Représentations paramétriques de droites et équations cartésiennes de plans de l'espace

Introduction :

En géométrie plane, nous avons, en seconde et en première, appris à trouver l'équation cartésienne d'une droite du plan à partir d'un vecteur directeur ou d'un vecteur normal à cette droite.
La traduction d'un problème de géométrie par du calcul sur les coordonnées, en utilisant ces équations, s'appelle de la géométrie analytique.

Dans l'espace, un travail similaire va nous permettre de représenter une droite ou un plan de l'espace par des équations.
Dans une première partie, nous étudierons la représentation paramétrique d'une droite et comment s'en servir pour prouver l'alignement.
Ensuite, dans une deuxième partie, nous modéliserons l'appartenance à un plan par une équation vérifiée par les coordonnées.
Enfin, nous nous servirons de ces équations pour étudier certaines configurations géométriques.

→ Dans tout le chapitre, nous travaillerons dans l'espace noté $\mathcal{E}$, muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

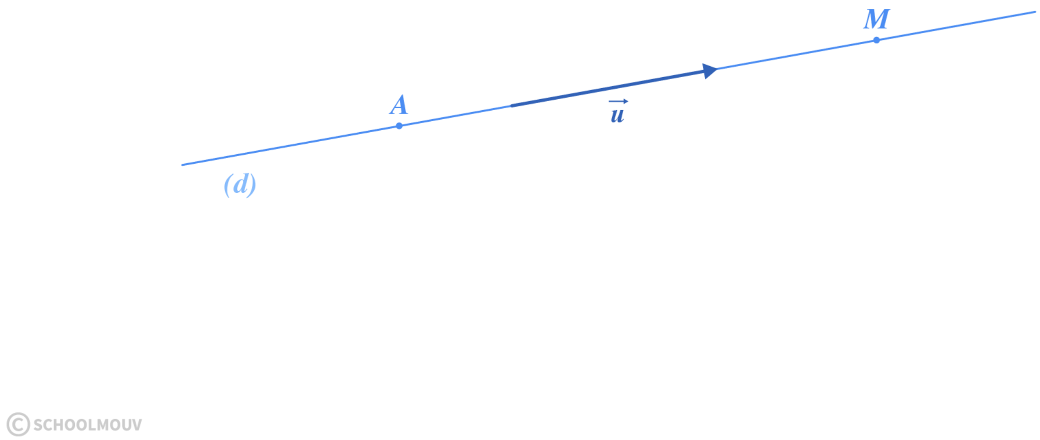
1 Représentation paramétrique d'une droite

a. Représentation paramétrique d'une droite

(d) est une droite de $\mathcal{E}$ passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$.
Rappelons d'abord la caractérisation d'une droite de $\mathcal{E}$, que nous avons vue dans le cours « Vecteurs, droites et plans de l'espace ».

Rappel

La droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont **colinéaires**.



Soit $M\,(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de $\mathcal{E}$.
Nous cherchons une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées de M pour qu'il appartienne à (d).

$$\begin{aligned} M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un nombre réel } k \text{ tel que :} \\ &\ \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

Notons les coordonnées de $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

→ Nous avons alors :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$$

Traduisons l'égalité $\overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u}$ par les égalités des coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et $k \cdot \vec{u}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) &\Leftrightarrow \text{il existe un nombre réel } k \text{ tel que :} \\ &\begin{cases} x - x_A = k\alpha \\ y - y_A = k\beta \\ z - z_A = k\gamma \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un nombre réel } k \text{ tel que :} \\ &\begin{cases} x = k\alpha + x_A \\ y = k\beta + y_A \\ z = k\gamma + z_A \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusion, s'il existe un réel k tel que $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient les trois équations, alors $M \in (d)$; si ce réel n'existe pas, alors $M \notin (d)$.

Attention

Dans ces trois équations, les coordonnées de A et celles du vecteur $\vec{u}$ sont fixes.
Les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dépendent de la position de M sur la droite, donc de la valeur de k.

→ Ce sont les variables de ce système.

Nous pouvons écrire les définition et propriété suivantes.

Définition

Représentation paramétrique d'une droite :

Soit (d) la droite de $\mathcal{E}$ passant par $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

On appelle représentation paramétrique de (d) le système d'équations :

$$\begin{cases} x = k\alpha + x_A \\ y = k\beta + y_A \\ z = k\gamma + z_A \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

→ k est appelé le paramètre de cette représentation.

Propriété

Soit (d) la droite de $\mathcal{E}$ passant par $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

$$M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x = k\alpha + x_A \\ y = k\beta + y_A \\ z = k\gamma + z_A \end{cases}$$

Prenons un exemple en cherchant une représentation paramétrique de l'axe $(O\ ;\ \vec{\imath})$.

Exemple

Dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, $\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

L'axe $(O\ ;\ \vec{\imath})$ passe par le centre $O\,(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ du repère.

→ Une représentation paramétrique de cet axe est donc :

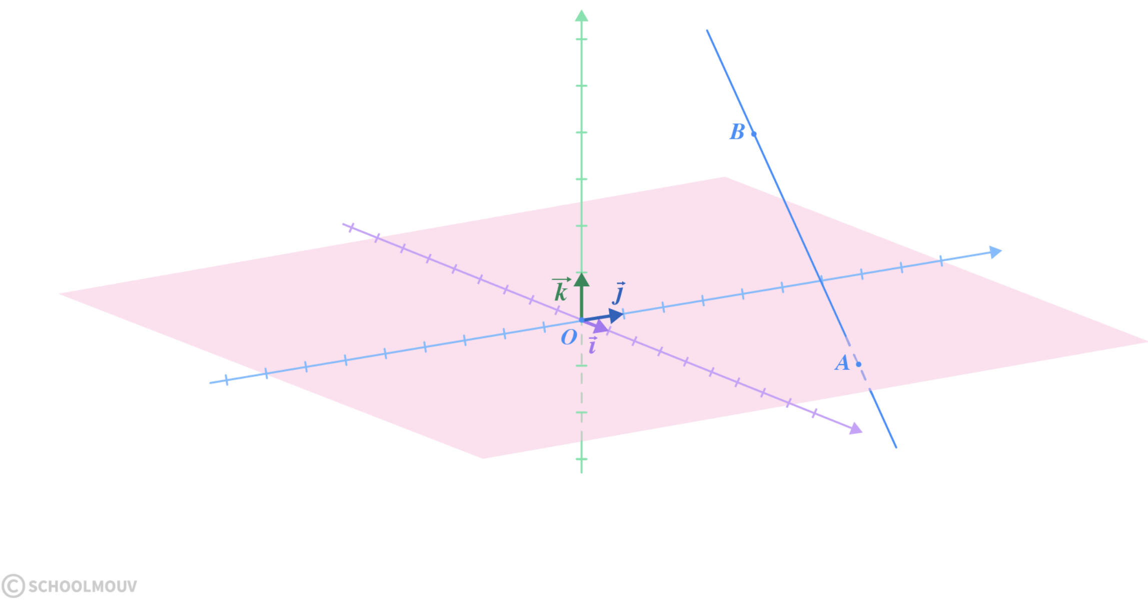
$$\begin{cases} x = k \times 1 + 0 \\ y = k \times 0 + 0 \\ z = k \times 0 + 0 \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

De manière analogue, nous pourrions trouver des représentations paramétriques des deux autres axes du repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

Après avoir étudié le cas particulier d'un axe du repère, nous allons illustrer ce mode de représentation et son utilité avec un exemple plus complet.

c. Comment utiliser la représentation paramétrique d'une droite de $\mathcal{E}$

Exemple



Dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, soit les points $A\,(3\ ;\ 5\ ;\ -1)$ et $B\,(2\ ;\ 3\ ;\ 4)$.

1 Nous cherchons une représentation paramétrique de la droite (AB).

Trouvons un vecteur directeur de (AB). Ici, nous avons :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La droite (AB) est caractérisée par le point A et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

→ Donc une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x = -1k + x_A \\ y = -2k + y_A \\ z = 5k + z_A \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = -k + 3 \\ y = -2k + 5 \\ z = 5k - 1 \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Remarque :
Cette représentation paramétrique n'est pas unique.
En choisissant le point B et un autre vecteur directeur de (AB), nous aurions obtenu une autre représentation paramétrique tout aussi valable.

2 **Le point $J\,(0\ ;\ -1\ ;\ 1)$ appartient-il à (AB) ?**

À retenir

Méthodologie :

Pour savoir si un point $M\,(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à la droite (d) dont on connaît une représentation paramétrique :

- on remplace $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans le système par les coordonnées de M ;
- on obtient alors trois équations d'inconnue k (c'est la même inconnue !) ;
- on résout ces équations.

→ Si on trouve une solution, c'est-à-dire une seule valeur pour k dans les trois équations, alors $M \in (d)$.

→ Sinon $M \notin (d)$.

Remplaçons donc $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ par $(0\ ;\ -1\ ;\ 1)$. Existe-t-il $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} 0 = -k + 3 \\ -1 = -2k + 5 \\ 1 = 5k - 1 \end{cases}$$

Résolvons ce système :

$$\begin{cases} 0 = -k + 3 \\ -1 = -2k + 5 \\ 1 = 5k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ 2k = 6 \\ 5k = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = 3 \\ k = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution.

→ En conclusion : $J \notin (AB)$.

3. Considérons maintenant la droite (d') donnée par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = 2t \\ z = 1 - 5t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Attention

Il s'agit ici de deux droites différentes, nous n'utilisons donc pas le même paramètre pour les deux.

→ Le paramètre est souvent noté k ou t.

Quelle est la position relative de (d') et de (AB) ?

Méthodologie :

Pour identifier une droite donnée par une représentation paramétrique, nous devons identifier dans le système d'équations :

- les coordonnées d'un vecteur directeur ;
- les coordonnées d'un point de cette droite.

Dans le cas de (d') :

$$\begin{cases} x = 1t - 3 \\ y = 2t + 0 \\ z = -5t + 1 \end{cases}$$

- Les coefficients multiplicateurs de t sont les coordonnées d'un vecteur directeur.

→ Ici (d') admet comme vecteur directeur :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- Les autres termes sont les coordonnées d'un point de (d').

→ (d') passe par $C\,(-3\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

Observons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs sont opposés.

→ Nous en déduisons : $(AB) \parallel (d')$.

Pour savoir exactement si les deux droites sont confondues ou strictement parallèles, nous pouvons vérifier si A ou B appartient à (d').
Nous utilisons la méthode vue précédemment avec, par exemple, les coordonnées de B. Existe-t-il un réel t tel que :

$$\begin{cases} 2 = t - 3 \\ 3 = 2t + 0 \\ 4 = -5t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = \frac{3}{2} \\ 5t = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = \frac{3}{2} \\ t = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Nous trouvons trois valeurs différentes pour t. Ce système n'admet donc pas de solution.

→ En conclusion, (AB) et (d') sont strictement parallèles.

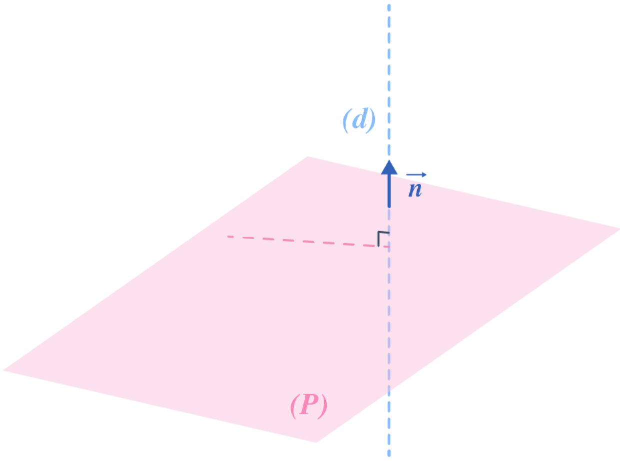
Nous venons de voir comment représenter une droite de $\mathcal{E}$ par un système de trois équations.
Intéressons-nous maintenant à la manière de caractériser, à l'aide des coordonnées, l'appartenance à un plan.

2 | Équation cartésienne d'un plan

En première, nous avons vu comment trouver l'équation cartésienne d'une droite en utilisant un vecteur normal de cette droite.
Un plan, lui, est déterminé par un point lui appartenant et un vecteur normal. Il va, de manière analogue, pouvoir être associé à une équation cartésienne, c'est-à-dire une équation où apparaissent les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ d'un point de $\mathcal{E}$.

a. Équation cartésienne d'un plan

Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, avec a, b, c trois nombres réels tels que $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$.



Propriété

- (P) de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation du type $ax + by + cz + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$.
- Réciproquement, si a, b, c et d sont quatre nombres réels et $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$, alors une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration

On considère un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ passant par $A\left(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A\right)$.
Soit M un point de $\mathcal{E}$. On sait que :

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Utilisons les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de M. Celles de $\overrightarrow{AM}$ sont :

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$$

Avec l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé, nous avons donc :

$$\begin{aligned} M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (P) &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0 \\ &\text{[en développant]} \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \\ &\text{[en posant } d = -(ax_A + by_A + cz_A)\text{]} \end{aligned}$$

Nous obtenons bien l'expression recherchée.

Au passage, nous avons démontré la propriété suivante.

Propriété

Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et passant par $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$.

(P) admet comme équation $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.

→ Cette équation est appelée **équation cartésienne du plan** (P)

À retenir

Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et passant par $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$.

$$M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (P) \Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

Prenons un exemple de plan dont nous allons trouver une équation cartésienne.

Exemple

(P) est le plan passant par $A\,(3\ ;\ 5\ ;\ -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}$

.

→ Nous voulons déterminer si $B\,(0\ ;\ -6\ ;\ 1) \in (P)$.

1 Nous cherchons l'équation cartésienne du plan passant par $A\,(3\ ;\ 5\ ;\ -1)$ et de vecteur normal :

$$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}$$

À retenir

Méthodologie :

Pour trouver une équation cartésienne du plan (P) dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}$ et au moins un point :

- on écrit la forme de cette équation : $ax+by+cz+d=0$, en remplaçant $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ par les coordonnées de $\vec{n}$;
- on remplace $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ par les coordonnées d'un point du plan ;
- on obtient une équation d'inconnue d que l'on résout.

→ On a alors une équation cartésienne du plan.

Appliquons la propriété et la méthode vues ci-dessus.

→ (P) admet une équation cartésienne de la forme : $-1x - 2y + 5z + d = 0$, où d est un nombre réel.

Pour déterminer la valeur de d, nous utilisons le fait que $A \in (P)$.
Ses coordonnées vérifient donc l'équation ci-dessus :

$$\begin{aligned} -x_A - 2y_A + 5z_A + d = 0 &\Leftrightarrow -3 - 2 \times 5 + 5 \times (-1) + d = 0 \\ &\Leftrightarrow -18 + d = 0 \\ &\Leftrightarrow d = 18 \end{aligned}$$

→ Ainsi, une équation cartésienne de (P) est : $-x - 2y + 5z + 18 = 0$.

Remarque :
Cette équation n'est pas la seule équation cartésienne de (P) ; nous pouvons, en changeant de vecteur normal et de point sur (P), en trouver d'autres.
Nous admettons qu'on peut obtenir une autre équation de (P) en multipliant celle que nous avons trouvée par un nombre k non nul.

→ Ainsi, l'équation : $2x + 4y - 10z - 36 = 0$ est aussi une équation cartésienne de ce plan.

2 Nous voulons maintenant déterminer si le point $B\ (0\ ;\ -6\ ;\ 1)$ appartient à (P).

Nous remplaçons les coordonnées de B dans le membre de gauche de l'équation et nous calculons :

$$\begin{aligned} -x_B - 2y_B + 5z_B + 18 &= -0 - 2 \times (-6) + 5 \times 1 + 18 \\ &= 12 + 5 + 18 \\ &= 35 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

→ Nous en déduisons que $B \notin (P)$.

b. Cas de plans particuliers

Cherchons l'équation des plans de vecteur normal $\vec{\imath}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

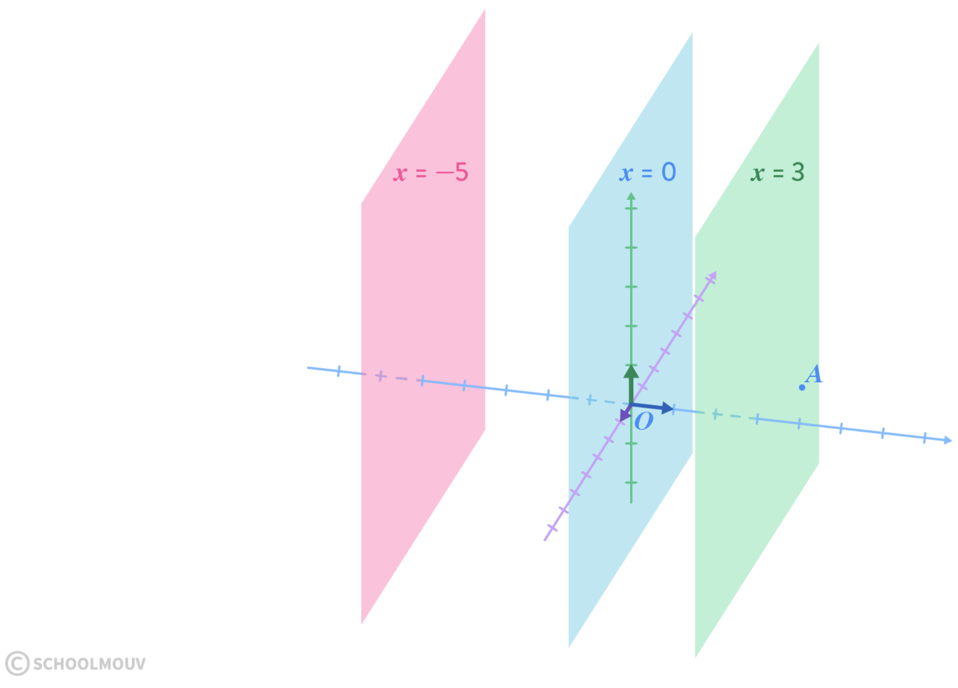
Ces plans ont des équations cartésiennes de la forme :

$$\begin{aligned} 1x+0y+0z+d=0 \\ \text{Soit : } x+d=0 \\ \text{Ou encore : } x=k, \text{ où } k\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

→ Ainsi, si ce plan passe par l'origine $O\,(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, alors une équation cartésienne sera : $x=0$.

→ Si ce plan passe par $A\,(3\ ;\ 5\ ;\ -1)$, alors une équation cartésienne sera $x=3$.

→ *Et cætera.*



De manière analogue, nous pouvons trouver les plans de vecteur normal $\vec{\jmath}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Propriété

- Les plans de vecteur normal $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ont pour équation cartésienne :

$$x = k\text{, où } k \in \mathbb{R}$$

- Les plans de vecteur normal $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ont pour équation cartésienne :

$$y = k\text{, où } k \in \mathbb{R}$$

- Les plans de vecteur normal $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ont pour équation cartésienne :

$$z = k\text{, où } k \in \mathbb{R}$$

Nous savons maintenant trouver une équation de plan connaissant un point lui appartenant et un vecteur normal, ainsi que la représentation paramétrique d'une droite connaissant un point et un vecteur directeur. Voyons à présent comment s'en servir pour chercher des intersections.

3 | Intersection de droites et de plans

Commençons par l'intersection de deux droites.

a. Intersection de deux droites

Soit (d) et (d') de $\mathcal{E}$ définies par :

- (d) passe par A et admet comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$;
- (d') passe par B et admet comme vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$.

→ Nous cherchons leur position relative.

Exemple

(d) et (d') sont données par leurs représentations paramétriques :

$$(d)\ :\begin{cases} x=-k+2 \\ y=-2k \\ z=k \end{cases} \quad \text{où } k\in\mathbb{R}$$

$$(d')\ :\begin{cases} x=k' \\ y=k'-1 \\ z=2k'-7 \end{cases} \quad \text{où } k'\in\mathbb{R}$$

À retenir

Méthodologie :

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, on sait que (d) et (d') sont coplanaires et parallèles.

→ Nous chercherons leur point d'intersection pour savoir si elles sont confondues ou strictement parallèles.

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, nous chercherons le point d'intersection de (d) et (d').

→ S'il existe, alors les droites sont sécantes.

→ Sinon, les droites ne sont pas coplanaires.

1 Dans notre exemple :

- (d) admet $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur ;

- (d') admet $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
En effet, leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

→ (d) et (d') ne sont donc pas parallèles.

2 Nous allons chercher leur éventuel point d'intersection.

$M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (d')$ si et seulement si $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient les deux représentations paramétriques.
Nous écrivons :

$$M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow \textbf{il existe } k \textbf{ et } k' \textbf{ tels que :}\ \begin{cases} x = -k+2 \\ y = -2k \\ z = k \\ x = k' \\ y = k'-1 \\ z = 2k'-7 \end{cases}$$

Nous devons donc, sans nous affoler, résoudre ce système à 6 équations et 5 inconnues : x, y, z, k et k'.

À retenir

Méthode :

- Nous gardons les trois premières lignes pour garder les trois inconnues x, y et z.
- Nous travaillons sur les trois dernières en substituant x, y et z par leurs valeurs en fonction du paramètre k : ainsi, nous allons déterminer si k et k' peuvent exister.

Pour plus de lisibilité, nous mettrons en violet les lignes sur lesquelles nous avons travaillé.

$M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow$ il existe k et k' tels que :

$$\begin{cases} x = -k + 2 \\ y = -2k \\ z = k \\ -k + 2 = k' \\ -2k = k' - 1 \\ k = 2k' - 7 \end{cases}$$

$M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow$ il existe k et k' tels que :

$$\begin{cases} x = -k + 2 \\ y = -2k \\ z = k \\ -k + 2 = k' \\ -2k + 1 = k' \\ k + 7 = 2k' \end{cases}$$

$M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow$ il existe k et k' tels que :

$$\begin{cases} x = -k + 2 \\ y = -2k \\ z = k \\ -k + 2 = -2k + 1 \ \text{[avec la ligne 5]} \\ -2k + 1 = k' \\ k + 7 = 2k' \end{cases}$$

$M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow$ il existe k et k' tels que :

$$\begin{cases} x = -k + 2 \\ y = -2k \\ z = k \\ k = -1 \\ -2k + 1 = k' \\ k + 7 = 2k' \end{cases}$$

$M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow$ il existe k et k' tels que :

$$\begin{cases} x = -k + 2 \\ y = -2k \\ z = k \\ k = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = k' \text{ [avec la ligne 4]} \\ 6 = 2k' \quad \text{soit :} \quad k' = 3 \end{cases}$$

→ Nous trouvons une solution pour k et k' :

$$\begin{cases} k = -1 \\ k' = 3 \end{cases}$$

Remarque :
Si nous n'avions pas trouvé de solution pour k et k', il n'y aurait pas eu de solution au système.

→ Les droites auraient été non coplanaires.

Finissons de résoudre le système, en remplaçant k et k' par leurs valeurs :

$$M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

C En conclusion, (d) et (d') sont sécantes au point de coordonnées $C\,(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

→ (d) et (d') sont coplanaires et sont contenues dans le plan (ABC).

Voyons maintenant la méthode pour déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan de $\mathcal{E}$ dont on a les équations.

b. Intersection d'une droite et d'un plan

Soit (d) et (P) de $\mathcal{E}$ définis par :

- (d) passe par A et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$;
- (P) passe par B et admet comme vecteur normal $\vec{n}$.

→ Nous cherchons leur position relative.

Exemple

Nous cherchons l'intersection de la droite (d) définie par l'équation paramétrique :

$$(d)\ :\ \begin{cases} x = k - 1 \\ y = k + 3 \\ z = 2k + 1 \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

et du plan (P) défini par l'équation cartésienne :

$$2x + 3y - z + 5 = 0$$

À retenir

Méthodologie :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, on sait que (d) et (P) sont parallèles.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, (d) et (P) sont sécants.

→ Pour trouver les coordonnées du point d'intersection, nous résolvons le système à 4 équations et 4 inconnues formé par la représentation paramétrique de (d) et l'équation de (P).

→ Les quatre inconnues sont x, y, z et k.

1 Dans notre exemple :

- un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- un vecteur normal de (P) est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Calculons $\vec{u} \cdot \vec{n}$ dans le repère orthonormé :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{n} &= 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times (-1) \\ &= 2 + 3 - 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux, donc (d) et (P) ne sont pas parallèles.

→ Ils sont nécessairement sécants en un point H.

2 Cherchons les coordonnées de H.

$$H\ (x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (P) \Leftrightarrow \text{il existe } k \text{ tel que :}$$
$$\begin{cases} x = k - 1 \\ y = k + 3 \\ z = 2k + 1 \\ 2x + 3y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

À retenir

Méthode :

- Nous allons remplacer $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ par leur expression en fonction de k dans la dernière équation.

→ Nous allons ainsi obtenir une équation d'inconnue k.

- Quand elle sera résolue, nous pourrons calculer $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

$H\ (x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (P) \Leftrightarrow$ il existe k tel que :

$$\begin{cases} x = k - 1 \\ y = k + 3 \\ z = 2k + 1 \\ 2(k-1) + 3(k+3) - (2k+1) + 5 = 0 \end{cases}$$

$H\ (x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (P) \Leftrightarrow$ il existe k tel que :

$$\begin{cases} x = k - 1 \\ y = k + 3 \\ z = 2k + 1 \\ 2k - 2 + 3k + 9 - 2k - 1 + 5 = 0 \end{cases}$$

$H\ (x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (P) \Leftrightarrow$ il existe k tel que :

$$\begin{cases} x = k - 1 \\ y = k + 3 \\ z = 2k + 1 \\ 3k = -11 \quad \text{soit :} \quad k = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

Nous avons donc obtenu une valeur pour k que nous allons substituer dans les trois premières équations :

$$H\ (x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{3} - 1 = -\frac{14}{3} \\ y = -\frac{11}{3} + 3 = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{22}{3} + 1 = -\frac{19}{3} \end{cases}$$

→ Le point d'intersection de (d) et de (P) est donc :

$$H\left(-\frac{14}{3}\ ;\ -\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{19}{3}\right)$$

Conclusion :

Avec ce cours, nous obtenons des outils algébriques pour résoudre des problèmes de configuration spatiale.
Si nous nous plaçons dans un repère orthonormé de $\mathcal{E}$, nous pouvons maintenant déterminer, à l'aide des représentations paramétriques de droite ou des équations de plan, la direction et la position relative de ces objets.

> Ces outils et ces méthodes ouvrent le champ à l’étude d’autres configurations, comme l’intersection de plans, de sphères et de plans, etc.