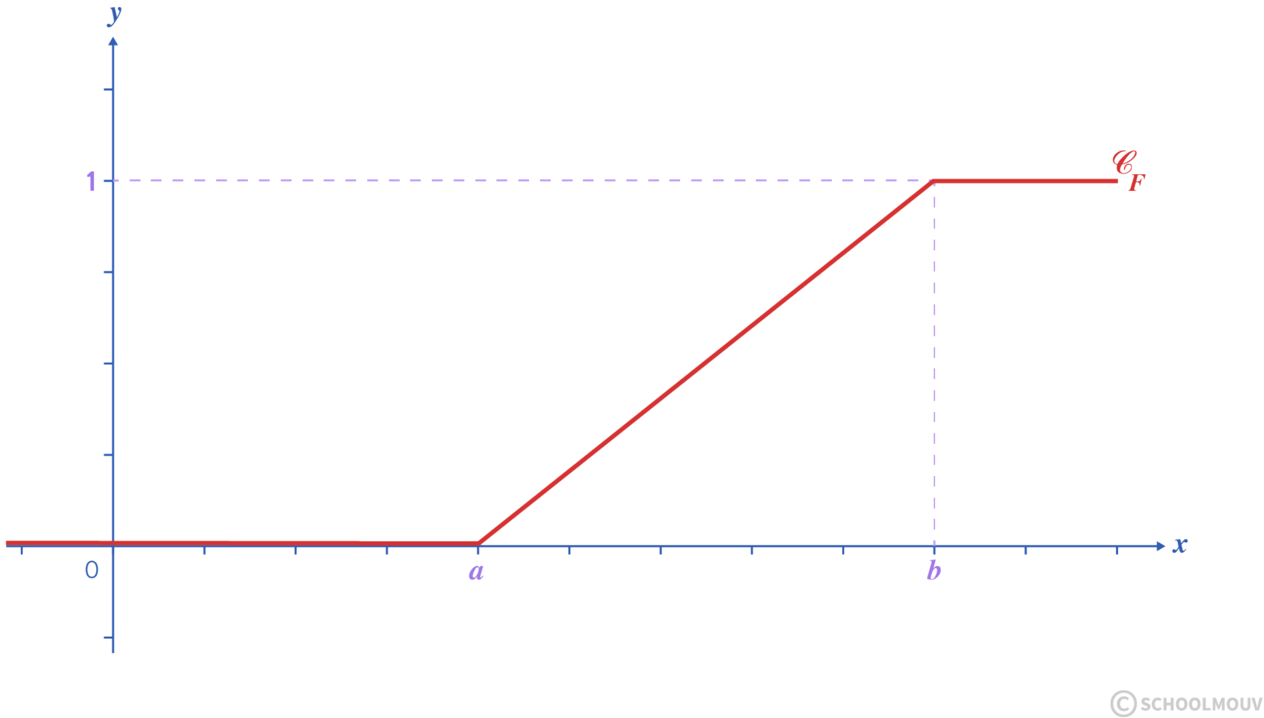
Démonstration

1. X prend toutes ses valeurs dans $[a\ ;\ b]$, donc :

- la probabilité que X soit inférieur ou égal à un nombre strictement inférieur à a est nulle ;
- l'événement : « X est inférieur ou égal à un nombre strictement supérieur à b », est un événement certain.

2 Sur $[a\ ;\ b]$, une primitive de $f : t \mapsto \frac{1}{b-a}$ est $t \mapsto \frac{t}{b-a}$. Nous avons donc, pour tout $x \in [a\ ;\ b]$:

$$\begin{aligned} F(x) &= p(X \leq x) \\ &= p(a \leq X \leq x) \\ &= \int_a^x \frac{1}{b-a} \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x \\ &= \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} \\ &= \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$



Loi uniforme sur [a ; b] et fonction de répartition

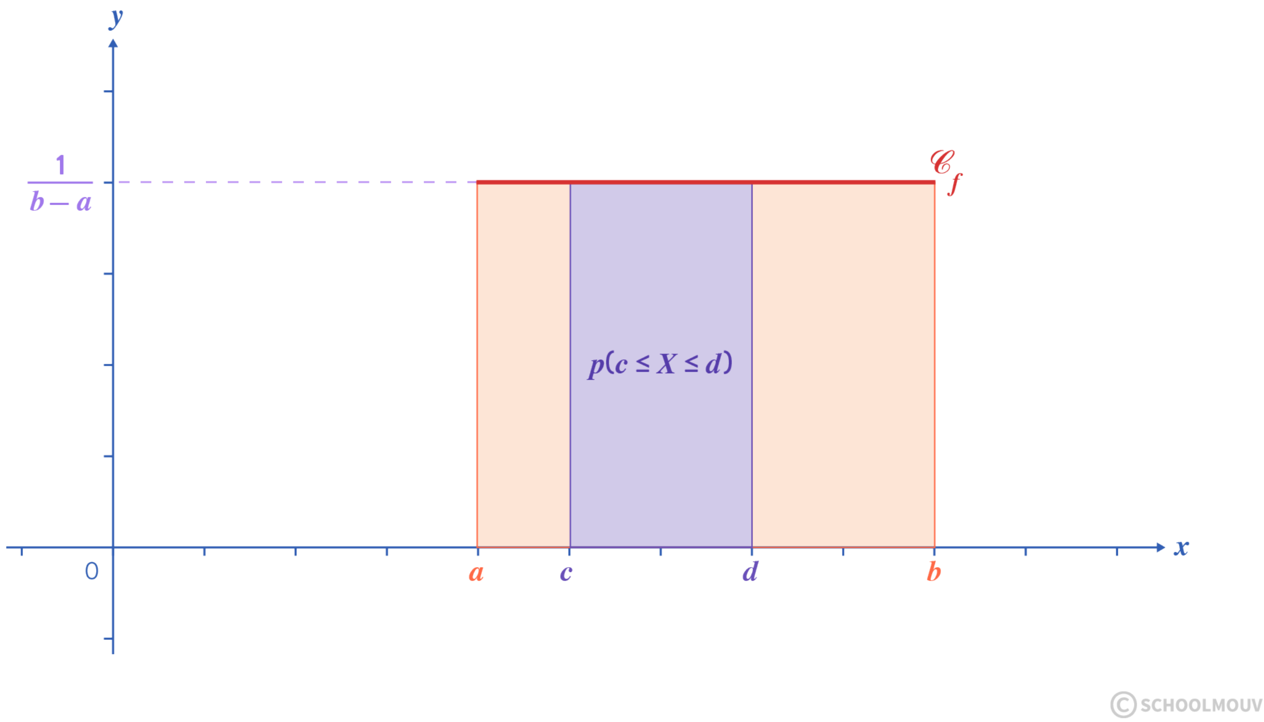
Puisque $F : x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$ est la fonction de répartition associée à X qui suit une loi uniforme $U([a\ ;\ b])$, nous avons, pour tout intervalle $[c\ ;\ d]$ inclus dans $[a\ ;\ b]$:

$$\begin{aligned} p(c \leq X \leq d) &= F(d) - F(c) \\ &= \frac{d-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} \\ &= \frac{d-c}{b-a} \end{aligned}$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme $U[a\ ;\ b]$.
Alors, pour tout intervalle $[c\ ;\ d]$ inclus dans $[a\ ;b]$, on a :

$$p(X \in [c\ ;\ d]) = \frac{d-c}{b-a}$$



Loi uniforme et probabilité

Astuce

Remarquons, pour mieux nous en souvenir, que $p(X \in [c\ ;\ d])$ est tout simplement égale au quotient de la longueur de l'intervalle $[c\ ;\ d]$ par la longueur de $[a\ ;\ b]$.

Prenons maintenant un exemple pour appliquer sur un problème concret tout ce que nous venons de voir sur la loi uniforme.

Exemple

Thomas a commandé un canapé en livraison. Le transporteur l'a averti ce matin qu'il serait livré dans l'après-midi, entre 14 heures 30 et 18 heures. Nous admettrons que l'horaire de livraison est aléatoire dans le créneau donné.
Mais Thomas a une réunion en visioconférence, prévue entre 14 heures 45 et 15 heures 30.
Quelle est la probabilité pour que le livreur le dérange durant sa réunion ?

1. Soit la variable aléatoire X qui donne le temps écoulé, en minutes, entre 14 heures 30 et l'instant du coup de sonnette du livreur.

X prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\ ;\ 210]$ (si la livraison a lieu à 14 heures 30 pétantes, le temps d'attente est nul et, si elle a lieu à 18 heures pétantes, le temps d'attente est de trois heures et demie, soit 210 minutes).

→ X suit une loi uniforme $U([0\ ;\ 210])$.

2. La réunion commencera 15 minutes après 14 heures 30 et se terminera 60 minutes après 14 heures 30.

Nous nous intéressons donc à $p(15 \leq X \leq 60)$.

Comme X suit la loi uniforme $U([0\ ;\ 210])$, nous pouvons donner :

- sa fonction de densité f, définie sur $[0\ ;\ 210]$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{210-0} \\ &= \frac{1}{210} \end{aligned}$$

- sa fonction de répartition F, définie sur $[0\ ;\ 210]$ par :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x-0}{210-0} \\ &= \frac{x}{210} \end{aligned}$$

→ Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} p(15 \leq X \leq 60) &= F(60) - F(15) \\ &= \frac{60}{210} - \frac{15}{210} \\ &= \frac{45}{210} \\ &= \frac{3}{14} \end{aligned}$$

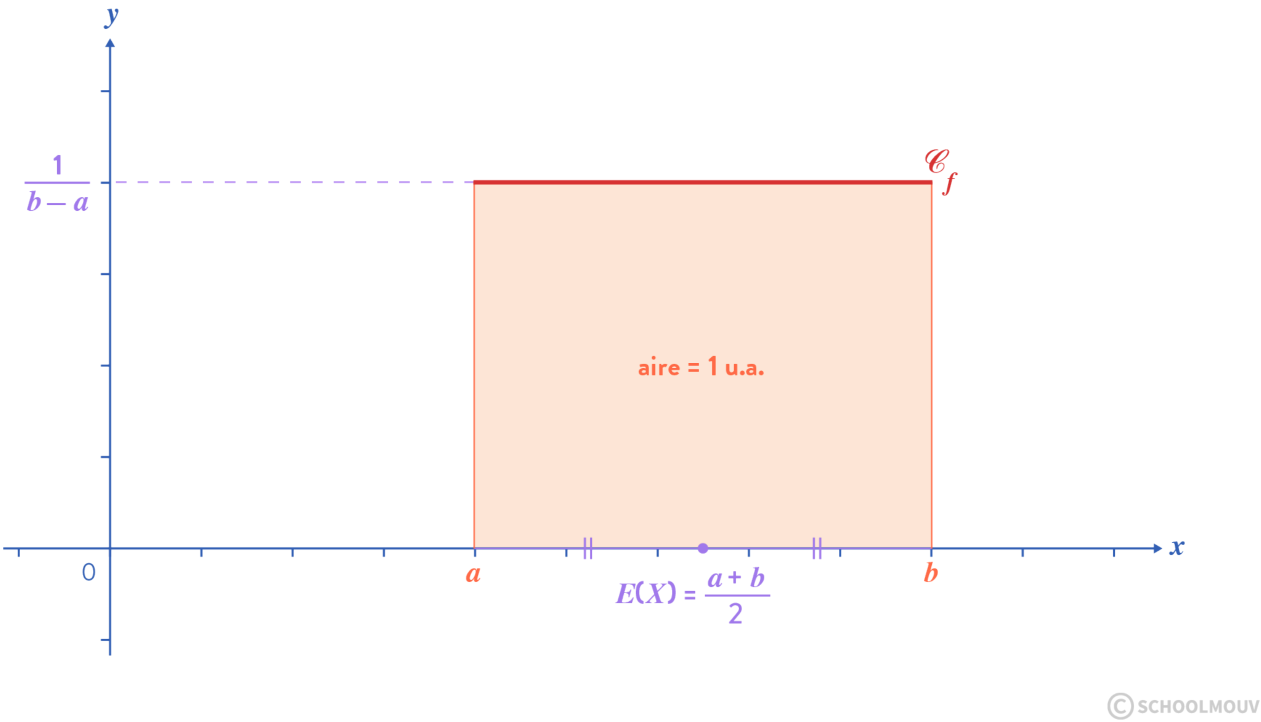
C. Indicateurs d'une variable suivant une loi uniforme

Nous pouvons comprendre, intuitivement, que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme $U([a\ ;\ b])$ sera égale au centre de $[a\ ;\ b]$. Nous pouvons ainsi donner les formules pour calculer les indicateurs de la variable aléatoire.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme $U([a\ ;\ b])$.
Son espérance $E(X)$, sa variance $V(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$ sont données par :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$
$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$



Loi uniforme et espérance

Reprenons le dernier exemple.

Exemple

Le transporteur donne toujours à ses clients une plage horaire de 3 heures et 30 minutes (soit 210 minutes) pour la livraison et considère que celle-ci s'y fait de manière aléatoire.
X, qui donne le nombre de minutes que dure l'attente du client à partir du début du créneau indiqué, suit une loi uniforme $U([0\ ;\ 210])$.

→ Nous avons donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{0+210}{2} \\ &= 105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \frac{210-0}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{105}{\sqrt{3}} \\ &\approx 60,62 \end{aligned}$$

La variable aléatoire X est d'espérance 105 et d'écart-type environ $60,62$.

- Sur un grand nombre de livraisons, les clients attendront en moyenne 1 heure et 45 minutes.
- Remarquons tout de même que l'écart-type est significativement grand (plus de 1 heure) et que donc les durées d'attente seront assez dispersées autour de l'espérance, d'une livraison à l'autre.

3 Loi exponentielle

La durée de vie de certains composants électroniques, ou encore d'éléments radioactifs, est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi dite **exponentielle**. Nous allons définir, dans la dernière partie de ce cours, cette loi aux applications omniprésentes dans notre monde moderne.

a. Définition et propriétés

Dans la toute première partie de ce cours, nous avons dit que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} = 1 \times \mathrm{e}^{-1\times x}$, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, était une densité de probabilité.

- Il s'agissait en fait de la densité de probabilité associée à une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

Définition

Loi exponentielle :

Soit λ un nombre réel strictement positif.
La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ si la fonction de densité f associée est définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Nous allons démontrer que cette fonction est bien une densité de probabilité, de manière analogue à ce que nous avons fait pour la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

Démonstration

f est donc définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

1. Pour tout $x \geq 0$, $e^{-\lambda x}$ est strictement positif.

→ Donc, pour tout $\lambda > 0$, f est strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ est la fonction $x \mapsto -e^{-\lambda x}$.

Pour tout réel $b > 0$:

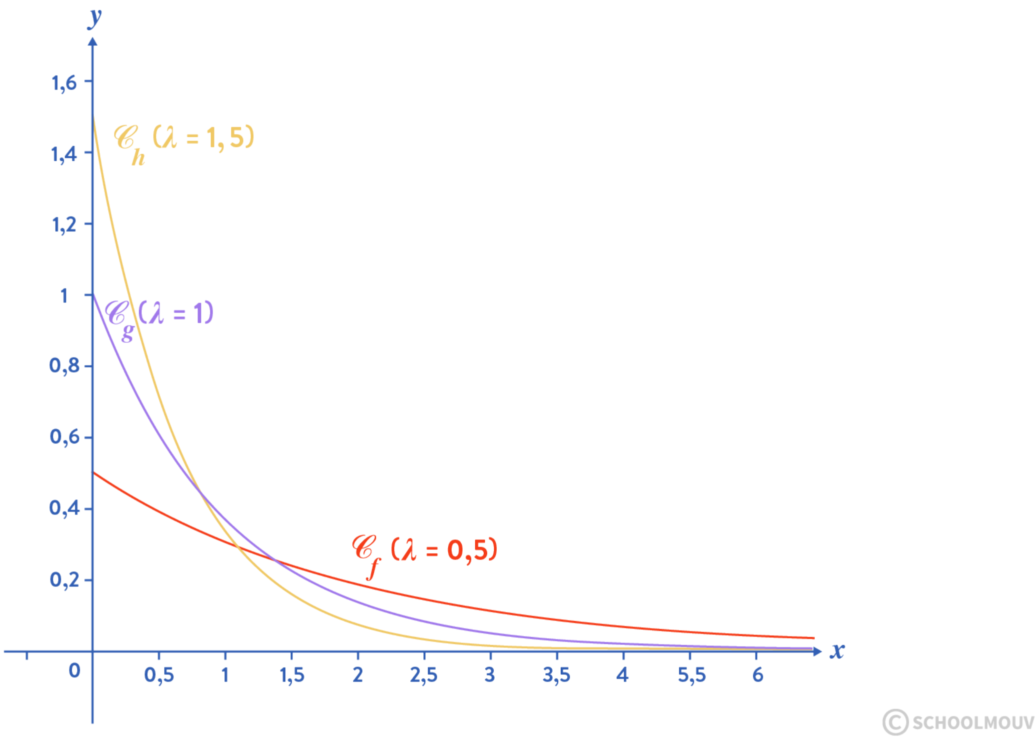
$$\begin{aligned}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^b \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= [-e^{-\lambda x}]_0^b \\ &= -e^{-\lambda b} - (-e^{-\lambda 0}) \\ &= -e^{-\lambda b} + 1\end{aligned}$$

→ Et nous avons enfin :

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty} -e^{-\lambda b} + 1 \\ &= 0 + 1 \text{ [car } \lim_{X\to-\infty} e^X = 0] \\ &= 1\end{aligned}$$

Donnons les courbes représentatives des fonctions de densité f, g et h, définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ respectivement par :

$$\begin{aligned}f(x) &= 0,5e^{-0,5x}\ (\lambda = 0,5) \\ g(x) &= e^{-x}\ (\lambda = 1) \\ h(x) &= 1,5e^{-1,5x}\ (\lambda = 1,5)\end{aligned}$$



Loi exponentielle et fonctions de densité

Nous pouvons maintenant donner la définition de sa fonction de répartition.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.
La fonction de répartition F associée est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Démonstration

1. X prend toutes ses valeurs dans $[0\ ;\ +\infty[$, donc la probabilité que X soit strictement inférieur à 0 est nulle.

2. Sur $[0\ ;\ +\infty[$, une primitive de $f\ :\ t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ est $t \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Nous avons donc, pour tout $x \in [a\ ;\ b]$:

$$\begin{aligned} F(x) &= p(X \leq x) \\ &= p(0 \leq X \leq x) \\ &= \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t \\ &= [-\mathrm{e}^{-\lambda t}]_0^x \\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda x} - (-\mathrm{e}^{-\lambda 0}) \\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda x} + 1 \end{aligned}$$

Nous en déduisons les propriétés suivantes.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Alors, pour tous réels positifs c et d tels que $c < d$, nous avons :

$$\begin{aligned} p(X \leq c) &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda c} \\ p(X \geq c) &= \mathrm{e}^{-\lambda c} \\ p(c \leq X \leq d) &= \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d} \end{aligned}$$

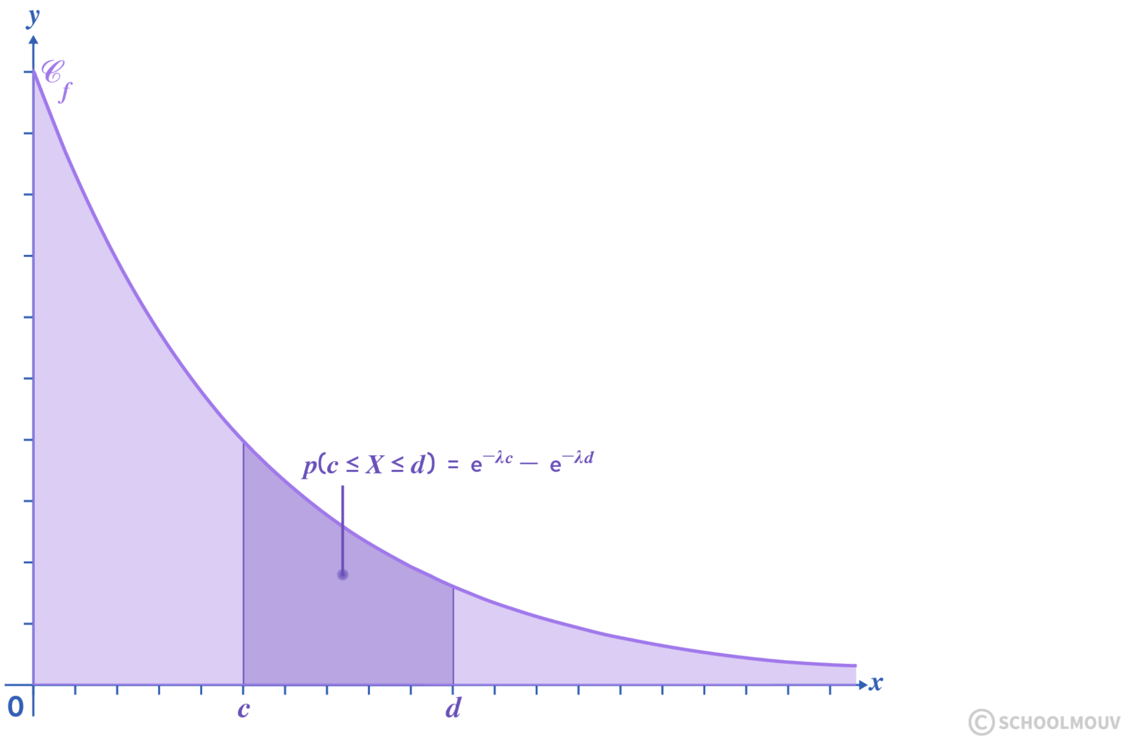
Démonstration

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} p(X \leq c) &= p(0 \leq X \leq c) \\ &= F(c) - F(0) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(X \geq c) &= 1 - p(X \leq c) \\ &\quad \text{[car } (X \geq c) \text{ est l'événement contraire de } (X \leq c)\text{]} \\ &= 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda c}) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(c \leq X \leq d) &= F(d) - F(c) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda d} - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda c}) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d} \end{aligned}$$



Loi exponentielle et probabilité

Dans le cours précédent, nous avons dit que la loi géométrique était « sans mémoire ».

➜ La loi exponentielle possède aussi cette propriété, dite d'« **absence de mémoire** ».

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Nous avons, pour tous réels positifs x et h :

$$p_{X \geq x}(X \geq x + h) = p(X \geq h)$$

Autrement dit, par exemple si X modélise la durée de vie d'un composant électronique, alors la probabilité que le composant tombe en panne après une durée $x + h$, sachant qu'il a fonctionné pendant la durée x, est égale à la probabilité qu'il tombe en panne après la durée h. Cette probabilité ne dépend donc pas de l'« âge » du composant.

➜ On parle aussi de « durée de vie **sans vieillissement** ».

Concrètement, la probabilité que le composant tombe en panne après 11 ans (soit $10 + 1$), sachant qu'il a fonctionné 10 ans, est égale à la probabilité qu'il tombe en panne après 1 an.

➜ Il serait donc faux de considérer que l'âge de 10 ans du composant augmente la probabilité qu'il tombe en panne dans l'année qui suit.

Démontrons cette « absence de mémoire » de la loi exponentielle.

Démonstration

Par définition des probabilités conditionnelles, nous avons :

$$p_{X \geq x}(X \geq x+h) = \frac{p((X \geq x) \cap (X \geq x+h))}{p(X \geq x)}$$

Or, x et h sont des réels positifs, donc $x+h \geq x$.

Ainsi, si X est supérieur ou égal à $x+h$, il est aussi supérieur ou égal à x. Et l'événement $((X \geq x) \cap (X \geq x+h))$ est égal à l'événement $(X \geq x+h)$.

→ $p((X \geq x) \cap (X \geq x+h)) = p(X \geq x+h)$.

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} p_{X \geq x}(X \geq x+h) &= \frac{p(X \geq x+h)}{p(X \geq x)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(x+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} \\ &\text{[car } p(X \geq c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}\text{]} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x+(-\lambda h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x} \times \mathrm{e}^{-\lambda h}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} \\ &\text{[car } \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b\text{]} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda h} \\ &= p(X \geq h) \end{aligned}$$

Traitons plus précisément l'exemple que nous venons de prendre d'un composant électronique.

Exemple

Une usine *high-tech* produit des transistors pour des puces informatiques. La durée de vie d'un transistor, exprimée en millier d'heures, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,005$.

→ Sachant qu'un transistor a fonctionné pendant 25 mille heures, quelle est la probabilité pour qu'il cesse de fonctionner avant 40 mille heures ?

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} p_{X\geq 25}(X \leq 40) &= 1 - p_{X\geq 25}(X \geq 40) \text{ [car } p_A(B) = 1 - p_A(\bar{B})\text{]} \\ &= 1 - p_{X\geq 25}(X \geq 25 + 15) \\ &= 1 - p(X \geq 15) \text{ [par la propriété d'absence de mémoire]} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-0,005\times 15} \text{ [car } p(X \geq c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}\text{]} \\ &\approx 0,072 \end{aligned}$$

➜ La probabilité qu'un transistor qui a fonctionné $25\,000$ heures tombe en panne avant $40\,000$ heures est donc égale à la probabilité qu'il tombe en panne avant $15\,000$ heures, soit environ $0,072$.

Enfin, nous pouvons là aussi déterminer les indicateurs d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle grâce à des formules simples.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Son espérance $E(X)$, sa variance $V(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$ sont données par :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$
$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$
$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

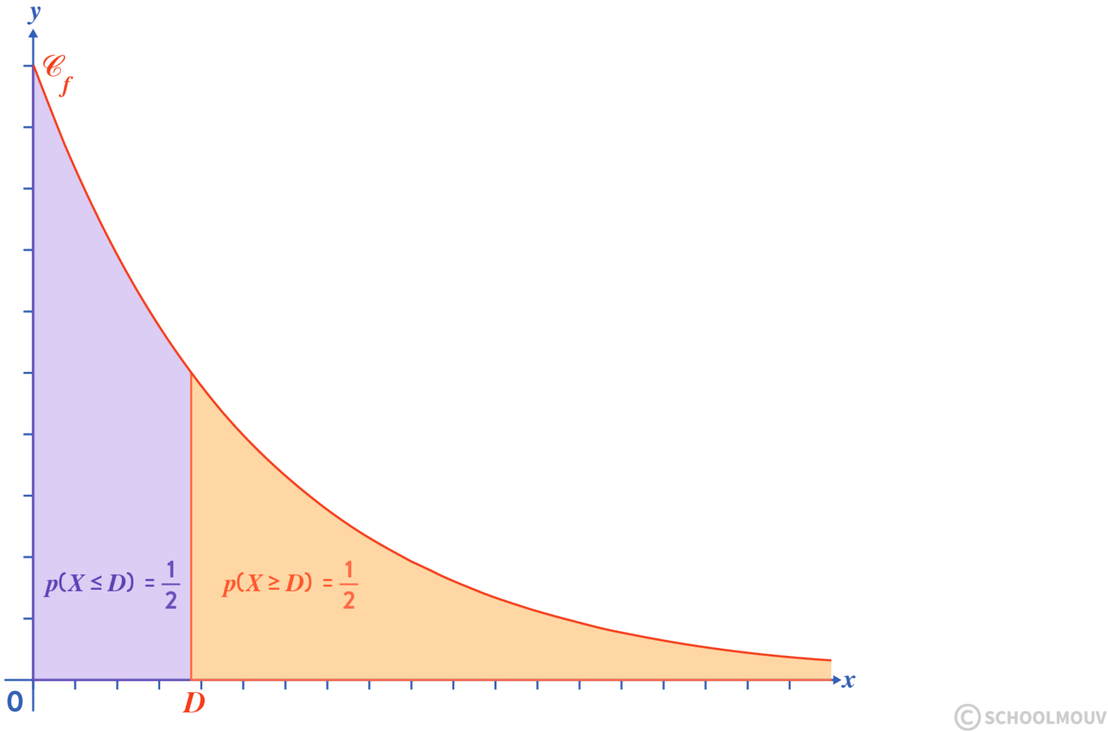
b. Application à la durée de vie d'un élément radioactif

Dans cette dernière partie, nous allons, à travers un exemple, appliquer ce que nous avons découvert sur les lois exponentielles. Cela nous permettra d'aborder la notion de demi-vie.

On modélise la durée de vie d'un atome d'un corps radioactif par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

➜ On appelle **demi-vie** la durée D telle que la probabilité que X soit inférieur ou égal à D est égale à la probabilité que X soit supérieur ou égal à D, soit :

$$p(0 \leq X \leq D) = p(X \geq D) = \frac{1}{2}$$



Loi exponentielle et demi-vie

1. Exprimons D en fonction du paramètre λ de la loi exponentielle.

Comme X suit la loi exponentielle de paramètre λ, par la propriété que nous avons vue plus haut :

$$p(X \geq D) = \mathrm{e}^{-\lambda D} = \frac{1}{2}$$

➜ Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\lambda D} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{-\lambda D}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow -\lambda D = \ln(1) - \ln(2) \\ &\text{[car } \ln \text{ et } \exp \text{ sont réciproques et } \ln\left(\tfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)\text{]} \\ &\Leftrightarrow \lambda D = \ln(2) \text{ [car } \ln(1) = 0\text{]} \\ &\Leftrightarrow \boxed{D = \frac{\ln(2)}{\lambda}} \end{aligned}$$

2. Le plutonium 239 a pour demi-vie environ $24\,000$ ans. Calculons le paramètre correspondant, en prenant pour unité le millier d'années.

Nous avons donc $D = 24$ et nous en déduisons :

$$24 = \frac{\ln(2)}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{24}$$
$$\approx 0,0289$$

La durée de vie d'un atome de plutonium 239 est modélisée par la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{\ln(2)}{24}$.

➜ La fonction de densité u associée est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$u(x) = \frac{\ln(2)}{24} \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln(2)}{24}x}$$

3 Calculons maintenant la durée de vie moyenne d'un atome de plutonium 239.

Cela revient à calculer l'espérance, que nous obtenons avec la propriété que nous avons vue :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\frac{\ln(2)}{24}} \\ &= \frac{24}{\ln(2)} \\ &\approx 34,62 \end{aligned}$$

➜ Un atome de plutonium 239 met, en moyenne, près de 35 mille ans à se désintégrer.

4 Calculons maintenant la probabilité qu'un atome de plutonium 239 se désintègre avant 10 mille ans, d'une part, et, d'autre part, qu'un atome ne soit toujours pas désintégré après 45 mille ans.

➜ En utilisant les propriétés de la loi exponentielle pour les probabilités, et notamment la définition de la fonction de répartition, nous obtenons :

$$\begin{aligned} p(X \leq 10) &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \times 10} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln(2)}{24} \times 10} \\ &\approx 0,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(X \geq 45) &= \mathrm{e}^{-\lambda \times 45} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\ln(2)}{24} \times 45} \\ &\approx 0,27 \end{aligned}$$

Nous pouvons noter, au passage, que la probabilité pour qu'un atome de plutonium 239 ne soit pas désintégré après 45 milliers d'années est supérieure à celle qu'il se désintègre avant 10 mille ans.

Attention

Certains exercices vous demanderont de redémontrer les propriétés que nous venons d'utiliser :

$$p(X \leq c) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda c}$$
$$p(X \geq c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$$

[avec c un réel positif]

Il est donc important de bien retenir les démonstrations que nous avons données.

➜ Elles se retrouvent facilement à partir de la densité de probabilité, si on l'intègre sur l'intervalle qui nous intéresse, que ce soit pour déterminer la fonction de répartition et les probabilités qui s'ensuivent.

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons introduit la notion de loi à densité qui intervient en probabilité lorsque la variable aléatoire est continue.
Les caractéristiques principales des lois à densité ont été définies puis appliquées à deux cas particuliers de loi à densité : la loi uniforme et la loi exponentielle.

Si la première, la loi uniforme, est adaptée pour les temps d'attente, les probabilités de tirage aléatoire sur des variables continues, la seconde, la loi exponentielle, est fréquemment utilisée pour modéliser la durée de vie de composants électroniques ou d'atomes de corps radioactifs. Vous en découvrirez ainsi des applications directes en physique-chimie.