Limites de fonctions

Introduction :

Nous savons ce qu'est une fonction et nous connaissons les fonctions de référence, ainsi que les polynômes du second degré. En première, nous avons appris à dériver une fonction et en étudier les variations.

Dans le cours précédent, nous avons vu comment calculer les limites d'une suite numérique et avons aussi travaillé sur la limite de la fonction exponentielle aux bornes de son ensemble de définition.
Dans ce cours, nous allons approfondir cette notion de limites. Elles apportent des informations supplémentaires sur les fonctions et viendront compléter les tableaux de variations que nous savons déjà construire.

1 Limite à l'infini

Dans cette première partie, nous nous intéressons au comportement des fonctions en $-\infty$ et en $+\infty$ (lorsqu'elles y sont définies).

a. Limite infinie à l'infini

Soit a un réel et f une fonction définie au moins sur un intervalle $]a\ ;\ +\infty[$.

Définition

Limite infinie à l'infini :

1. Une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A donné, les images $f(x)$ sont supérieures à A à partir de x assez grand.

→ On note alors :

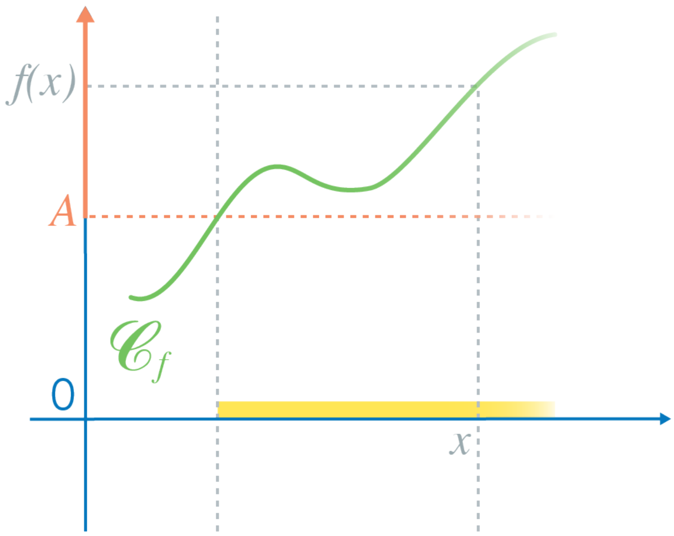
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

② Une fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A donné, les images $f(x)$ sont inférieures à A à partir de x assez grand.

→ On note alors :

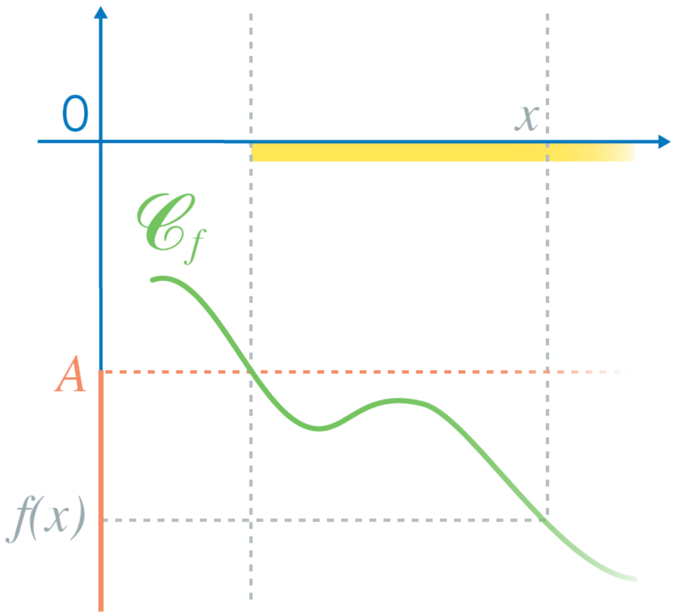
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Regardons la courbe représentative suivante :



→ La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Regardons maintenant cette courbe représentative :



→ La fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$.

Exemple

La fonction carrée ou la fonction racine carrée ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} x^2 &= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

→ On définit de la même manière les limites infinies en $-\infty$.

Exemple

La fonction carrée a pour limite $+\infty$ en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

La fonction cube a pour limite $-\infty$ en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

b. Limite finie à l'infini et asymptote horizontale

Dans le cours précédent, sur les limites de suites, nous avons vu que la fonction exponentielle, en $-\infty$, avait pour limite 0, soit une **limite finie**.

Définition

Limite finie à l'infini :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ (a réel).
Dire que f a pour limite le réel l en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les images $f(x)$ pour x suffisamment grand.

➜ On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

À retenir

On dit, dans ce cas, que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** au voisinage de $+\infty$ (ou en $+\infty$) à la courbe représentative de f.

De même, la droite d'équation $y = l$ est symptote horizontale au voisinage de $-\infty$ (ou en $-\infty$) lorsque :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

Pour définir une asymptote horizontale, il faut calculer ce type de limite.
Inversement, si une limite finie l en l'infini a été calculée et que l'on demande une interprétation graphique, alors on peut dire que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction : celle-ci se rapproche au fur et à mesure de l'asymptote horizontale quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

➜ On peut ainsi dire que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Exemple

Prenons un autre exemple et intéressons-nous à la fonction inverse.
Soit la fonction f telle que : $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

➜ On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ (qui est l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Pour déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à une asymptote d'équation $y = l$, il faut étudier le signe de la différence $f(x) - l$:

- si $f(x) - l > 0$, alors $f(x) > l$,

  ➜ la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'asymptote sur l'intervalle, ou la réunion d'intervalles, où c'est le cas ;

- si $f(x) - l < 0$, alors $f(x) < l$,

  ➜ la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de l'asymptote sur l'intervalle, ou la réunion d'intervalles, où c'est le cas.

2 Limite infinie en un point et asymptote verticale

Nous venons de voir les limites en l'infini. Intéressons-nous maintenant aux limites en un point.

Soit a un réel et h un réel positif non nul.
Soit f une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle $]a-h\ ;\ a[$ ou $]a\ ;\ a+h[$.

Définition

Limite infinie en un point :

- f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a si, pour tout A, les images $f(x)$ sont supérieures à A quand x est suffisamment proche de a.

  ➜ On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

- f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers a si, pour tout A, les images $f(x)$ sont inférieures à A quand x est suffisamment proche de a.

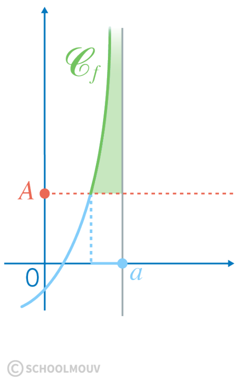
  ➜ On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

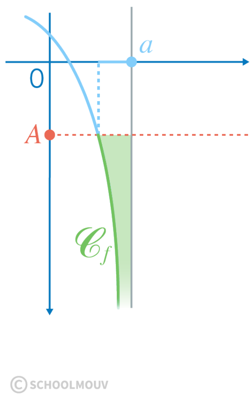
Attention

Dans certains cas, la limite quand x tend vers a par valeurs inférieures et celle quand x tend vers a par valeurs supérieures sont différentes.

On parle de limite à gauche en a lorsque x tend vers a par valeurs inférieures à a.

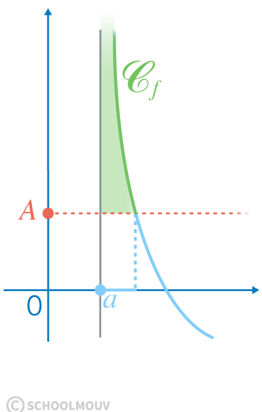


$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$$

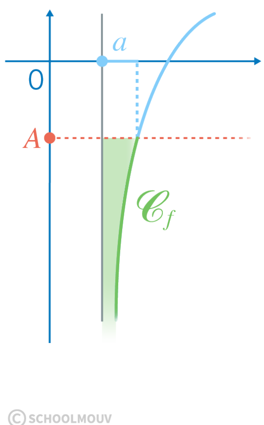


$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$$

On parle de limite à droite en a lorsque x tend vers a par valeurs supérieures à a.



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$$

À retenir

Dans ces quatre cas, la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f.

Pour définir une asymptote verticale, il faut calculer ce type de limite.
Inversement, si une limite infinie en un réel a a été calculée et que l'on demande une interprétation graphique, alors on peut dire que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction : celle-ci se rapproche au fur et à mesure de l'asymptote verticale quand x tend vers a.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ est une valeur réelle, cela ne pose pas de problème.

→ Ce cas sera étudié dans un cours prochain, sur la continuité.

3 Déterminer une limite

Après avoir défini la notion de limite de fonctions, nous allons voir que, comme pour les suites, nous pouvons déterminer une limite à partir de règles opératoires sur les limites et de théorèmes.

a. Limites des fonctions usuelles

Tout d'abord, découvrons, ou redécouvrons, les limites des fonctions usuelles.

À retenir

1. **Fonctions de type x^n :**

→ pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

→ si n est pair :

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$$

→ si n est impair :

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$$

2. **Fonction inverse :**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$$
$$= 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

3 **Fonction racine carrée :**

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

4 **Fonction exponentielle :**

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x}$$
$$= 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$$

b. Propriétés des opérations sur les limites

Les tableaux suivants donnent les règles d'opération et sont à connaître.

- Ces règles sont toutefois aisément retrouvables grâce à la logique et à la règle des signes.
- Comme pour les suites, il y a des **formes indéterminées**.

À retenir

Avec a qui peut être un réel, $-\infty$ ou $+\infty$, l et $l^{'}$ deux réels.

Limites de la somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$l^{'}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x)$	$l + l^{'}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limites du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limites du quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	l	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	0^{+}_{-}	0
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$\pm\infty$	FI

➜ Il existe donc quatre formes indéterminées :

- $(+\infty) + (-\infty)$;
- $0 \times \infty$;
- $\dfrac{\infty}{\infty}$;
- $\dfrac{0}{0}$.

Astuce

Pour lever une indétermination, il suffit très souvent de factoriser l'expression de la fonction.

➜ C'est notamment le cas pour les fonctions polynômiales ou rationnelles, où on factorise par le terme de plus haut degré.

Exemple

Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

1. Commençons par chercher la limite par somme :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} -2x + 5 = -\infty$$

➜ Une forme indéterminée apparaît, du type $(+\infty) + (-\infty)$.

➜ Pour lever cette indétermination, transformons l'expression de la fonction en la factorisant par x^3 (nous nous intéressons à x grand, nous le considérons comme non nul) :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x + 5 \\ &= x^3\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right) \end{aligned}$$

(2) Calculons la limite de cette nouvelle expression :

$$\begin{aligned} \text{Nous avons : } & \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \\ \text{et : } & \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x^3} \\ & = 0 \\ \text{Par somme : } & \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} = 1 \\ \text{Enfin, par produit : } & \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right) = +\infty \end{aligned}$$

(C) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

C. Limite d'une fonction composée

Propriété

Soit a, l et L trois nombres réels, et f et g deux fonctions telles que : $g : I \to J$ et $f : J \to \mathbb{R}$.

➜ Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to l} f(x) = L$, alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(g(x)) &= \lim_{x \to a} (f \circ g)(x) \\ &= L \end{aligned}$$

La propriété est aussi valable lorsque a, l ou L sont $-\infty$ ou $+\infty$.

Exemple

Nous cherchons à déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}$.

- Déterminons d'abord la limite de $-x^2$:

$$\lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$$

- Soit $g(x) = -x^2$ et $f(x) = e^x$.
- Nous savons donc :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 0\end{aligned}$$

➜ Et donc, selon la propriété vue ci-dessus :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} &= \lim_{x\to+\infty} f(g(x)) \\ &= \lim_{x\to-\infty} f(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

d. Limites et comparaison

Nous connaissons, pour les suites, les **théorèmes de comparaison** et **des gendarmes**.

➜ Ces théorèmes peuvent se généraliser aux fonctions, permettant de calculer la limite éventuelle d'une fonction en une valeur finie ou infinie.

Théorème

Théorème de comparaison :

1. Soit f et g deux fonctions telles que :

- $f(x) \geq g(x)$ sur un intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ (a un réel)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

➜ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. Soit f et g deux fonctions telles que :

- $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ (a un réel) ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

➜ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Ces deux propriétés s'étendent aux limites en $-\infty$, en changeant l'intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ en $]-\infty\ ;\ a[$, ou à celles en une valeur finie, avec cette fois un intervalle ouvert contenant a.

Théorème

Théorème des gendarmes :

Soit f, g et h trois fonctions et l un nombre réel tels que :

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur un intervalle $[a\ ;\ +\infty[$ (a un réel)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$

➜ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$

Ce théorème s'étend aux limites en $-\infty$, en changeant l'intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ en $]-\infty\ ;\ a[$, ou à celles en une valeur finie, avec cette fois un intervalle ouvert contenant a.

4 Croissance comparée des fonctions puissances et exponentielle en $+\infty$

Utilisons les limites pour comparer la croissance des fonctions puissances et exponentielle en $+\infty$.

Propriété

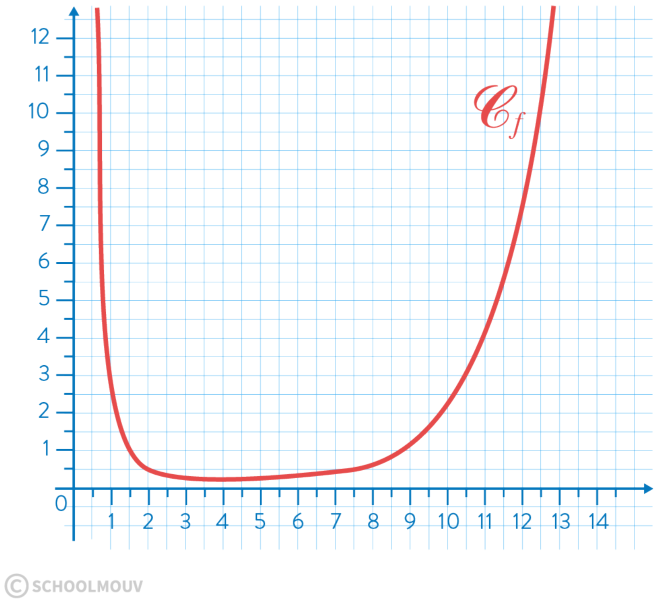
Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$$

➜ Pour un entier naturel $n \geq 1$, lorsque x devient de plus en plus grand, e^x devient beaucoup plus grand que x^n.

Exemple

Voici une représentation graphique de la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^4}$.



Lorsque x devient de plus en plus grand, $\frac{e^x}{x^4}$ devient de plus en plus grand et tend vers $+\infty$.

Démonstration

Montrons cette propriété en deux étapes.

1 Première étape : montrons que la propriété est vraie pour $n = 1$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Pour cela, étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = e^x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Pour $x > 0$, $f''(x) = e^x - 1 > 0$.

  → La fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.
- De plus, $f'(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$.

  → $f'(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$.

  → La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.
- En outre, $f(0) = e^0 - \frac{0^2}{2} = 1$.

  → $f(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$.

- On en déduit que $\mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2}$ pour tout réel $x > 0$.

- En divisant par $x \neq 0$ les deux membres de l'inégalité, on obtient, pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x} > \frac{x}{2}$$

- Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$.

- D'après le théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty}$$

2 Deuxième étape : montrons maintenant que la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$$

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} &= \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} \\
&= \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n \\
&= \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n} \times n}\right)^n \\
&= \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \times \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \times n^{-n} \\
&= \left(\frac{\mathrm{e}^X}{X}\right)^n \times n^{-n} \quad \left[\text{en posant } X = \frac{x}{n}\right]
\end{aligned}$$

- Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$.

- Or, d'après la première étape :

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$$

- D'après les règles opératoires sur les limites :

$$\lim_{X \to +\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^X}{X}\right)^n = +\infty$$

$$\lim_{X \to +\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^X}{X}\right)^n \times n^{-n} = +\infty \text{ [car } n \geq 1 \text{ est un entier naturel fixé]}$$

➜ On en déduit que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty}$$

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons défini les limites de fonctions à l'infini et en un point, ainsi que les conditions d'existence des asymptotes horizontales et verticales.

Nous avons ensuite vu les règles opératoires sur les limites de fonctions et les théorèmes qui permettent de déterminer concrètement une limite.

Enfin, nous avons comparé la croissance des fonctions puissances et exponentielle en $+\infty$.

Nous avons aussi vu qu'une fonction dérivée pouvait être aussi dérivable, introduisant la notion de dérivée seconde.

Le prochain cours nous permettra de compléter les connaissances et méthodes de première sur la dérivation.