

Raisonnement par récurrence

Introduction :

En mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n .

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$, c'est-à-dire que pour tout entier naturel $n > 0$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Nous pouvons vérifier ce résultat pour $n = 2$ et pour $n = 3$:

Pour $n = 2$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 3 \\ \frac{2(2+1)}{2} &= 3 \end{aligned}$$

Pour $n = 3$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 &= 6 \\ \frac{3(3+1)}{2} &= 6 \end{aligned}$$

Même si ce résultat est vrai jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas pour autant qu'il est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : le raisonnement par récurrence.

1 | Le raisonnement par récurrence

a. Principe

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 fixé, on procède en

trois étapes.

→ Avant de commencer, on note P_n la proposition que l'on va démontrer.

1 Initialisation

On vérifie que P_{n_0} est vraie, c'est-à-dire que la proposition est vraie pour le premier indice n_0 .

→ On dit qu'on a **initialisé** la récurrence.

2 Hérédité

On suppose que, pour un entier naturel quelconque $k \geq n_0$, P_k est vraie. Sous cette hypothèse (dite de récurrence), on démontre que la proposition P_{k+1} est vraie.

→ On a ainsi prouvé que l'hypothèse de récurrence « P_n vraie » est **héréditaire**.

3 Conclusion

Lorsque les deux premières étapes ont été réalisées, on peut conclure.

→ Par récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

En effet :

- on a montré que P_{n_0} est vraie ;
- on a démontré l'hérédité : si P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie ;
- donc, avec $n = n_0$, P_{n_0+1} est vraie ;
- par hérédité, $P_{(n_0+1)+1} = P_{n_0+2}$ est vraie ;
- toujours par hérédité, $P_{(n_0+2)+1} = P_{n_0+3}$ est aussi vraie ;
- et ainsi de suite...

→ C'est ce que l'on appelle un raisonnement par récurrence.



Illustration

Démontrons maintenant la formule vue en introduction à l'aide du raisonnement par récurrence et montrons que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

→ Notons P_n la proposition : $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1 Initialisation

La proposition P_1 est vraie, car $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

On conçoit donc que, si l'on sait démontrer que, pour $n \geq 1$, « P_n vraie » entraîne « P_{n+1} vraie », alors la proposition est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2 Hérédité

Supposons donc que P_k est vraie pour un entier naturel $k \geq 1$, c'est-à-dire que, pour un entier naturel $k \geq 1$:

$$1 + 2 + \dots + (k-1) + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

→ C'est l'hypothèse de récurrence.

Montrons maintenant que la propriété est vraie au rang supérieur ($k+1$), c'est-à-dire que P_{k+1} est vraie.

Autrement dit, montrons que :

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Comme P_k est vraie, dans la somme $1 + 2 + \dots + k + (k+1)$, on peut remplacer les k premiers termes par $\frac{k(k+1)}{2}$.

→ On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= \overbrace{(1 + 2 + \dots + k)}^{\frac{k(k+1)}{2}} + (k + 1) \\
 &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1)
 \end{aligned}$$

→ En factorisant par $(k + 1)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= (k + 1) \frac{k}{2} + (k + 1) \\
 &= (k + 1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)
 \end{aligned}$$

→ En réduisant le deuxième facteur au même dénominateur 2, on a :

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= (k + 1) \frac{k + 2}{2} \\
 &= \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2}
 \end{aligned}$$

→ Ainsi, P_{k+1} est vraie.

3 Conclusion

P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

→ C'est-à-dire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$1 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

2 | Exemples

La meilleure façon de se familiariser avec le raisonnement par récurrence, c'est de le travailler. Nous donnons donc ici quatre exemples d'un tel raisonnement.

→ N'hésitez pas à mener vous-même le raisonnement à partir de la formule à démontrer, avant de regarder le déroulé donné.

a. Exemple 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

Montrons par récurrence que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs et que la suite est croissante.



Une suite (u_n) est croissante si, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.

Il s'agit ici donc de démontrer que $0 < u_n \leq u_{n+1}$, pour tout entier naturel n .

→ Commençons par noter P_n la proposition : $0 < u_n \leq u_{n+1}$.

1 Initialisation

$$u_0 = 1$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{u_0 + 1} \\ &= \sqrt{1 + 1} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

On a bien : $0 < 1 < \sqrt{2}$, donc : $0 < u_0 \leq u_1$.

→ La proposition P_0 est vraie.

2 Hérédité

Supposons la proposition P_k vraie pour un certain entier naturel k , c'est-à-dire :

$$0 < u_k \leq u_{k+1}$$

→ C'est l'hypothèse de récurrence.

Montrons que la proposition P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire que $0 < u_{k+1} \leq u_{k+2}$.

En utilisant la définition de la suite (u_n) , c'est équivalent à :

$$0 < \sqrt{u_k + 1} \leq \sqrt{u_{k+1} + 1}$$

Hypothèse de récurrence :	$0 < u_k \leq u_{k+1}$
On ajoute 1 aux inégalités :	$1 < u_k + 1 \leq u_{k+1} + 1$
Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, elle ne change pas le sens des inégalités, et on obtient :	$\sqrt{1} < \sqrt{u_k + 1} \leq \sqrt{u_{k+1} + 1}$
Soit :	$0 < 1 < u_{k+1} \leq u_{k+2}$

→ La propriété P_{k+1} est donc vraie.

3 Conclusion

Par récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n .

→ La suite (u_n) est croissante et à termes strictement positifs pour tout entier naturel n .

b. Exemple 2

Démontrons que, pour tout entier naturel n , $(4^n + 2)$ est divisible par 3.

→ Notons P_n la proposition « $(4^n + 2)$ est divisible par 3 ».

1 Initialisation

Pour $n = 0$, on a :

$$4^0 + 2 = 1 + 2$$

$$= 3$$

3 est bien divisible par 3.

→ La proposition P_0 est vraie.

2 Hérédité

Supposons la proposition P_k vraie pour un entier naturel k .



Pour montrer qu'un entier x est divisible par un entier a , il faut montrer qu'il existe un entier b tel que $x = a \times b$.

$(4^k + 2)$ est divisible par 3, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif b tel que $4^k + 2 = 3 \times b$.

→ C'est l'hypothèse de récurrence.

Montrons maintenant que la proposition P_{k+1} est vraie, c'est à dire que $(4^{k+1} + 2)$ est aussi divisible par 3.

On cherche à montrer qu'il existe un entier relatif c tel que $4^{k+1} + 2 = 3 \times c$.

Hypothèse de récurrence :	$4^k + 2 = 3 \times b$
On soustrait 2 à l'égalité :	$4^k = 3 \times b - 2$
De plus :	$4^{k+1} + 2 = 4^k \times 4 + 2$
On remplace 4^k par $(3 \times b - 2)$:	$4^{k+1} + 2 = (3 \times b - 2) \times 4 + 2$
On développe :	$4^{k+1} + 2 = 12b - 8 + 2$ $= 12b - 6$

On factorise par 3 :	$4^{k+1} + 2 = 3 \times (4b - 2)$
b étant un entier relatif, $4b - 2$ est donc aussi un entier relatif. Posons ainsi un entier relatif c tel que $4b - 2 = c$. On obtient :	$4^{k+1} + 2 = 3 \times c$

→ Donc la proposition P_{k+1} est vraie.

3 Conclusion

Pour tout entier naturel n , P_n est vraie.

→ Pour tout entier naturel n , $4^n + 2$ est divisible par 3.

c. Exemple 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

→ Notons P_n la proposition « $u_n = \frac{2}{2n+1}$ ».

1 Initialisation

Pour $n = 0$:

$$u_0 = 2$$

$$\frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2$$

→ La proposition P_0 est vraie.

2 Hérédité

Supposons la proposition P_k vraie pour un entier naturel k , c'est-à-dire que, pour un entier naturel k :

$$u_k = \frac{2}{2k+1}$$

→ C'est l'hypothèse de récurrence.

Montrons maintenant que la proposition est vraie au rang $(k+1)$, c'est-à-dire :

$$u_{k+1} = \frac{2}{2(k+1)+1}$$

Hypothèse de récurrence :	$u_k = \frac{2}{2k+1}$
Par définition de la suite :	$u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k}$
On remplace u_k par $\frac{2}{2k+1}$:	$u_{k+1} = \frac{\frac{2}{2k+1}}{1+\frac{2}{2k+1}}$
On réduit au même dénominateur le dénominateur du deuxième terme :	$u_{k+1} = \frac{\frac{2}{2k+1}}{\frac{2k+1+2}{2k+1}}$ $= \frac{2}{2k+1} \times \frac{2k+1}{2k+1+2}$
On simplifie par $(2k+1)$:	$u_{k+1} = \frac{2}{2k+2+1}$
On factorise $(2k+2)$ par 2 :	$u_{k+1} = \frac{2}{2(k+1)+1}$

→ Donc la proposition P_{k+1} est vraie.

3 Conclusion

Pour tout entier naturel n , P_n est vraie.

→ Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

d. Exemple 4 : inégalité de Bernoulli

L'inégalité de Bernoulli dit que, pour tout réel x strictement positif et n entier naturel, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Nous utiliserons cette inégalité dans le cours suivant, sur les suites. Nous allons donc la démontrer ici, par récurrence.

Soit x un réel strictement positif.

→ Notons P_n la proposition « $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ ».

1 Initialisation

Pour $n = 0$:

$$\begin{aligned}(1 + x)^0 &= 1 \\ &\geq 1 + 0 \times x\end{aligned}$$

→ Donc la proposition P_0 est vraie.

2 Hérédité

Supposons la proposition P_k vraie pour un entier naturel k , c'est-à-dire, que pour un entier naturel k :

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx$$

→ C'est l'hypothèse de récurrence.

Montrons maintenant que la proposition est vraie au rang $(k + 1)$, c'est-à-dire :

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$$

On a :	$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k \times (1 + x)$
--------	--

Hypothèse de récurrence :	$(1 + x)^k \geq 1 + kx$
D'où, en multipliant par $(1 + x)$ ($x > 0$, donc $x + 1 > 0$, et cela ne change pas le sens des inégalités) :	$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x)$
On développe :	$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + x + kx + kx^2$
On factorise $(x + kx)$ par x :	$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + x(k + 1) + kx^2$
k étant un entier positif, $kx^2 \geq 0$:	$1 + x(k + 1) + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$
D'où :	$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$

→ La proposition P_{k+1} est vraie.

3 Conclusion

Pour tout entier naturel n , P_n est vraie.

→ Pour tout entier naturel n et tout réel x strictement positif, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons vu ce principe puissant qu'est le raisonnement par récurrence : il permet de démontrer assez rapidement une propriété sur l'ensemble des entiers naturels, ou une partie de cet ensemble.

Ainsi, notamment en travaillant sur les suites, nous ferons souvent appel à ce type de raisonnement.