Le mouvement d’un corps céleste dans un champ de gra...

Cours

Sommaire

RÉSUMÉ

Les lois de Kepler décrivent le mouvement d'une planète ou d'un satellite autour d'un astre attracteur. L'équation du mouvement, obtenue en appliquant la deuxième loi de Newton dans le repère mobile lié à à un corps céleste permet de retrouver les trois lois de Kepler. Grâce à leur altitude, les satellites géostationnaires ont pour particularité d'avoir la même période de révolution que la Terre. Les satellites géostationnaires sont fixes par rapport au sol. Cette propriété est très utile pour certaines applications.

I Les lois de Kepler

Les trois lois de Kepler, obtenues par observation, décrivent le mouvement d'un corps céleste autour d'un astre attracteur.

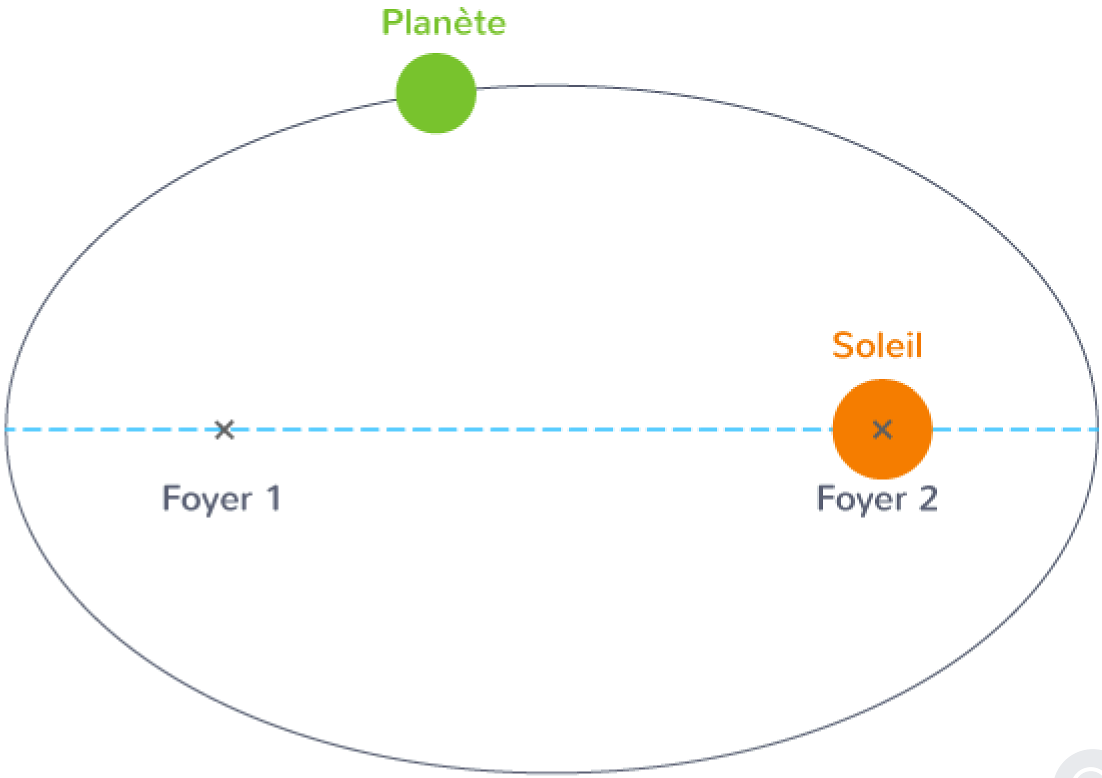
A La première loi de Kepler

La première loi de Kepler décrit la trajectoire d'un corps céleste autour de son astre attracteur.

LOI

Première loi de Kepler

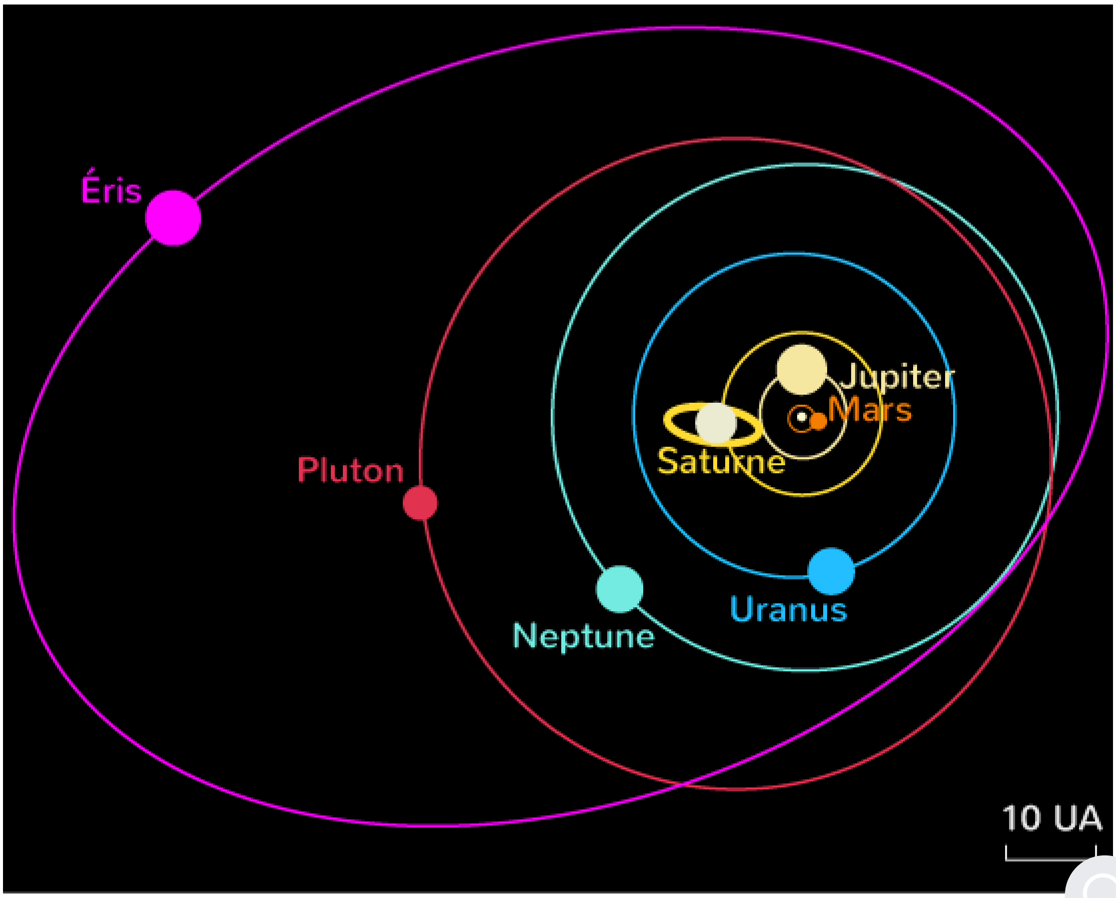
Dans le référentiel héliocentrique, les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers.



Première loi de Kepler

EXEMPLE

La plupart des planètes du système solaire ont des orbites elliptiques à l'excentricité très peu marquée, c'est-à-dire qu'elles sont quasiment circulaires. Ce n'est pas le cas des orbites de Pluton (qui n'est plus considérée comme une planète) et d'Éris (un des corps rocheux orbitant à la frontière du système solaire), qui sont bien plus excentriques.



Orbites d'astres dans le système solaire

B La deuxième loi de Kepler

La deuxième loi de Kepler indique comment la vitesse d'un corps céleste évolue avec la distance qui le sépare de son astre attracteur.

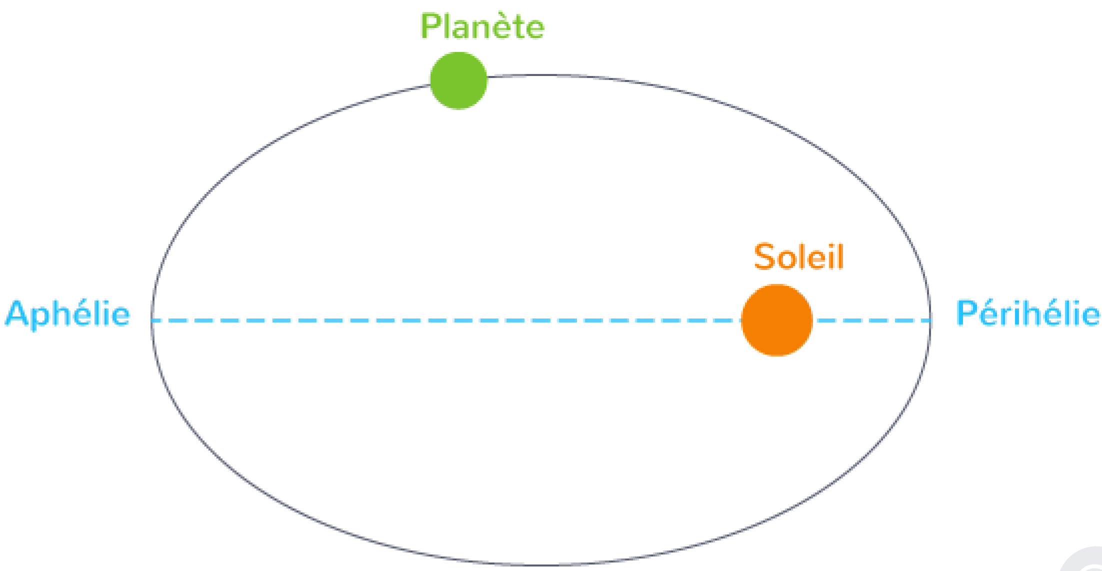
DÉFINITION

Aphélie et périhélie

Le long de l'orbite d'une planète, on repère les points pour lesquels la distance qui la sépare du Soleil est extrémale :

- **L'aphélie** est le point pour lequel la planète est la plus éloignée du Soleil.
- **Le périhélie** est le point pour lequel la planète est la plus proche du Soleil.

EXEMPLE



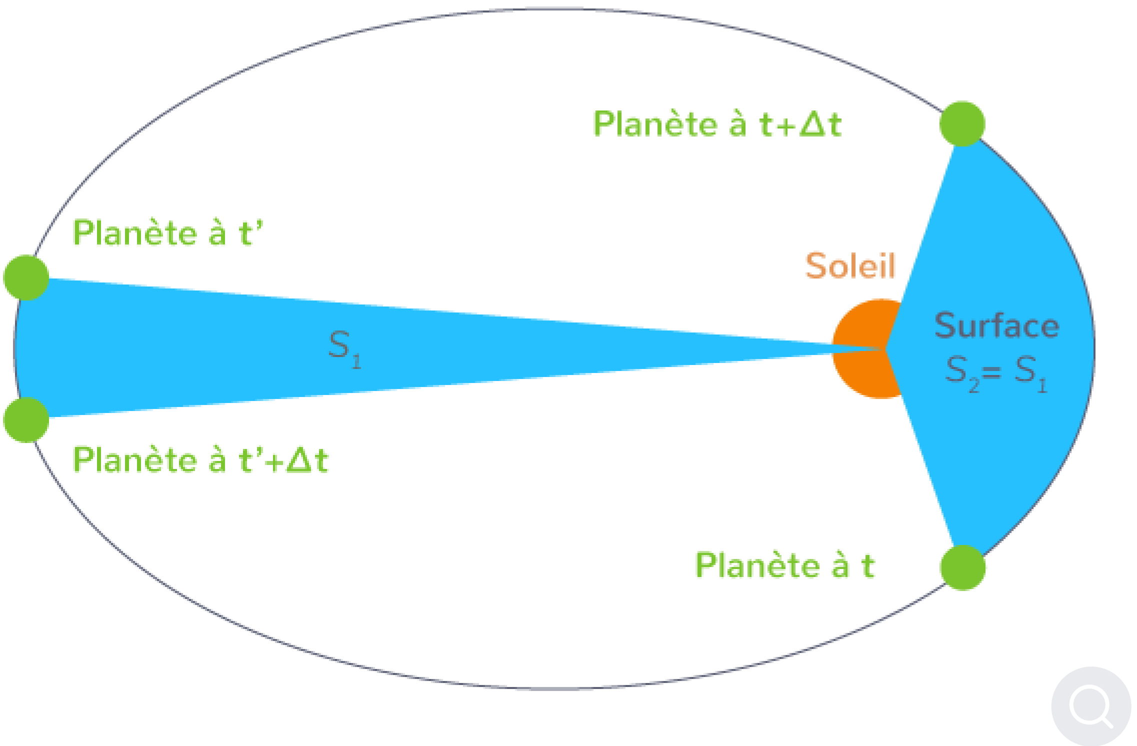
Aphélie et périhélie

LOI

Deuxième loi de Kepler

Le segment reliant une planète au Soleil balaie des aires égales en des durées égales.

EXEMPLE



Deuxième loi de Kepler

Entre t et $t + \Delta t$, il se passe la même durée qu'entre t' et $t' + \Delta t$. La loi de Kepler indique que les aires des surfaces S_1 et S_2 balayées pendant ces deux durées sont égales.

PROPRIÉTÉ

Le rayon liant une planète, d'orbite elliptique, au Soleil est plus important à proximité de son aphélie que de son périhélie. Ainsi, comme l'aire balayée en des durées égales est la même qu'en d'autres points de son orbite, alors la planète se déplace moins vite lorsqu'elle est au niveau de son aphélie. En conséquence, la vitesse de la planète est :

- maximale au niveau de son périhélie ;
- minimale au niveau de son aphélie.

EXEMPLE

- Lors de son périhélie, la Terre est à 147 millions de kilomètres du Soleil, sa vitesse est alors d'environ 30 km.s^{-1} .
- Lors de son aphélie, la Terre est plus éloignée du Soleil, à 152 millions de kilomètres, et sa vitesse est plus faible : environ 29 km.s^{-1} .

C La troisième loi de Kepler

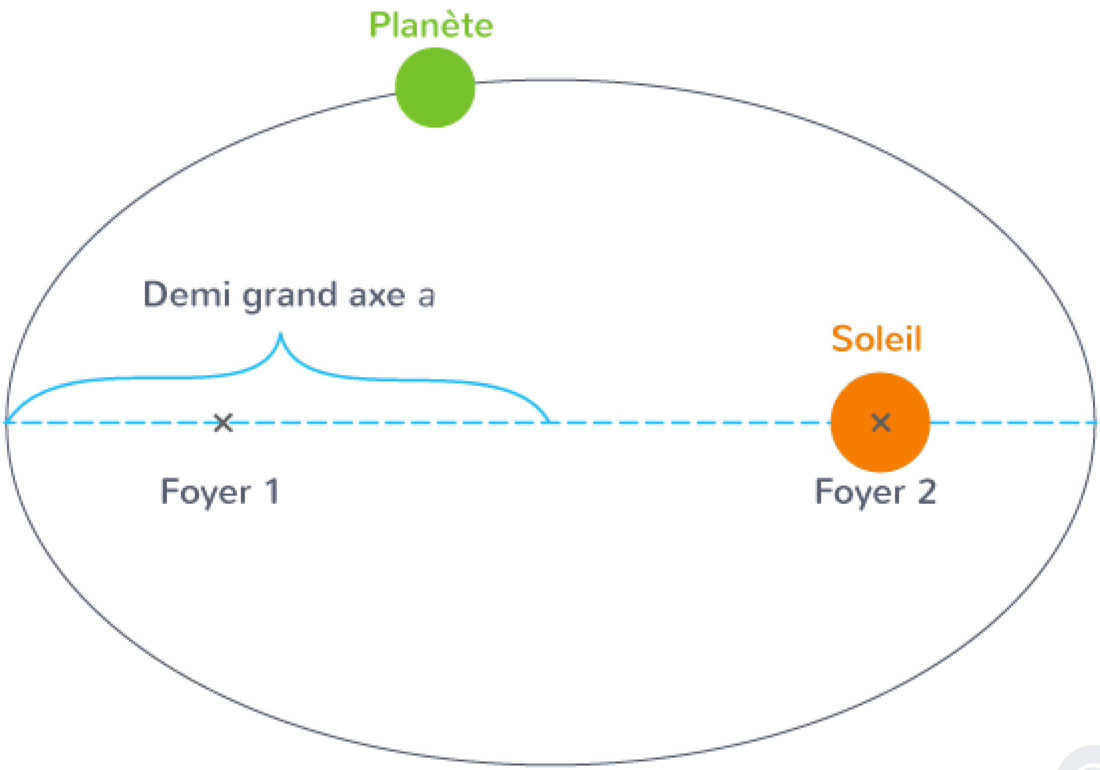
La troisième loi de Kepler lie la période de révolution d'un corps céleste à la distance qui le sépare de son astre attracteur.

DÉFINITION

Demi grand axe d'une orbite elliptique

Le demi grand axe d'une orbite elliptique correspond à la moitié de son plus grand axe.

EXEMPLE



Demi grand axe d'une orbite elliptique

DÉFINITION

Période de révolution

La période de révolution, souvent notée T, est la durée nécessaire pour qu'une planète boucle son orbite autour du Soleil.

EXEMPLE

La période de révolution de la Terre autour du Soleil est de 365,25 jours.

LOI

Troisième loi de Kepler

Le carré de la période de révolution T d'une planète est proportionnel au cube du demi grand axe a de son orbite elliptique :

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

Avec :

- T : période de révolution (en s) ;
- a : demi grand axe de l'ellipse ou rayon si l'orbite est quasiment circulaire (en m) ;
- k : constante identique pour toutes les planètes (en $\text{s}^2.\text{m}^{-3}$).

EXEMPLE

La Terre et Jupiter décrivent des orbites quasi circulaires autour du Soleil et respectent la troisième loi de Kepler :

Planètes	Périodes de révolution T	Rayons de l'orbite r	Rapports $\frac{T^2}{a^3}$
Terre	$365{,}25 \text{ jours} = 3{,}16 \times 10^7 \text{ s}$	$1{,}50 \times 10^{11} \text{ m}$	$2{,}95 \times 10^{-19} \text{ s}^2.\text{m}^{-3}$
Jupiter	$4\ 335{,}35 \text{ jours} = 3{,}75 \times 10^8 \text{ s}$	$7{,}81 \times 10^{11} \text{ m}$	$2{,}95 \times 10^{-19} \text{ s}^2.\text{m}^{-3}$

II L'équation du mouvement d'un corps céleste

Pour déterminer l'équation du mouvement d'un corps céleste, on applique la deuxième loi de Newton dans le repère mobile. Cela permet d'obtenir la vitesse d'un corps céleste. Cette vitesse permet d'obtenir la période de révolution du corps céleste.

A La deuxième loi de Newton appliquée à un corps céleste

Dans le cas d'un corps céleste soumis à l'attraction gravitationnelle d'un astre, la deuxième loi de Newton s'écrit dans le repère mobile de l'astre.

On étudie le mouvement d'un corps céleste, repéré par son centre de masse, le point M, de masse m, qui est attiré par un astre A, de masse M. Le corps céleste étant en rotation, on utilise un repère mobile (ou repère de Frenet) $\left(O, \overrightarrow{u_N}, \overrightarrow{u_T}\right)$, qui simplifie les composantes du vecteur accélération.

DÉFINITION

Repère mobile (ou repère de Frenet)

Le repère mobile (ou repère de Frenet) $\left(M, \overrightarrow{u_N}, \overrightarrow{u_T}\right)$ est un repère utilisé dans les cas où le point mobile est en mouvement autour d'un point fixe.
Ce repère est défini à partir de :

- son origine, située au niveau du point mobile M ;
- un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_N}$ qui est perpendiculaire à la trajectoire du point mobile M et qui pointe vers le centre de la trajectoire circulaire ;
- un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_T}$ qui est tangent à la trajectoire du point mobile M.

EXEMPLE

Repère mobile (ou repère de Frenet)

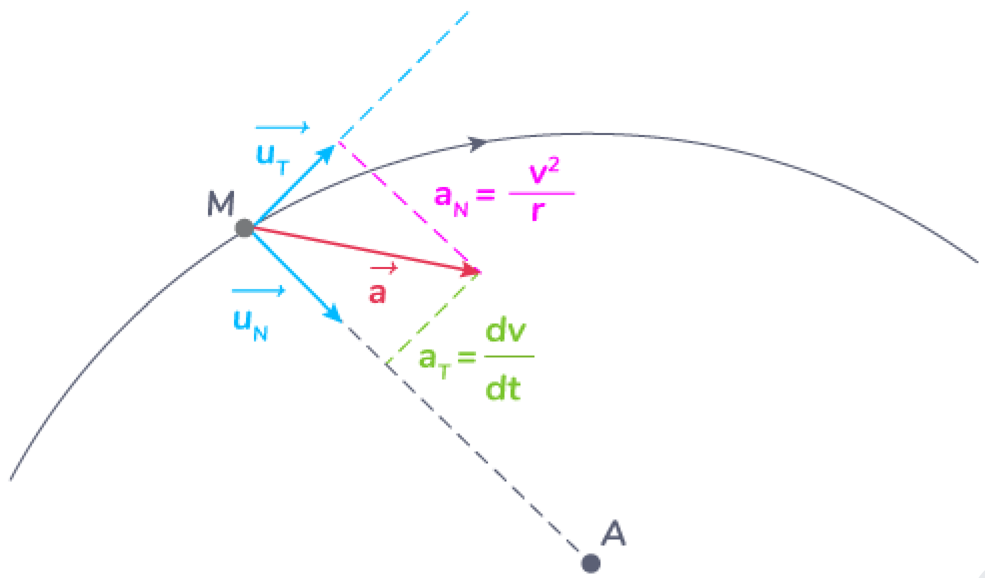
PROPRIÉTÉ

Dans un repère mobile $\left(M, \overrightarrow{u_N}, \overrightarrow{u_T}\right)$ les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ du point mobile M sont liées à sa vitesse $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{a}\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} \\ \\ a_N = \dfrac{v^2}{r} \end{cases}$$

La constante r est la distance qui sépare le point mobile et le point autour duquel il est en mouvement.

EXEMPLE



Composantes du vecteur accélération dans le repère mobile

La seule force que subit le corps céleste M est l'attraction gravitationnelle qu'exerce sur lui l'astre A.

LOI

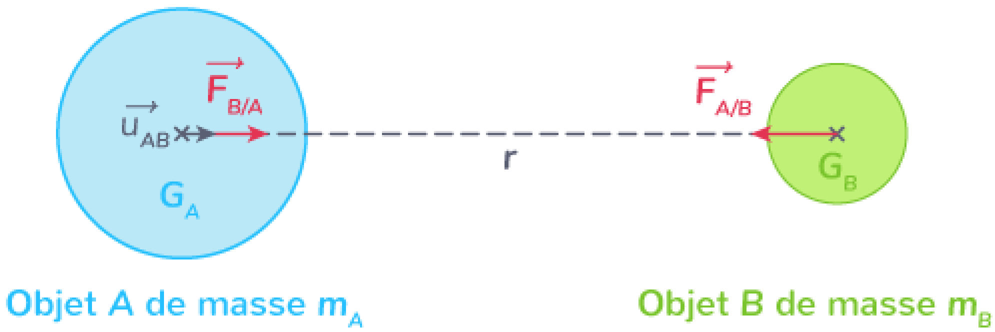
Loi universelle de la gravitation

Deux corps A et B de masses respectives m_A et m_B, séparés par la distance r, s'attirent mutuellement du fait de l'interaction gravitationnelle. Cette interaction est modélisée par des forces attractives $\overrightarrow{F_{A/B}}$ et $\overrightarrow{F_{B/A}}$ telles que :

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}} = -G \times \frac{m_A \times m_B}{r^2}\overrightarrow{u_{AB}}$$

Avec :

- G, la constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67.10^{-11}\ \text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$;
- m_A et m_B, les masses des corps A et B (exprimées en kilogramme kg) ;
- r, la distance entre les deux corps (exprimée en mètre m) ;
- $\overrightarrow{u_{AB}}$, le vecteur unitaire orienté de A vers B.



Représentation des forces gravitationnelles

EXEMPLE

La Terre exerce une force d'attraction sur la Lune identique mais de sens opposé à celle qu'exerce la Lune sur la Terre. Pour la calculer, il faut connaître :

- la masse de la Terre : $M_{\text{T}} = 5{,}97.10^{24}\ \text{kg}$;
- la masse de la Lune : $M_{\text{L}} = 7{,}33.10^{22}\ \text{kg}$;
- la distance Terre-Lune : $R_{\text{TL}} = 3{,}84.10^{8}\ \text{m}$.

La force d'attraction entre la Terre et la Lune vaut donc :

$$F_{\text{Terre/Lune}} = G \times \frac{M_{\text{T}} \times M_{\text{L}}}{R_{\text{TL}}^2}$$

$$F_{\text{Terre/Lune}} = 6{,}67.10^{-11} \times \frac{5{,}97.10^{24} \times 7{,}33.10^{22}}{\left(3{,}84.10^{8}\right)^2}$$

$$F_{\text{Terre/Lune}} = 1{,}98.10^{20} \text{ N}$$

REMARQUE

Avant d'appliquer la deuxième loi de Newton, il faut :

- définir le système : le corps céleste de masse m, caractérisé par son centre d'inertie M, en orbite circulaire autour de l'astre A avec un rayon r ;
- définir le référentiel d'étude : le référentiel considéré galiléen rattaché à l'astre A ;
- faire le bilan des forces : la force d'attraction gravitationnelle exercée par l'astre A sur le corps céleste M d'expression $\overrightarrow{F_{A/M}} = G \times \dfrac{M \times m}{r^2}\overrightarrow{u_N}$.

FORMULE

Composantes du vecteur accélération

En appliquant la deuxième loi de Newton au corps céleste, caractérisé par son centre d'inertie M, dans le référentiel galiléen lié à l'astre A, on obtient :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a}$$

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F_{A/M}} = G \times \frac{M \times m}{r^2}\overrightarrow{u_N}$$

$$\overrightarrow{a} = G \times \frac{M}{r^2}\overrightarrow{u_N} \text{, soit : } \overrightarrow{a} \begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ \\ a_N = \dfrac{v^2}{r} = G \times \dfrac{M}{r^2} \end{cases}$$

EXEMPLE

L'expression vectorielle de la force d'attraction entre la Terre et la Lune est :

$$\overrightarrow{F_{\text{Terre/Lune}}} = G \times \frac{M_{\text{T}} \times M_{\text{L}}}{R_{\text{TL}}^2}\,\overrightarrow{u_N}$$

La deuxième loi de Newton appliquée à la Lune dans le référentiel géocentrique donne :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F_{\text{Terre/Lune}}}$$

Soit :

$$M_L \times \left(\overrightarrow{a_N} + \overrightarrow{a_T}\right) = G \times \frac{M_{\text{T}} \times M_{\text{L}}}{R_{\text{TL}}^2}\,\overrightarrow{u_N}$$

D'où :

$$a_T.\overrightarrow{u_T} + a_N.\overrightarrow{u_N} = G \times \frac{M_{\text{T}}}{R_{\text{TL}}^2}\,\overrightarrow{u_N}$$

Les composantes du vecteur accélération de la Lune sont donc :

- $a_T = 0$

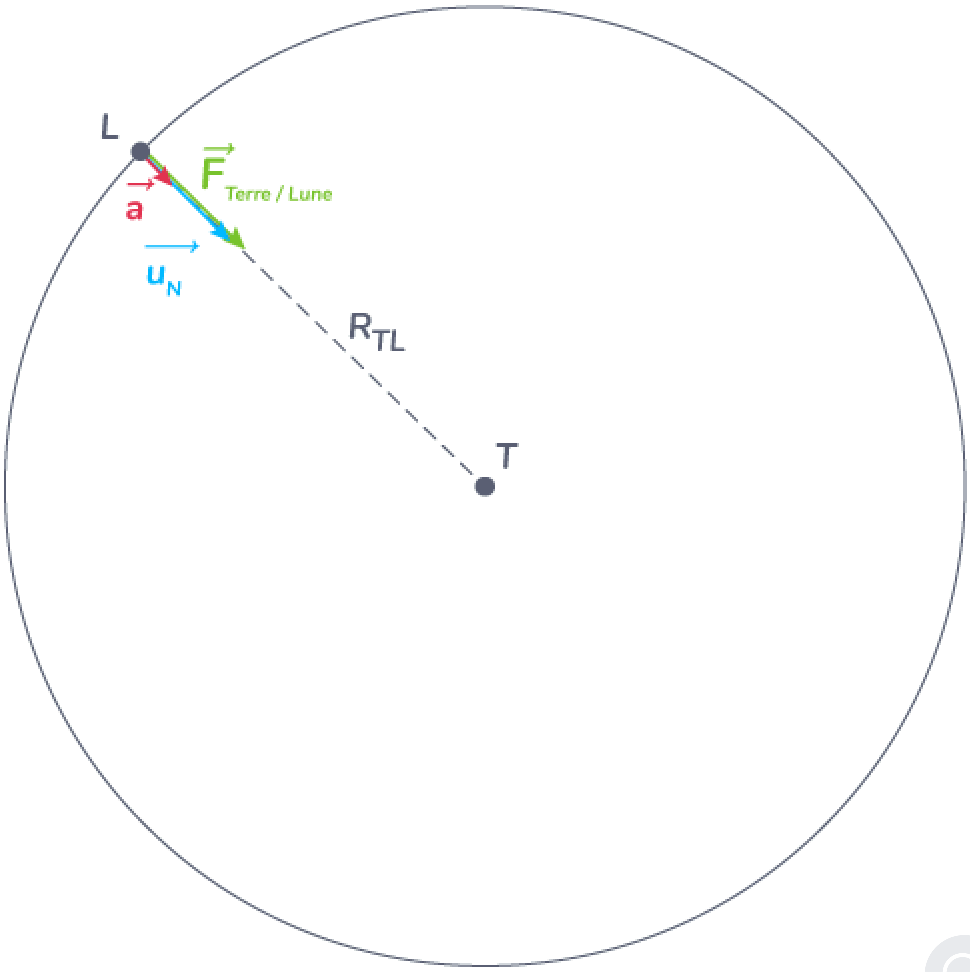
- $a_N = G \times \dfrac{M_{\text{T}}}{R_{\text{TL}}^2}$

Et puisque les composantes du vecteur accélération dans le repère mobile sont :

- $a_T = \dfrac{dv}{dt}$
- $a_N = \dfrac{v^2}{R_{\text{TL}}}$

On a :

- $a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0$
- $a_N = \dfrac{v^2}{R_{\text{TL}}} = G \times \dfrac{M_{\text{T}}}{R_{\text{TL}}^2}$



Système Terre - Lune

B La vitesse d'un corps céleste

Les coordonnées du vecteur accélération exprimées dans le repère mobile permettent d'exprimer la vitesse d'un corps céleste.

PROPRIÉTÉ

L'équation du mouvement du corps céleste M en rotation autour de l'astre A permet d'affirmer que :

- Le mouvement du corps céleste est forcément uniforme.
- La valeur de la vitesse du corps céleste M est : $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_T}{R_{TL}}}$.

EXEMPLE

La valeur de la vitesse de la Lune dans le référentiel géocentrique ne dépend que de la masse de la Terre M_T et du rayon de son orbite R_{TL} .

Elle est donc égale à :

$$v = \sqrt{\frac{G \times M_T}{R_{TL}}}$$
$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{3{,}84 \times 10^{8}}}$$
$$v = 1{,}02 \times 10^{3} \text{ m.s}^{-1}$$

DÉMONSTRATION

Les composantes du vecteur accélération du corps céleste sont :

$$\overrightarrow{a} \begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ \\ a_N = \dfrac{v^2}{r} = G\dfrac{M}{r^2} \end{cases}$$

Puisque $a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0$, la vitesse v du corps céleste est constante.

Et puisque $a_N = \dfrac{v^2}{r} = G\dfrac{M}{r^2}$, la valeur de la vitesse est : $v = \sqrt{\dfrac{G.M}{r}}$.

C La période de révolution d'un corps céleste

La période de révolution d'un corps céleste peut être exprimée à partir de la masse de l'astre qui l'attire et le rayon de son orbite.

PROPRIÉTÉ

La période de révolution T du corps céleste M correspond à la durée nécessaire pour que le corps fasse un tour entier autour de l'astre A . Sa valeur est :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G\ M}$$

Ainsi, la valeur de la période de révolution d'un corps céleste ne dépend pas de sa masse et le rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ est identique pour tous les corps en orbite autour d'un même astre, ce qui permet de vérifier la troisième loi de Kepler.

EXEMPLE

On veut calculer la période de révolution T_{T} de la Terre autour du Soleil, sachant que la distance Terre-Soleil R_{TS} vaut $1{,}50.1\,0^{11}\text{ m}$ et que la masse du Soleil M_{S} vaut $2{,}00.1\,0^{30}\text{ kg}$.

On a donc :

$$T_{\text{T}} = 2\pi \times \sqrt{\frac{R_{\text{ST}}^3}{G \times M_{\text{S}}}}$$
$$T_{\text{T}} = 2\pi \times \sqrt{\frac{\left(1{,}50.10^{11}\right)^3}{6{,}67.10^{-11} \times 2{,}00.10^{30}}}$$
$$T_{\text{T}} = 3{,}16.10^7\text{s}$$
$$T_{\text{T}} = 366\text{ jours}$$

DÉMONSTRATION

On cherche à montrer que $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r^3}{G.M}$.

Les composantes du vecteur accélération du corps céleste sont :

$$\vec{a}\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ \\ a_N = \dfrac{v^2}{r} = G \times \dfrac{M}{r^2} \end{cases}$$

On peut donc isoler la vitesse du corps céleste :

$$\frac{v^2}{r} = G \times \frac{M}{r^2} \Leftrightarrow v = \sqrt{\tfrac{G \times M}{r}}$$

La période de révolution T d'un corps céleste correspond à la durée qu'il met pour effectuer un tour complet autour de son astre éloigné d'une distance r (égale au rayon de l'orbite). Pendant la durée T, le corps céleste parcourt donc une distance égale à la circonférence de son orbite circulaire, soit $2\pi r$.

La vitesse du corps céleste peut donc aussi s'écrire comme le quotient de la distance parcourue pendant une période sur la durée d'une période, c'est-à-dire :

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

On a donc :

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\tfrac{G \times M}{r}}$$

Pour isoler la période de révolution T, on élève les deux termes au carré :

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \tfrac{G \times M}{r}$$

Ce qui donne :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G \times M}$$

Le rapport du carré de la période par le cube du rayon est donc bien constant et est égal au rapport de $4\pi^2$ par le produit de la constante de la gravitation universelle G et de la masse de l'astre M :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M}$$

III Les satellites géostationnaires

Les satellites géostationnaires ont pour particularité d'avoir la même période de révolution que la Terre et sont fixes par rapport au sol. Cette propriété est très utile pour certaines applications.

A La période et l'altitude d'un satellite géostationnaire

Pour être géostationnaire, un satellite doit être placé à une altitude d'environ 36 000 km.

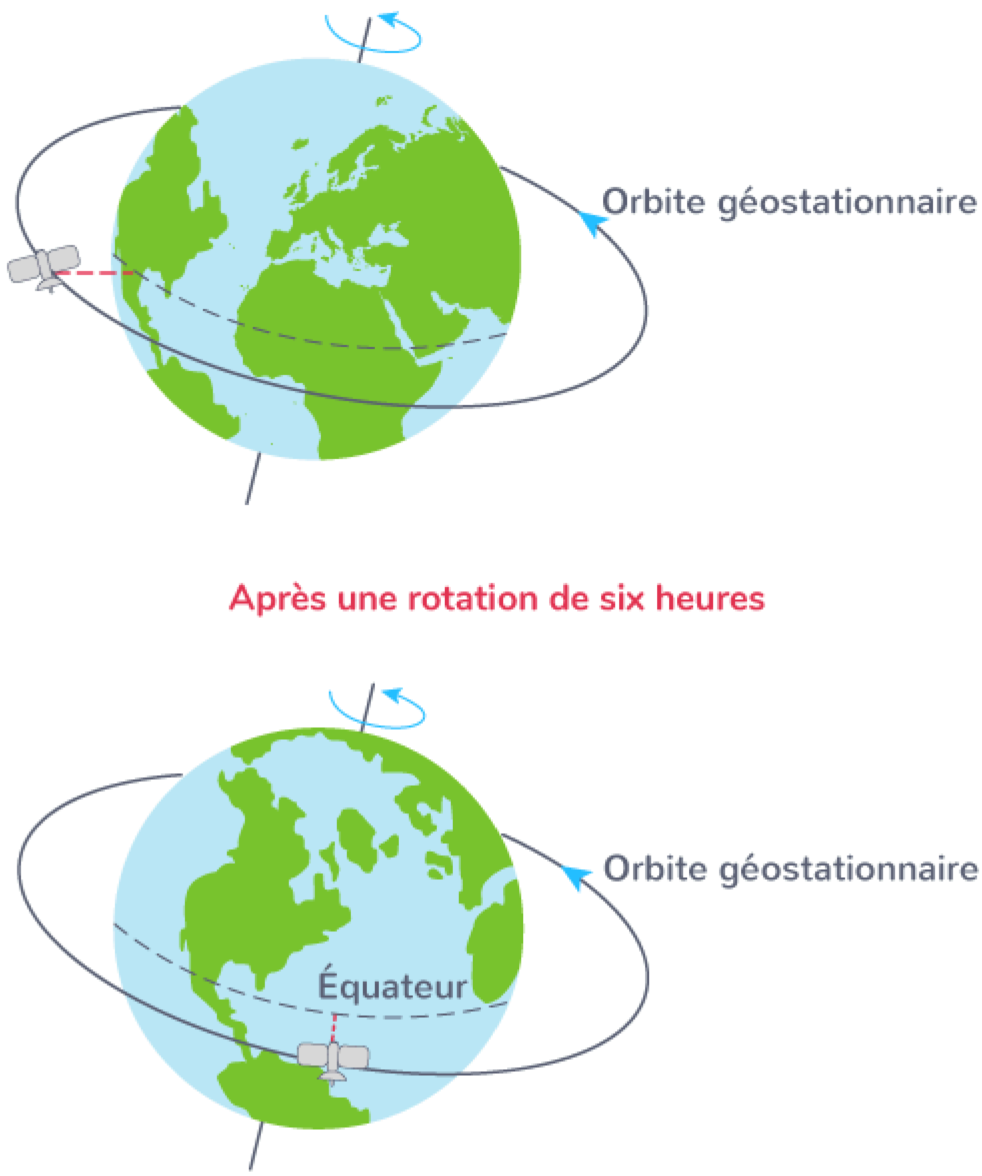
DÉFINITION

Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui se déplace de manière exactement synchrone avec la planète. Le satellite reste constamment au-dessus d'un même point de la surface de la planète.

EXEMPLE

Le satellite géostationnaire reste toujours au-dessus du même point de la Terre. Sa trajectoire a une période de 24 heures.



Satellite géostationnaire

PROPRIÉTÉ

Pour qu'un satellite soit géostationnaire, il doit respecter deux conditions :

- son orbite doit être équatoriale, c'est à dire parallèle à l'équateur terrestre ;
- sa période de révolution doit être égale à la période de révolution de la Terre sur elle-même, soit 24 heures. C'est possible si son altitude est d'environ 36 000 km.

EXEMPLE

D'après l'application de la deuxième loi de Newton, la période de révolution d'un satellite en orbite autour de la Terre est donnée par la relation :

$$\mathbf{T^2} = \frac{\mathbf{4\pi^2 r^3}}{\mathbf{G \times M_T}}$$

Avec :

- T est la période de révolution du satellite et est égale à 24 heures dans le cas d'un satellite géostationnaire ;
- G est la constante de la gravitation, $G = 6{,}67 \times 10^{-11} \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$;

- M_{T} est la masse de la Terre, $M_{\mathrm{T}} = 5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg}$;
- r est le rayon de l'orbite du satellite et est lié au rayon de la Terre R_{T} (qui vaut 6 370 km) et à l'altitude h du satellite : $r = R_T + h$.

Ainsi, la période de révolution d'un satellite d'altitude h est :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \left(R_{\mathrm{T}} + h\right)^3}{G \times M_T}$$

En isolant l'altitude h de cette expression, on obtient :

$$h = \sqrt[3]{\frac{G \times M_T \times T^2}{4\pi^2}} - R_{\mathrm{T}}$$

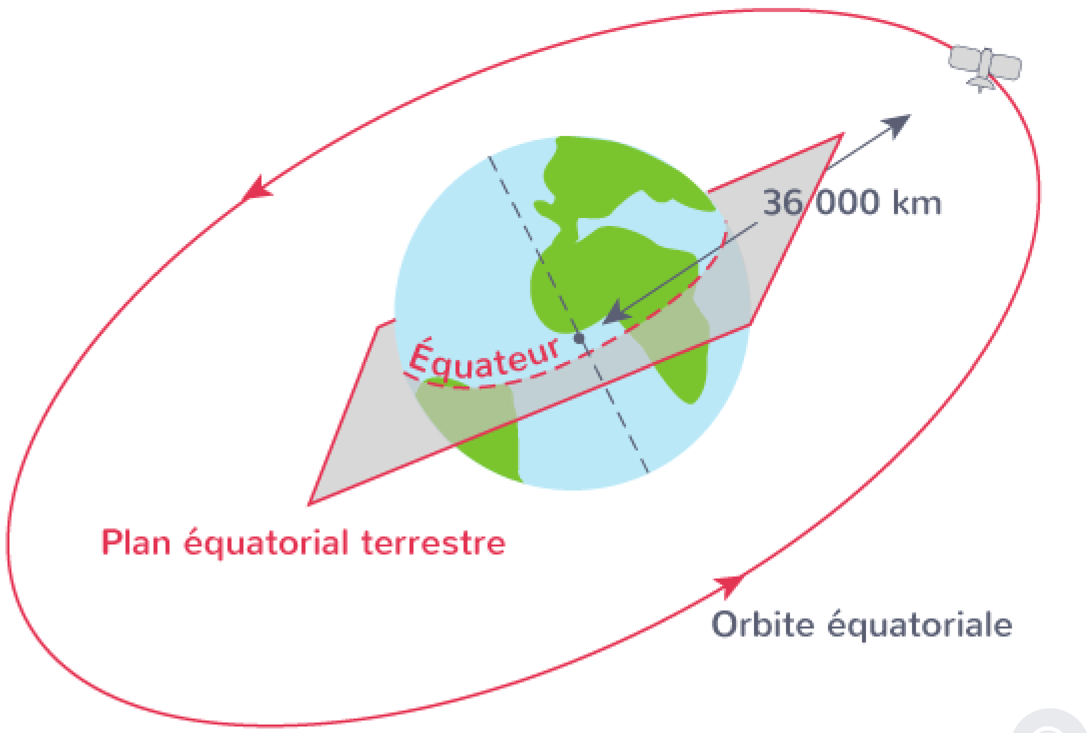
Donc pour avoir une période de rotation de 24 heures le satellite doit se situer à une hauteur h de la surface de la Terre égale à :

$$h = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24} \times (24 \times 3\,600)^2}{4\pi^2}} - 6\,370 \times 10^3$$

$$h = 3{,}59 \times 10^7 \text{ m}$$

$$h = 3{,}59 \times 10^4 \text{ km}$$

Soit une altitude d'environ $36\,000 \text{ km}$.



Orbite d'un satellite géostationnaire

B Les applications des satellites géostationnaires

L'immobilité des satellites géostationnaires au-dessus d'un point fixe du sol permet de nombreuses applications.

PROPRIÉTÉ

Par rapport aux autres satellites, les satellites géostationnaires ont deux atouts :

- Ils sont immobiles par rapport à la surface terrestre.
- Leur orbite équatoriale et leur altitude assez élevée leur permet aussi de couvrir en permanence plus d'un tiers de la planète de manière instantanée.

Ils trouvent ainsi de nombreuses applications. On peut distinguer :

- les satellites scientifiques : ils permettent d'étudier la Terre, de jouer le rôle d'observatoires spatiaux, ou permettent de mener des expériences en impesanteur ;
- les satellites d'applications : ils peuvent être civils ou militaires et sont surtout utilisés pour les télécommunications, la navigation et la météorologie.

EXEMPLE

Actuellement, on dénombre plus de 300 satellites géostationnaires dont au moins 90 % sont des satellites de télécommunication.