Fonction logarithme népérien (ln)

Pour retrouver le cours correspondant de la spécialité « Mathématiques » :

→ *Fonction logarithme népérien*

Introduction :

Dans ce cours de l'option « Mathématiques complémentaires », nous allons définir une nouvelle fonction : le logarithme népérien.
Après l'avoir définie à partir de la fonction exponentielle vue en première, nous étudierons ses propriétés algébriques et nous résoudrons des équations et inéquations.
Enfin, nous l'étudierons en tant que fonction en voyant notamment ses propriétés graphiques.

1 Définition du logarithme népérien

Définition

Fonction logarithme népérien :

Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, appelée logarithme népérien de a et notée $\ln(a)$ ou $\ln a$.

→ On définit ainsi sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction logarithme népérien, notée $\ln$, qui, à tout $x > 0$, associe le réel $\ln(x)$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \ln :]0\ ;\ +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

La fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle sont des **fonctions réciproques** l'une de l'autre.

→ On en déduit les propriétés suivantes.

Propriété

Si a est un réel strictement positif et si b est un réel, alors :

$$\mathrm{e}^b = a \Leftrightarrow b = \ln(a)$$

→ Pour tout réel strictement positif a : $\mathrm{e}^{\ln(a)} = a$.

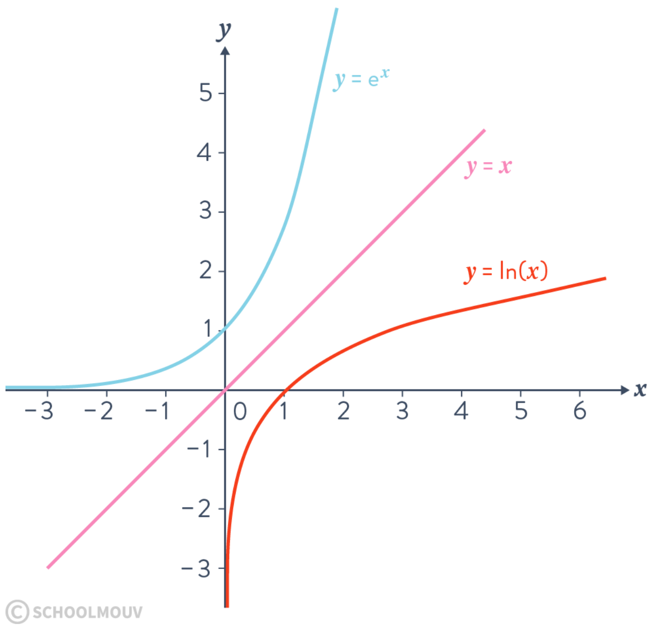
→ Pour tout réel b : $\ln\left(\mathrm{e}^b\right) = b$.

Nous pouvons aussi donner deux valeurs remarquables :

→ $\ln(1) = 0$, car $\mathrm{e}^0 = 1$;

→ $\ln(\mathrm{e}) = 1$, car $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

Dans un repère orthonormé, les courbes de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Cette symétrie existe pour toutes les fonctions réciproques l'une de l'autre, comme les fonctions carré et racine carrée sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2 | Propriétés algébriques du logarithme népérien

Dans cette partie, nous verrons que, comme la fonction exponentielle, la fonction logarithme népérien vérifie certaines propriétés algébriques.

Propriété

Pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$ et pour tout nombre entier relatif n :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$;
- $\ln(a^n) = n\ \ln(a)$.

Remarquons que l'on peut généraliser la première propriété à un nombre fini n de réels strictement positifs $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. On obtient alors :

$$\ln(a_1\, a_2\ \ldots\ a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_n)$$

→ On dit que la fonction logarithme népérien transforme un produit en somme.

Attention

$\ln(a+b) \neq \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration

1. Montrons que, pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Soit $a > 0$ et $b > 0$ deux nombres réels.
Par définition, il existe deux réels x et y tels que $a = \mathrm{e}^x$ et $b = \mathrm{e}^y$. On a donc :

$$\ln(a \times b) = \ln(\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y)$$

Pour tout réel x et y, on a :

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$$

On en déduit donc, les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant des fonctions réciproques :

$$\begin{aligned} \ln(a \times b) &= \ln\left(\mathrm{e}^{x+y}\right) \\ &= x + y \end{aligned}$$

Par définition, on a $x = \ln(a)$ et $y = \ln(b)$.

→ Finalement, on a bien $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$.

2 Montrons que, pour tout nombre réel $a > 0$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Soit $a > 0$ un nombre réel.
Dans l'égalité précédente, prenons $b = \frac{1}{a} > 0$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) &= \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) \\ \text{Or : } \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) &= \ln(1) = 0 \\ \text{Donc : } \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= 0 \end{aligned}$$

→ On en déduit que : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$, pour tout nombre réel $a > 0$.

Exemple

Appliquons ces propriétés sur quelques expressions à simplifier.

→ $\ln(32)$

$$\begin{aligned}\ln(32) &= \ln\left(2^5\right)\\ &= 5\ln(2)\end{aligned}$$

→ $\ln\left(\frac{1}{1\,024}\right)$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{1\,024}\right) &= \ln\left(\frac{1}{2^{10}}\right)\\ &= \ln\left(2^{-10}\right)\\ &= -10\ \ln(2)\end{aligned}$$

→ $\ln(8\sqrt{2})$

$$\begin{aligned}\ln\left(8\sqrt{2}\right) &= \ln\left(2^3\times\sqrt{2}\right)\\ &= \ln\left(2^3\times 2^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \ln\left(2^{\frac{7}{2}}\right)\\ &= \frac{7}{2}\ln(2)\end{aligned}$$

3 | Résolutions d’équations et inéquations avec le logarithme népérien

En utilisant les propriétés de cette fonction, nous allons pouvoir résoudre des équations et inéquations contenant des logarithmes népériens.

→ Pour cela, nous allons nous appuyer sur des exemples, qui nous montreront les démarches à adopter.

Commençons par donner deux autres propriétés de la fonction $\ln$, qui, comme nous le verrons dans le prochain cours, est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Propriété

Pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$:

- $a=b \Leftrightarrow \ln(a)=\ln(b)$;

- $a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$;
- $a > b \Leftrightarrow \ln(a) > \ln(b)$;

Nous en déduisons que, pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned} \ln(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln(x) > \ln(1) \\ &\Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(x) < 0 &\Leftrightarrow \ln(x) < \ln(1) \\ &\Leftrightarrow x < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < x < 1 \end{aligned}$$

a. Résolution d'équations du type $\ln\big(u(x)\big) = \ln\big(v(x)\big)$

Il est important d'être méthodique dans la résolution de telles équations, car, si nous savons résoudre facilement des équations, nous devons éviter les pièges, notamment celui du domaine de définition de la fonction logarithme népérien.

À retenir

Pour résoudre une équation du type $\ln\big(u(x)\big) = \ln\big(v(x)\big)$, il faut respecter les étapes suivantes :

1. rechercher l'ensemble E des réels tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$;
2. résoudre l'équation $u(x) = v(x)$;
3. prendre les solutions qui sont dans E et rejeter les autres.

Astuce

Il peut arriver que l'ensemble E soit l'ensemble vide, c'est-à-dire que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$ soient incompatibles.

→ Dans ce cas, nous pouvons conclure immédiatement que l'ensemble solution sera l'ensemble vide.

Appliquons maintenant la méthodologie donnée sur un exemple.

Exemple

Résolvons : $\ln(2x) = \ln(x+3)$.

1 **Recherche de l'ensemble de définition**

→ $\ln(x)$ est défini uniquement pour $x > 0$.

Il faut donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

→ L'ensemble de définition est donc $]0\ ;\ +\infty[$.

2 **Résolution de l'équation**

$$\begin{aligned} \ln(2x) = \ln(x+3) &\Leftrightarrow 2x = x+3 \\ &\quad [\text{car } a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)] \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

3 **Vérification**

Nous vérifions que la solution trouvée appartient bien à l'ensemble de définition. Nous avons bien $3 > 0$.

→ $S = \{3\}$.

b. Résolution d'inéquations du type : $\ln\big(u(x)\big) \geq \ln\big(v(x)\big)$

Comme pour la résolution d'équations, donnons la méthode pour résoudre de telles inéquations.

À retenir

Pour résoudre une équation du type $\ln\left(u(x)\right) \geq \ln\left(v(x)\right)$, il faut respecter les étapes suivantes :

1. rechercher l'ensemble E des réels tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$;
2. résoudre l'équation $u(x) \geq v(x)$;
3. ne garder que les solutions qui sont dans E.

Appliquons la méthode sur un exemple.

Exemple

Résolvons : $\ln(2x) \geq \ln(x+3)$.

1 Recherche de l'ensemble de définition

→ L'ensemble de définition ne change évidemment pas, par rapport à l'exemple précédent : $]0\ ;+\infty[$.

2 Résolution de l'inéquation :

$$\begin{aligned}\ln(2x) \geq \ln(x+3) &\Leftrightarrow 2x \geq x+3 \\ &\text{[car } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\text{]} \\ &\Leftrightarrow x \geq 3\end{aligned}$$

3 Vérification

On vérifie encore que la solution est incluse dans l'ensemble de définition. C'est bien le cas.

→ $S = [3\ ;+\infty[$.

C. Résolution d'inéquations plus complexes

Maintenant, résolvons deux inéquations plus complexes, où nous allons faire appel aux propriétés algébriques du logarithme népérien.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,10$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,10 &\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq \ln(0,10) \\ &\text{[car } \left(\tfrac{1}{2}\right)^n > 0 \text{ et } 0,10 > 0, \\ &\text{et } \ln \text{ est strictement croissante]} \\ &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(0,10) \\ &\text{[car } \ln(a^n) = n \ln(a)\text{]} \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,10)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 3,32 \\ &\text{[car } \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) < 0\text{]} \\ &\Leftrightarrow n \geq 3,32\end{aligned}$$

→ L'ensemble solution est constitué de tous les entiers supérieurs ou égaux à 4.

Reprenons l'exemple du cours sur les suites numériques, où un apiculteur souhaitait étendre son activité de production de miel à une nouvelle région.

Exemple

L'évolution du nombre de colonies dans cette région était définie par une suite (C_n), où le terme C_n donnait une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2020 + n$.

- Le nombre de colonies en 2020 était $C_0 = 300$.

- Nous avons montré que, pour tout entier naturel n :

$$C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$$

Nous souhaitons maintenant savoir en quelle année l'apiculteur peut espérer doubler son nombre initial de colonies.

→ Il s'agit donc de résoudre l'équation d'inconnue entière n :

$$C_n \geq 2 \times C_0 = 600$$

$$\begin{aligned} C_n \geq 600 &\Leftrightarrow 625 - 325 \times 0,92^n \geq 600 \\ &\Leftrightarrow 625 - 600 \geq 325 \times 0,92^n \\ &\Leftrightarrow 25 \geq 325 \times 0,92^n \\ &\Leftrightarrow \frac{25}{325} \geq 0,92^n \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{13} \geq 0,92^n \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{13}\right) \geq \ln\left(0,92^n\right) \\ &\text{[car ln et exp sont strictement croissantes]} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{13}\right) \geq n\ln\left(0,92\right) \\ &\text{[car } \ln(a^n) = n\ln(a)\text{]} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{1}{13}\right)}{\ln\left(0,92\right)} \leq n \\ &\text{[car } \ln\left(0,92\right) < \ln\left(1\right) = 0\text{]} \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln\left(13\right)}{\ln\left(0,92\right)} \\ &\text{[car } \ln\left(\tfrac{1}{13}\right) = -\ln(13)\text{]} \end{aligned}$$

Nous avons, au centième près :

$$\frac{-\ln\left(13\right)}{\ln\left(0,92\right)} \approx 30,76$$

Donc la plus petite valeur n recherchée est $n = 31$.

→ L'apiculteur doublera donc son nombre initial de colonies d'abeilles en $2020+31=2051$.

4 | Étude de la fonction $x \mapsto \ln(x)$

Nous allons maintenant effectuer une étude complète de la fonction logarithme népérien.

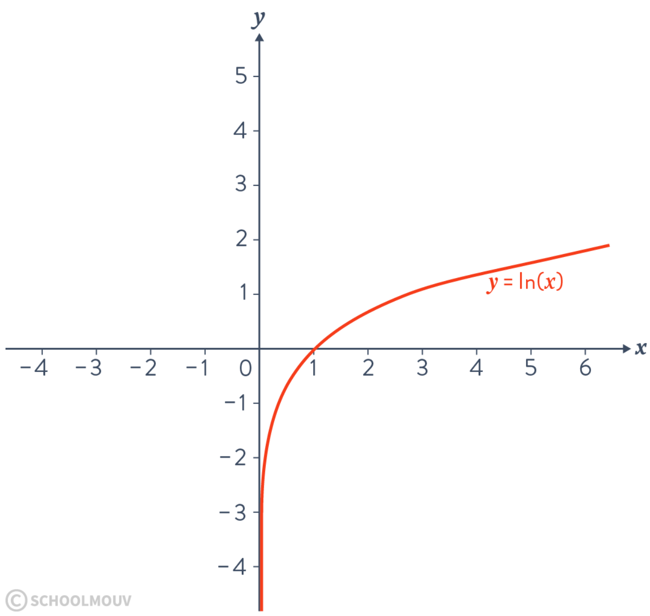
a. Continuité, dérivabilité et sens de dérivation

Pour toute fonction, il est indispensable de connaître ses domaines de définition et de dérivabilité.

Propriété

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

→ Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.



Nous remarquons que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$, et donc que $\ln'(x) > 0$.

→ La fonction $\ln$ est effectivement strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b. Limites

Maintenant que nous connaissons les variations de la fonction logarithme népérien, nous allons nous intéresser aux limites aux bornes de l'ensemble de définition de cette fonction.

Propriété

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

c. Dérivée d'une fonction composée $\ln(u)$, avec u dérivable

Dans cette partie, on appelle u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

À retenir

$\ln(u)$ n'est définie que lorsque u est strictement positive.

Exemple

La fonction $x \mapsto \ln(2x+6)$ n'est définie que lorsque $2x+6 > 0$, c'est-à-dire lorsque $x > -3$.

→ Le domaine de définition est donc : $I =]-3\ ;\ +\infty[$.

Propriété

La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est :

$$\left(\ln(u)\right)' = \frac{u'}{u}$$

Nous reverrons cette formule dans le cours suivant sur les compléments de la dérivation, vue en première.

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons découvert une nouvelle fonction, le logarithme népérien. Nous avons vu ses propriétés algébriques, qui nous ont permis de résoudre des équations et des inéquations. Nous avons ensuite vu ses propriétés graphiques en l’étudiant.