Équations polynomiales et nombres complexes

Introduction :

Historiquement, les nombres complexes ont été introduits pour aider à la résolution des équations polynomiales de degré 2 et au-delà.
Les nombres complexes permettent d'extraire les racines des polynômes et ainsi de factoriser les polynômes et d'en permettre l'étude.
Ce cours est donc orienté vers les applications algébriques liés aux nombres complexes.

1 Résolution d'équations du second degré à coefficients réels

Dans cette partie, nous considérerons les trois nombres réels $a \neq 0$, b et c, ainsi qu'un nombre complexe z.

→ Le but de cette partie est de résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation du second degré : $az^2 + bz + c = 0$.

a. Un cas particulier : résoudre $z^2 = d$

Commençons par un cas simple, pour bien comprendre ce que nous allons faire.

Lorsque l'on cherche à résoudre une équation du type $z^2 = d$, avec d un réel, on distingue trois cas possibles.

1. Si $d = 0$, alors il existe une unique solution réelle : $z = 0$.
2. Si $d > 0$, deux solutions réelles sont possibles :

$$z_1 = \sqrt{d} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{d}$$

3. Mais si $d < 0$, il n'existe aucune solution réelle ; cependant, l'ensemble des nombres complexes permet de déterminer deux solutions.

En effet, on peut poser $d = -1 \times d'$, avec $d' > 0$ un nombre réel.

Et sachant que $\mathrm{i}^2 = -1$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} z^2 &= -1 \times d' \\ &= \mathrm{i}^2 \times d' \end{aligned}$$

À retenir

Les deux solutions sont alors :

$$z_1 = \mathrm{i}\sqrt{d'} = \mathrm{i}\sqrt{-d} \quad \text{et} \quad z_2 = -\mathrm{i}\sqrt{d'} = -\mathrm{i}\sqrt{-d}$$

→ Nous remarquons que les deux solutions sont conjuguées.

Si on cherche donc à résoudre $z^2 = d$ dans l'ensemble des complexes, les trois cas possibles permettent à chaque fois d'en extraire les solutions, puisque l'ensemble des réels est inclus dans celui des complexes.

Prenons trois premiers exemples de résolution.

Exemple

1. Résolvons : $z^2 + 4 = 0$.

On se ramène à l'équation : $z^2 = -4$.

→ Il y a deux solutions complexes :

$$z_1 = \mathrm{i}\sqrt{4} = 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = -\mathrm{i}\sqrt{4} = -2\mathrm{i}$$

2. Résolvons $9z^2 + 5 = 0$.

On se ramène à l'équation : $z^2 = -\frac{5}{9}$.

→ Il y a deux solutions complexes :

$$\begin{aligned} z_1 &= \mathrm{i}\sqrt{\frac{5}{9}} \\ &= \mathrm{i}\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \text{et : } z_2 &= \bar{z}_1 \\ &= -\mathrm{i}\frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

b. Le cas général : résoudre $az^2 + bz + c = 0$

Traitons maintenant le cas général.

En première, nous avons appris, pour résoudre une équation du second degré, à calculer le discriminant Δ. Et nous avons dit que, si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions **réelles**.

➜ Mais nous travaillons maintenant dans $\mathbb{C}$ et, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, il existe des solutions **complexes**.

Propriété

Considérons l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec $a \neq 0$, b et c des nombres réels.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

1. Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle :

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

2. Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\text{et : } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$\text{et : } z_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Démonstration

Démontrons les trois types de solutions possibles de notre cas général.

Notons : $P(z) = az^2 + bz + c$.

Puisque $a \neq 0$ alors :

$$
\begin{aligned}
P(z) &= az^2 + bz + c \\
&= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(z^2 + 2 \times \frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&\text{[pour faire apparaître une identité remarquable]} \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\
&\text{[en posant } \Delta = b^2 - 4ac\text{]}
\end{aligned}
$$

Toujours puisque $a \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
P(z) = 0 &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}
\end{aligned}
$$

On a alors les trois cas.

1. Si $\Delta = 0$:

$$
\begin{aligned}
P(z) = 0 &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = 0 \\
&\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}
\end{aligned}
$$

➜ Nous avons une solution réelle :

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

2. Si $\Delta > 0$:

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Il y a alors deux possibilités :

$$\begin{aligned} z+\frac{b}{2a} &= \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ \text{ou : } z+\frac{b}{2a} &= -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} z &= -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou : } z &= -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

→ L'équation a donc deux solutions réelles :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{et : } z_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

3 Enfin, si $\Delta < 0$:

$$\begin{aligned} P(z)=0 &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{-\Delta}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \mathrm{i}^2\frac{-\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Il y a alors deux possibilités :

$$\begin{aligned} z+\frac{b}{2a} &= \mathrm{i}\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \\ \text{ou : } z+\frac{b}{2a} &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} z &= -\frac{b}{2a} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \text{ou : } z &= -\frac{b}{2a} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

→ L'équation a donc deux solutions complexes :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \text{et : } z_2 &= \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

À retenir

Les équations du second degré à coefficients réels ont donc toujours des solutions dans l'ensemble des complexes et c'est le signe de Δ qui va permettre de déterminer la forme des solutions et si elles sont réelles ou complexes.

→ Dans le cas de solutions complexes, les deux solutions z_1 et z_2 sont conjuguées l'une de l'autre puisque leurs parties réelles sont identiques et leurs parties imaginaires sont opposées.

Prenons quelques exemples de résolutions d'équation du second degré.

Exemple

Nous allons résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $\frac{1}{2}z^2 - 3z + \frac{9}{2} = 0.$

Ici, $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$, $c = \frac{9}{2}$, et :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-3)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \\ &= 9 - 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

→ Il y a donc une solution réelle :

$$
\begin{aligned}
z_0 &= -\frac{b}{2a} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

2 $2z^2 = 3z + 1.$

L'équation est équivalente à :

$$2z^2 - 3z - 1 = 0$$

On a alors : $a = 2$, $b = -3$, $c = -1$, et :

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1) \\
&= 9 + 8 \\
&= 17 \\
&> 0
\end{aligned}
$$

➜ Il y a donc deux solutions réelles :

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{3 + \sqrt{17}}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{et : } z_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{3 - \sqrt{17}}{4}
\end{aligned}
$$

3 $-2z^2 + 6z - 5 = 0.$

Ici, $a = -2$, $b = 6$ et $c = -5$, et :

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= 6^2 - 4 \times (-2) \times (-5) \\
&= 36 - 40 \\
&= -4 \\
&< 0
\end{aligned}
$$

➜ Il y a donc deux solutions complexes :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-6+\mathrm{i}\sqrt{4}}{-4} \\ &= \frac{6-2\mathrm{i}}{4} \\ &= \frac{3-\mathrm{i}}{2} \\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et : } z_2 &= \bar{z}_1 \\ &= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

c. Factorisation d'un polynôme

Comme dans le cas de l'étude de polynômes dans l'ensemble des réels, la connaissance de racines (c'est-à-dire de solutions à l'équation polynomiale) permet de factoriser l'écriture du polynôme, donc de l'écrire sous forme de produits faisant apparaître les racines.

Propriété

Soit le trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$, avec, $a \neq 0$, b et c des nombres réels, et $\Delta = b^2 - 4ac$.
La forme factorisée du trinôme est :

- si $\Delta = 0$, $P(z) = a(z-z_0)^2$, avec $z_0 = -\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta \neq 0$, $P(z) = a(z-z_1)(z-z_2)$, avec z_1 et z_2 les solutions réelles ou complexes définies à la propriété précédente.

Démonstration

Démontrons la factorisation possible à partir des racines.

Notons $P(z) = az^2 + bz + c$.

Dans la démonstration précédente, comme $a \neq 0$, nous avons donné l'expression suivante :

$$P(z) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$[\text{avec } \Delta = b^2 - 4ac]$$

On a alors les trois cas suivants.

1. Si $\Delta = 0$, alors il y a une seule racine double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} a(z-z_0)^2 &= a\left(z-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 \\ &= a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= P(z) \text{ [car } \Delta = 0\text{]} \end{aligned}$$

➜ Nous retrouvons bien l'expression de $P(z)$ donnée plus haut pour $\Delta = 0$.

2. Si $\Delta > 0$, alors il y a deux racines réelles : $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} a(z-z_1)(z-z_2) &= a\left(z-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) \\ &= P(z) \end{aligned}$$

➜ Nous retrouvons bien la forme de $P(z)$ donnée plus haut pour $\Delta > 0$.

3. Si $\Delta < 0$, alors il y a deux racines complexes : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
a(z-z_1)(z-z_2) &= a\left(z-\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \\
&= a\left(z+\frac{b}{2a}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right) \quad \text{[car } \mathrm{i}^2=-1\text{]} \\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) \\
&= P(z)
\end{aligned}$$

➜ Nous retrouvons bien la forme de $P(z)$ donnée plus haut pour $\Delta < 0$.

Nous allons repartir du dernier exemple de la partie précédente.

Exemple

Nous avons $P(z) = -2z^2 + 6z - 5 = 0$, avec donc notamment $a = -2$, et nous avions trouvé :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i} \\
\text{et : } z_2 &= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

➜ Nous pouvons donc factoriser le polynôme :

$$\begin{aligned}
P(z) &= a(z-z_1)(z-z_2) \\
&= -2\left(z-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right)\left(z-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right) \\
&= -2\left(z-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)
\end{aligned}$$

2 Résolution d'équations de degré 3 à coefficients réels

La résolution d'une équation de degré 3 à coefficients réels est ici possible en considérant que l'on peut déterminer (ou que l'on dispose) d'une racine de ce polynôme.
On peut alors, par le biais de la factorisation, se ramener au produit d'un polynôme de degré 1 (avec la racine

connue) et d'un polynôme de degré 2, dont la résolution dans l'ensemble des complexes a été détaillée dans la partie précédente.

Utilisons un exemple pour bien comprendre.

Exemple

On chercher à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $2z^3 + 3z - 5 = 0$.
Posons $P(z) = 2z^3 + 3z - 5$.

1. Montrons que 1 est une racine de $P(z)$, c'est-à-dire que $P(1) = 0$.

$$\begin{aligned} P(1) &= 2 \times 1^3 + 3 \times 1 - 5 \\ &= 2 + 3 - 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Puisque 1 est une racine de $P(z)$, on peut factoriser $P(z)$ par $(z-1)$, c'est-à-dire qu'il existe a, b et c des nombres réels tels que :

$$P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$$

En développant le terme de droite, on obtient :

$$\begin{aligned} (z-1)(az^2 + bz + c) &= az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c \\ &= az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c \\ &\quad \text{[en regroupant les termes de même degré en } z\text{]} \end{aligned}$$

Par unicité des polynômes, $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$ si et seulement si les termes de même degré ont le même coefficient :

$$2z^3 + 3z - 5 = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$$

Il faut donc faut résoudre le système :

$$\begin{cases} 2 = a \\ 0 = b - a \\ 3 = c - b \\ -5 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 5 \end{cases}$$

➜ Donc : $P(z) = (z-1)(2z^2 + 2z + 5)$.

3. Résoudre $P(z) = 0$ revient à résoudre :

$$(z-1)(2z^2 + 2z + 5) = 0$$

Or, un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs au moins s'annule, donc :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2z^2 + 2z + 5 = 0$$

- Si $z = 1$, alors $z - 1 = 0$.
- Sinon, nous devons résoudre $2z^2 + 2z + 5 = 0$, comme nous l'avons vu plus haut :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4 - 4 \times 2 \times 5 \\ &= -36\end{aligned}$$

➜ Les solutions sont donc :

$$\begin{aligned}z &= \frac{-2+6\mathrm{i}}{4} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\end{aligned}$$

$$\text{ou : } z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$$

C En conclusion, les solutions (ou racines) de $P(z) = 2z^3 + 3z - 5 = 0$ sont :

$$\begin{aligned}z_1 &= 1 \\ z_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} \\ z_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\end{aligned}$$

➜ Et la forme factorisée de $P(z)$ est :

$$P(z) = 2(z-1)\left(z + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\left(z + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)$$

Nous pouvons donner la propriété suivante.

Propriété

Soit P un polynôme de degré 3 et a un nombre complexe tel que $P(a) = 0$ (a est une racine de $P(z)$), alors, pour tout nombre complexe z :

$$P(z) = (z-a) \times Q(z)$$

$$\text{[avec } Q \text{ un polynôme de degré 2]}$$

À retenir

Pour résoudre une équation de degré 3 dans $\mathbb{C}$:

- il faut se ramener à une équation de la forme $P(z) = 0$, avec P le polynôme de degré 3 ;
- on ne peut les résoudre avec les outils vus dans ce cours que si l'on connaît déjà une racine z_1 ;
- il faut alors factoriser le polynôme en utilisant la racine connue pour se ramener à un produit nul : $P(z) = (z - z_1) \times Q(z) = 0$, avec Q un polynôme de degré 2 ;
- on résout alors l'équation $Q(z) = 0$;
- l'ensemble des solutions de $P(z) = 0$ est la solution z_1 et les solutions de l'équation $Q(z) = 0$.

3 Résolution d'équations de degré 4 à coefficients réels

a. Résolution d'équations de degré 4 à coefficients réels : cas général avec racines connues

On peut généraliser la méthode de résolution d'une équation de degré 3 à coefficients réels à celle d'une équation de degré 4 à condition cette fois d'avoir 2 racines du polynôme de départ.

Supposons P un polynôme de degré 4, avec a et b deux nombres complexes tel que $P(a) = 0$ et $P(b) = 0$.

➜ On peut alors appliquer la même méthode de factorisation avec ces deux racines et on obtient :

$P(z) = (z - a) \times (z - b) \times Q(z)$, avec Q un polynôme de degré 2 pour lequel l'équation $Q(z) = 0$ pourra être résolue dans $\mathbb{C}$.

Prenons un exemple.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{C}$: $z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 2z + 4 = 0$.
Posons $P(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 2z + 4$.

1. Montrons d'abord que i et $-\text{i}$ sont des solutions.

$$\begin{aligned} P(\mathrm{i}) &= \mathrm{i}^4 - 2\mathrm{i}^3 + 5\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i} + 4 \\ &= 1 + 2\mathrm{i} - 5 - 2\mathrm{i} + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{De même : } \begin{aligned} P(-\mathrm{i}) &= (-\mathrm{i})^4 - 2(-\mathrm{i})^3 + 5(-\mathrm{i})^2 - 2(-\mathrm{i}) + 4 \\ &= 1 - 2\mathrm{i} - 5 + 2\mathrm{i} + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Donc on peut factoriser P par ces deux racines : $P(z) = (z - \mathrm{i}) \times (z + \mathrm{i}) \times Q(z)$, avec Q un polynôme de degré 2.

Posons $Q(z) = az^2 + bz + c$, avec a, b et c des réels :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})(az^2 + bz + c) \\ &= (z^2 + 1)(az^2 + bz + c) \\ &= az^4 + bz^3 + (a + c)z^2 + bz + c \\ &= z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 2z + 4 \end{aligned}$$

Donc, par identification, nous obtenons :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ a + c = 5 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$$

→ On a donc $Q(z) = z^2 - 2z + 4$.

3. Résolvons l'équation $Q(z) = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 \\ &= -12 \end{aligned}$$

→ Les solutions de l'équation $Q(z) = 0$ sont donc :

$$z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i} \quad \text{ou} \quad z = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$$

4. Les quatre solutions de $P(z) = 0$ sont donc :

$$S = \{-\mathrm{i},\ \mathrm{i},\ 1 + \sqrt{3}\mathrm{i},\ 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}\}$$

b. Les équations bicarrées

Définition

Équations bicarrées :

Soit a, b et c trois nombres réels.
On appelle équation bicarrée toute équation de degré 4 ne comportant que des puissances paires de z, c'est-à-dire que nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$az^4 + bz^2 + c = 0$$

Le lien avec une équation de degré 2 apparaît en remplaçant l'inconnu z^2 par Z (ce que l'on appelle un changement de variable), pour d'abord chercher les solutions pour Z, puis les solutions pour z.

→ Si les solutions pour Z sont complexes, il est préférable de passer par la forme exponentielle pour en déduire les solutions pour z.

Prenons un exemple.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$.
Posons $Z = z^2$, l'équation devient donc :

$$Z^2 + 4Z + 16 = 0$$

1. Nous calculons :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4^2 - 4 \times 1 \times 16 \\ &= -48 \end{aligned}$$

→ Il y a donc deux solutions complexes pour Z :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{-4 + \text{i}\sqrt{48}}{2} \\ &= -2 + 2\sqrt{3}\text{i} \end{aligned}$$

$$\text{et : } \begin{aligned} Z_2 &= \bar{Z}_1 \\ &= -2 - 2\sqrt{3}\text{i} \end{aligned}$$

3. On voit facilement que leur module est :

$$\begin{aligned}\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} &= \sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}\\ &= \sqrt{16}\\ &= 4\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}Z_1 &= 4\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\ &= 4\times\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_2 &= 4\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\ &= 4\times\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\end{aligned}$$

➜ Nous pouvons donc les écrire sous leurs formes exponentielles :

$$\begin{aligned}Z_1 &= 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\\ Z_2 &= 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\end{aligned}$$

4 Passons maintenant à la recherche des solutions pour z.

On a la relation suivante : $z^2 = Z$.

Donc on a deux nouvelles équations à résoudre :

$$\begin{aligned}z^2 &= 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\\ \text{et : } z^2 &= 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\end{aligned}$$

➜ La première admet deux solutions :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \text{ [car } (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\text{]} \\ &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \\ &= 2 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ou : } z &= -\sqrt{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \\ &= -(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) \\ &= -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

➜ La deuxième admet aussi deux solutions :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \\ &= 2 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ou : } z &= -\sqrt{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \\ &= -(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) \\ &= -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

C Finalement, nous obtenons quatre solutions pour l'équation $P(z) = 0$:

$$S = \{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\ -1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ 1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\ 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\}$$

4 Résolution d'équations de degré n à coefficients réels

Commençons par donner une définition.

Définition

Équation polynomiale de degré n :

Soit n un entier naturel et $a_0, a_1, ..., a_n$ des nombres réels, avec $a_n \neq 0$.

On appelle fonction polynôme de degré n à coefficients réels la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \end{aligned}$$

➜ L'équation $P(z) = 0$ est alors appelée équation polynomiale de degré n.

a. Un cas particulier : $z^n - a^n$

Considérons l'équation polynomiale de degré n suivante, avec z et a deux nombres complexes : $z^n - a^n$.
On voit que, dans le cas où $z = a$, alors $z^n - a^n = a^n - a^n = 0$. Donc a est une racine de ce polynôme.

➜ On peut donc factoriser par $z - a$, d'où la propriété suivante.

Propriété

Soit z et a deux nombres complexes.

Alors pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$z^n - a^n = (z - a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right)$$

Cette propriété permet donc la factorisation complète du polynôme de degré n dans ce cas particulier.
Démontrons-la.

Démonstration

Soit a et z deux nombres complexes et n un entier naturel non nul.

Démontrons que :

$$z^n - a^n = (z - a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right)$$

Développons l'expression de droite :

$$\begin{aligned} (z-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right) &= z\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right) - a\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} z^{n-1-k} \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-k} &= a^0 z^n + a^1 z^{n-1} + a^2 z^{n-2} + \ldots + a^{n-1} z^1 \\ &= z^n + az^{n-1} + a^2 z^{n-2} + \ldots + a^{n-1} z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} z^{n-1-k} &= a^1 z^{n-1} + a^2 z^{n-2} + \ldots + a^{n-1} z^1 + a^n z^0 \\ &= az^{n-1} + a^2 z^{n-2} + \ldots + a^{n-1} z + a^n\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}(z-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right) &= z^n + az^{n-1} + a^2 z^{n-2} + \ldots + a^{n-1} z \\ &\quad - (az^{n-1} + a^2 z^{n-2} + \ldots + a^{n-1} z + a^n) \\ &= z^n - a^n\end{aligned}$$

Donnons un petit exemple pour bien comprendre.

Exemple

Après les avoir écrit sous la forme $z^n - a^n$, nous allons factoriser les deux expressions suivantes par $(z-a)$.

1. $P(z) = z^3 - 1$.

On remarque que $1^3 = 1$.

➜ Donc $P(z) = z^3 - 1^3$, et $a = 1$.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}P(z) &= (z-1)(1^0 \times z^2 + 1^1 \times z^1 + 1^2 \times z^0) \\ &= (z-1)(z^2 + z + 1)\end{aligned}$$

Nous pouvons même dans ce cas déterminer les racines de $z^2 + z + 1$.

Nous trouvons :

$$S = \left\{-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

➜ Nous obtenons ainsi la factorisation :

$$P(z) = (z-1)\left(z+\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2 $P(z) = z^5 - 32\mathrm{i}$.

On remarque $2^5 = 32$ et $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^4 \times \mathrm{i} = (\mathrm{i}^2)^2 \times \mathrm{i} = \mathrm{i}$.

Donc, en posant $a = 2\mathrm{i}$, nous obtenons : $P(z) = z^5 - (2\mathrm{i})^5$.

➜ Et la factorisation est alors :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-2\mathrm{i})((2\mathrm{i})^0 z^4 + (2\mathrm{i})^1 z^3 + (2\mathrm{i})^2 z^2 + (2\mathrm{i})^3 z^1 + (2\mathrm{i})^4 z^0) \\ &= (z-2\mathrm{i})(z^4 + 2\mathrm{i}z^3 - 4z^2 - 8\mathrm{i}z + 16) \end{aligned}$$

b. Cas général

La propriété que l'on vient de voir implique à son tour une factorisation plus générale des polynômes.

Propriété

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$, et a un nombre complexe tel que $P(a) = 0$.
Alors a est une racine de P et P se factorise par $(z-a)$.

➜ C'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$P(z) = (z-a) \times Q(z)$.

La démonstration est assez simple (mais lourde en écriture) en se fondant sur les résultats de la propriété précédente.

Démonstration

Soit un polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ de degré $n \geq 1$ à coefficients réels, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} P(z) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n \\ &= \sum_{p=0}^{n} b_p z^p \end{aligned}$$

De plus, soit le nombre complexe a tel que $P(a) = 0$.

➜ Comme $P(a) = 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
P(z) &= P(z) - P(a) \\
&= \sum_{p=0}^{n} b_p z^p - \sum_{p=0}^{n} b_p a^p \\
&= \sum_{p=0}^{n} (b_p z^p - b_p a^p) \\
&= \sum_{p=0}^{n} b_p (z^p - a^p) \\
&= b_1(z-a) + b_2(z^2-a^2) + b_3(z^3-a^3) + \ldots \\
&\qquad + b_{n-1}(z^{n-1} - a^{n-1}) + b_n(z^n - a^n)
\end{aligned}$$

Or, nous avons vu que, pour tout entier naturel non nul p :

$$\begin{aligned}
z^p - a^p &= (z-a)\left(\sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-1-k}\right) \\
&= (z-a)(z^{p-1} + az^{p-2} + \ldots + a^{p-2}z + a^{p-1})
\end{aligned}$$

➜ On obtient :

$$\begin{aligned}
P(z) &= b_1(z-a) + b_2(z-a)(z+a) + b_3(z-a)(z^2+az+a^2) + \ldots \\
&\qquad + b_{n-1}(z-a)(z^{n-2} + az^{n-3} + \ldots + a^{n-3}z + a^{n-2}) \\
&\qquad + b_n(z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-1}) \\
&= (z-a)(b_1 + b_2(z+a) + b_3(z^2+az+a^2) + \ldots \\
&\qquad + b_{n-1}(z^{n-2} + az^{n-3} + \ldots + a^{n-3}z + a^{n-2}) \\
&\qquad + b_n(z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-1})) \\
&= (z-a) \times Q(z)
\end{aligned}$$

Nous voyons que le terme de plus haut degré de $Q(z)$ est z^{n-1}.

➜ Q un polynôme de degré $n-1$.

Puisque l'on peut factoriser P avec ses racines, cela signifie que le nombre maximum de racines est nécessairement le degré de P.

Propriété

Soit P un polynôme de degré n.
Alors P admet au plus n racines.

La démonstration de cette dernière propriété fait appel à la récurrence :

Démonstration

Démontrons que, pour tout entier naturel n, P_n : « Un polynôme de degré n admet au plus n racines », est vraie.

1. **Initialisation :**

Un polynôme de degré 0 est une constante non nulle, il n'y a donc pas de racine, et il y a au plus 0 racine.

→ P_0 est vraie.

2. **Hérédité :**

Supposons qu'il existe un entier naturel quelconque k tel que P_k est vraie.

→ C'est-à-dire qu'un polynôme de degré k admet au plus k racines.

Montrons que, alors, P_{k+1} est aussi vraie.

→ C'est-à-dire qu'un polynôme de degré $k+1$ admet au plus $k+1$ racines.

Soit Q un polynôme de degré $k+1$.

- Si ce polynôme n'a aucune racine, il admet alors 0 racine et $0 \leq k+1$, donc la propriété est vérifiée.
- Si ce polynôme admet une racine a, alors nous venons de voir que l'on peut le factoriser par $z-a$ et l'écrire sous la forme :

$$Q(z) = (z-a)R(z) \text{ [avec } R \text{ un polynôme de degré } k\text{]}$$

Selon notre hypothèse de récurrence, un polynôme de degré k admettait au plus k racines, donc R admet au plus k racines. Et Q admet alors au plus $k+1$ racines.

→ Si P_k est vraie, alors P_{k+1} est aussi vraie.

C. **Conclusion :**

Nous avons montré que la propriété est vraie pour $k=0$ et que, à partir de là, elle était héréditaire.

→ Elle est donc vraie pour tout entier naturel n : un polynôme de degré n admet au plus n racines.

À retenir

Pour un polynôme de degré n, on a donc un maximum de n racines, mais il peut arriver que certaines racines soient doubles ou que l'ensemble des solutions limite le nombre de racines (par exemple si Δ est négatif et que l'on cherche des solutions dans l'ensemble des réels, il n'y a pas de solution). Il peut y avoir ainsi moins de n racines distinctes.

Enfin, donnons une dernière propriété admise pour les polynômes de degré n.

Propriété

Soit P un polynôme de degré n (n entier naturel non nul), à coefficients réels α_k, on peut alors écrire :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$$

Et on a : La somme de toutes ses racines est égale à :

$$-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$$

Le produit de toutes ses racines est égal à :

$$(-1)^n \frac{\alpha_0}{\alpha_n}$$

Conclusion :

Les nombres complexes sont utilisés en calcul algébrique pour la recherche des racines des polynômes. Ce cours a permis d'expliciter la résolution des équations de degré 2 dans ce nouvel ensemble de nombres et la généralisation pour des équations d'ordre plus élevé a aussi été présentée pour des cas spécifiques où une ou plusieurs racines sont connues.
Le passage de la forme algébrique à la forme exponentielle a aussi son importance pour la recherche de solutions. De plus, la connaissance des racines d'un polynôme permet sa factorisation.
La méthodologie présentée dans ce cours est indispensable pour maîtriser le calcul algébrique avec les complexes.