Calcul matriciel

Introduction :

Une matrice est un tableau de nombres qui permet de traiter globalement un ensemble de calculs identiques. Le calcul matriciel s'inspire de la géométrie vectorielle et analytique. Cette notion est importante d'autant plus que l'on retrouve les matrices dans des situations très variées autres qu'en géométrie. Les probabilités, les statistiques, la théorie des graphes, la mécanique ou encore l'économie utilisent cette notion.

Nous verrons dans un premier temps comment s'écrit une matrice, le vocabulaire associé, ainsi que les calculs de base sur les matrices.
Nous verrons ensuite le cas particulier des matrices carrées, pour finir avec la traduction de systèmes linéaires à l'aide de matrices et la résolution de ces systèmes.

1 Les matrices

a. Vocabulaire

Définition

Matrice :

Une matrice de taille ou dimension $(m,\ n)$, notée aussi $m \times n$ (m et n deux entiers naturels non nuls) est un tableau rectangulaire de nombres réels comportant m lignes et n colonnes.
Ces nombres sont appelés les coefficients, ou les termes, de la matrice.

- ➜ Le coefficient de la ligne i et de la colonne j d'une matrice A est noté $a_{i,j}$ ou $(A)_{i,j}$.

À retenir

Le premier indice est toujours le numéro de la ligne et le deuxième celui de la colonne.

Ainsi, une matrice de dimension $m \times n$ s'écrit sous cette forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3.

Nous avons, par exemple, $a_{1,3} = 0$ et $a_{2,2} = 3$.

Astuce

Nous pouvons aussi utiliser cette notation pour une matrice de taille $m \times n$:

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Et même, s'il n'y a pas d'ambiguïté, tout simplement : $(a_{i,j})$.

Commençons par définir des matrices particulières.

À retenir

- Les **matrices lignes** n'ont qu'une seule ligne.

  ➜ Leur taille est donc de la forme $1 \times n$.

$\begin{pmatrix} 5 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de taille 1×2.

- Les **matrices colonnes** n'ont qu'une seule colonne.

  ➜ Leur taille est donc de la forme $m \times 1$.

$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de taille 4×1.

- Les **matrices carrées** ont le même nombre de lignes et de colonnes.

  ➜ Leur taille est donc de la forme $n \times n$.

$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 \\ -6 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 3×3.

- Les **matrices nulles** ont tous leurs coefficients nuls.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle de taille 3×2.

Nous allons maintenant définir deux liens entre matrices.

Définition

Égalité de matrices :

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même taille $m \times n$ et les mêmes coefficients aux mêmes emplacements.
C'est-à-dire que, si la matrice $A = (a_{i,j})$ et la matrice $B = (b_{i,j})$ sont égales, alors pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$, on a $a_{ij} = b_{ij}$.

Définition

Matrice transposée :

La matrice transposée d'une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ de taille $m \times n$ (m et n deux entiers naturels non nuls) est la matrice de taille $n \times m$, notée A^{T}, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A, c'est-à-dire telle que :

$$A^{\mathrm{T}} = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$$

Prenons un exemple simple de matrice transposée.

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, alors :

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

b. Opérations sur les matrices

Maintenant que l'on a défini les matrices et vu leurs premières propriétés, nous allons définir des opérations sur les matrices : l'**addition**, la **soustraction** à l'aide de l'opposé d'une matrice, la **multiplication par un réel**, ainsi que le **produit de deux matrices** lorsqu'il est possible.

1 Somme de deux matrices

Il est possible d'additionner deux matrices à condition qu'elles aient la même taille.

À retenir

On appelle **somme de deux matrices** de même taille la matrice obtenue en additionnant deux à deux les coefficients de même emplacement dans les deux matrices.

Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, alors $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$.

Exemple

Opérons la somme des matrices A et B ci-dessous pour obtenir la matrice C :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C &= A + B \\ &= \begin{pmatrix} 1+4 & 2+5 \\ -5-6 & 3-1 \\ 0+3 & -1+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -11 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il faut savoir qu'il n'y a pas d'ordre dans la somme de matrices. Nous avons donc les propriétés suivantes.

Propriété

Soit A, B et C des matrices de même taille. Nous avons alors :

- $A + B = B + A$ (commutativité) ;
- $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ (associativité).

De plus, la matrice nulle O, de même taille que A, est l'élément neutre de l'addition :

$$A + O = O + A = A$$

2 Produit d'une matrice par un réel

Il est possible de multiplier une matrice par un réel.

À retenir

On appelle **produit d'une matrice par un nombre réel** la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients par ce nombre.

Si $A = (a_{i,j})$, alors $kA = (ka_{i,j})$.

Exemple

Multiplions la matrice A ci-dessous par -2, pour obtenir la matrice B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} B &= -2A \\ &= \begin{pmatrix} -2 \times 1 & -2 \times 2 \\ -2 \times (-5) & -2 \times 3 \\ -2 \times 0 & -2 \times (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 10 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous retrouvons les propriétés du produit que nous connaissons bien.

Propriété

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Nous avons alors :

- $0 \times A = O$, avec O la matrice nulle de taille $m \times n$;
- $1 \times A = A$.

En outre, si A et B sont deux matrices de même taille, α et β deux nombres réels, alors nous avons les formules de distributivité suivantes :

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

À retenir

Soit A et B deux matrices de même taille.
On appelle **matrice opposée** de la matrice A la matrice $(-1) \times \mathrm{A}$, notée $-A$.

➜ On définit ainsi la matrice $B - A$, qui est égale à la matrice $B + (-A)$.

$-A$ est obtenue en remplaçant, pour chaque emplacement, le coefficient de A par son opposé.

Si $A = (a_{i,j})$, alors $-A = (-a_{ij})$.

3 Produit de deux matrices

Attention

La multiplication de deux matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la première matrice est égale au nombre de lignes de la deuxième matrice.
Par exemple, si les matrices sont de dimensions $m \times n$ et $n \times p$, où m, n et p sont des entiers naturels non nuls.

Exemple

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- La taille de A est 2×3.
- La taille de B est 3×2.

➜ On peut faire le produit $A \times B$. Le résultat sera une matrice de taille 2×2.

Pour comprendre comment effectuer ce produit, commençons par définir le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne.

Définition

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne :

Soit une matrice ligne $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ (n entier naturel non nul).

Soit une matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Le produit de la matrice A par la matrice B est égal au nombre :

$$A \times B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Généralisons maintenant au produit de deux matrices.

Définition

Produit de deux matrices :

Soit une matrice A de taille $m \times n$ (m et n entiers naturels non nuls) :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Soit une matrice B de taille $n \times p$ (p entier naturel non nul).

$$B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

La matrice C, produit de A par B, sera de taille $m \times p$:

$$C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Pour tout i compris entre 1 et m et pour tout j compris entre 1 et p, le coefficient $c_{i,j}$ est égal au produit de la matrice ligne correspondant à la ligne i de A par la matrice colonne correspondant à la colonne j de B :

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \underbrace{a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \dots + a_{i,n} b_{n,j}}_{n \text{ termes}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \end{aligned}$$

Attention

De la définition ci-dessus, nous déduisons que le produit de deux matrices n'est en général pas commutatif !

➜ Même si les deux produits sont possibles, nous avons en général : $A \times B \neq B \times A$.

Donnons un exemple, pour mieux comprendre la « technique » à utiliser lorsque nous effectuons le produit d'une matrice par une autre.
Nous allons mettre quelques couleurs, pour mieux repérer les correspondances (sur une ligne, sur une colonne).

Exemple

Reprenons les deux matrices A et B vues au début de cette partie :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Nous avons dit plus haut que leurs tailles permettaient de faire le produit de A par B.

➜ Soit la matrice C, égale à ce produit, qui sera donc de taille 2×2 :

$$\begin{aligned} C &= A \times B \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 4 \times (-5) + 6 \times 0 & 2 \times 2 + 4 \times 3 + 6 \times (-1) \\ 3 \times 1 + 5 \times (-5) + 7 \times 0 & 3 \times 2 + 5 \times 3 + 7 \times (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -18 & 10 \\ -22 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) La taille des matrices permet aussi de faire le produit de B par A.

➜ Soit la matrice D, égale à ce produit, qui sera donc, elle, de taille 3×3, **différente de celle de C**.

Nous remarquons d'ores et déjà que, leurs tailles étant différentes, $D \neq C$.

$$\begin{aligned} D &= B \times A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 3 & 1 \times 4 + 2 \times 5 & 1 \times 6 + 2 \times 7 \\ -5 \times 2 + 3 \times 3 & -5 \times 4 + 3 \times 5 & -5 \times 6 + 3 \times 7 \\ 0 \times 2 + (-1) \times 3 & 0 \times 4 + (-1) \times 5 & 0 \times 6 + (-1) \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 14 & 20 \\ -1 & -5 & -9 \\ -3 & -5 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si, encore une fois, le produit matriciel n'est en général pas commutatif, nous pouvons néanmoins donner quelques propriétés.

Propriété

A, B et C sont des matrices dont les tailles autorisent les calculs indiqués.

- **Associativité :**

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C$$

- **Distributivité à gauche :**

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

- **Distributivité à droite :**

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

- **Avec k réel :**

$$(kA) \times B = \mathrm{A} \times (kB) = k(A \times B)$$

2 Les matrices carrées

Nous allons maintenant voir le cas particulier des matrices carrées.
Pour ces matrices, nous allons pouvoir définir, si elle existe, leur **matrice inverse** et leurs **matrices puissances**.

a. Définitions et théorèmes

Définition

Matrice carrée :

n est un entier naturel non nul.

On appelle matrice carrée d'ordre n toute matrice de taille $n \times n$.

Définition

Matrice unité :

On appelle matrice unité d'ordre n la matrice I_n, carrée d'ordre n, dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale qui sont égaux à 1.

Donc, pour la matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n, on parle de matrice unité si :

$$\begin{cases} a_{i,j} = 1 \text{ si } i = j \\ a_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Ainsi, I_n s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété

- Pour toute matrice A carrée d'ordre n :

$$I_n \times A = A \times I_n = A$$

- Pout toute matrice colonne C de taille $n \times 1$:

$$I_n \times C = C$$

- Pour toute matrice ligne L de taille $1 \times n$:

$$L \times I_n = L$$

b. Opérations sur les matrices carrées

1 Puissance d'une matrice carrée

Il est possible de calculer la puissance p-ième d'une matrice carrée.

Propriété

p est un entier naturel non nul et A est une matrice carrée d'ordre n.

- La p-ième puissance de la matrice A, notée A^p, est la matrice définie par :

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p \text{ fois}}$$

Par convention, $A^0 = I_n$.

Il y a une particularité pour les **matrices diagonales**, c'est-à-dire des matrices carrées dont les seuls coefficients non nuls (s'ils existent) sont situés sur la diagonale principale.

- La matrice unité est une matrice diagonale.

Regardons ce qui se passe pour une matrice carrée d'ordre 4.

Soit la matrice carrée diagonale suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous allons maintenant calculer $B = (b_{i,j}) = A^2 = A \times A$.

- Pour cela, commençons par regarder ce qui se passe pour les coefficients des deux premières lignes :

$$b_{1,1} = 2 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 2^2$$
$$b_{1,2} = 2 \times 0 + 0 \times (-3) + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$
$$b_{1,3} = 2 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 6 + 0 \times 0 = 0$$
$$b_{1,4} = 2 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times (-1) = 0$$

$$b_{2,1} = 0 \times 2 + (-3) \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$
$$b_{2,2} = 0 \times 0 + (-3) \times (-3) + 0 \times 0 + 0 \times 0 = (-3)^2$$
$$b_{2,3} = 0 \times 0 + (-3) \times 0 + 0 \times 6 + 0 \times 0 = 0$$
$$b_{2,4} = 0 \times 0 + (-3) \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times (-1) = 0$$

Nous voyons tout de suite que les coefficients de B s'annulent, sauf ceux de la diagonale principale, avec $b_{1,1} = (a_{1,1})^2$, $b_{2,2} = (a_{2,2})^2$, $b_{3,3} = (a_{3,3})^2$ et $b_{4,4} = (a_{4,4})^2$.

➜ Nous avons alors :

$$B = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

À retenir

Cette propriété pour le carré d'une matrice diagonale d'ordre 4 se généralise à toute puissance p-ième (p entier naturel).

Elle se généralise aussi à toute matrice diagonale de taille n (n entier naturel non nul).

Ainsi, nous avons :

$$A^7 = \begin{pmatrix} 2^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 128 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\,187 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 279\,936 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Astuce

La plupart du temps, pour calculer la puissance p-ième d'une matrice A, nous utilisons la calculatrice. Mais, si nous devions calculer « manuellement » A^4, par exemple, plutôt que de calculer $A \times A \times A \times A$, nous pourrions calculer A^2, puis faire le produit $A^2 \times A^2$, ce qui fait déjà moins d'opérations à faire !

2 Inverse d'une matrice carrée

Une matrice carrée peut admettre une **matrice inverse**.

Définition

Matrice inverse d'une matrice carrée :

A est une matrice carrée d'ordre n.
S'il existe une matrice B, carrée d'ordre n, telle que $A \times B = B \times A = I_n$, alors :

- la matrice A est une matrice inversible ;
- la matrice B est la matrice inverse de A.
  - ➜ Cette matrice inverse de A est unique et est notée A^{-1}.

Regardons le cas particulier des matrices carrées de taille 2.

Propriété

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

➜ La matrice inverse de A sera alors égale à :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Notons que $ad - bc$ est appelé **déterminant** de la matrice carrée A d'ordre 2.

Nous allons maintenant donner une méthode pour calculer A^p (p entier naturel non nul) à laquelle vous serez confrontés lors d'exercices.

1. Généralement, l'exercice vous guidera pour montrer que la matrice A peut s'écrire sous la forme : $A = P^{-1} \times D \times P$, où la matrice P est inversible et où la matrice D

est une matrice diagonale.

2. Il s'agira alors de démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel p non nul :

$$A^p = P^{-1} \times D^p \times P$$

3. Connaissant la matrice D, qui est diagonale, il sera facile de calculer D^p avec la méthode que nous avons donnée au point précédent.

c. Connaissant la matrice P, nous pourrons alors calculer le produit matriciel $P^{-1} \times D \times P$ et ainsi exprimer A^p en fonction de p.

→ Cette méthode est appelée « **diagonalisation** ».

Nous verrons dans un cours prochain une application directe de cette méthode.

3 Écriture matricielle de systèmes linéaires

Nous connaissons maintenant les matrices et leurs principales opérations.
Nous allons maintenant voir comment traduire « matriciellement » des systèmes linéaires et les résoudre en effectuant des calculs sur les matrices.

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y est de la forme, avec a, b, c, d, e et f des réels :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont les couples $(x\ ;\ y)$ vérifiant simultanément ces deux équations.

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} A \times X &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, le système peut s'écrire sous la forme $A \times X = B$.

➜ Dans cette écriture matricielle, A est la matrice associée au système.

Les deux équations linéaires sont ainsi transformées en une seule équation matricielle, d'inconnue X.

➜ Nous pouvons généraliser cela à des systèmes de n équations linéaires à n inconnues, avec $n \geq 2$.

Théorème

Si A est une matrice carrée inversible, de taille n, et B une matrice colonne de n lignes, alors le système linéaire écrit sous la forme $A \times X = B$ admet une unique solution définie par la matrice : $A^{-1} \times B$.

➜ Cette solution sera une matrice colonne de n lignes, qui nous donnera le $n\text{-uplet}$ solution de $\mathscr{S}$.

Démonstration

Si $A \times X = B$ et si A est inversible, alors :

$$\begin{aligned} A^{-1} \times (A \times X) = A^{-1} \times B &\Leftrightarrow (A^{-1} \times A) \times X = A^{-1} \times B \\ &\Leftrightarrow I_n \times X = A^{-1} \times B \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1} \times B \end{aligned}$$

Propriété

Si la matrice associée au système n'est pas inversible, alors :

- soit l'ensemble solution est vide,
- soit il contient une infinité de solutions.

Prenons un exemple avec un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues, et regardons comment nous pouvons le résoudre grâce aux matrices.

Exemple

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} -x + 4y = 9 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Posons, comme nous l'avons vu précédemment :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

➜ Ainsi, nous pouvons écrire le système sous la forme matricielle : $A \times X = B$.

Nous voyons que $-1 \times 2 - 4 \times 3 = -14 \neq 0$.

➜ A est inversible et, en utilisant la propriété vue plus haut :

$$A^{-1} = -\frac{1}{14} \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

➜ Il existe donc un unique couple solution défini par $X = A^{-1} \times B$.

Cela nous donne :

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \times B \\ &= -\frac{1}{14} \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{14} \times \begin{pmatrix} 2 \times 9 + (-4) \times 1 \\ -3 \times 9 + (-1) \times 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{14} \times \begin{pmatrix} 14 \\ -28 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

➜ Le couple solution est : $\mathscr{S} = \{(-1\ ;\ 2)\}$.

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons défini la notion de matrice de taille $m \times n$ (m et n deux entiers naturels non nuls), puis les opérations sur les matrices (addition, soustraction, produit lorsque c'est possible) avec leurs propriétés, ainsi que la matrice inverse lorsqu'elle existe et les puissances d'une matrice carrée.
Enfin, nous avons montré comment traduire « matriciellement » un système d'équations linéaires, puis comment le résoudre à l'aide des matrices.