Dérivée de 2 fonctions composées

Introduction :

En première, nous avons abordé la notion de dérivée d'une fonction. Nous allons ici en faire un rappel, avant de découvrir de nouvelles formules de dérivées spécifiques. Enfin, nous appliquerons la notion de dérivée en étudiant une fonction.

1 Rappels sur les calculs de dérivées

Commençons par nous remémorer les **dérivées de quelques fonctions usuelles**, que nous avons vues en première :

À retenir

$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur :
$ax+b$ (a et $b \in \mathbb{R}$)	a	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{Z}$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Exemple

Dérivons, par exemple, la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ telle que : $f(x) = x^4 + 2x + \dfrac{3}{x}$.

→ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 4x^3 + 2 - \frac{3}{x^2}$$

Revoyons maintenant les formules de **produit** et de **quotient** de deux fonctions.

À retenir

1. Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction uv est dérivable sur I et :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

2. Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors :

→ la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

→ la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = (2x + 5)\sqrt{x}$.

La fonction g est le produit des deux fonctions : $x \mapsto 2x + 5$, dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$.

→ g est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$.

1. Posons :

→ $u(x) = 2x + 5$, nous obtenons $u'(x) = 2$;

→ $v(x) = \sqrt{x}$, nous obtenons $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Utilisons la formule de la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$.

Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \times \sqrt{x} + (2x+5) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{2x+5}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{2x+5}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{4x+2x+5}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x+5}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Enfin, terminons ces rappels en redonnant l'**équation de la tangente** en un point à la courbe d'une fonction.

À retenir

f est une fonction dérivable en $a \in I$. La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse a est la droite d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

→ $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

2 Nouvelles formules de dérivées

Ces rappels faits, nous pouvons découvrir de nouvelles formules, qui nous permettront d'étudier des fonctions plus complexes.

a. Fonctions de la forme u^n

À retenir

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction u^n est dérivable et :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

- Si n est un entier strictement négatif et que u ne s'annule pas sur I, alors u^n est aussi dérivable et on a la même formule.

Exemple

Prenons un exemple et dérivons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-3x^2+4)^3$.

1. On reconnaît la forme u^n, avec $u(x) = -3x^2+4$ et $n = 3$.
2. u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. On dérive u pour pouvoir appliquer la formule : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

→ On obtient : $u'(x) = -6x$.

C. Enfin, pour tout nombre réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times (-6x) \times (-3x^2+4)^{3-1} \\ &= -18x(-3x^2+4)^2 \end{aligned}$$

b. Fonctions de la forme $\sqrt{u}$

À retenir

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I,

→ alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exemple

Dérivons la fonction f telle que : $f(x) = \sqrt{4+x^2}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $4+x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

1. On reconnaît la forme $\sqrt{u}$, avec $u(x) = 4+x^2$.
2. On calcule la dérivée de u pour pouvoir appliquer la formule : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

   → On obtient : $u'(x) = 2x$.
3. Enfin, pour tout nombre réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \end{aligned}$$

c. Fonctions composées

À retenir

Les deux formes que nous venons de voir sont des cas particuliers de la dérivée d'une fonction composée, de forme générale :

$$x \mapsto f\big(u(x)\big)$$

Où $u\ :\ I \to J$ et $f\ :\ J \to \mathbb{R}$, avec I et J deux intervalles.

Si la fonction u est dérivable sur I et que la fonction f est dérivable sur J, alors la fonction $x \mapsto f\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction :

$$x \mapsto u'(x) \times f'\big(u(x)\big)$$

Exemple

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction e^u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, la fonction exponentielle étant sa propre dérivée :

$$(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$$

3 Application de la dérivation : exemple d'étude de fonction

Dans cette dernière partie, forts de ce que nous avons appris sur les limites dans le cours précédent et des nouvelles formules de dérivation que nous venons de découvrir, menons l'étude d'une fonction.

→ Ainsi, nous connaîtrons la méthodologie à appliquer.

Astuce

Donnons déjà les étapes d'une étude de fonction :

1. chercher l'ensemble de définition de la fonction, puis de sa dérivée, s'ils ne sont pas donnés dans l'énoncé ;
2. calculer la dérivée ;
3. étudier le signe de cette dérivée et faire le lien avec les variations de la fonction (faire un tableau) ;
4. calculer les éventuels extremums ou les limites afin de compléter le tableau de variations.

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^3$.

1. Cherchons l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.

Attention

> Il s'agit d'une fonction rationnelle, c'est-à-dire du quotient de deux polynômes, donc le dénominateur ne doit pas s'annuler.

La valeur interdite est $x = -3$, car le dénominateur s'annule uniquement pour $x = -3$.

→ L'ensemble de définition de la fonction est donc :

$$D_f =]-\infty\ ;\ -3[\cup]-3\ ;\ +\infty[$$

Étudions le domaine de dérivabilité de f :

- la fonction f est de la forme u^n, avec $u(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ et $n = 3$;
- la fonction u est de la forme $\dfrac{v}{w}$ avec $v(x) = 2x - 1$ et $w(x) = x + 3$, où w ne s'annule pas sur D_f.

→ f est dérivable sur D_f.

2 Calculons la dérivée de f.

→ Calculons d'abord la dérivée de u.

Pour cela, calculons les dérivées de v et w : $v'(x) = 2$ et $w'(x) = 1$. Ces deux dérivées peuvent être directement écrites dans le calcul de $u'(x)$ qui suit.

Pour tout $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \left(\frac{v'w - vw'}{w^2}\right)(x) \\ &= \frac{2(x+3) - (2x-1) \times 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{2x + 6 - 2x + 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{7}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

→ Calculons à présent la dérivée de f.

Pour tout $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= n \times u'(x) \times \big(u(x)\big)^{n-1} \\ &= 3 \times \frac{7}{(x+3)^2} \times \left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^2 \\ &= \boxed{\frac{21(2x-1)^2}{(x+3)^4}} \end{aligned}$$

3 Étudions le signe de f' et les variations de f.

Il convient ici de faire un tableau de signes de la dérivée pour en déduire le tableau de variations de la fonction.

- $21(2x-1)^2$ s'annule pour $x = \frac{1}{2}$, et reste strictement positif sinon.
- $(x+3)^4 > 0$ pour tout x de l'ensemble de définition.

→ La dérivée est donc supérieure ou égale à 0 sur les deux intervalles de son ensemble de définition.

Nous pouvons maintenant construire le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$21(2x-1)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	
$(x+3)^4$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$+$	

Attention

Ne pas oublier la « double barre » correspondant à la valeur interdite.

Rappel

- Lorsque la dérivée de f est positive sur un intervalle, la fonction f est croissante sur cet intervalle.
- Lorsque la dérivée de f est négative sur un intervalle, la fonction f est décroissante sur cet intervalle.

Ajoutons dans le tableau les variations de f à partir du signe de f' :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$21(2x-1)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	
$(x+3)^4$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$+$	
variations de f		↗	||		↗		

4. Calculons les limites aux bornes de l'ensemble de définition :

- En $-\infty$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^3 \\
&\text{[il nous faut enlever la forme indéterminée]} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{3}{x})}\right)^3 \\
&\text{[en factorisant par } x\text{, que l'on suppose non nul} \\
&\text{car on s'intéresse à la limite en } -\infty] \\
&= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)^3 \\
&\text{[en simplifiant par } x] \\
&= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{1}\right)^3 \\
&\text{[car } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = 0] \\
&= \boxed{8}
\end{aligned}
$$

- En $+\infty$:

De la même façon, on trouve :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{8}$$

- Limite à gauche en -3 :
  - $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} (2x-1) = -7$
  - $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} (x+3) = 0$ avec des valeurs négatives. On note cette limite 0^-.

→ Nous obtenons donc :

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} \frac{2x-1}{x+3} &= +\infty \\
\lim_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) &= \boxed{+\infty}
\end{aligned}
$$

- Limite à droite en -3 :

- $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} (2x - 1) = -7$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} (x + 3) = 0$ avec des valeurs positives. On note cette limite 0^+.

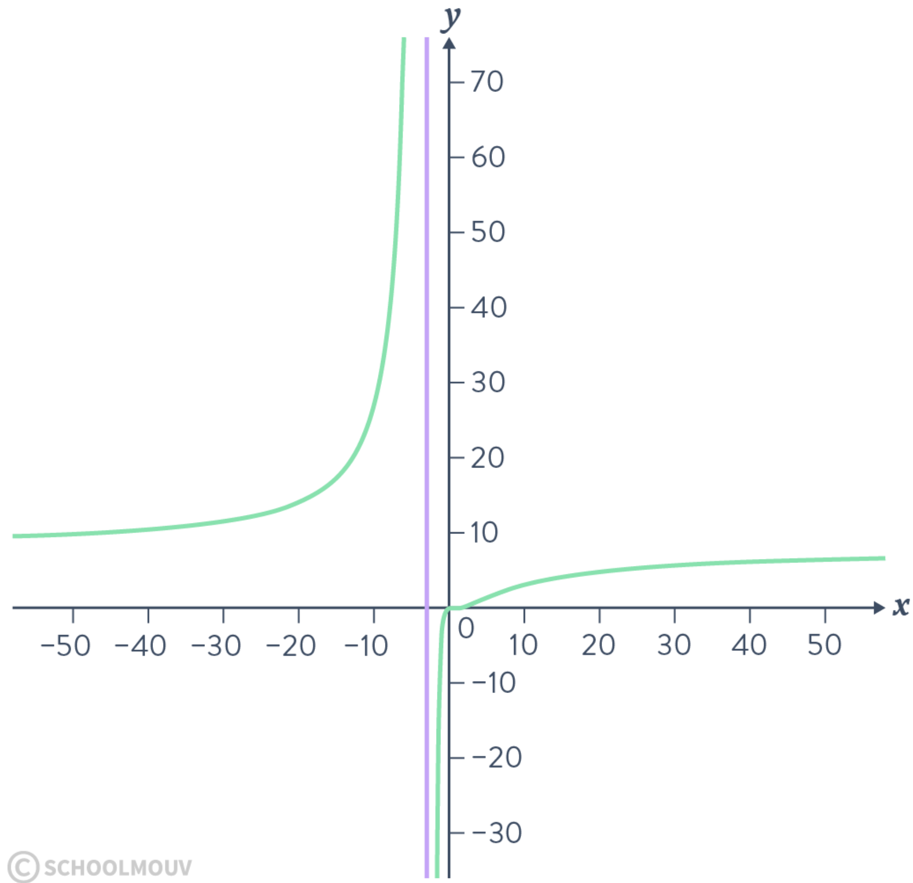
→ Nous obtenons donc :

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \frac{2x - 1}{x + 3} = -\infty$$
$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = \boxed{-\infty}$$

Nous pouvons maintenant compléter le tableau :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$21(2x-1)^2$		+	|	+	0	+	
$(x+3)^4$		+	0	+	|	+	
$f'(x)$		+	‖	+	0	+	
variations de f	8	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗			8

Enfin, nous pouvons tracer la courbe représentative de f :



Conclusion :

Dans ce cours, nous avons revu les formules de dérivation de première et en avons découvert de nouvelles. Puis nous avons mis en pratique certaines de ces formules et avons calculé des limites, afin de mener l'étude d'une fonction.