La fonction logarithme

Cours

Sommaire

I Les définitions et les premières propriétés

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle possède des propriétés algébriques très utiles notamment lors de la résolution d'équations ou d'inéquations comportant des puissances.

DÉFINITION

Fonction logarithme népérien

Pour tout réel $x>0$, on appelle **logarithme népérien** de x l'antécédent de x par la fonction exponentielle.

La fonction ainsi définie est la réciproque de la fonction exponentielle.

PROPRIÉTÉ

Soit un réel $x>0$.

On note $\ln(x)$ le logarithme népérien de x .

PROPRIÉTÉ

Soit un réel $x>0$.

Alors $\mathrm{e}^{\ln(x)}=x$.

EXEMPLE

$\mathrm{e}^{\ln(2)}=2$

PROPRIÉTÉ

Soit un réel x .

On a :
$\ln\left(\mathrm{e}^{x}\right)=x$

EXEMPLE

$\ln\left(\mathrm{e}^{10}\right)=10$

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a :

$$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$$

EXEMPLE

Soit un réel $x>0$.

Alors $\ln(x)+\ln(x-1)=\ln(x(x-1))$.

$\ln(x)+\ln(x-1)=\ln\left(x^{2}-x\right)$

PROPRIÉTÉ

Soit un réel $b>0$.

Alors $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)$.

EXEMPLE

Soit un réel x .

Alors $\ln\left(\frac{1}{x^{2}+1}\right)=-\ln\left(x^{2}+1\right)$.

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels strictement positifs.

Alors $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.

EXEMPLE

Soit un réel $x>0$.

Alors $\ln\left(\frac{x}{x^{2}+1}\right)=\ln(x)-\ln\left(x^{2}+1\right)$.

PROPRIÉTÉ

Soit un réel $a>0$ et un entier relatif n .

Alors $\ln\left(a^n\right)=n\ln\left(a\right)$.

EXEMPLE

$\ln\left(1\,000\,000\right)=\ln\left(10^6\right)=6\ln\left(10\right)$

PROPRIÉTÉ

Soit un réel $a>0$.

$\ln\left(\sqrt a\right)=\frac{1}{2}\ln\left(a\right)$

EXEMPLE

$\ln\left(\sqrt2\right)=\frac{1}{2}\ln\left(2\right)$

REMARQUE

Soit un réel $a>0$.

Si l'on utilise le fait que $\sqrt a=a^{\frac{1}{2}}$, la formule précédente peut encore s'écrire : $\ln\left(a^n\right)=n\ln\left(a\right)$ avec $n=\frac{1}{2}$

II La représentation graphique de la fonction ln

La fonction logarithme népérien possède des variations et une courbe liées à celles de sa réciproque, la fonction exponentielle.

A La dérivée et les variations

Le sens de variation de la fonction logarithme népérien est suffisamment simple pour être très utile lors de la résolution d'équations ou d'inéquations utilisant ln.

PROPRIÉTÉ

La fonction ln est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et, pour tout réel x , on a :

$\ln'\left(x\right)=\frac{1}{x}$

DÉMONSTRATION

On admet la dérivabilité de la fonction ln sur $\left]0;+\infty\right[$.

On va démontrer que pour tout réel $x>0$, on a :
$\ln'\left(x\right)=\frac{1}{x}$

On sait que pour tout réel $x > 0$:
$\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$

On note $f(x) = \mathrm{e}^{\ln(x)}$.

- La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ (admis) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par composition, la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

De plus pour tout réel $x > 0$, on a :
$f'(x) = \ln'(x) \times \exp'(\ln(x))$
$f'(x) = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln(x)}$
$f'(x) = \ln'(x) \times x$

Or pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x$.

Donc $f'(x) = 1$.

Ainsi on en déduit, pour tout réel $x > 0$:
$\ln'(x) \times x = 1$

Soit :
$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

PROPRIÉTÉ

La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

PROPRIÉTÉ

La fonction ln possède les limites suivantes aux bornes de son ensemble de définition :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

x	0	1	e	$+\infty$
Variations de ln	‖ $-\infty$	0	1	$+\infty$

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

Alors la fonction $f=\ln \circ u$, notée également $f=\ln(u)$, est dérivable sur I et, pour tout réel x de I , on a :

$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

EXEMPLE

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$$

$f=\ln \circ u$ avec $u(x)=x^2+1$ pour tout réel x .

- Comme fonction polynôme, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée la fonction u' définie sur $\mathbb{R}$ par $u'(x)=2x$.
- De plus u est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

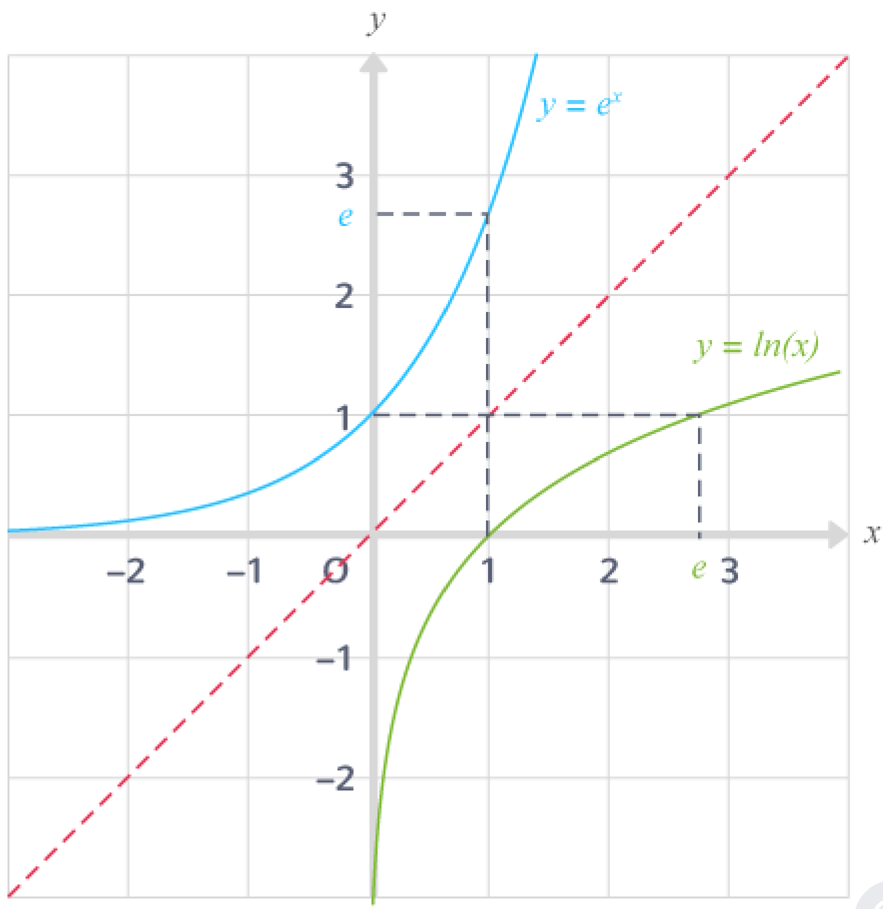
$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

B La courbe représentative

Étant la réciproque de la fonction exponentielle, la fonction ln admet une courbe qui lui est symétrique par rapport à la droite d'équation $y=x$ (parfois appelée la première bissectrice).

PROPRIÉTÉ

Les courbes des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



III Les limites et croissances comparées

Les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction ln ainsi que les croissances comparées avec les fonctions puissances se déduisent de celles de la fonction exponentielle.

PROPRIÉTÉ

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

Alors :

$$\lim_{x \to 0 x > 0} x^n \ln(x) = 0$$

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$.

On a :
$f(x) = x^n \ln(x)$ avec $n = 2$

Donc $\lim\limits_{x \to 0 x > 0} f(x) = 0$.

PROPRIÉTÉ

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

On a :

$f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$ avec $n = 2$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

PROPRIÉTÉ

Dans le cas où $n = 1$, on obtient :

- $\lim\limits_{x \to 0 x > 0} x \ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

DÉMONSTRATION

On démontre $\lim\limits_{x \to 0 x > 0} x \ln(x) = 0$.

En posant $X = \ln(x)$, on a :

$x = \mathrm{e}^X$ et $\lim\limits_{x \to 0 x > 0} x = \lim\limits_{x \to -\infty} X$.

On en déduit :

$\lim\limits_{x \to 0 x > 0} x \ln(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} \left(\mathrm{e}^X \times X\right)$

Or, on sait que :

$\lim\limits_{X \to -\infty} X\mathrm{e}^X = 0$

Ainsi, on obtient :

$\lim\limits_{x \to 0 x > 0} x \ln(x) = 0$