

## Primitives et équations différentielles

---

Pour retrouver le cours correspondant de la spécialité « Mathématiques » :

→ *Primitives et équations différentielles*

Introduction :

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Nous pouvons être amenés à résoudre une équation de la forme :  $y' = f$ , où l'inconnue est la fonction  $y$ .

C'est-à-dire de déterminer une fonction dérivable sur  $I$  dont la dérivée est connue. Ces équations sont appelées « équations différentielles ».

Pour cela, dans un premier temps, ce cours de l'option « Mathématiques complémentaires » introduira la notion de primitives d'une fonction sur un intervalle, puis donnera des méthodes permettant de les calculer. Comme nous le verrons dans le cours suivant sur le calcul intégral, une primitive sert aussi à calculer des intégrales qui, concrètement, représentent des aires.

Dans un second temps, nous verrons comment résoudre des équations différentielles du premier ordre.

### 1 | Notion de primitive

En première, nous avons découvert la notion de dérivée d'une fonction, que nous avons complétée en terminale.

Ici, pour résoudre une équation différentielle du type  $y' = f$ , il nous faut en quelque sorte faire le chemin inverse, c'est-à-dire trouver une fonction dont la dérivée est  $f$ , que nous connaissons.

→ Cette fonction inconnue est appelée **primitive**.

**Primitive :**

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$ .

On appelle primitive d'une fonction  $f$  sur  $I$  une fonction  $F$  dérivable sur  $I$  dont la dérivée est égale à  $f$ .

→ Pour tout  $x$  de  $I$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

Prenons un premier exemple simple, avec la fonction carrée.



## Exemple

La fonction  $x \mapsto x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est la fonction  $x \mapsto 2x$ .

→ On dit alors que la fonction  $x \mapsto x^2$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto 2x$ .

Donnons maintenant les premières propriétés.



## Propriété

- Toute fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  admet des primitives sur  $I$ .
- Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , les fonctions de la forme  $F + k$ , où  $k$  est une fonction constante, sont aussi des primitives de  $f$ .

Une seule de ces primitives prend une valeur  $y_0$  donnée en un  $x_0$  de  $I$  donné.

→ La condition initiale  $y_0 = F(x_0)$  permet donc de définir de façon unique une primitive de la fonction  $f$  parmi l'ensemble des primitives de  $f$ .



## Démonstration

## Démontrons que deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Pour une fonction  $f$  définie et continue sur un intervalle  $I$ , soit  $F$  et  $G$  deux primitives de la fonction  $f$  sur  $I$ .

① Nous avons :

Pour tout  $x \in I$ ,  $F'(x) = f(x)$  et  $G'(x) = f(x)$ .

$$\rightarrow F'(x) = G'(x)$$

② Développons l'égalité.

Pour tout  $x \in I$  :

$$G'(x) - F'(x) = 0$$

$$(G' - F')(x) = 0$$

$$(G - F)'(x) = 0$$

→ Une primitive de la fonction nulle étant une fonction constante, on en déduit, avec  $k$  réel :

$$(G - F)(x) = k \Leftrightarrow G(x) = F(x) + k$$

③ Finalement, deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.



### Exemple

On a vu précédemment que la fonction  $F : x \mapsto F(x) = x^2$  est une primitive de la fonction  $f : x \mapsto f(x) = 2x$ .

Alors, toutes les fonctions de la forme  $x \mapsto x^2 + k$ , où  $k$  est une constante réelle, sont des primitives de la fonction  $f$ .

→ La fonction  $G(x) = x^2 + 2$  est la primitive de  $f(x) = 2x$  telle que  $F(0) = 2$ .

Intéressons-nous à la fonction que nous avons découverte cette année : le **logarithme népérien**.



Par définition, la fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui s'annule en  $x = 1$ .

**b.** Vérifier qu'une fonction  $F$  est une primitive d'une fonction  $f$

Avant de calculer des primitives, nous allons d'abord apprendre à vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction sur un intervalle donné.



La fonction définie par  $F(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}$  est-elle une primitive de la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$  ?

**1** On part de la **supposée primitive**  $F$  et on calcule sa dérivée.

→ La fonction  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

On reconnaît la forme  $\ln(u)$ , dont la dérivée est  $\frac{u'}{u}$ , et la forme  $\frac{1}{u}$ , dont la dérivée est  $-\frac{u'}{u^2}$ , avec  $u$  définie par  $u(x) = x+1$ , qui est bien une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ .

→ La fonction  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x+1} + \left( -\frac{1}{(x+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

**2** On met les expressions au même dénominateur, à savoir  $(x+1)^2$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  :

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{1}{x+1} \times \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{x+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{x}{(x+1)^2} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

Ⓒ On vient de démontrer que, en dérivant la fonction  $F$ , on obtenait la fonction  $f$ .

→ La fonction  $F$  est bien une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

## 2 | Calculs de primitives

Dans cette partie, nous allons voir qu'il existe un formulaire pour déterminer des primitives d'une fonction.

→ Nous utiliserons un **tableau de primitives**, qui est à connaître.

a. Primitives de fonctions usuelles

 À retenir

Fonction $f$	Une primitive $F$	Ensemble de définition
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ [avec $n \neq -1$ entier relatif]	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	$\mathbb{R}^{*+}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$

$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
-----------------	-----------------	--------------

Donnons aussi les propriétés de linéarité des primitives.



Propriété

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ .

Soit maintenant  $F$  et  $G$  deux primitives de  $f$  et  $g$  respectivement.

Soit enfin un réel  $k$ .

Nous avons alors :

- la fonction  $F + G$  est une primitive de  $f + g$  ;
- la fonction  $kF$  est une primitive de  $kf$ .

Nous allons maintenant donner quelques exemples de calcul d'une primitive pour les fonctions définies de la manière suivante.



Exemple

- 1 Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -4x + 5$$

- D'après la deuxième formule du tableau, une primitive de la fonction  $x \mapsto x$  est :

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2$$

- De même, une primitive de la fonction  $x \mapsto -4x$  est :

$$x \mapsto -4 \times \frac{1}{2}x^2 = -2x^2$$

- Enfin, une primitive de la fonction  $x \mapsto 5$  est :

$$x \mapsto 5x$$

- La fonction  $f$  admet pour primitive sur  $\mathbb{R}$  (parmi une infinité d'autres) la fonction  $F$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , qui associe à tout réel  $x$  :

$$F(x) = -2x^2 + 5x$$



Exemple

- 2 Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = x^3 + 2x + 4$$

- Toujours d'après la deuxième formule du tableau, une primitive de la fonction  $x \mapsto x^3$  est :

$$x \mapsto \frac{1}{4}x^4$$

- De même, une primitive de la fonction  $x \mapsto 2x$  est :

$$x \mapsto 2 \times \frac{1}{2}x^2 = x^2$$

- Enfin, une primitive de la fonction  $x \mapsto 4$  est :

$$x \mapsto 4x$$

- La fonction  $g$  admet pour primitive sur  $\mathbb{R}$  (parmi une infinité d'autres) la fonction  $G$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , qui associe à tout réel  $x$  :

$$G(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 4x$$



Exemple

- 3 Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}^{*+}$  par :

$$h(x) = \frac{1}{x^3}$$

- La première étape consiste à transformer l'écriture de  $h(x)$  pour se ramener à une forme du tableau :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x^3} \\ &= x^{-3} \end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la deuxième formule du tableau, une primitive de la fonction  $x \mapsto x^{-3}$  est :

$$x \mapsto -\frac{1}{2}x^{-2}$$

- La fonction  $h$  admet pour primitive sur  $\mathbb{R}^{*+}$  (parmi une infinité d'autres) la fonction  $H$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^{*+}$ , qui associe à tout réel strictement positif  $x$  :

$$\begin{aligned} H(x) &= -\frac{1}{2}x^{-2} \\ &= -\frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

## b. Primitives plus complexes

Étudions maintenant le calcul de primitives de fonctions composées.



À retenir

Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $I$ .

Fonction $f$	Une primitive $F$
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2$
$u'e^u$	$e^u$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$



[avec  $u > 0$  sur  $I$ ]

Là aussi, donnons quelques exemples de calcul d'une primitive pour les fonctions définies de la manière suivante.



Exemple

1 Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 3(2x - 1)(x^2 - x + 4)$$

- On considère la fonction  $u : x \mapsto x^2 - x + 4$ , et on constate que la fonction  $v : x \mapsto 2x - 1$  est la dérivée de  $u$ .

→ La fonction peut donc se définir par :

$$f(x) = 3 \times u'(x) \times u(x)$$

- D'après la première formule du tableau :

$$\begin{aligned} F(x) &= 3 \times \frac{1}{2} \times u^2(x) \\ &= \frac{3}{2} \times (x^2 - x + 4)^2 \end{aligned}$$

→ La fonction  $f$  admet pour primitive sur  $\mathbb{R}$  (parmi une infinité d'autres) la fonction  $F$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , qui associe à tout réel  $x$  :

$$F(x) = \frac{3}{2} \times (x^2 - x + 4)^2$$



Exemple

2 Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

- On considère la fonction  $u : x \mapsto x^2 + 1$ , strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , et on constate que la fonction  $v : x \mapsto 2x$  est la dérivée de la fonction  $u$ .

→ La fonction peut donc se définir par :

$$g(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

- D'après la dernière formule du tableau, et comme  $u$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} G(x) &= \ln(u(x)) \\ &= \ln(x^2 + 1) \end{aligned}$$

→ La fonction  $g$  admet pour primitive sur  $\mathbb{R}$  (parmi une infinité d'autres) la fonction  $G$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , qui associe à tout réel  $x$  :

$$G(x) = \ln(x^2 + 1)$$



Exemple

3 Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$$

- On considère la fonction  $u : x \mapsto e^x + 2$ , strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , et on constate que la fonction  $v : x \mapsto e^x$  est la dérivée de la fonction  $u$ .

→ La fonction peut donc se définir par :

$$h(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

- Toujours d'après la dernière formule du tableau, et comme  $u$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} H(x) &= \ln(u(x)) \\ &= \ln(e^x + 2) \end{aligned}$$

- La fonction  $h$  admet pour primitive sur  $\mathbb{R}$  (parmi une infinité d'autres) la fonction  $H$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , qui associe à tout réel  $x$  :

$$H(x) = \ln(e^x + 2)$$

### 3 | Équations différentielles du premier ordre

Maintenant que nous avons défini la notion de primitives, résolvons des équations différentielles dites du premier ordre.

#### a. Équations différentielles du premier ordre sans second membre



Définition

##### Équation différentielle du premier ordre sans second membre :

Une équation différentielle du premier ordre sans second membre est une équation d'inconnue une fonction  $y$  dérivable, qui s'écrit sous la forme :  $y' = ay$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ .

- Elle peut aussi s'écrire sous la forme  $y' - ay = 0$ , d'où l'expression « sans second membre ».



Théorème

Les solutions de cette équation sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y(x) = ke^{ax} \text{ [avec } k \in \mathbb{R}]$$



Démonstration

**Démontrons que les solutions de l'équation  $y' = ay$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ , sont des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $y(x) = ke^{ax}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ .**

Soit  $a$  un nombre réel.

→ Résolvons l'équation différentielle  $y' = ay$ .

1 Supposons qu'il existe une fonction  $f$  solution de cette équation différentielle, telle que  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

- Pour tout  $x$  réel :

$$\begin{aligned}f'(x) &= af(x) \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= a\end{aligned}$$

- On détermine la primitive de chaque fonction :

→  $\frac{f'}{f}$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$ , on reconnaît ici une formule du second tableau et on en déduit qu'une primitive de  $f$  est  $\ln(|f|)$ .

→  $a$  est un nombre réel, on reconnaît ici une formule du premier tableau et on déduit qu'une primitive est  $x \mapsto ax$  avec  $b \in \mathbb{R}$ .

- On a donc :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = a \Leftrightarrow \ln(|f(x)|) = ax + b$$

[avec  $b \in \mathbb{R}$ , deux primitives différant d'une constante]

$$\Leftrightarrow |f(x)| = e^{ax+b}$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = e^b e^{ax}$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = ke^{ax} \text{ [avec } k = e^b > 0]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = ke^{ax} \text{ [car } ke^{ax} > 0, \text{ pour tout } x \text{ réel]}$$

2 Montrons maintenant que les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ke^{ax}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ , sont solutions de l'équation différentielle  $y' = ay$ .

Soit  $x$  un nombre réel, on a :

$$f'(x) - af(x) = kae^{ax} - kae^{ax}$$

[car  $(e^u)' = u'e^u$  et, en prenant

$$u(x) = ax, \text{ on a } u'(x) = a]$$

$$= 0$$

- © L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y' = ay$  est l'ensemble des fonctions  $f$  définies par :

$$f(x) = ke^{ax} \text{ [avec } k \in \mathbb{R}]$$

Prenons un premier exemple simple.



### Exemple

Les solutions de l'équation différentielle  $y' = 3y$  sont les fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y(x) = ke^{3x} \text{ [avec } k \in \mathbb{R}]$$



### Astuce

À l'aide d'une condition initiale sur la fonction  $y$ , nous pouvons déterminer la valeur  $k$  et la fonction  $y$  sera une solution unique à cette équation.

Nous allons cette fois prendre un exemple où une condition initiale est donnée.



### Exemple

Trouvons la solution de l'équation différentielle  $y' = -5y$  qui vérifie  $y(0) = 2$ .

- 1 Les solutions de l'équation  $y' = -5y$  sont les fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y(x) = ke^{-5x} \text{ [avec } k \in \mathbb{R}]$$

- 2 Déterminons la valeur de  $k$  avec la condition initiale :

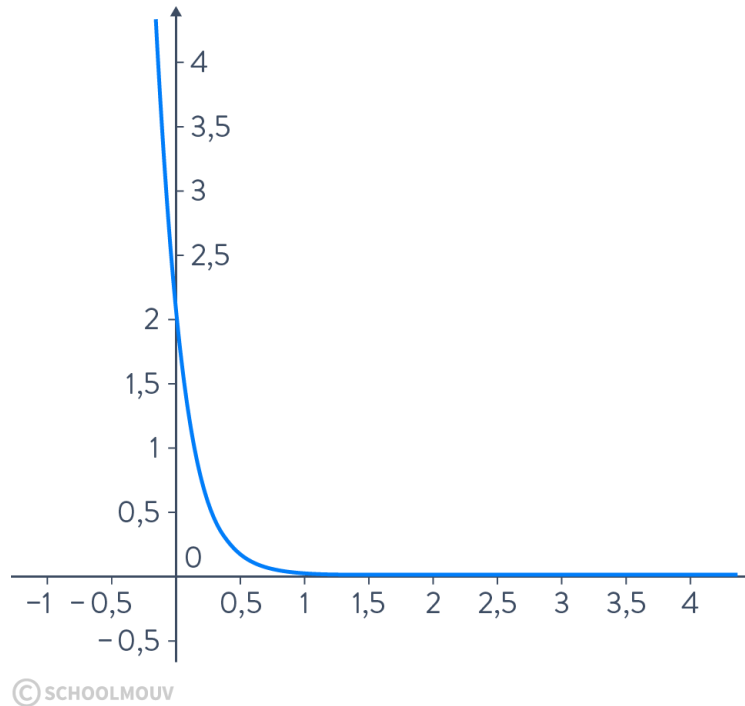
$$y(0) = 2 \Leftrightarrow ke^0 = 2$$

$$\Leftrightarrow k = 2$$

→ L'unique solution de l'équation qui vérifie la condition initiale est donc la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y(x) = 2e^{-5x}$$

3 Nous pouvons aussi donner la représentation graphique de la fonction  $y$ .



Si on change la valeur  $k$  dans l'expression de la fonction par son opposé  $-k$ , nous obtenons une courbe symétrique à la première courbe par rapport à l'axe des abscisses.

b. Équations différentielles du premier ordre avec second membre constant



## Équation différentielle du premier ordre avec second membre constant :

Une équation différentielle du premier ordre avec second membre constant est une équation, d'inconnue une fonction  $y$  dérivable, qui s'écrit sous la forme :  $y' = ay + b$ , avec  $a \neq 0$  et  $b$  deux réels.

→ Elle peut aussi s'écrire sous la forme  $y' - ay = b$ , d'où l'expression « avec second membre constant ».

Soit l'équation différentielle  $y' = ay + b$ , avec  $a \neq 0$  et  $b$  deux réels.  
Étudions d'abord la fonction constante  $g : x \mapsto -\frac{b}{a}$ . Alors nous avons, pour tout réel  $x$  :

$$\text{d'une part : } g'(x) = 0$$

$$\begin{aligned}\text{d'autre part : } ag(x) + b &= a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b \\ &= -b + b \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\text{donc : } g'(x) = ag(x) + b$$

→ La fonction  $g$  est une solution particulière de l'équation différentielle.

Et nous avons la propriété suivante.



Propriété

Les solutions de l'équation différentielle  $y' = ay + b$  ( $a \neq 0$  et  $b$  deux réels) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto f(x) + g(x)$ , avec :

- $f$  solution quelconque de l'équation différentielle  $y' = ay$  ;
- $g$  solution particulière constante de l'équation différentielle  $y' = ay + b$ .

À partir des solutions que nous avons données, dans la partie précédente, pour les équations différentielles du premier ordre sans second membre, nous pouvons déduire la propriété suivante.



### Propriété

Les solutions de l'équation différentielle  $y' = ay + b$  ( $a \neq 0$  et  $b$  deux réels) sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a} \text{ [avec } k \in \mathbb{R}]$$



### Exemple

Les solutions de l'équation différentielle  $y' = 3y + 4$  sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $y(x) = ke^{3x} - \frac{4}{3}$ , avec  $k$  un nombre réel.



### Astuce

À l'aide d'une condition initiale sur la fonction  $y$ , nous pouvons déterminer la valeur de  $k$  et la fonction  $y$  solution sera unique.



### Exemple

Trouvons la solution de l'équation différentielle  $y' = -6y + 3$  qui vérifie  $y(0) = 1$ .

- Les solutions de l'équation  $y' = -6y + 3$  sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{aligned} y(x) &= ke^{-6x} + \frac{3}{6} \\ &= ke^{-6x} + \frac{1}{2} \text{ [avec } k \text{ un nombre réel]} \end{aligned}$$

- Déterminons la valeur de  $k$  avec la condition initiale :



$$\begin{aligned}
 y(0) = 1 &\Leftrightarrow ke^0 + \frac{1}{2} = 1 \\
 &\Leftrightarrow k + \frac{1}{2} = 1 \\
 &\Leftrightarrow k = 1 - \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow k = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

→ L'unique solution de l'équation qui vérifie la condition initiale est donc la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \frac{1}{2}e^{-6x} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}(e^{-6x} + 1)
 \end{aligned}$$

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons défini la notion de primitives d'une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$ .

Dans la pratique, nous déterminerons les primitives d'une fonction à l'aide du tableau de primitives et des opérations sur celles-ci.

Nous avons ensuite appris à résoudre des équations différentielles du premier ordre.

Dans le prochain cours, nous verrons les primitives s'avèrent utiles pour calculer des aires et des intégrales.