La modélisation de l'écoulement d'un fluide

Cours

Sommaire

I La poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède est une force qui s'oppose à une partie du poids d'un solide plongé dans un fluide. Il est possible d'écrire son expression vectorielle.

A Définition de la poussée d'Archimède

Quand un solide est plongé dans un fluide, il subit une force appelée « poussée d'Archimède ». Cette force s'oppose à une partie de son poids. Elle résulte de la somme des forces pressantes exercées par le fluide sur le solide.

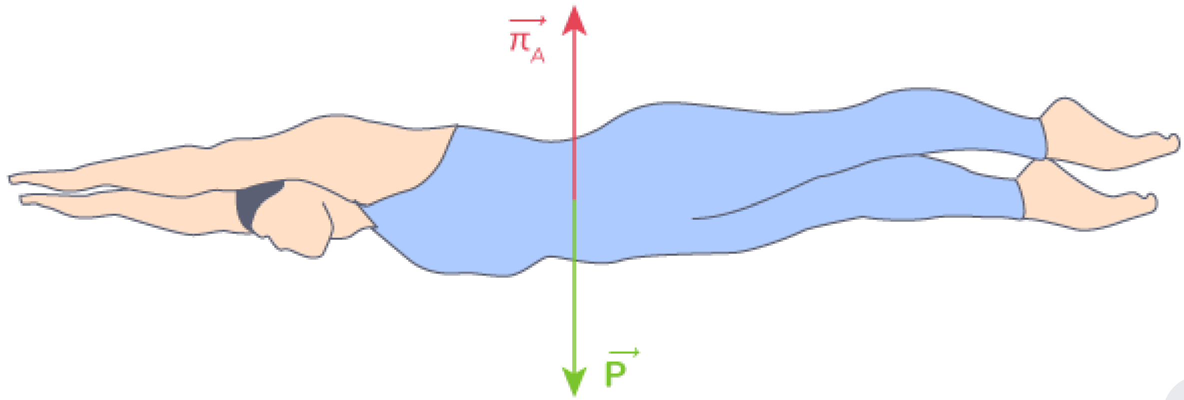
DÉFINITION

Poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède, notée $\overrightarrow{\Pi_A}$, est la force que subit tout corps plongé dans un fluide et qui s'oppose en partie à son poids.

EXEMPLE

Un nageur subit un poids orienté verticalement et vers le bas. Lorsqu'il est immergé dans l'eau, il subit la poussée d'Archimède. Cette force s'oppose en partie à son poids, elle donc également verticale mais orientée vers le haut.



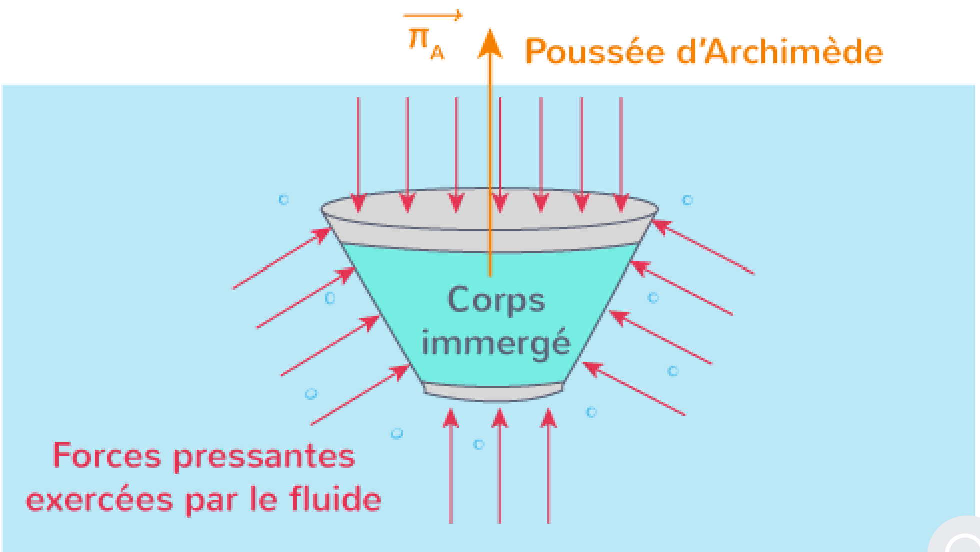
Forces subies par un nageur

PROPRIÉTÉ

La poussée d'Archimède que subit un corps immergé a pour origine la résultante des forces pressantes que le fluide exerce sur lui.

EXEMPLE

Les forces pressantes qu'exerce un fluide sur un corps immergé sont perpendiculaires à chacune de ses parois et leur intensité augmente avec la profondeur. Leur résultante est la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_A}$ et par symétrie, elle est verticale et orientée vers le haut.



Forces pressantes s'exerçant sur un corps immergé

B L'expression vectorielle de la poussée d'Archimède

L'expression vectorielle de la poussée d'Archimède s'obtient en considérant que cette force est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé par l'immersion du solide.

FORMULE

Expression vectorielle de la poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_A}$ que subit un corps est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé par son immersion du solide :

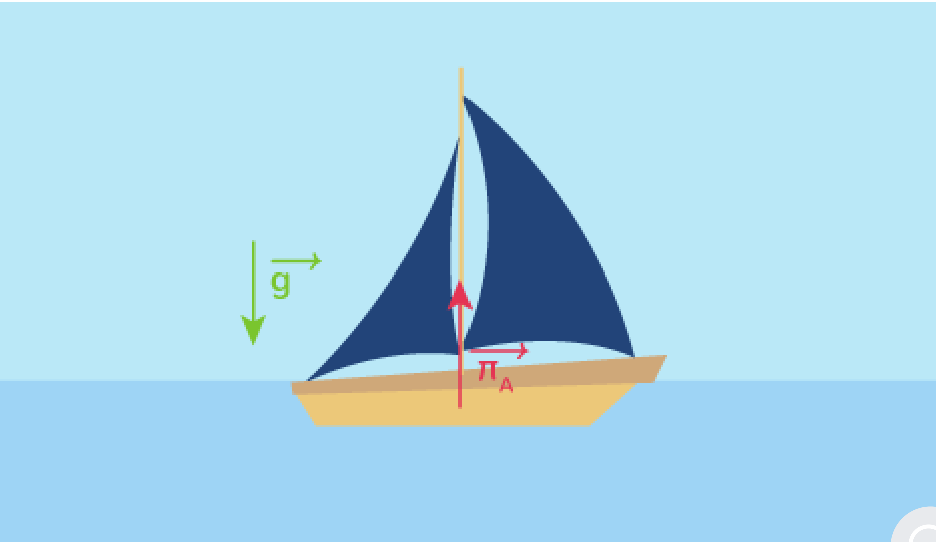
$$\overrightarrow{\Pi_A} = -\overrightarrow{P}_{\text{fluide déplacé}}$$

Son expression vectorielle, en fonction de la masse volumique du fluide ρ_{fluide}, du volume du corps immergé V_{corps} et du champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ est :

$$\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{corps}} \times \overrightarrow{g}$$

EXEMPLE

La poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_A}$ que subit un bateau est bien modélisée par un vecteur orienté dans le sens opposé au vecteur champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$.



Poussée d'Archimède subie par un bateau

DÉMONSTRATION

La poussée d'Archimède $\overrightarrow{\pi_A}$ que subit un corps est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé par son immersion du solide :

$\overrightarrow{\Pi_A} = -\overrightarrow{P}_{\text{fluide déplacé}}$

Or, lors de l'immersion d'un corps de volume V_{corps}, la masse de fluide déplacé par son immersion est :

$m_{\text{fluide}} = \rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{corps}}$

Et son poids est donc :

$\overrightarrow{P_{\text{fluide}}} = \rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{corps}} \times \overrightarrow{g}$

L'expression de la poussée d'Archimède est donc :

$\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{corps}} \times \overrightarrow{g}$

FORMULE

Valeur de la poussée d'Archimède

Puisque l'expression vectorielle de la poussée d'Archimède est :
$\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{corps}} \times \overrightarrow{g}$

Sa valeur est donnée par la relation :

$$\Pi_{A\ (\text{N})} = \rho_{\text{fluide}\ (\text{kg.m}^{-3})} \times V_{\text{corps}\ (m^3)} \times g_{\ (\text{N.kg}^{-1})}$$

EXEMPLE

Le volume d'un nageur est 78,2 L. Lorsqu'il est immergé dans l'eau d'une piscine, dont la masse volumique est $\rho = 1\ 052 \text{ kg.m}^{-3}$, la valeur de la poussée d'Archimède qu'il subit est :
$\Pi_{A\ (\text{N})} = \rho_{\ (\text{kg.m}^{-3})} \times V_{\text{plongeur}\ (m^3)} \times g_{(\text{N.kg}^{-1})}$
$\Pi_A = 1\ 052 \times 78{,}2 \times 10^{-3} \times 9{,}81$
$\Pi_A = 807 \text{ N}$

À RETENIR

Dans l'expression de la valeur de poussée d'Archimède, le volume du corps immergé doit être exprimé en mètre cube (m^3), or il est souvent donné en litre (L). Il est donc important de retenir comment effectuer la conversion :

$$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ L} \Leftrightarrow 1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

II L'écoulement d'un fluide en régime permanent

Un régime permanent est un régime stable dans le temps dont les conditions ne changent pas. L'écoulement d'un fluide incompressible dans un conduit est décrit par son débit volumique et sa vitesse d'écoulement. La relation de Bernoulli illustre la conservation d'énergie du fluide en un point. Une des conséquences de cette relation est l'effet Venturi.

A Le débit volumique d'un fluide incompressible

Un fluide est incompressible si son volume demeure constant sous l'action de pressions extérieures. Le débit volumique d'un fluide incompressible est lié au volume du fluide déplacé pendant une certaine durée écoulée.

DÉFINITION

Fluide incompressible

Un fluide incompressible est un fluide dont le volume ne dépend pas des intensités des forces pressantes qu'il subit.

EXEMPLE

La plupart des liquides, comme l'eau, sont généralement compressibles. Toutefois, lors d'un écoulement, on peut les considérer comme incompressibles.

DÉFINITION

Régime permanent ou stationnaire

On dit qu'un écoulement est en **régime permanent ou stationnaire** lorsqu'en chaque point la vitesse du fluide ne varie pas avec le temps.

EXEMPLE

Tous les écoulements non gênés par un bouchon ou un nœud peuvent être considérés comme étant en régime permanent.

PROPRIÉTÉ

Un fluide est incompressible si son volume ne dépend pas des intensités des forces pressantes qu'il subit.

EXEMPLE

La plupart des liquides, comme l'eau, sont généralement compressibles. Toutefois, lors d'un écoulement, on peut les considérer comme incompressibles.

FORMULE

Débit volumique

Le débit volumique d'un écoulement, noté D_V et exprimé en $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$, est égal au quotient du volume V de fluide ayant circulé par la durée de l'écoulement Δt :

$$D_{V\ (\text{m}^3.\text{s}^{-1})} = \frac{V_{(\text{m}^3)}}{\Delta t_{\ (\text{s})}}$$

EXEMPLE

Une pompe d'un système de filtration de piscine permet de traiter 30 m^3 en 3 heures. Son débit volumique est donc :

$$D_{V\ (\text{m}^3.\text{s}^{-1})} = \frac{V_{(\text{m}^3)}}{\Delta t_{\ (\text{s})}}$$

$$D_V = \frac{30}{3 \times 3\ 600}$$

$$D_V = 2{,}8 \times 10^{-3}\ \text{m}^3\text{s}^{-1}$$

Le débit volumique d'un écoulement peut être mesuré avec un débitmètre.

REMARQUE

B La vitesse d'écoulement d'un fluide incompressible

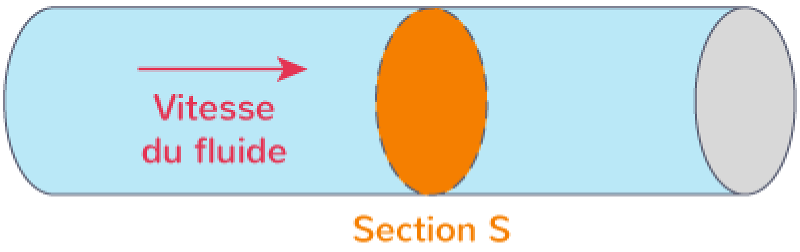
On peut montrer que la vitesse d'écoulement d'un fluide incompressible est égale au quotient de son débit volumique par la section du conduit. Dans un régime permanent, la vitesse d'écoulement du fluide en un point ne varie pas avec le temps. Si la section du conduit diminue, la vitesse d'écoulement du fluide augmente.

DÉFINITION

Section d'un écoulement

La section d'un écoulement correspond à la surface, perpendiculaire à la vitesse du fluide, qu'il traverse chaque instant.

EXEMPLE



Section d'un écoulement

À RETENIR

Pour déterminer la vitesse d'un écoulement, il faut donc connaître la valeur de la section S de l'écoulement, or c'est souvent le rayon r ou le diamètre d de la canalisation (généralement cylindrique) dans laquelle l'écoulement a lieu qui est sont donnés. Il est donc important de retenir :

- L'expression de la section en fonction de ces deux grandeurs :

$$S = \pi \times r^2 \Leftrightarrow S = \pi \times (\frac{d}{2})^2$$

- Les conversions des unités de surface :

$$1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ et } 1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$$

FORMULE

Vitesse d'écoulement d'un fluide incompressible

La vitesse d'écoulement v d'un fluide incompressible est égale au quotient de son débit volumique D_v par la section S du conduit :

$$v_{\ (\text{m.s}^{-1})} = \frac{D_{V\ (\text{m}^3.\text{s}^{-1})}}{S_{\ (\text{m}^2)}}$$

EXEMPLE

Soit un écoulement dont le débit volumique est $2{,}8 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ à travers une canalisation cylindrique de diamètre 5,0 cm. Sa vitesse est :

$$v_{\ (\text{m.s}^{-1})} = \frac{D_{V\ (\text{m}^3.\text{s}^{-1})}}{S_{\ (\text{m}^2)}}$$

Avec :

$$S_{\ (\mathrm{m}^2)} = \pi \times (\frac{d_{\ (\mathrm{m})}}{2})^2$$

D'où :

$$v_{\ (\mathrm{m.s^{-1}})} = \frac{D_{V\ (\mathrm{m^3.s^{-1}})}}{\pi \times (\frac{d_{\ (\mathrm{m})}}{2})^2}$$

$$v = \frac{2{,}8 \times 10^{-3}}{\pi \times (\frac{5{,}0 \times 10^{-2}}{2})^2}$$

$$v = 1{,}4 \text{ m.s}^{-1}$$

LOI

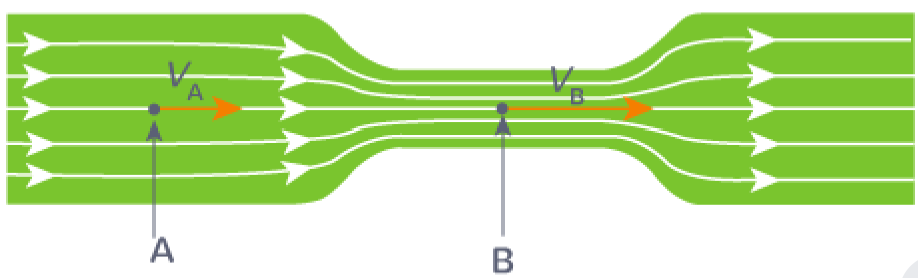
Conservation du débit volumique

Lors d'un écoulement en régime permanent, le débit volumique est conservé. Il est le même en chaque point, quelle que soit la section :

$$D_{V\ (\mathrm{A})} = D_{V\ (\mathrm{B})}$$

EXEMPLE

Même si lors d'un écoulement la section varie, le débit volumique est conservé. Le débit volumique est le même aux point A et B de cet écoulement permanent.



Variation de section d'un écoulement

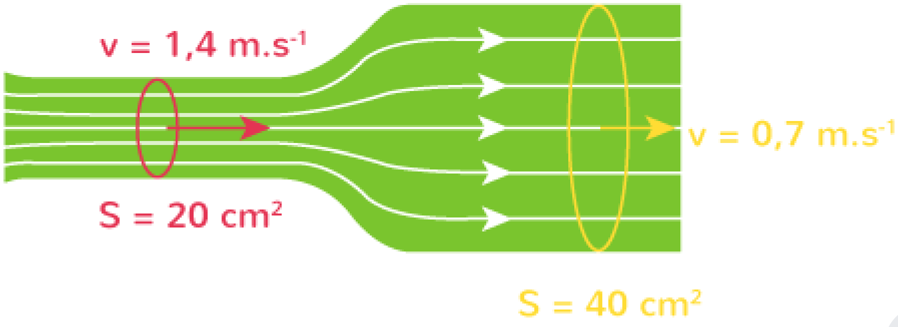
PROPRIÉTÉ

La conséquence de la conservation du débit volumique est que la vitesse d'écoulement v est inversement proportionnelle à la section S de l'écoulement : si la section du conduit diminue, la vitesse d'écoulement du fluide augmente, et inversement.

EXEMPLE

Dans une canalisation de section 20 cm^2, la vitesse d'un liquide est de $1{,}4 \text{ m.s}^{-1}$.

Si à un endroit la section de la canalisation est doublée, la vitesse d'écoulement est divisée par 2 et atteint la valeur de $0{,}7 \text{ m.s}^{-1}$.



Variation de la vitesse d'écoulement

C La relation de Bernoulli

La relation de Bernoulli montre la conservation d'énergie du fluide en un point. Elle relie la vitesse d'écoulement en un point à la pression du fluide et à sa profondeur en ce point.

Lors de l'écoulement d'un fluide, il est plus pratique d'utiliser les énergies par unité de volume.

FORMULE

Énergie cinétique et potentielle de pesanteur par unité de volume d'un fluide

Lors d'un écoulement et en un point donné, l'énergie mécanique d'un fluide de masse volumique ρ, par unité de volume, est la somme de trois composantes :

Type d'énergie (par unité de volume)	Énergie liée à la pression	Énergie cinétique	Énergie potentielle
Grandeur impliquée	La pression p en ce point	La vitesse v du fluide en ce point	L'altitude z de ce p
Expression	$E_{p,v\ (\text{J.m}^{-3})} = p_{(\text{Pa})}$	$E_{c,v\ (\text{J.m}^{-3})} = \frac{1}{2}\rho_{\ (\text{kg.m}^{-3})} \times v^2_{(\text{m.s}^{-1})}$	$E_{pp,v\ (\text{J.m}^{-3})} = \rho$ (

Ainsi, l'énergie mécanique, par unité de volume, en un point est :

$$E_{M,v\ (\text{J.m}^{-3})} = E_{p,v\ (\text{J.m}^{-3})} + E_{c,v\ (\text{J.m}^{-3})} + E_{pp,v\ (\text{J.m}^{-3})}$$

$$E_{M,v\ (\text{J.m}^{-3})} = p_{\ (\text{Pa})} + \frac{1}{2}\rho_{\ (\text{kg.m}^{-3})} \times v^2_{(\text{m.s}^{-1})} + \rho_{\ (\text{kg.m}^{-3})} \times g_{(\text{m.s}^{-1})} \times z_{(m)}$$

EXEMPLE

On considère l'écoulement d'un fluide de masse volumique $1{,}05 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, dont la vitesse est $1{,}4 \text{ m.s}^{-1}$.

En un point de ce fluide où la pression est $1{,}52 \times 10^5 \text{ Pa}$ et l'altitude 0,70 m, l'énergie du fluide, par unité de volume est : $E_{M,v\ (\text{J.m}^{-3})} = E_{p,v\ (\text{J.m}^{-3})} + E_{c,v\ (\text{J.m}^{-3})} + E_{pp,v\ (\text{J.m}^{-3})}$

$E_{M,v\ (\text{J.m}^{-3})} = p_{\ (\text{Pa})} + \dfrac{1}{2}\rho_{\ (\text{kg.m}^{-3})} \times v^2_{(\text{m.s}^{-1})} + \rho_{\ (\text{kg.m}^{-3})} \times g_{(\text{m.s}^{-1})} \times z_{(m)}$

$E_{M,v} = 1{,}52 \times 10^5 + \dfrac{1}{2} \times 1{,}05 \times 10^3 \times 1{,}4^2 + 1{,}05 \times 10^3 \times 9{,}81 \times 0{,}70$

$E_{M,v} = 1{,}6 \times 10^5 \text{ J.m}^{-3}$

LOI

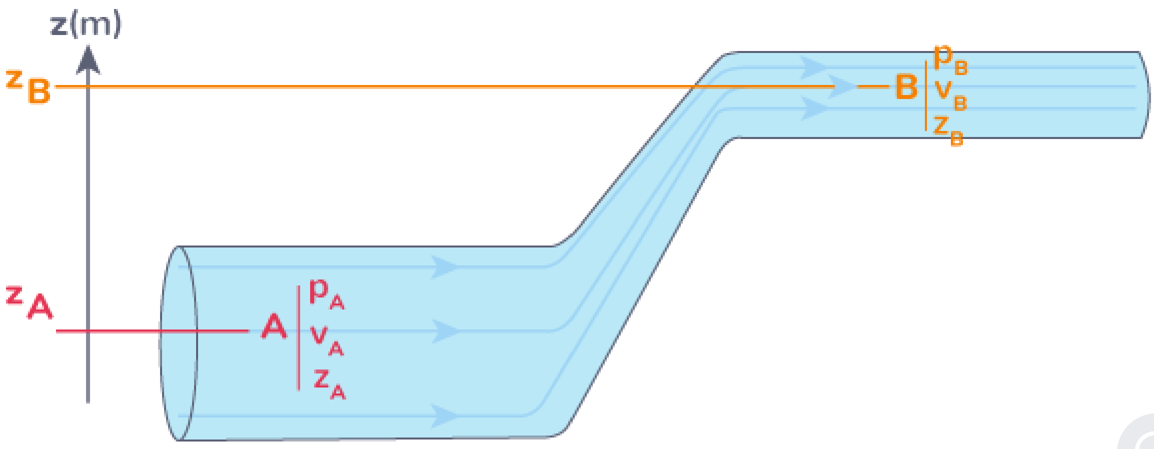
Relation de Bernoulli

Dans le cas où les frottements sont inexistants ou négligeables au cours d'un écoulement en régime permanent, l'énergie mécanique d'un fluide incompressible est la même en tout point. La relation de Bernoulli illustre cette conservation de l'énergie mécanique du fluide par unité de volume, c'est-à-dire que pour deux points A et B de l'écoulement :

$$E_{M,v}\ (\text{A}) = E_{M,v}\ (\text{B})$$

Soit :

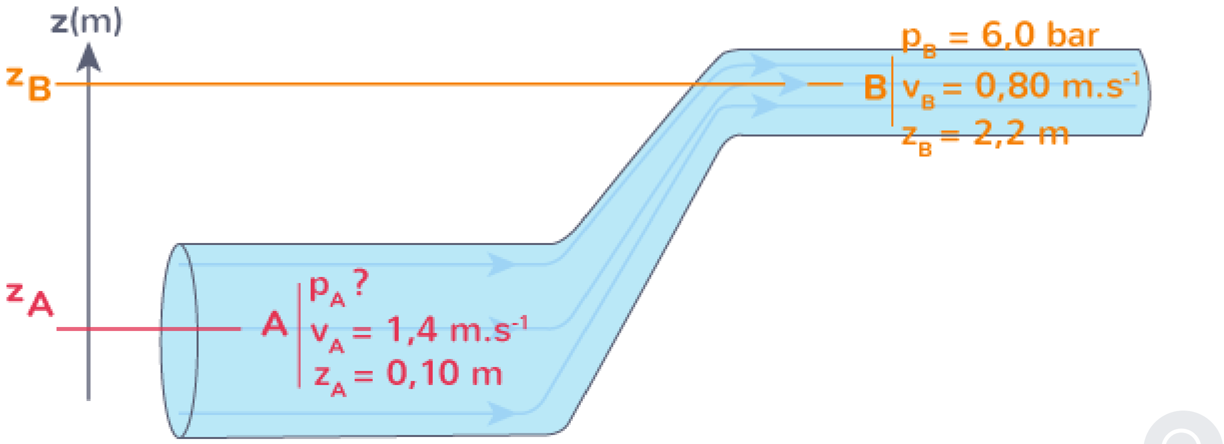
$$p_{(A)} + \frac{1}{2}\rho \times v^2_{(A)} + \rho \times g \times z_{(A)} = p_{(B)} + \frac{1}{2}\rho \times v^2_{(B)} + \rho \times g \times z_{(B)}$$



Points d'un fluide

EXEMPLE

Une canalisation alimente en eau potable une habitation. Son profil est le suivant :



Profil d'une canalisation

Au point A, la vitesse de l'eau est $1{,}4 \text{ m.s}^{-1}$ et les altitudes des deux points sont $z_A = 0{,}10 \text{ m}$ et $z_B = 2{,}2 \text{ m}$. Sachant que pour que le système d'alimentation en eau fonctionne correctement, il faut qu'au point B la pression soit de $6{,}0 \text{ bars}$ et la vitesse $0{,}80 \text{ m.s}^{-1}$, la relation de Bernoulli permet de calculer la pression nécessaire de l'eau au point A.

La relation de Bernoulli s'écrit :

$$p_{(A)} + \frac{1}{2}\rho \times v_{(A)}^2 + \rho \times g \times z_{(A)} = p_{(B)} + \frac{1}{2}\rho \times v_{(B)}^2 + \rho \times g \times z_{(B)}$$

On peut donc isoler la pression au point A :

$$p_{(A)} = p_{(B)} + \frac{1}{2}\rho \times (v_{(B)}^2 - v_{(A)}^2) + \rho \times g \times (z_{(B)} - z_{(A)})$$

D'où l'application numérique :

$$p_{(A)} = 6{,}0 \times 10^5 + \frac{1}{2}1{,}0 \times 10^3 \times (0{,}80^2 - 1{,}4^2) + 1{,}0 \times 10^3 \times 9{,}81 \times (2{,}2 - 0{,}10)$$

$$p_{(A)} = 6{,}2 \times 10^5 \text{ Pa}$$

La pression au point A doit donc être égale à 6,2 bars.

D L'effet Venturi

Si l'écoulement d'un fluide subit un étranglement, la vitesse du fluide augmente dans l'étranglement, c'est l'effet Venturi. Le principe de conservation de l'énergie permet de démontrer que la pression diminue dans l'étranglement.

DÉFINITION

Effet Venturi

L'effet Venturi est le phénomène par lequel une diminution de la section d'un écoulement provoque une augmentation de la vitesse du fluide et une diminution de sa pression.

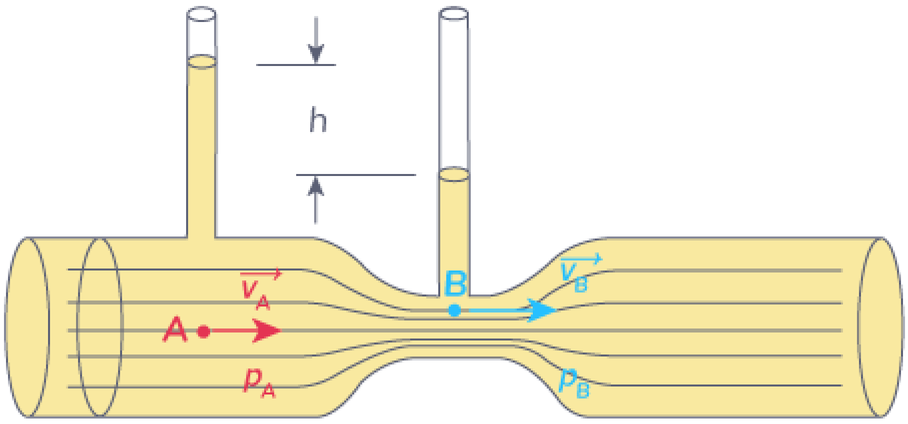
EXEMPLE

Si, dans un écoulement horizontal, la section en un point B est plus faible que celle en un point A :

- la vitesse du fluide au point B est plus importante qu'au point A ;

- la pression du fluide au point B est plus faible qu'au point A.

La diminution de la pression peut être visualisée à l'aide de colonnes d'eau présentes sur les deux parties de l'écoulement. Elle sera alors égale au produit $\rho \times g \times h$, h étant la hauteur séparant les surfaces libres des deux colonnes d'eau.



Effet Venturi

DÉMONSTRATION

La relation de Bernoulli appliquée aux points A et B donne :

$$p_{(A)} + \frac{1}{2}\rho \times v_{(A)}^2 + \rho \times g \times z_{(A)} = p_{(B)} + \frac{1}{2}\rho \times v_{(B)}^2 + \rho \times g \times z_{(B)}$$

Dans le cas d'un écoulement horizontal, on a :

$$z_A = z_B$$

Ce qui simplifie la relation de Bernoulli :

$$p_{(A)} + \frac{1}{2}\rho \times v_{(A)}^2 = p_{(B)} + \frac{1}{2}\rho \times v_{(B)}^2$$

On peut alors isoler la pression au point B :

$$p_{(B)} = p_{(A)} + \frac{1}{2}\rho \times (v_{(A)}^2 - v_{(B)}^2)$$

Or la conservation du débit volumique D tout le long de l'écoulement permet d'écrire :

$$v_{(A)} \times S_{(A)} = D = v_{(B)} \times S_{(B)}$$

D'où :

$$v_{(B)} = v_{(A)} \times \frac{S_{(A)}}{S_{(B)}}$$

Ce qui donne :

$$p_{(B)} = p_{(A)} + \frac{1}{2}\rho \times v_{(A)}^2 \times (1 - (\frac{S_{(A)}}{S_{(B)}})^2)$$

Or, la section étant plus grande au point A :

$$S_{(A)} > S_{(B)} \Leftrightarrow \frac{S_{(A)}}{S_{(B)}} > 1$$

On en déduit :

$$p_{(B)} - p_{(A)} = \frac{1}{2}\rho \times v_{(A)}^2 \times (1 - (\frac{S_{(A)}}{S_{(B)}})^2) < 0$$

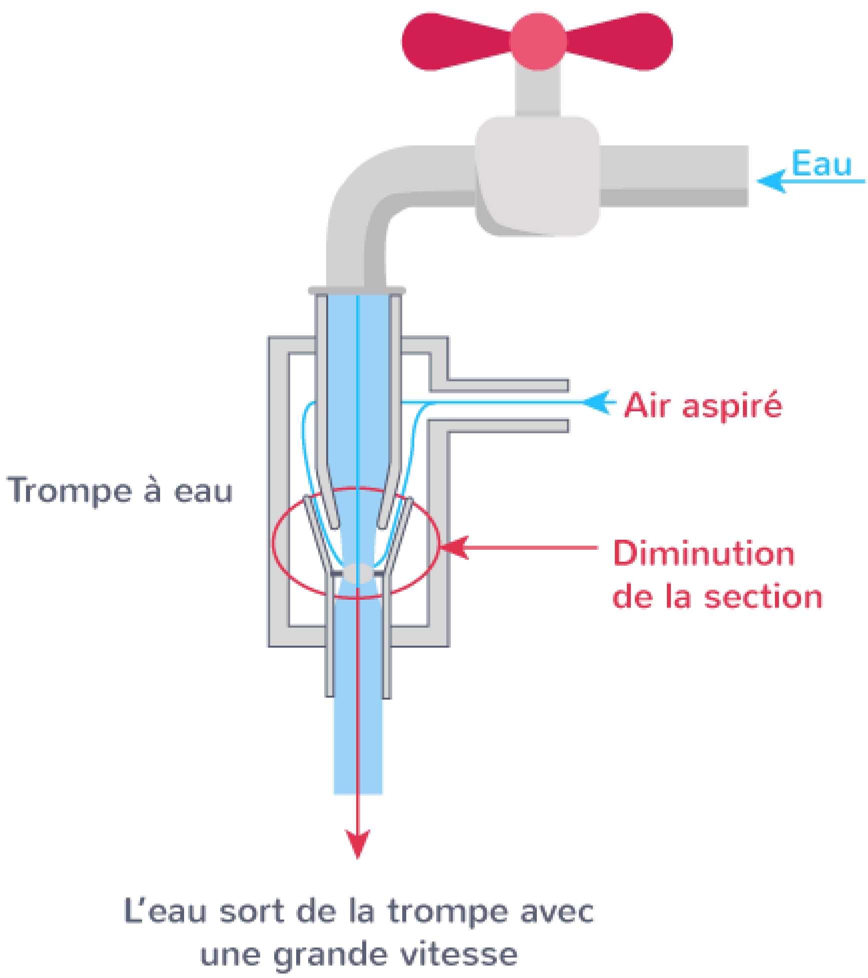
La pression $p_{(B)}$ est bien inférieure à $p_{(A)}$.

PROPRIÉTÉ

L'effet Venturi a de nombreuses applications, dans lesquelles la diminution de pression est exploitée. L'une des ces applications est la « trompe à eau », très utilisée dans les laboratoires dans le but de générer une aspiration.

EXEMPLE

Une trompe à eau est fixée à un robinet. L'eau y rentre avec une vitesse assez faible. Une diminution de la section provoque l'effet Venturi : l'eau sort alors de la trompe avec une vitesse plus grande et la diminution de pression fait que l'air est aspiré.



Fonctionnement d'une trompe à eau