# Mouvement dans un champ uniforme

Introduction :

Avant de sauter pleinement dans l'étude du mouvement dans un champ uniforme, rappelez-vous qu'en première nous avions approfondi les **lois de Newton** qui lient les forces et le mouvement – dans le cours « Mouvements et cinématique » – mais également le **champ électrostatique** – dans le cours « Champ électrique et électrostatique ». Ces notions vous nous permettent de mieux comprendre ce cours.

Après avoir traité la deuxième loi de Newton dans le chapitre précèdent « Appliquer la deuxième loi de Newton », nous allons présenter ici les caractéristiques du mouvement d'un système placé dans un **champ uniforme**, sans autre force extérieure. Les cas du **champ de pesanteur** et du **champ électrostatique** créé par un condensateur plan sont étudiés, ainsi que l'application aux accélérateurs linéaires de particules. Les équations horaires, l'équation de trajectoire, et l'évolution de l'énergie du système, sont aussi établies.

## 1 Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

### a. Qu'est-ce qu'un champ de pesanteur uniforme ?

On sait qu'en étudiant un système mécanique sur lequel s'exerce une force à distance, celle-ci peut s'écrire comme le produit d'une propriété du système (masse ou charge électrique) par un champ (de pesanteur, de gravitation, ou électrostatique) dû à l'objet avec lequel l'interaction a lieu.

Rappel

Un champ est une grandeur représentant l'effet produit par la « source » d'une interaction à distance et le système étudié.

Définition

**Champ vectoriel uniforme :**

Un champ vectoriel uniforme garde même norme, même direction et même sens en tout point d'une région de l'espace.

Le poids d'un objet se trouvant à la surface de la Terre (ou d'une autre planète) est égal à la force de gravitation exercée par la planète sur l'objet. Or, le poids est égal au produit de la masse de l'objet par le champ de pesanteur :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Avec :

- le poids $P$ exprimé en newton $(\mathrm{N})$ ;
- la masse $m$ exprimée en kilogramme $(\mathrm{kg})$ ;
- le champ de pesanteur $g$ exprimé en newton par kilogramme $(\mathrm{N} \cdot \mathrm{kg}^{-1})$.

Définition

**Champ de pesanteur :**

Le champ de pesanteur, noté $\vec{g}$, est égal au champ de gravitation à l'endroit où l'expérience est réalisée. Il est défini par :

- sa direction : vertical ;
- son sens : orienté vers le centre de masse de la planète à la surface de laquelle on se trouve (c'est-à-dire « vers le bas ») ;
- sa norme : dépend du lieu.

→ Le champ de pesanteur terrestre moyen a pour valeur $g = 9,81\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.

À retenir

Dans un champ de pesanteur uniforme, la direction, le sens et la norme de $\vec{g}$ sont identiques, c'est-à-dire que $\vec{g} = \overrightarrow{\text{cste}}$. Sur Terre, si la région de l'espace considérée est assez petite par rapport à ses dimensions, alors on peut considérer que le champ de pesanteur y est uniforme.

*L'action du champ de gravitation, dont la définition a été vue en 2de – dans le cours « Modélisation d'une action par une force » – et en 1re – dans le cours « Le champ gravitationnel » – sera étudiée dans le chapitre suivant : « Mouvement dans un champ de gravitation ».*

## b. Étude du mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

Pour étudier le mouvement d'un système dans un champ de pesanteur uniforme, nous allons établir les équations décrivant le mouvement : les **équations horaires** et l'**équation de trajectoire**.

Définition

**Équations horaires :**

Les équations horaires définissent chacune des coordonnées spatiales du système comme une fonction du temps.

À retenir

Dans ce qui suit, pour étudier la trajectoire d'un système, nous allons donc projeter sur les axes d'un repère orthonormé de l'espace le vecteur position, afin d'obtenir ses coordonnées ainsi :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Rappel

Rappelons les égalités suivantes :

- le vecteur vitesse $\vec{v}$ est la dérivée par rapport au temps du vecteur position et nous pouvons noter ses coordonnées :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- le vecteur accélération $\vec{a}$ est la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps du vecteur vitesse et nous pouvons noter ses coordonnées :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v'_x(t) \\ v'_y(t) \\ v'_z(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

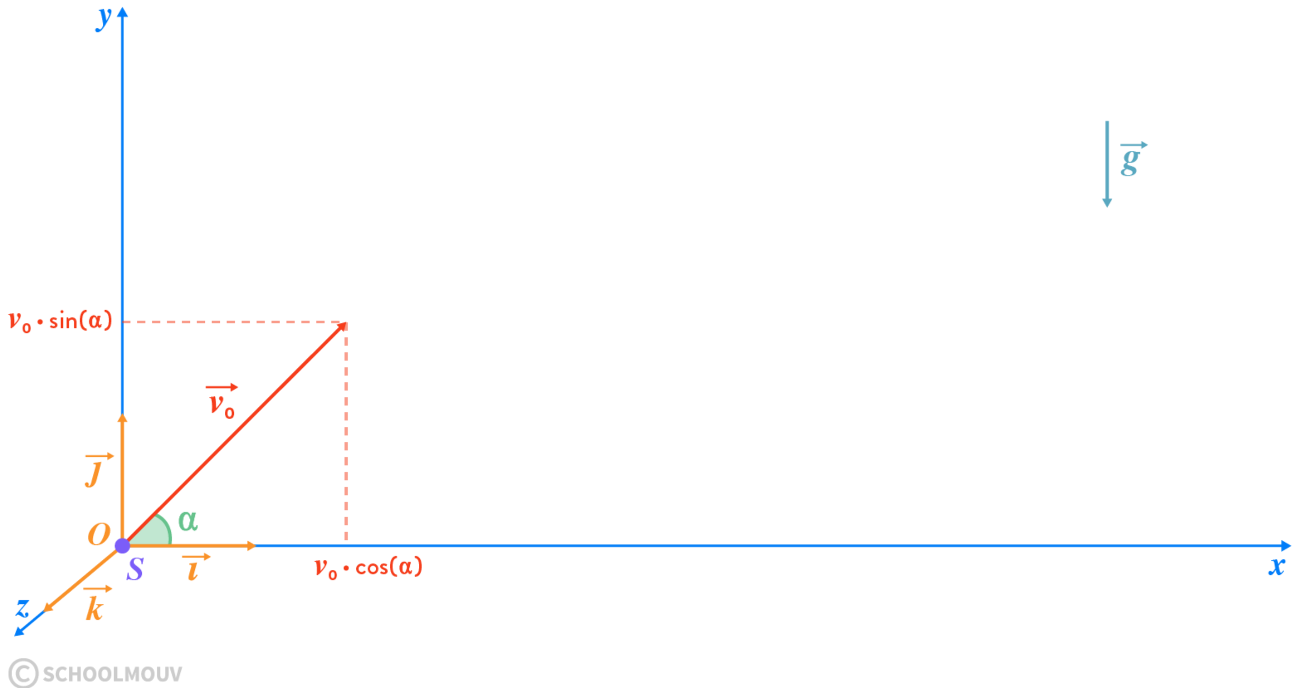
Pour commencer, intéressons-nous au mouvement d'un système projeté dans un champ de pesanteur uniforme.

## 1 Conditions initiales

Nous nous plaçons dans un référentiel galiléen, et nous réduisons le système à son centre d'inertie $S$ de masse $m$, non nulle et constante. À l'instant $t = 0$, il est lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$, non nulle, qui forme avec l'horizontale un angle $\alpha$.
Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est constant en tous points, puisque nous considérons que le champ de pesanteur est uniforme.

## 2 Choix du repère et représentation

Nous choisissons d'étudier le mouvement dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, où $O$ est la position de $S$ à $t = 0$ :




Nous remarquons que $\vec{g}$ est orienté vers le bas et $\vec{\jmath}$ vers le haut, ils sont donc de sens contraires. Nous pouvons alors d'ores et déjà donner les coordonnées du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$ dans $\mathcal{R}$, avec $v_0$ la norme de $\vec{v}_0$ et $g$ la norme de $\vec{g}$ :

$$\overrightarrow{OS}(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{g} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec $\overrightarrow{OS}(0)$ le vecteur position initiale.

## 3 Bilan des forces

Nous considérons comme négligeables les frottements et la poussée d'Archimède.

→ Le système n'est donc soumis qu'à son poids $\vec{P}$, constant, et :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Selon la 2e loi de Newton, nous avons donc, avec $\vec{a}$ l'accélération de $S$ :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} &\Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \\ &\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g} \text{ [car } m \neq 0]\end{aligned}$$

→ L'accélération de $S$ est donc égale au champ de pesanteur, elle est constante.

### 4 Coordonnées du vecteur accélération

À retenir

> De ce qui précède, nous pouvons déduire les coordonnées en fonction du temps du vecteur accélération $\vec{a}$ dans $\mathcal{R}$ :
>
> $$\vec{a}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$
>
> Remarquons que la composante selon $(O\ ;\ \vec{\jmath})$ est non nulle et constante, le mouvement « vertical » sera donc uniformément accéléré (ou ralenti).

### 5 Coordonnées du vecteur vitesse

Nous avons rappelé plus haut que $\vec{a}$ est la dérivée par rapport au temps de $\vec{v}$.

$$\vec{a}(t) \begin{cases} a_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \\ \\ a_y(t) = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g \\ \\ a_z(t) = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

Nous connaissons les coordonnées de $\vec{a}$, il s'agit donc, pour exprimer les coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$, de trouver la primitive de chacune des coordonnées de $\vec{a}$.

À retenir

Une primitive de la fonction $f$ sur un intervalle $I$ est une fonction $F$ définie et dérivable sur $I$ dont la dérivée est $f$.

→ Pour tout $t \in I$, $F'(t) = f(t)$.

Astuce

Une primitive d'une fonction $f : t \mapsto K$, constante sur $I$, est $F : t \mapsto Kt + C$, où $C$ est une constante réelle.
En effet, $F$ comme fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, selon les règles de dérivation, nous avons, pour tout $t$ réel :

$$F'(t) = K = f(t)$$

Nous trouvons donc les coordonnées du vecteur vitesse en fonction du temps $\vec{v}(t)$ ($g$ est bien constant, puisque nous sommes dans un champ uniforme) :

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = K_1 \\ v_y(t) = -gt + K_2 \\ v_z(t) = K_3 \end{cases}$$
$$\text{[où } K_1,\ K_2 \text{ et } K_3 \text{ sont des constantes appelées constantes d'intégration]}$$

Déterminons maintenant $K_1$, $K_2$ et $K_3$ en nous servant des conditions initiales que nous avons fixées.

À $t = 0$, nous savons par hypothèse que le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ a pour coordonnées :

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de considérer le système suivant, obtenu par identification :

$$\begin{cases} K_1 = v_0 \cos(\alpha) \\ -g \times 0 + K_2 = v_0 \sin(\alpha) \\ K_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 = v_0 \cos(\alpha) \\ K_2 = v_0 \sin(\alpha) \\ K_3 = 0 \end{cases}$$

À retenir

Les coordonnées en fonction du temps du vecteur vitesse $\vec{v}$ sont donc :

$$\vec{v}(t) \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ -gt + v_0 \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que la composante selon $(O\ ;\ \vec{\imath})$ est constante, donc le mouvement « horizontal » est uniforme.

## 6 Coordonnées du vecteur position

Là encore, nous avons rappelé plus haut que $\vec{v}$ est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OS}(t)$.

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos(\alpha) \\[2ex] v_y(t) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -gt + v_0 \sin(\alpha) \\[2ex] v_z(t) = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

Nous avons calculé les coordonnées de $\vec{v}$ au point précédent. De la même façon, nous exprimons les coordonnées du vecteur position dans $\mathcal{R}$ en calculant la primitive de chacune des coordonnées de $\vec{v}$.

Astuce

Une primitive d'une fonction affine $f : t \mapsto at + b$ est $F : t \mapsto \frac{a}{2}t^2 + bt + C$, où $C$ est une constante réelle. Pour tout $t$ réel :

$$F'(t) = at + b = f(t)$$

Nous avons donc les coordonnées en fonction du temps du vecteur position $\overrightarrow{OS}(t)$ :

$$\overrightarrow{OS}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)t + K_4 \\ y(t) = -\dfrac{g}{2}t^2 + v_0 \sin(\alpha)t + K_5 \\ z(t) = K_6 \end{cases}$$

$$\text{[où } K_4,\ K_5 \text{ et } K_6 \text{ sont des constantes appelées constantes d'intégration]}$$

D'une manière analogue à ce que nous avons fait pour les constantes d'intégration du vecteur vitesse, nous allons déterminer $K_4$, $K_5$ et $K_6$ grâce aux conditions initiales, i.e. la position de $S$ à $t = 0$.
Et nous avons choisi $\mathcal{R}$ tel que, à $t = 0$, le vecteur position est le vecteur nul :

$$\overrightarrow{OS}(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Ainsi, $K_4 = K_5 = K_6 = 0$.

À retenir

Les coordonnées en fonction du temps du vecteur position $\overrightarrow{OS}(t)$ sont donc :

$$\overrightarrow{OS}(t) \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha)t \\ -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons aussi remarquer que la composante du vecteur position selon l'axe $(O\ ;\ \vec{k})$ est toujours nulle.

À retenir

Dans un champ de pesanteur uniforme, et dans les conditions indiquées plus haut, le mouvement du centre de masse du système est inclus dans le plan.

→ Le mouvement est donc **plan**.

Astuce

Pour faciliter les calculs il est donc important, lors du choix du repère, de le fixer de telle façon à ce que le mouvement se fasse dans un plan du repère, $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ ou encore $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{k})$.

Par ailleurs, si, pour des raisons expérimentales ou autres, le repère est choisi de telle façon que la position à l'instant $t = 0$ a par exemple pour coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$, avec $(x_0\ ;\ y_0) \neq (0\ ;\ 0)$, il suffira de prendre en compte ces valeurs lors du calcul des constantes d'intégration.

## 7 Équation de la trajectoire

Nous venons de montrer que le mouvement est plan, nous allons donc restreindre notre étude au plan qui a pour repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

→ Il s'agit ici d'exprimer l'ordonnée $y$ en fonction de l'abscisse $x$, comme nous en avons l'habitude, et ce sans tenir compte du temps.

- $S$ n'est pas lancé verticalement, donc $\alpha$ n'est pas un angle droit ($v_0 \cos{(\alpha)} \neq 0$). Nous avons trouvé au point 6 que, à tout instant $t$ :

$$x = v_0 \cos{(\alpha)} t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos{(\alpha)}}$$

Dans la composante selon $(O\ ;\ \vec{\jmath})$ du vecteur position, remplaçons $t$ par cette expression, et nous obtenons :

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{2}g \times \left(\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}\right)^2 + v_0\sin(\alpha) \times \frac{x}{v_0\cos(\alpha)} \\ &= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}x \\ &= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x \\ &\text{[car } \tan\alpha = \tfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\text{]}\end{aligned}$$

À retenir

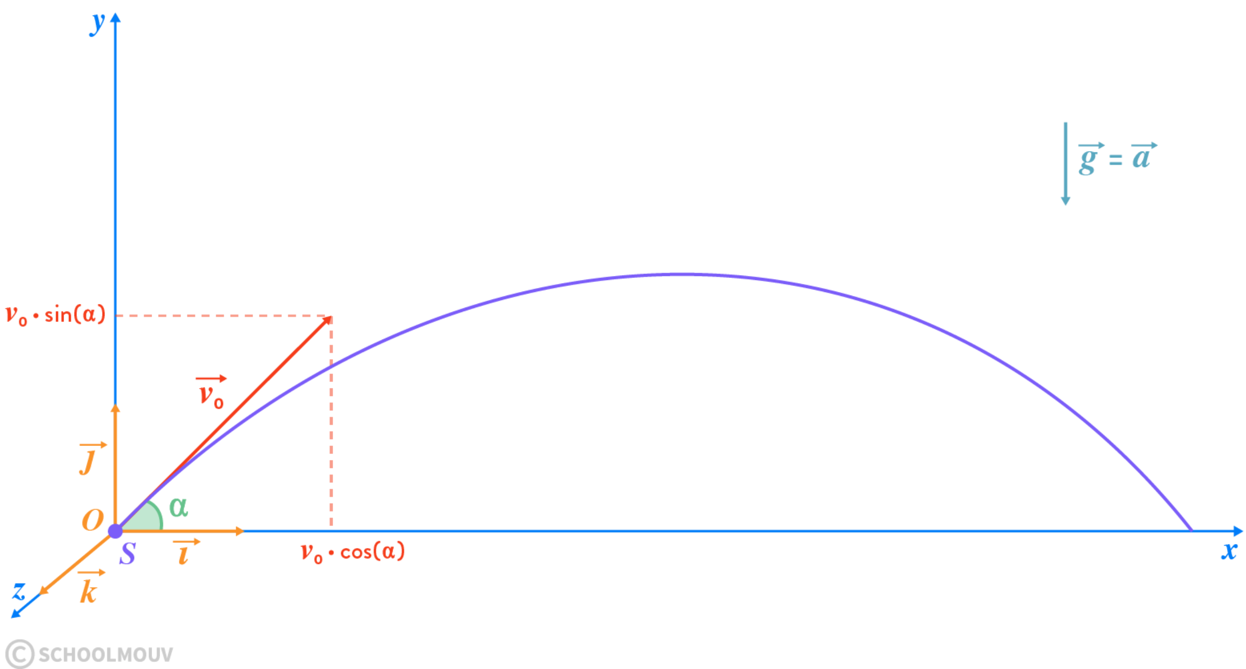
L'équation de la trajectoire est :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x$$

Nous reconnaissons l'expression d'une fonction polynôme du second degré, et le coefficient de $x^2$ est négatif.

→ La trajectoire de $S$ est donc parabolique.

- Si $S$ est lancé « vers le haut », sa trajectoire atteindra un maximum.
- Si $S$ est lancé « vers le bas » ou « horizontalement », sa trajectoire sera strictement décroissante.

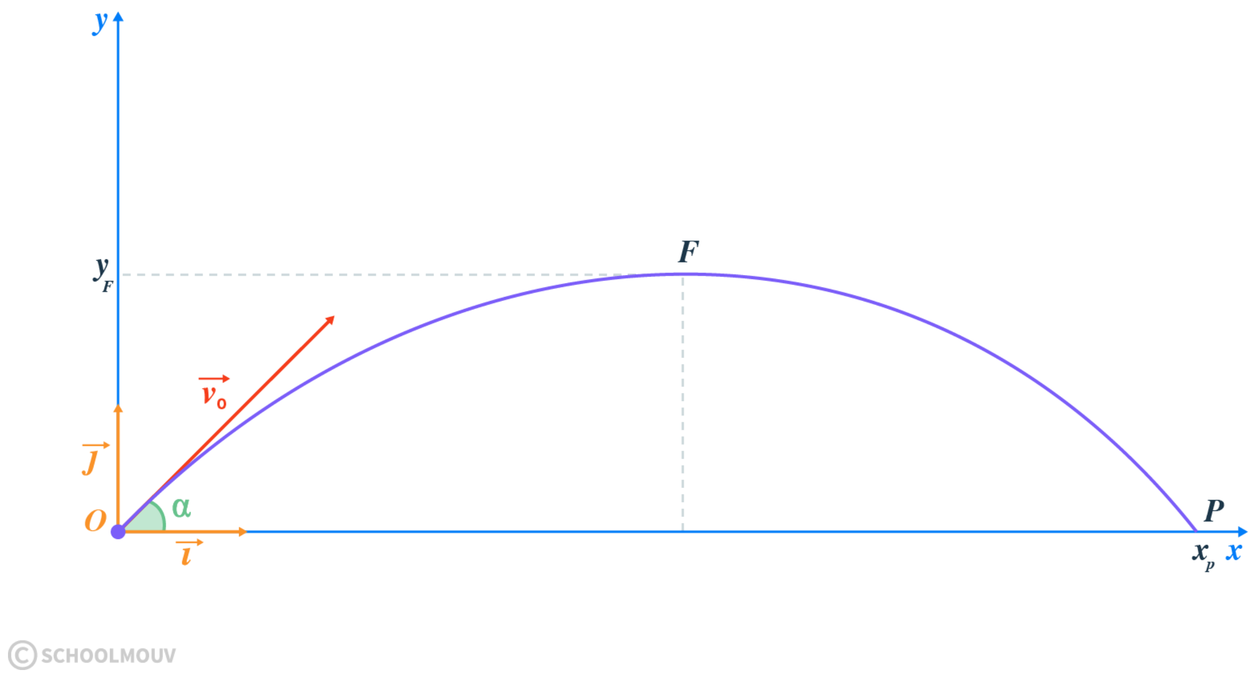


> Remarquons que, dans les conditions données au début de cette partie, la trajectoire ne dépend que des conditions initiales.

Si $S$ est lancé avec une vitesse initiale nulle ou de direction parallèle au champ de pesanteur, alors la trajectoire sera portée par l'axe $(O\ ;\ \vec{\jmath})$ et le mouvement sera rectiligne uniformément varié.

Astuce

> La **portée du mouvement** $P$ est la distance maximale parcourue horizontalement, donc selon l'axe $(O\ ;\ \vec{\imath})$. À cet instant, si l'origine est au niveau du « sol », comme dans notre exemple, alors $y_P = 0$, il s'agit donc de la valeur de $x$ pour laquelle $y = 0$, en nous servant de l'équation cartésienne de la trajectoire.
>
> La **flèche du mouvement** $F$ est l'altitude maximale atteinte par le système. À cet instant, la composante verticale de la vitesse $v_y(t)$ vaut $0$. Il faut alors résoudre $v_y(t) = 0$ et ainsi trouver la valeur $t_1$ qui annule $v_y$. On en déduit ensuite la flèche, en calculant $y(t_1)$.




## 2 | Mouvement dans un champ électrique uniforme

### a. Le champ électrique dans un condensateur

Définition

**Champ électrique :**

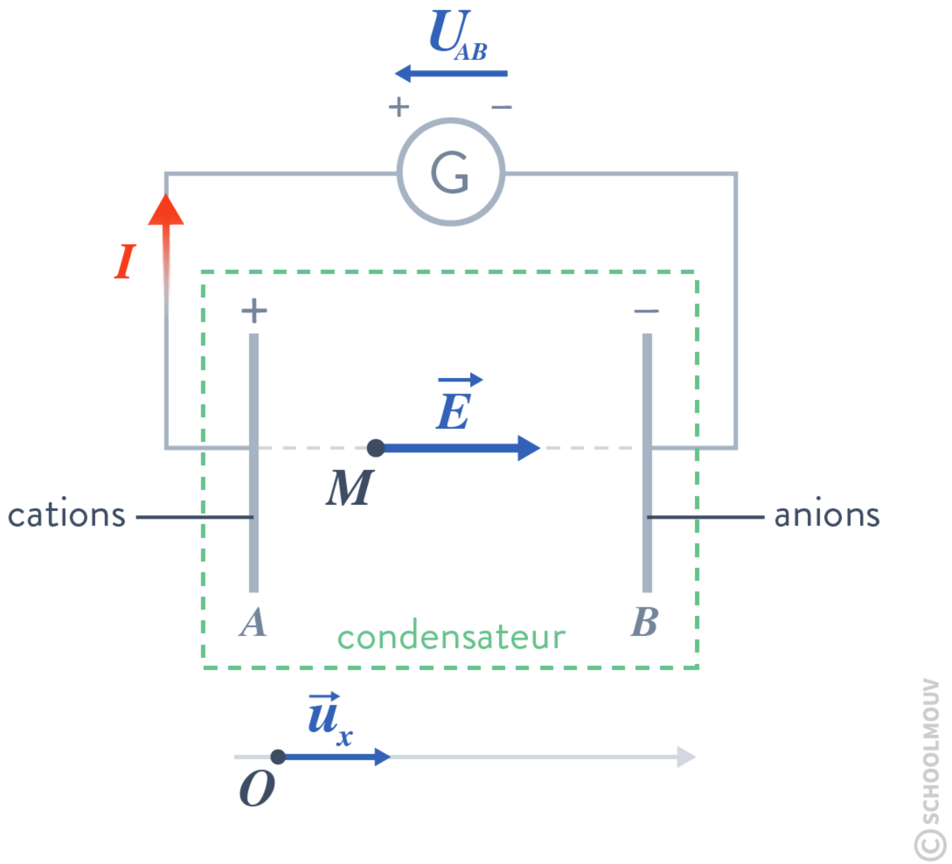
Un champ électrique est un champ vectoriel $\vec{E}$ qui traduit l'action d'une force électrique sur une charge électrique : la force de Coulomb.

Rappel

La force électrique exercée par une charge $q_A$ située en $A$ sur une charge $q_B$ située en $B$ est égale au produit de la charge $q_B$ par le champ exercé par $q_A$ au point $B$ :

$$\vec{F}_{A/B} = q_B \cdot \vec{E}_A(B)$$

Considérons un condensateur formé de deux plaques métalliques parallèles, portant le même nombre total de charges $q$, l'une sous forme de cations $(+)$ et l'autre sous forme d'anions $(-)$. Ceci est obtenu par l'application d'une tension électrique $U$ via un circuit extérieur.
La plaque se trouvant au plus haut potentiel électrique est chargée positivement. Le champ résultant $\vec{E}$ peut être considéré uniforme dans l'espace séparant les plaques.




À retenir

Le champ électrique $\vec{E}$ créé entre les plaques du condensateur dépend de la tension électrique appliquée $U$ et de la distance $d$ entre les plaques :

$$\vec{E} = \frac{U}{d} \cdot \vec{u}_x$$

Où le vecteur unitaire $\vec{u}_x$ est perpendiculaire aux plaques, dirigé de la plaque au potentiel positif vers celle au potentiel négatif.

→ Le champ électrique $\vec{E}$ est orienté du $+$ vers le $-$.

Astuce

De l'expression du champ électrique, on voit qu'il est d'autant plus grand que la tension $U$ est élevée et que la distance $d$ est réduite.

## b. Qu'est-ce qu'un accélérateur linéaire de particules ?

Considérons le condensateur précédent et, dans l'espace séparant ses plaques, un électron.
Étudions le système constitué par l'électron de charge $q = -e$ et de masse $m_e$.

- **Les forces extérieures qui s'appliquent au système sont :**
  - le poids $\vec{P}$, ayant pour expression :

$$\vec{P} = m_e\vec{g}$$

  - la force électrostatique $\vec{F_e}$ associée au champ du condensateur, ayant pour expression :

$$\vec{F_e} = q\vec{E} \Leftrightarrow \vec{F}_e = -e\vec{E}$$

Soit,

$$\vec{F}_e = -e \cdot \frac{U}{d} \cdot \vec{u}_x$$

- **Comparons les valeurs de ces deux forces**.
  Considérons une tension $U$ appliquée au condensateur $U = 10 \text{ V}$ (valeur faible) et une distance entre les plaques $d = 1 \text{ cm}$.
  Nous savons également que $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ et que la charge élémentaire vaut $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Rappel

> La charge d'un électron vaut $-e$, et la charge d'un proton vaut $e$.

Soit,

$$\begin{aligned}\frac{P}{F_e} &= \frac{m_e g \times d}{eU} \\ &= \frac{9,1 \times 10^{-31} \times 9,81 \times 10^{-2}}{1,6 \times 10^{-19} \times 10} \\ &= 5,6 \times 10^{-14}\end{aligned}$$

Alors,

$$P = 5,6 \times 10^{-14} \times F_e$$

→ Les tensions appliquées peuvent être beaucoup plus élevées, donc le poids de l'électron dans ce type d'étude est, d'après ce calcul, toujours négligeable devant la force électrostatique.

En négligeant le poids, d'après la 2e loi de Newton, nous avons donc la relation vectorielle suivante :

$$\begin{aligned}m_e\vec{a} &= \vec{P} + \vec{F_e} \\ &= \vec{F_e} \\ &= -e\vec{E}\end{aligned}$$

À retenir

> Tout au long du mouvement de l'électron entre les plaques du condensateur, l'accélération est constante, car d'après les égalités ci-dessus :
>
> $$\vec{a} = -\frac{e}{m_e} \cdot \vec{E}$$
>
> Et si la vitesse initiale de l'électron est nulle ou parallèle au champ électrique, son mouvement sera rectiligne uniformément accéléré.
>
> L'interaction est de type électrostatique, donc l'électron est attiré par la plaque de potentiel le plus élevé, à la surface de laquelle on trouve des charges positives.

→ Ce principe est utilisé dans les accélérateurs de particules dits linéaires, dans lesquels un champ électrostatique est utilisé pour donner des vitesses de plus en plus importantes à des électrons, protons, ou noyaux atomiques.

### c. Mouvement dans un champ électrique uniforme

Nous allons maintenant donner les différentes équations pour le mouvement d'une particule dans un champ électrique uniforme.
Le raisonnement sera analogue à celui que nous venons de mener pour le mouvement dans un champ de pesanteur uniforme.

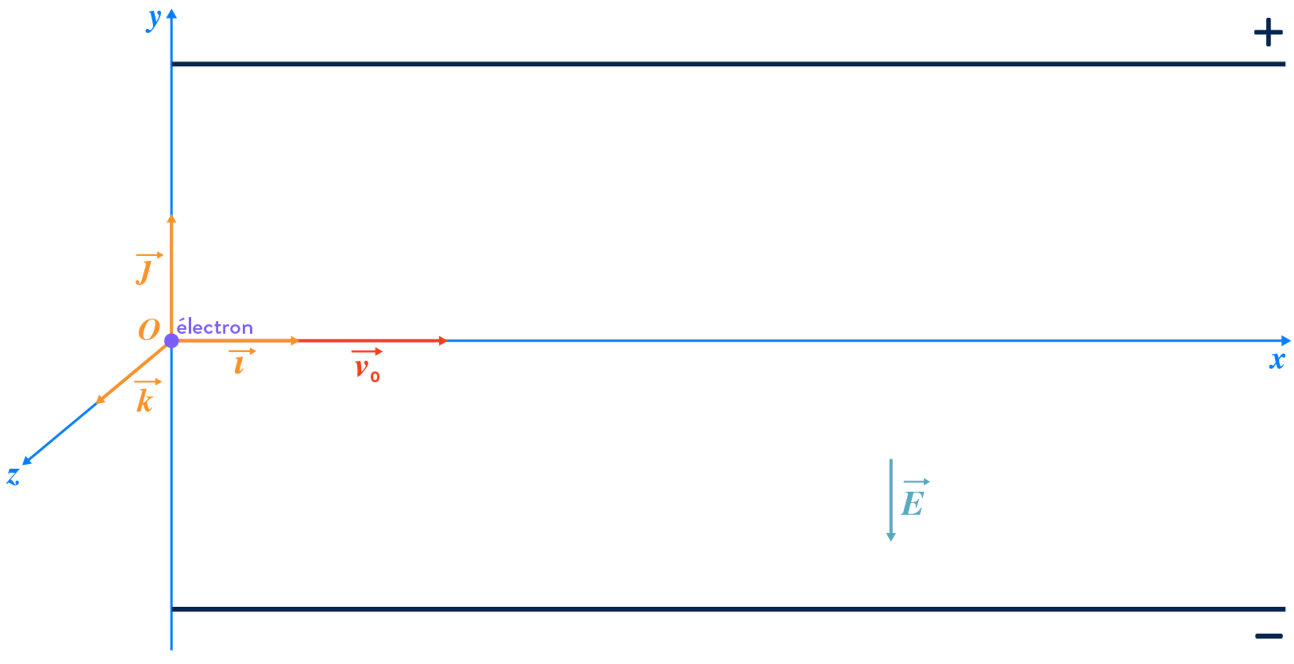
#### 1 Conditions initiales

Nous nous plaçons dans un référentiel terrestre supposé galiléen, et pour simplifier les choses, nous allons étudier le mouvement d'un électron de charge $-e$. Ensuite, nous considérons qu'à $t = 0$ le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ est non nul et orthogonal à $\vec{E}$.

#### 2 Choix du repère et représentation

- Tout d'abord, le mouvement sera aussi plan. Nous travaillerons avec un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, avec $O$ la position de la particule à $t = 0$.

→ Nous représentons la situation initiale dans le schéma suivant :






Nous pouvons donner les coordonnées de $\vec{v}_0$ et $\vec{E}$ dans $\mathcal{R}$ :

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{E} \begin{pmatrix} 0 \\ -E \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 3 Bilan des forces

L'électron n'est soumis qu'au champ électrique uniforme $\vec{E}$. Nous pouvons négliger le poids de l'électron devant la force électrostatique $\vec{F}_e$ donc, avec la 2e loi de Newton, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_e \vec{a} \Leftrightarrow e\vec{E} = m_e \vec{a} \\ \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{e}{m_e} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

→ L'accélération est donc constante, colinéaire à $\vec{E}$ et de sens opposé.

### 4 Coordonnées du vecteur accélération

À retenir

> Nous pouvons donner les coordonnées en fonction du temps du vecteur accélération $\vec{a}$ :
>
> $$\vec{a}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{eE}{m_e} \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 5 Coordonnées du vecteur vitesse

Comme nous l'avons fait pour le champ uniforme, nous pouvons déterminer les coordonnées du vecteur vitesse, en intégrant les coordonnées du vecteur accélération par rapport au temps et en nous servant des coordonnées de $v_0$ pour déterminer les constantes d'intégration.

À retenir

> Les coordonnées en fonction du temps du vecteur vitesse $\vec{v}$ sont :

$$\vec{v}(t)\begin{pmatrix} v_0 \\ \dfrac{eE}{m_e}\cdot t \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 6 Coordonnées du vecteur position

Nous intégrons aussi par rapport au temps les coordonnées du vecteur vitesse et déterminons les constantes d'intégration grâce à la position initiale, de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

À retenir

Les coordonnées en fonction du temps du vecteur position sont :

$$\overrightarrow{OS}(t)\begin{pmatrix} v_0 t \\ \dfrac{eE}{2m_e}\cdot t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 7 Équation de la trajectoire

Nous avons trouvé que, à tout instant $t$ :

$$x = v_0 t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0}$$

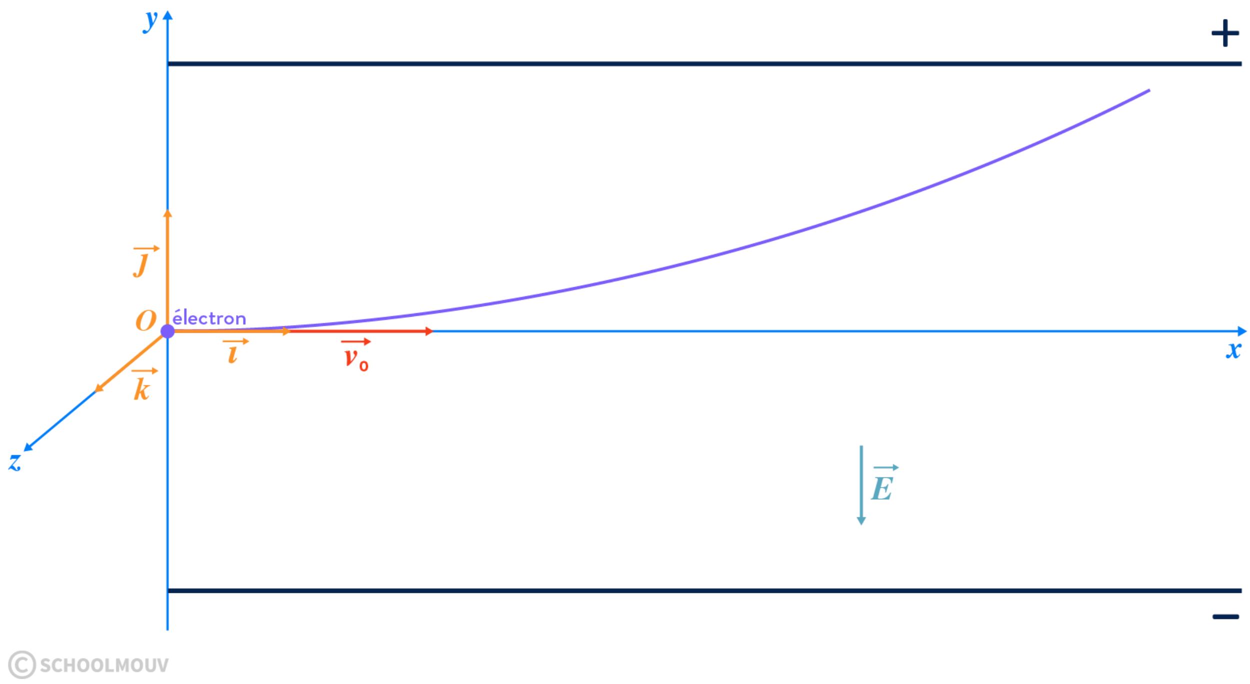
À retenir

Nous obtenons ainsi l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{eE}{2m_e v_0^2}\cdot x^2$$

Nous reconnaissons l'expression d'une fonction polynôme du second degré, et le coefficient de $x^2$ est positif.

→ La trajectoire de l'électron est donc parabolique. Dans nos conditions, son minimum est atteint en $x = 0$ et vaut $0$.




## 3 | Aspects énergétiques

### a. L'énergie mécanique

Nous allons maintenant exploiter la conservation de l'énergie mécanique d'un mouvement d'un système dans un champ uniforme.

Nous avons vu en première que l'énergie mécanique $E_{\text{m}}$ d'un système est la somme de son énergie cinétique $E_{\text{c}}$ et de son énergie potentielle.

Rappel

- L'énergie cinétique $E_{\text{c}}$ (en $\text{J}$) d'un système de masse $m$ (en $\text{kg}$) se déplaçant à la vitesse $v$ (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) est égale à :

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2}mv^2$$

- L'énergie potentielle de pesanteur $E_{\text{pp}}$ (en $\text{J}$) d'un système de masse $m$ (en $\text{kg}$) situé à une altitude $z$ (en $\text{m}$) est égale à :

$$E_{\text{pp}} = mgz$$

Avec $g$ l'intensité de pesanteur ($\approx 9,81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ sur Terre, à l'altitude de la mer).

- L'énergie mécanique est donc égale à :

$$E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}}$$

Nous avons démontré plus haut que le mouvement d'un système projeté dans un champ de pesanteur uniforme n'est soumis qu'à une seule force, son poids. Cette force est conservative.
De plus, dans le cas d'un mouvement d'un électron dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$, nous savons que la force électrostatique $\vec{F}_e$ exercée sur l'électron est conservative, de même que son poids, dont on a négligé l'influence au début de cette étude.

→ Donc en **négligeant les forces non conservatives**, comme les forces de frottements, l'énergie mécanique de nos deux systèmes est conservée au cours du mouvement.

À retenir

Dans un référentiel supposé galiléen, l'énergie mécanique $E_{\mathrm{m}}$ d'un système dans un champ uniforme soumis uniquement à un champ extérieur est constante.

$$E_{\mathrm{m}} = \text{constante}$$

→ Son énergie potentielle $E_{\mathrm{p}}$ et son énergie cinétique $E_{\mathrm{c}}$ varient donc de manières opposées, et peuvent être exprimées comme des fonctions du temps, en utilisant les équations horaires.

### b. L'énergie mécanique pour déterminer une vitesse initiale dans un champ de pesanteur uniforme

Lorsqu'un système est en mouvement dans un champ de pesanteur uniforme, sans force de frottement, il y a conservation de l'énergie mécanique. Nous pouvons ainsi faire le lien entre la vitesse et la position de ce système.

Si l'origine coïncide avec le point de départ du mouvement de notre système alors $E_{\text{pp}} = 0$.

À $t = 0\,\text{s}$,

$$\begin{cases} E_{\text{c}} = \dfrac{1}{2} m v_0^2 \\ \\ E_{\text{pp}} = 0 \end{cases}$$

Donc l'énergie mécanique du système vaut :

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

En un point quelconque de la trajectoire du système,

$$\begin{cases} E_{\text{c}} = \dfrac{1}{2} m v^2 \\ \\ E_{\text{pp}} = m g y \end{cases}$$

Donc l'énergie mécanique du système peut s'écrire :

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2} m v^2 + m g y$$

À retenir

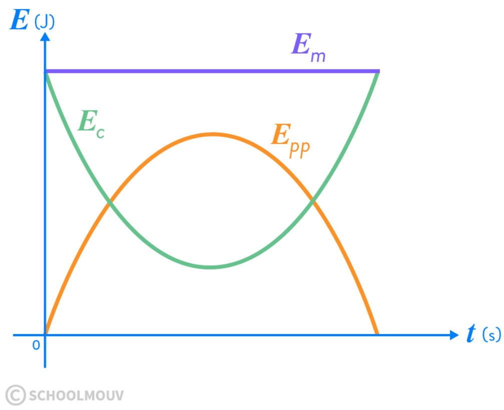
La conservation de l'énergie mécanique nous donne alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_0^2 &= \frac{1}{2} m v^2 + m g y \\ v_0^2 &= v^2 + 2 g y \\ v^2 &= v_0^2 - 2 g y \\ v &= \sqrt{v_0^2 - 2 g y} \end{aligned}$$

Cette relation nous permet de calculer une vitesse à partir des coordonnées de la position d'un système.

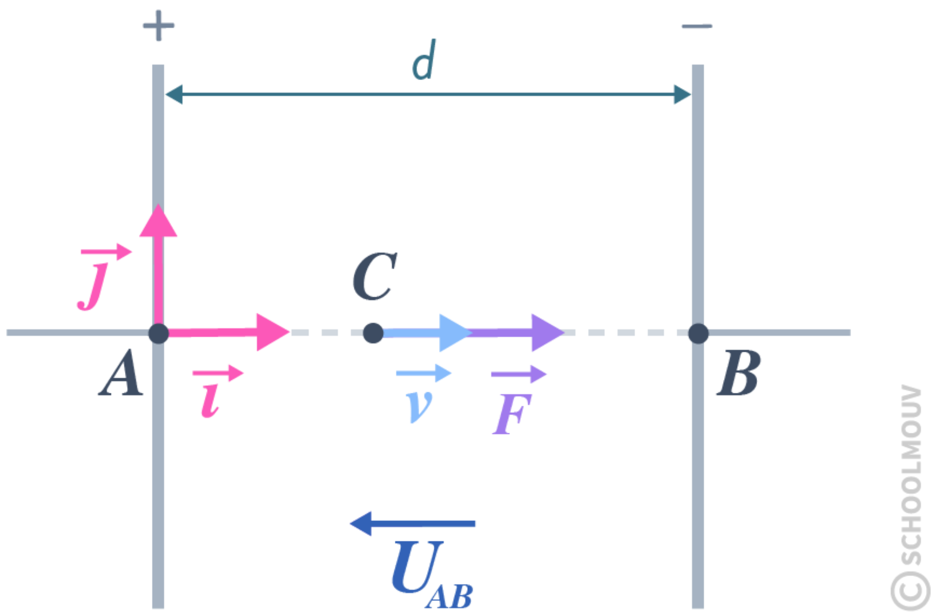
Exemple

Le schéma nous permet d'observer l'évolution des énergies cinétique, potentielle et mécanique d'un système en chute libre en fonction du temps. Dans un champ de pesanteur uniforme, l'énergie cinétique est convertie en énergie potentielle de pesanteur, et inversement. L'énergie mécanique est bien constante au cours du temps.




### C. Principe de l'accélérateur linéaire de particules

Étudions le cas du mouvement d'une particule $C$ de charge $q$ placée dans un accélérateur linéaire de particules et soumis à un champ électrique uniforme.




Le champ électrique uniforme permet à la particule d'accélérer. En effet, le travail de la force électrique $\vec{F}_{\mathrm{e}}$ entre les positions $A$ et $B$ s'écrit :

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{F}_\text{e}) &= \vec{F}_\text{e} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= F_\text{e} \times AB \times \cos(\vec{F}_\text{e}, \overrightarrow{AB}) \\ &= F_\text{e} \times AB \times \cos(0) \\ &= F_\text{e} \times AB \end{aligned}$$

Sachant que,

$$F_\text{e} = qE = q\frac{U_{AB}}{d}$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{F}_\text{e}) &= q\frac{U_{AB}}{d} \times d \\ &= qU_{AB} \end{aligned}$$

À retenir

Dans un accélérateur de particules, nous utilisons une tension électrique $U_{AB}$ tel que $W_{AB}(\vec{F}_\text{e}) > 0$. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre les points $A$ et $B$ :

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{c, AB}} &= W_{AB}(\vec{F}_\text{e}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

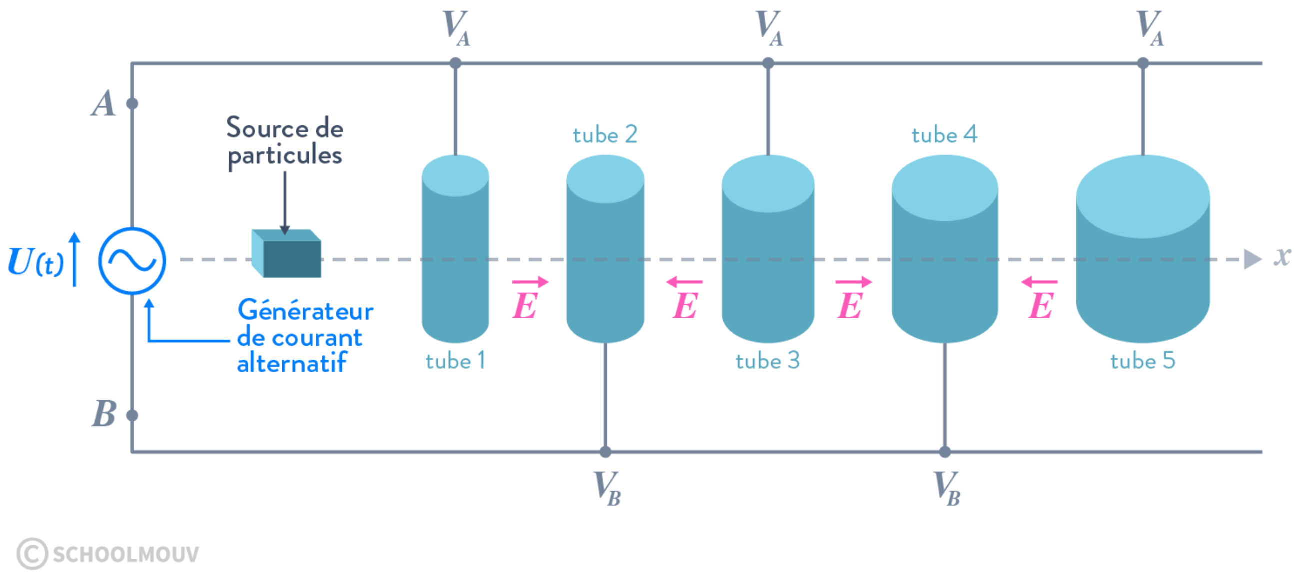
Donc l'énergie cinétique du système au point $B$ est plus grande qu'au point $A$.

→ La vitesse de la particule au point $B$ est plus grande qu'au point $A$, cela implique que la particule $C$ voit sa vitesse augmenter.

Astuce

L'expression de la **vitesse acquise d'une particule** dans le cas où la vitesse initiale est nulle est développée dans le corrigé du sujet zéro 2021, exercice B : Accélérateur linéaire « Linac2 » du CERN. N'hésitez à le consulter !

Comme l'indique le schéma ci-dessous, des tubes de longueur croissante se succèdent le long du conduit de déplacement des particules. Les tubes sont reliés alternativement l'un à l'autre aux bornes d'un générateur de tension $U(t)$. Dans les intervalles séparant les tubes, la tension électrique crée un champ électrique de sens alterné le long du chemin.
Une particule qui accélère dans ce conduit, parcourt une distance de plus en plus grande lors d'une période d'alternance du champ, d'où l'importance des longueurs croissantes des tubes. L'alimentation de l'ensemble, par un courant alternatif, permet d'échanger le sens du champ en un lieu, à intervalles réguliers. Si la fréquence du générateur est bien choisie, la particule accélérée « voit » un champ uniforme toujours orienté dans le même sens, tout au long de son trajet, et accélère ainsi continûment.




On utilise des accélérateurs de particules pour étudier les interactions fondamentales entre les particules élémentaires : protons et neutrons et leurs constituants, électrons, ainsi que les particules ne constituant pas la matière ordinaire.
Un faisceau d'électrons rapides peut aussi émettre des rayons X ou gamma en un faisceau fin, permettant d'« éclairer » une cible précise. Pour, par exemple, réaliser une image (tomographie aux rayons X) ou pour les traitements de radiothérapie.

## 4 Déterminer une vitesse initiale dans un champ de pesanteur uniforme

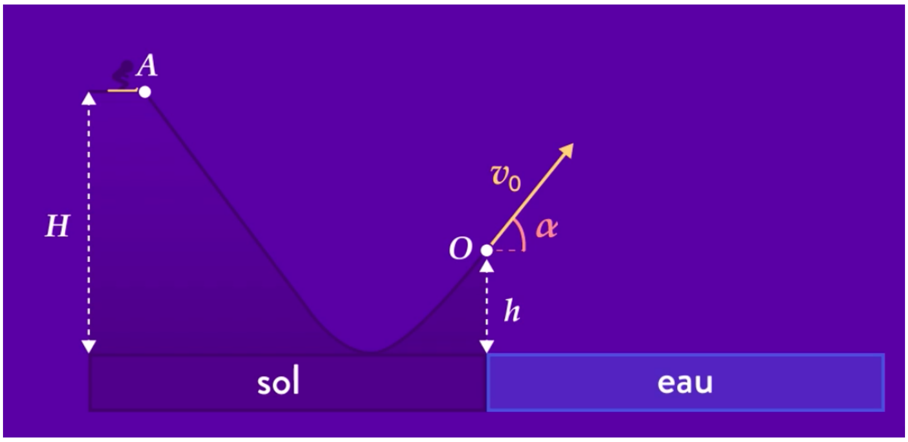
Dans la vidéo qui accompagne ce cours, qui s'intéresse au mouvement dans un champ de pesanteur uniforme, nous avons donné directement la valeur de la vitesse initiale de notre système (un skieur).

→ Nous allons ici montrer comment nous l'avons déterminée grâce à une étude énergétique, un exercice classique, que vous pouvez avoir au bac.

Voici la situation du problème de notre vidéo illustré par le schéma plus bas.

- Un skieur, de masse $m = 80 \text{ kg}$ s'élance, sans vitesse, d'une hauteur $H = 3,5 \text{ m}$ (point $A$ sur le schéma ci-dessous), le long d'un tremplin.
- Au sortir du tremplin (point $O$), il est à une hauteur $h = 0,85 \text{ m}$, son vecteur vitesse, noté $\vec{v}_0$, forme avec l'horizontale un angle $\alpha = 20\degree$.
- Nous considérons qu'il est soumis à un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$, de norme $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- Enfin, nous négligeons les frottements du tremplin, car celui-ci est mouillé pour les minimiser, ainsi que ceux de l'air.

→ Nous cherchons donc la valeur $v_0$ de la vitesse du skieur au sortir du tremplin.




Nous nous plaçons dans un référentiel terrestre, supposé galiléen, et nous nous intéressons au système {skieur}.
Nous faisons le bilan des forces :

- le poids $\overrightarrow{P}$ du skieur ;

→ c'est une force conservative ;

- la réaction du support, qui se résume à la réaction normale, puisque nous négligeons les frottements,

→ cette force ne travaille pas.

Il y a donc conservation de l'énergie mécanique tout le long du tremplin.

→ Elle est égale au point $A$ et au point $O$ :

$$\begin{aligned} E_{\text{m},A} &= E_{\text{m},O} \\ \text{D'où : } E_{\text{c},A} + E_{\text{pp},A} &= E_{\text{c},O} + E_{\text{pp},O} \end{aligned}$$

Comme le skieur s'élance avec une vitesse nulle, son énergie cinétique en $A$ est nulle. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} mgH &= \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgh \\ \Leftrightarrow gH &= \frac{1}{2}{v_0}^2 + gh \text{ [en simplifiant par } m\text{]} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}{v_0}^2 &= gH - gh \\ \Leftrightarrow {v_0}^2 &= 2g(H-h) \\ \Leftrightarrow & \boxed{v_0 = \sqrt{2g(H-h)}} \text{ [car } v_0 \text{ est une vitesse, donc positive]} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant faire l'application numérique :

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2 \times 9,81 \times (3,5 - 0,85)} \\ &= 7,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Voici d'où vient la valeur de la vitesse donnée dans la vidéo, que vous pouvez regarder, si ce n'est déjà fait, pour découvrir la suite… u