Fonctions convexes

Pour retrouver le cours correspondant de l'option « Mathématiques complémentaires » :

→ *Fonctions convexes*

Introduction :

Les objectifs de ce cours de spécialité « Mathématiques » sont de définir la notion graphique de convexité (et de concavité), puis de donner le lien entre la convexité et la dérivée f' de f, puis la dérivée seconde f'' de f, et enfin de définir un point d'inflexion pour la courbe représentative d'une fonction.

1 Définitions graphiques

a. Fonction convexe sur un intervalle

Définition

Fonction convexe :

Soit I un intervalle et f une fonction définie et dérivable sur I.

Une fonction est convexe sur l'intervalle I lorsque la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle.

b. Fonction concave sur un intervalle

Définition

Fonction concave :

Soit I un intervalle et f une fonction définie et dérivable sur I.

Une fonction est concave sur l'intervalle I lorsque la courbe représentative de la fonction f est au-dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle.

Ces deux notions graphiques sont abstraites.
Nous allons voir une autre méthode pour démontrer la convexité ou concavité d'une fonction sur un intervalle : il s'agit d'établir le lien qui existe entre une fonction convexe ou concave sur un intervalle et la dérivée de cette fonction sur cet intervalle.

2 | Convexité et lien avec la dérivation

a. Convexité et sens de variation de la dérivée

Théorème

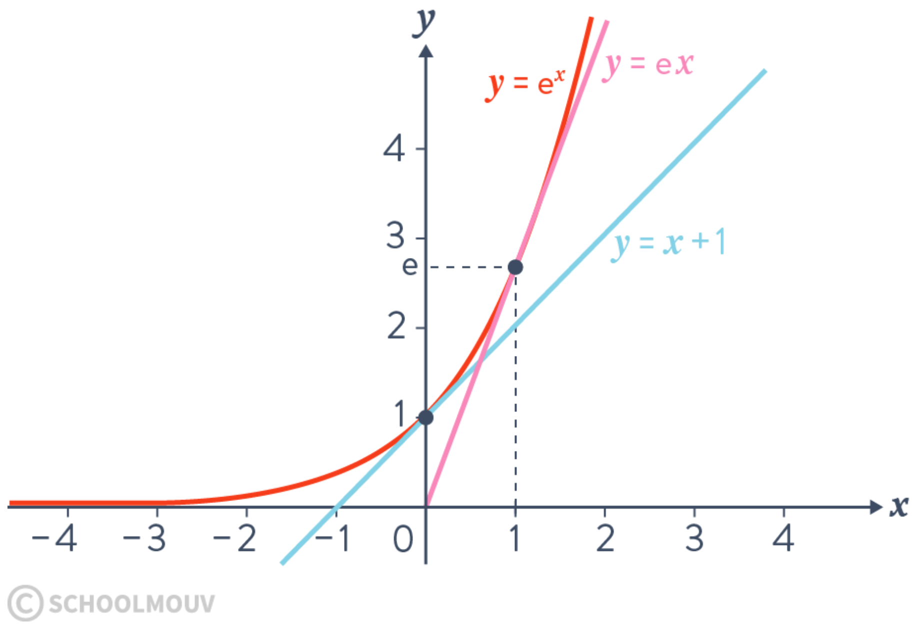
Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Prenons un exemple simple, avec la fonction exponentielle que nous avions étudiée en première.

→ La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, car sa dérivée, qui est la fonction exponentielle, est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Graphiquement, on peut remarquer que la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de toutes ses tangentes sur $\mathbb{R}$, notamment de celles aux points de la courbe d'abscisse 0, 1, ou encore 2.



b. Convexité et signe de la dérivée seconde

Nous avions utilisé, dans une démonstration du cours sur les limites de fonctions, la notion de dérivée seconde. Nous allons ici la préciser.

Définition

Dérivée seconde :

Soit I un intervalle ; f est une fonction définie et dérivable sur I ; f' est sa dérivée.

Si la fonction f' est dérivable sur I, on note f'' (« f seconde ») sa dérivée. f'' est aussi appelée dérivée seconde de la fonction f.

Nous pouvons maintenant relier convexité et dérivée seconde.

Théorème

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable deux fois sur I.

- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.

Montrons que si f'' est positive sur un intervalle, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes (c'est-à-dire convexe) sur cet intervalle.

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $I = [a\ ;\ b]$ (a et $b\ \in \mathbb{R}$) et $x_0 \in I$.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2. Soit ϕ la fonction définie sur I par :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= f(x) - \big(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\big) \\ &= f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0) \end{aligned}$$

3. Étudions le signe de $\phi(x)$ sur I : il va donner la position de la courbe par rapport à la tangente au point d'abscisse x_0.

Pour tout $x \in I$, la fonction ϕ est dérivable sur I en tant que somme de fonctions dérivables sur I.

→ Pour tout $x \in I$:

$$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

$$\text{[car } f'(x_0), f(x_0) \text{ et } x_0 \text{ sont des constantes]}$$

$f'' \geq 0$ sur I, donc f' est croissante sur I et :

- pour tout $x \in [a\ ;\ x_0]$, $f'(x) - f'(x_0) = \phi'(x) \leq 0$;
- pour tout $x \in [x_0\ ;\ b]$, $f'(x) - f'(x_0) = \phi'(x) \geq 0$;
- on a $\phi'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$.

→ La fonction ϕ est donc décroissante sur l'intervalle $[a\ ;\ x_0]$ et croissante sur l'intervalle $[x_0\ ;\ b]$.

De plus :

$$\begin{aligned}\phi(x_0) &= f(x_0) - \left(f'(x_0)(x_0 - x_0) + f(x_0)\right) \\ &= f(x_0) - f(x_0) \\ &= 0\end{aligned}$$

→ La fonction ϕ atteint un minimum sur l'intervalle I en x_0 et ce minimum est 0.

C Pour tout $x \in I$, $\phi(x) \geq 0$, c'est-à-dire :

$$f(x) - \left(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right) \geq 0$$

Ce qui est équivalent à :

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

→ La courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse x_0.

Ceci étant vrai pour toutes les valeurs $x_0 \in I$, la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur I.

→ La fonction f est convexe sur I.

Remarque : La démonstration reste vraie si, au lieu de a et b, on a $-\infty$ et $+\infty$ ou tout intervalle ouvert ou semi-ouvert.

Exemple

On note f la fonction logarithme népérien qui est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

→ Nous découvrirons cette fonction de manière détaillée dans des prochains cours.

1 Sa dérivée est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

2 Sa dérivée seconde est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

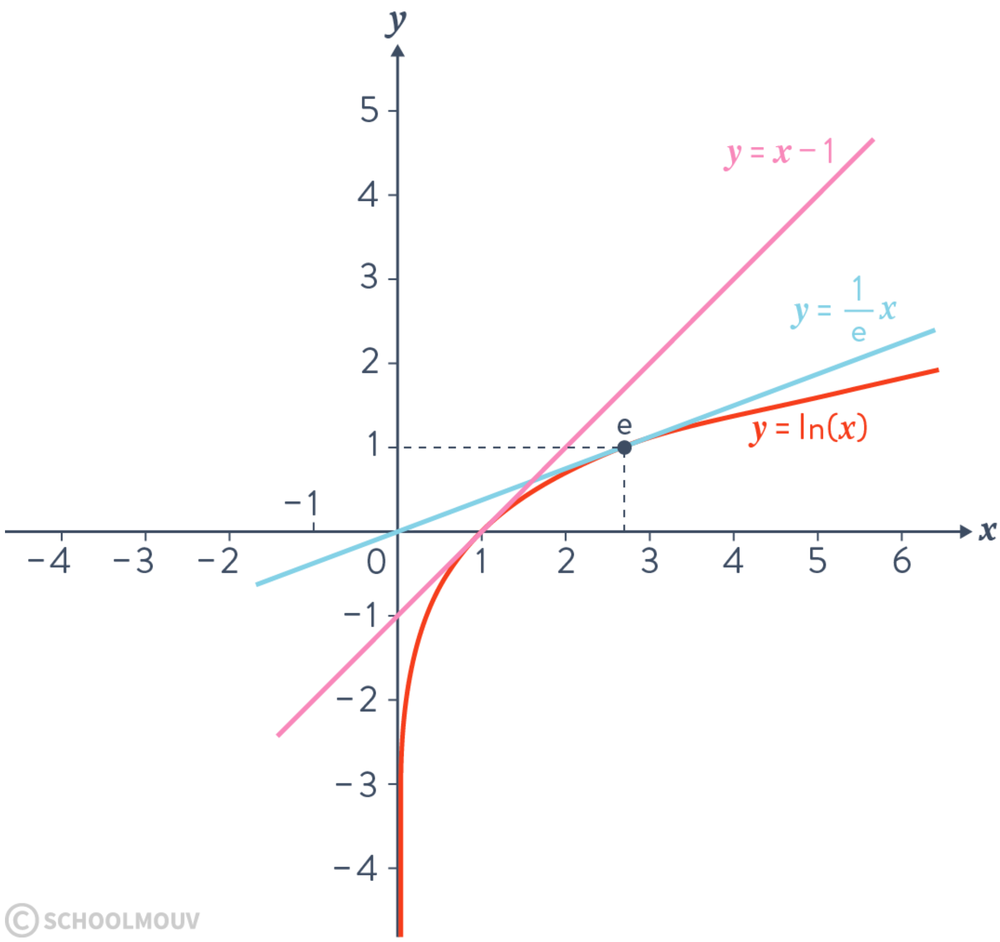
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

c Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

→ La fonction logarithme népérien est concave sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Graphiquement, on peut remarquer que la courbe représentative de la fonction logarithme est au-dessous de toutes ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, notamment de celle aux points de la courbe d'abscisses 1 et e.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\mathrm{e}^x + (2-x)\mathrm{e}^x \\ &= (1-x)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

2. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\mathrm{e}^x + (1-x)\mathrm{e}^x \\ &= -x\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

C. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc :

- $f''(x) = -x\mathrm{e}^x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^-$.

→ La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^-$.

- $f''(x) = -x\mathrm{e}^x \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

→ La fonction f est concave sur $\mathbb{R}^+$.

Nous allons voir dans la partie suivante que ce point d'abscisse 0 est un point particulier.

3 | Point d'inflexion

Dans le dernier exemple, nous avons vu que la fonction $f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$ était convexe sur $\mathbb{R}^-$ et concave sur $\mathbb{R}^+$.

→ Le point d'abscisse 0 est appelé **point d'inflexion** pour la courbe représentative de f. Définissons cette notion.

a. Définition

Définition

Point d'inflexion :

Soit I un intervalle et f une fonction définie et dérivable sur I, de représentation graphique $\mathscr{C}_f$.
Soit un point $A \in \mathscr{C}_f$.

Le point A est un point d'inflexion pour la courbe $\mathscr{C}_f$ lorsque la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en A.

→ En l'abscisse du point A, la fonction f passe de concave à convexe, ou l'inverse.

Attention

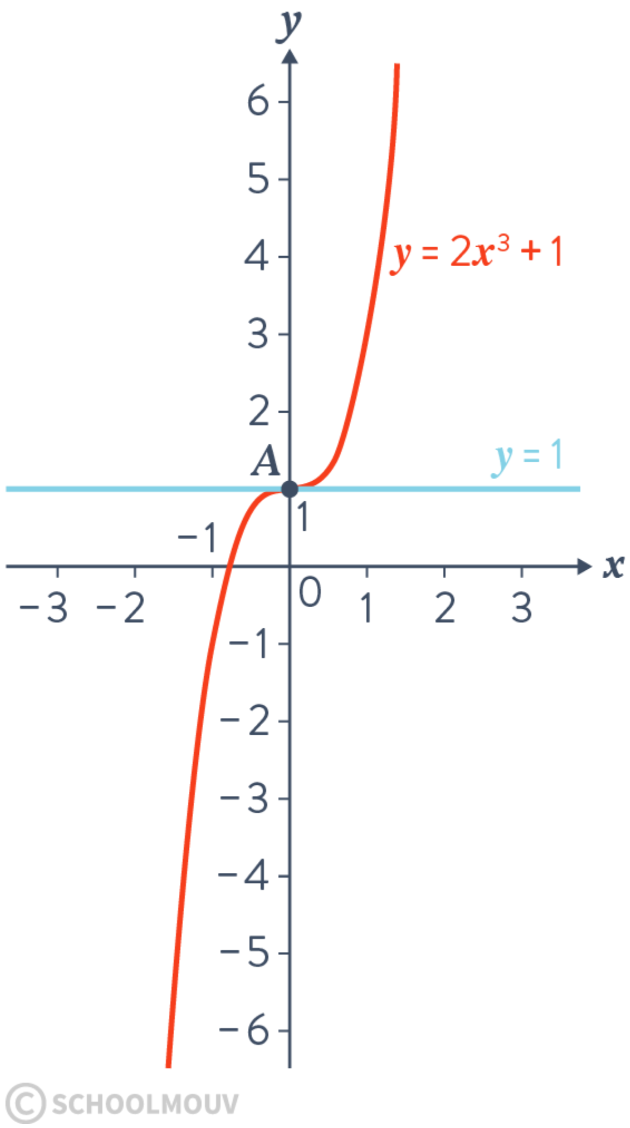
Un point est « point d'inflexion » pour la **courbe représentative d'une fonction**, et non pas pour la fonction elle-même.

Exemple

Prenons un autre exemple.

On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 1$.
La courbe représentative de f traverse sa tangente au point d'abscisse 0, qui a pour équation $y = 1$.

→ Le point $A\,(0\ ;\ 1)$ de la courbe représentative de f est donc un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.



b. Point d'inflexion et dérivée seconde

Toujours dans l'exemple de la partie 2 que nous évoquions, nous avons vu que la dérivée seconde s'annulait et changeait de signe au point d'abscisse 0.

Théorème

Soit I un intervalle et f une fonction définie et deux fois dérivable sur I, de représentation graphique $\mathscr{C}_f$.
Soit un point $A \in \mathscr{C}_f$.

A est un **point d'inflexion** pour $\mathscr{C}_f$ si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x_A.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 1$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 6x^2$$

2. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = 12x$$

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow 12x > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 &\Leftrightarrow 12x < 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(0) &= 12 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

C. f'' s'annule en changeant de signe en $x = 0$.

→ Le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 est un point d'inflexion pour la courbe représentative de f.

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons découvert les notions de dérivée seconde d'une fonction, de convexité et de concavité sur un intervalle, ainsi que de point d'inflexion pour la courbe représentative d'une fonction. Grâce à elles, nous pouvons encore approfondir l'étude des fonctions.