Fonction logarithme népérien (ln)

Pour retrouver le cours correspondant de l'option « Mathématiques complémentaires » :

→ *Fonction logarithme népérien (ln)*

Introduction :

Dans ce cours de spécialité « Mathématiques », nous allons définir une nouvelle fonction : le logarithme népérien.
Après l'avoir défini à partir de la fonction exponentielle vue en première, nous étudierons ses propriétés algébriques, nous résoudrons des équations et inéquations, puis nous définirons le logarithme décimal.

1 Le logarithme népérien

Définition

Fonction logarithme népérien :

Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, appelée logarithme népérien de a et notée $\ln(a)$ ou $\ln a$.

→ On définit ainsi sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction logarithme népérien, notée $\ln$, qui, à tout $x > 0$, associe le réel $\ln(x)$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \ln :]0\ ;\ +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

La fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle sont des **fonctions réciproques** l'une de l'autre.

→ On en déduit les propriétés suivantes.

Propriété

Si a est un réel strictement positif et si b est un réel, alors :

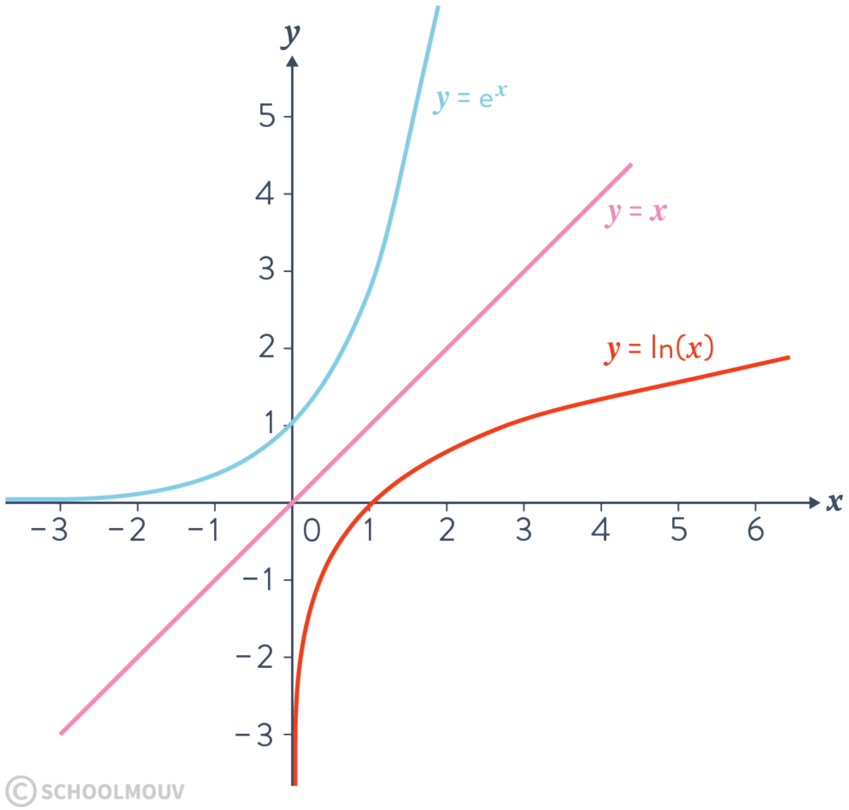
$$e^b = a \Leftrightarrow b = \ln(a)$$

- Pour tout réel strictement positif a : $e^{\ln(a)} = a$.
- Pour tout réel b : $\ln(e^b) = b$.

Nous pouvons aussi donner deux valeurs remarquables :

- $\ln(1) = 0$, car $e^0 = 1$;
- $\ln(e) = 1$, car $e^1 = e$.

Dans un repère orthonormé, les courbes de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Cette symétrie existe pour toutes les fonctions réciproques l'une de l'autre, comme les fonctions carré et racine carrée sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2 Propriétés algébriques

Dans cette partie, nous verrons que, comme la fonction exponentielle, la fonction logarithme népérien vérifie certaines propriétés algébriques.

Propriété

Pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$ et pour tout nombre entier relatif n :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$;
- $\ln(a^n) = n\ \ln(a)$.

Remarquons que l'on peut généraliser la première propriété à un nombre fini n de réels strictement positifs $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$. On obtient alors :

$$\ln(a_1\, a_2\ \dots\ a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)$$

➜ On dit que la fonction logarithme népérien transforme un produit en somme.

Attention

$\ln(a+b) \neq \ln(a) + \ln(b)$

Exemple

Appliquons ces propriétés sur quelques expressions à simplifier.

➜ $\ln(32)$

$$\begin{aligned}\ln(32) &= \ln(2^5)\\ &= 5\ln(2)\end{aligned}$$

➜ $\ln\left(\frac{1}{1\,024}\right)$

$$\ln\left(\frac{1}{1\,024}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{10}}\right)$$
$$= \ln(2^{-10})$$
$$= -10\ \ln(2)$$

➜ $\ln(8\sqrt{2})$

$$\ln\left(8\sqrt{2}\right) = \ln\left(2^3 \times \sqrt{2}\right)$$
$$= \ln\left(2^3 \times 2^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \ln\left(2^{\frac{7}{2}}\right)$$
$$= \frac{7}{2}\ln(2)$$

3 Résolutions d'équations et inéquations

En utilisant les propriétés de cette fonction, nous allons pouvoir résoudre des équations et inéquations contenant des logarithmes népériens.

➜ Pour cela, nous allons nous appuyer sur des exemples, qui nous montreront les démarches à adopter.

Commençons par donner deux autres propriétés de la fonction $\ln$, qui, comme nous le verrons dans le prochain cours, est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Propriété

Pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$:

- $a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$;
- $a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$;
- $a > b \Leftrightarrow \ln(a) > \ln(b)$;

Nous en déduisons que, pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned}\ln(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln(x) > \ln(1)\\ &\Leftrightarrow x > 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(x) < 0 &\Leftrightarrow \ln(x) < \ln(1)\\ &\Leftrightarrow x < 1\\ &\Leftrightarrow 0 < x < 1\end{aligned}$$

a. Résolution d'équations du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$

Il est important d'être méthodique dans la résolution de telles équations, car, si nous savons résoudre facilement des équations, nous devons éviter les pièges, notamment celui du domaine de définition de la fonction logarithme népérien.

À retenir

Pour résoudre une équation du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$, il faut respecter les étapes suivantes :

1. rechercher l'ensemble E des réels tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$;
2. résoudre l'équation $u(x) = v(x)$;
3. prendre les solutions qui sont dans E et rejeter les autres.

Astuce

Il peut arriver que l'ensemble E soit l'ensemble vide, c'est-à-dire que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$ soient incompatibles.

→ Dans ce cas, nous pouvons conclure immédiatement que l'ensemble solution sera l'ensemble vide.

Appliquons maintenant la méthodologie donnée sur un exemple.

Exemple

Résolvons : $\ln(2x) = \ln(x+3)$.

1. **Recherche de l'ensemble de définition**

→ $\ln(x)$ est défini uniquement pour $x > 0$.

Il faut donc :

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x > 0$$

➜ L'ensemble de définition est donc $]0\ ;\ +\infty[$.

2 **Résolution de l'équation**

$$\ln(2x) = \ln(x+3) \Leftrightarrow 2x = x + 3$$
$$[\text{car } a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)]$$
$$\Leftrightarrow x = 3$$

3 **Vérification**

Nous vérifions que la solution trouvée appartient bien à l'ensemble de définition. Nous avons bien $3 > 0$.

➜ $S = \{3\}$.

b. Résolution d'inéquations du type : $\ln(u(x)) \geq \ln(v(x))$

Comme pour la résolution d'équations, donnons la méthode pour résoudre de telles inéquations.

À retenir

Pour résoudre une inéquation du type $\ln(u(x)) \geq \ln(v(x))$, il faut respecter les étapes suivantes :

1. rechercher l'ensemble E des réels tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$;
2. résoudre l'équation $u(x) \geq v(x)$;
3. ne garder que les solutions qui sont dans E.

Appliquons la méthode sur un exemple.

Exemple

Résolvons : $\ln(2x) \geq \ln(x+3)$.

1 **Recherche de l'ensemble de définition**

➜ L'ensemble de définition ne change évidemment pas, par rapport à l'exemple précédent : $]0\ ;+\infty[$.

2 **Résolution de l'inéquation** :

$$\begin{aligned}\ln(2x) \geq \ln(x+3) &\Leftrightarrow 2x \geq x+3 \\ &\quad [\text{car } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}] \\ &\Leftrightarrow x \geq 3\end{aligned}$$

③ **Vérification**

On vérifie encore que la solution est incluse dans l'ensemble de définition. C'est bien le cas.

➜ $S = [3\ ;+\infty[$.

C. Résolution d'équations plus complexes

Maintenant, résolvons deux équations plus complexes, où nous allons faire appel aux propriétés algébriques du logarithme népérien.

Exemple

Résolvons donc : $\ln(x) + \ln(x+8) = 2\ln(3)$.

① L'**ensemble de définition** est : $]0\ ;\ +\infty[$.

② **Résolution de l'équation**

$$\begin{aligned}\ln(x) + \ln(x+8) = 2\ln(3) &\Leftrightarrow \ln(x(x+8)) = \ln(3^2) \\ &\quad [\text{car } \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab) \\ &\quad \text{et } n\ln(c) = \ln(c^n)] \\ &\Leftrightarrow x(x+8) = 3^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 8x = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 8x - 9 = 0\end{aligned}$$

➜ Il s'agit d'une équation du second degré.

Nous calculons donc le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= 8^2 - 4 \times (-9) \\ &= 64 + 36 \\ &= 100 = 10^2 \\ &> 0\end{aligned}$$

➜ L'équation du second degré admet deux racines réelles distinctes.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-8-\sqrt{\Delta}}{2} \\
&= \frac{-8-10}{2} \\
&= -9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{-8+\sqrt{\Delta}}{2} \\
&= \frac{-8+10}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

3 Vérification

$x_1 = -9$ n'appartient pas à l'ensemble de définition $]0\ ;\ +\infty[$.

- ➜ x_1 n'est pas solution.
- ➜ Ainsi, l'unique solution est : $S = \{1\}$.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,10$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,10 &\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq \ln(0,10) \\
&\text{[car } \left(\tfrac{1}{2}\right)^n > 0 \text{ et } 0,10 > 0, \\
&\text{et } \ln \text{ est strictement croissante]} \\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(0,10) \\
&\text{[car } \ln(a^n) = n\ln(a)] \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,10)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 3,32 \\
&\text{[car } \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) < 0] \\
&\Leftrightarrow n \geq 3,32
\end{aligned}
$$

➜ L'ensemble solution est constitué de tous les entiers supérieurs ou égaux à 4.

4 Le logarithme décimal

Dans cette dernière partie, nous allons définir une fonction qui dépend du logarithme népérien et qui est très utile en physique-chimie, en enseignement scientifique (calculs de pH, de l'intensité d'un son en décibel…), en sismologie (magnitude d'un séisme), ou en astronomie (magnitude apparente d'un astre), etc. : le **logarithme décimal**.

Définition

Fonction logarithme décimal :

On appelle fonction logarithme décimal la fonction notée $\log$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

De cette définition et des propriétés de la fonction $\ln$, nous pouvons déduire une première propriété.

Propriété

Pour tout entier relatif n :

$$\begin{aligned}\log(10^n) &= \frac{\ln(10^n)}{\ln(10)} \\ &= \frac{n\ln(10)}{\ln(10)} \\ &= n\end{aligned}$$

Nous déduisons ensuite les deux cas particuliers suivants :

- $\log(10) = 1$;
- $\log(1) = 0$.

La fonction logarithme décimal étant le produit de la fonction logarithme népérien par une constante strictement positive $\left(\frac{1}{\ln(10)}\right)$, on retrouve des propriétés algébriques analogues à celles du logarithme népérien.

Propriété

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, et tout nombre entier relatif n :

- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$;
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$;
- $\log(a^n) = n\log(a)$.

Nous pouvons aussi ajouter que la fonction réciproque de $x \mapsto \log x$ est la fonction $x \mapsto 10^x$.

➜ Si a est un réel strictement positif et b un réel, alors :

$$b = \log a \Leftrightarrow 10^b = a$$

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons découvert une nouvelle fonction, le logarithme népérien. Nous en avons vu ensuite les propriétés algébriques, qui nous ont permis de résoudre des équations et des inéquations.
Dans le prochain cours, nous allons étudier en détail cette fonction, grâce aux notions que nous avons apprises en première et dans les cours précédents.