Suites de matrices colonnes

Introduction :

Nous avons vu dans un cours précédent comment les matrices servent dans la résolution de systèmes linéaires. Dans ce cours, qui complète l'étude des matrices, nous allons voir comment elles peuvent aussi être utiles dans l'étude de suites.

Nous nous intéressons donc ici aux suites de matrices, plus particulièrement de matrices colonnes.
Dans un premier temps, nous donnerons les définitions et les propriétés utiles, qui sont pour la plupart assez intuitives.
Mais nous nous consacrerons surtout, dans un second temps, à manipuler les suites de matrices dans des exemples concrets, tirés de sujets de bac d'années précédentes. Cela nous permettra de voir les méthodes à appliquer pour la résolution de problèmes.

1 Suite de matrices

a. Suite de matrices colonnes

Considérons la suite de matrices (U_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$U_n = \begin{pmatrix} 2^n \\ \\ \dfrac{1}{n+2} \\ \\ n^2+4n+1 \end{pmatrix}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est une matrice colonne de taille 3 (i.e. de 3 lignes et 1 colonne).

Et les coefficients de la suite (U_n) sont des suites numériques définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} u_n &= 2^n \\ v_n &= \frac{1}{n+2} \\ w_n &= n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

→ Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Définition

Suite de matrices colonnes :

Soit m un entier naturel.
Une suite de matrices colonnes est une suite de matrices de taille $m \times 1$ dont les coefficients sont des suites numériques.

b. Suite de matrices définies par des relations de récurrence

Nous allons considérer les suites (u_n) et (v_n) suivantes, dites « couplées », de premiers termes respectifs u_0 et v_0, et définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + c & [a,\ b,\ c \text{ réels}] \\ v_{n+1} = du_n + ev_n + f & [d,\ e,\ f \text{ réels}] \end{cases}$$

Nous allons poser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Calculons maintenant $AU_n + C$, en utilisant les règles d'opération que nous avons apprises dans un cours précédent :

$$\begin{aligned} AU_n + C &= \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} au_n + bv_n \\ du_n + ev_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} au_n + bv_n + c \\ du_n + ev_n + f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \text{ [par définition des suites } (u_n) \text{ et } (v_n)\text{]} \\ &= U_{n+1} \end{aligned}$$

À retenir

Nous pouvons alors définir la suite de matrices colonnes (U_n), de taille 2, par récurrence, avec A une matrice carrée d'ordre 2 et C une matrice colonne de taille 2.

→ Nous avons alors $U_0 = \binom{u_0}{v_0}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = A \times U_n + C$$

c. Terme général d'une suite de matrices colonnes

De manière analogue à ce que nous avons vu pour les suites géométriques en première, nous pouvons donner le **terme général** d'une suite de matrices colonnes définie par une relation de récurrence du type : $U_{n+1} = A \times U_n$.

Propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre m.
Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille m définie pour tout entier naturel n par : $U_{n+1} = A \times U_n$.
Alors, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$U_n = A^n \times U_0$$

Démontrons par récurrence cette propriété.

Démonstration

Nous voulons montrer que, pour tout entier naturel n, la propriété P_n : « $U_n = A^n \times U_0$ », est vraie.

1. **Initialisation :**

Pour $n = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} A^0 \times U_0 &= I_m \times U_0 \ \text{[} I_m \text{ est la matrice unité d'ordre } m \text{]} \\ &= U_0 \end{aligned}$$

→ P_0 est vraie.

2. **Hérédité :**

Supposons que P_k : « $U_k = A^k \times U_0$ », est vraie pour un entier naturel quelconque k.

→ Montrons que, alors, P_{k+1} : « $U_{k+1} = A^{k+1} \times U_0$ », est aussi vraie.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= A \times U_k \text{ [par définition de } (U_n)] \\ &= A \times (A^k \times U_0) \text{ [par hypothèse de récurrence]} \\ &= (A \times A^k) \times U_0 \text{ [par associativité]} \\ &= A^{k+1} \times U_0 \end{aligned}$$

→ Si P_k est vraie, alors P_{k+1} est aussi vraie.

c Conclusion :

Nous avons montré que la propriété est vraie pour $n = 0$ et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang.

→ La propriété est vraie pour tout entier naturel et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = A^n \times U_0$$

d. Convergence de suites de matrices colonnes

Comme pour les suites numériques, nous pouvons étudier la **convergence**, ou la divergence, de suites de matrices colonnes.

Définition

Suite de matrices colonnes convergente :

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille m.
(U_n) est convergente si et seulement si chacune des suites numériques qui constituent ses coefficients est convergente.

→ Sinon, la suite est divergente.

À retenir

Si cette suite est convergente et si l_1, l_2, ..., l_m sont les limites respectives des m suites numériques qui constituent ses coefficients, alors sa limite est la matrice colonne de taille m :

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}$$

Illustrons ces notions de divergence et de convergence par deux exemples.

Exemple

1. Soit (U_n) la suite de matrices colonnes définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$U_n = \begin{pmatrix} 2^n \\ \\ \dfrac{1}{n+2} \\ \\ -n^2+4n+1 \end{pmatrix}$$

Nous avons d'une part :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0$$

Mais, d'autre part, nous avons, par le théorème de la limite de (q^n), avec $q = 2$:

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

Nous obtenons aussi :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} -n^2+4n+1 &= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(-1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

→ (U_n) est divergente.

2. Soit (V_n) la suite de matrices colonnes définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} + 2 \\ \\ \frac{1}{n+2} \\ \\ \frac{-n^2+4n+1}{3n^2-1} \end{pmatrix}$$

Nous calculons aussi les limites des trois suites numériques qui constituent les coefficients de (V_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + 2 = 2$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^2+4n+1}{3n^2-1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(-1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{-1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

→ (V_n) est convergente et sa limite est :

$$L = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Remarquons que nous pouvons définir de manière analogue les suites de matrices lignes, ainsi que leur éventuelle convergence.
Nous les étudierons plus particulièrement dans le cours sur les chaînes de Markov, avec les distributions initiales et invariantes.

Intéressons-nous maintenant à la convergence d'une suite de matrices du type $U_{n+1} = A \times U_n + C$.

Propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre m, et C une matrice colonne de taille m.
Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille m définie pour tout entier naturel n par : $U_{n+1} = A \times U_n + C$.
Si (U_n) est convergente, alors sa limite U est une matrice colonne de taille m qui vérifie :

$$U = A \times U + C$$

La démonstration de cette propriété est simple.

Démonstration

Nous avons, la suite (U_n) étant par hypothèse convergente et de limite U :

$$\text{d'une part : } \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = U$$

$$\text{d'autre part : } \lim_{n\to+\infty} A \times \overbrace{U_n}^{\to U} + C = A \times U + C$$

→ Par unicité des limites, nous pouvons conclure :

$$U = A \times U + C$$

2 Exercices et méthodologie

Nous allons maintenant appliquer ces définitions et propriétés sur deux exercices, exemples de ce que vous pourrez rencontrer comme problèmes, afin de donner les méthodes pour les résoudre.

a. Suites du type « $U_{n+1} = A \times U_n$ »

Cet exercice va notamment nous faire découvrir la méthodologie pour calculer la puissance d'une matrice grâce à la diagonalisation, que nous avons évoquée dans le cours sur le calcul matriciel.

Exemple

Dans un pays de population constante égale à $120\ \text{millions}$, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte $90\ \text{millions}$ de ruraux et $30\ \text{millions}$ de citadins ;
- chaque année, $10\ \%$ des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, $5\ \%$ des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- R_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010+n$;
- C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010+n$.

→ On a donc $R_0=90$ et $C_0=30$.

1 Question 1

Soit la matrice $M=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$.

Soit, pour tout entier naturel n la matrice colonne $U_n=\begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=M\times U_n$.

Par définition de la suite de matrices colonnes (U_n) :

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix}$$

- R_{n+1} est l'effectif, à l'année $2010+(n+1)$, des ruraux.

D'après l'énoncé, pour l'obtenir, on retire au nombre de ruraux à l'année $2010+n$ $10\,\%$ de cet effectif (ceux qui émigrent en ville) et on ajoute le nombre de citadins qui émigrent en zone rurale, soit $5\,\%$ de l'effectif des citadins à l'année $2010+n$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n - 0,1R_n + 0,05C_n \\ &= 0,9R_n + 0,05C_n \end{aligned}$$

- C_{n+1} est l'effectif, à l'année $2010+(n+1)$, des citadins.

Toujours d'après l'énoncé et en suivant un raisonnement analogue à celui que nous venons de mener, nous obtenons :

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n - 0,05C_n + 0,1R_n \\ &= 0,1R_n + 0,95C_n \end{aligned}$$

- Calculons maintenant $M \times U_n$.

$$\begin{aligned} M \times U_n &= \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,9R_n + 0,05C_n \\ 0,1R_n + 0,95C_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= U_{n+1} \end{aligned}$$

→ Nous obtenons bien : $U_{n+1} = M \times U_n$.

b. Calculer U_1. En déduire le nombre de ruraux et de citadins en 2011.

En utilisant la formule que nous venons de démontrer, nous pouvons écrire :

$$
\begin{aligned}
U_1 &= M \times U_0 \\
&= \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0,9 \times 90 + 0,05 \times 30 \\ 0,1 \times 90 + 0,95 \times 30 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 82,5 \\ 37,5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

U_1 donne les effectifs à l'année $2010 + 1 = 2011$.

→ Le nombre de ruraux en 2011 est donc : $82,5 \text{ milions}$.

→ Le nombre de citadins en 2011 est donc : $37,5 \text{ milions}$.

Astuce

> La population étant constante d'une année à l'autre et égale à 120 millions, nous pouvons vérifier que notre résultat correspond :
>
> $$82,5 + 37,5 = 120$$

2 Question 2

Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0.

→ D'après la propriété sur le terme général que nous avons vue plus haut, nous pouvons écrire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$U_n = M^n \times U_0$$

Pour le démontrer, il suffirait d'utiliser un raisonnement par récurrence comme nous l'avons fait, avec une initialisation pour $n = 1$ (en utilisant le résultat du 1.b.).

3 Question 3

Soit la matrice $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P.

→ **On la notera P^{-1}.**

- Calculons le produit suivant :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times P &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 & \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times (-1) \\ \frac{2}{3} \times 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 2 & \frac{2}{3} \times 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I_2
\end{aligned}$$

- De façon équivalente, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
P \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I_2
\end{aligned}$$

→ P admet bien pour matrice inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4 Question 4

a. On pose $D = P^{-1} \times M \times P$. Calculer D avec la calculatrice.

→ En utilisant les fonctions dédiées de la calculatrice, nous obtenons :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}$$

Astuce

> Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que D est une matrice diagonale.
>
> → Nous en déduisons donc, pour tout entier naturel n :
>
> $$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85^n \end{pmatrix}$$

b. Démontrer que $M = P \times D \times P^{-1}$.

La dernière formule nous donne : $D = P^{-1} \times M \times P$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} P \times D &= P \times (P^{-1} \times M \times P) \\ &= (P \times P^{-1}) \times M \times P \\ &= I_2 \times M \times P \\ &= M \times P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis : } (P \times D) \times P^{-1} &= (M \times P) \times P^{-1} \\ &= M \times (P \times P^{-1}) \\ &= M \times I_2 \\ &= M \end{aligned}$$

→ Nous obtenons ainsi :

$$M = P \times D \times P^{-1}$$

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

Nous allons donc démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, la proposition « $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$ », est vraie.

- Initialisation :

D'après ce que nous venons de montrer, nous avons :

$$\begin{aligned} M^1 &= M \\ &= P \times D \times P^{-1} \\ &= P \times D^1 \times P^{-1} \end{aligned}$$

→ La proposition est vraie pour $n = 1$.

- Hérédité :

Supposons la proposition vraie pour un entier quelconque $k \geq 1$: « $M^k = P \times D^k \times P^{-1}$ ».

→ Montrons que, alors, la proposition est aussi vraie pour $k + 1$: « $M^{k+1} = P \times D^{k+1} \times P^{-1}$ ».

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M \times M^k \\ &= (P \times D \times P^{-1}) \times M^k \text{ [car la proposition est vraie pour } n = 1\text{]} \\ &= (P \times D \times P^{-1}) \times (P \times D^k \times P^{-1}) \text{ [par hypothèse de récurrence]} \\ &= P \times D \times (P^{-1} \times P) \times D^k \times P^{-1} \text{ [par associativité]} \\ &= P \times D \times I_2 \times D^k \times P^{-1} \\ &= P \times D \times D^k \times P^{-1} \\ &= P \times (D \times D^k) \times P^{-1} \\ &= P \times D^{k+1} \times P^{-1} \end{aligned}$$

→ Si la proposition est vraie au rang k, alors elle est aussi vraie au rang $k+1$.

- Conclusion :

Nous avons montré que la proposition est vraie pour $n = 1$ et qu'elle est héréditaire à partir de ce rang.

→ La propriété est vraie pour tout entier naturel non nul et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

5 Question 5

a. On admet que le calcul matriciel précédent donne :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix}$$

Astuce

> Effectuons tout de même le calcul, avec méthode et rigueur :

$$\begin{aligned} M^n &= P \times D^n \times P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0,85^n \\ 2 & -0,85^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, $R_n = 50 \times 0,85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

Nous avons montré à la question 2 que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} U_n &= M^n \times U_0 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons d'une part :

$$50 \times 0,85^0 + 40 = 90 = R_0$$

Nous avons d'autre part, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} R_n &= 90 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n\right) + 30 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n\right) \\ &= 30 + 60 \times 0,85^n + 10 - 10 \times 0,85^n \\ &= 50 \times 0,85^n + 40 \end{aligned}$$

→ Ainsi, pour tout entier naturel n : $R_n = 50 \times 0,85^n + 40$.

La population est constante et son effectif est égal à 120 millions.

→ Nous en déduisons l'expression de C_n pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} C_n &= 120 - R_n \\ &= 120 - (50 \times 0,85^n + 40) \\ &= -50 \times 0,85^n + 80 \end{aligned}$$

c. Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$. Que peut-on en conclure pour la population étudiée ?

Par le théorème de la limite de (q^n), avec $q = 0,85$, nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$$

Nous trouvons donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} R_n &= \lim_{n \to +\infty} 50 \times 0,85^n + 40 \\ &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} C_n &= \lim_{n \to +\infty} -50 \times 0,85^n + 80 \\ &= 80 \end{aligned}$$

→ De ces limites, nous déduisons que, à long terme, l'effectif de la population rurale se stabilisera autour de 40 millions, tandis que celui de la population citadine se stabilisera autour de 80 millions.

Allons un peu plus loin, car nous nous rendons compte que, à long terme, les citadins seront plus nombreux que les ruraux, alors que la situation est

inverse en 2010.
Cherchons donc à partir de quelle année les effectifs s'inversent.

Il suffit de résoudre l'inéquation : $R_n < C_n$.
Nous avons donc :

$$\begin{aligned} R_n < C_n &\Leftrightarrow 50 \times 0,85^n + 40 < -50 \times 0,85^n + 80 \\ &\Leftrightarrow 50 \times 0,85^n + 50 \times 0,85^n < 80 - 40 \\ &\Leftrightarrow 100 \times 0,85^n < 40 \\ &\Leftrightarrow 0,85^n < 0,4 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,85^n) < \ln(0,4) \\ &\text{[car } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}] \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,85) < \ln(0,4) \text{ [car } \ln(a^n) = n\ln(a)] \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,4)}{\ln(0,85)} \text{ [car } 0,85 < 1 \text{ et } \ln(0,85) < 0] \\ &\Leftrightarrow n \geq 6 \text{ [en arrondissant à l'entier supérieur]} \end{aligned}$$

→ La population citadine dépassera la population rurale à partir de l'année $2010 + 6$, soit à partir de l'année 2016.

b. Suites du type « $U_{n+1} = A \times U_n + C$ »

Exemple

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution du nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2020.
En 2020, les opérateurs A et B ont chacun 300 **milliers** d'abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après 2020, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après 2020.

→ Ainsi : $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$$

On considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice :

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Question 1

a. Déterminer U_1.

Par définition de U_n, nous avons :

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,7a_0 + 0,2b_0 + 60 \\ 0,1a_0 + 0,6b_0 + 70 \end{pmatrix} \\ &\footnotesize{\textcolor{gray}{\text{[par définition des suites } (a_n) \text{ et } (b_n)]}} \\ &= \begin{pmatrix} 0,7 \times 300 + 0,2 \times 300 + 60 \\ 0,1 \times 300 + 0,6 \times 300 + 70 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

Nous calculons la formule donnée :

$$\begin{aligned} M \times U_n + P &= \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,2b_n \\ 0,1a_n + 0,6b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= U_{n+1} \end{aligned}$$

→ Nous avons donc bien, pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

2 Question 2

On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$**.**

Commençons par calculer $I - M$:

$$\begin{aligned} I - M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Effectuons maintenant le produit :

$$\begin{aligned} (I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3 \times 4 - 0,2 \times 1 & 0,3 \times 2 - 0,2 \times 3 \\ -0,1 \times 4 + 0,4 \times 1 & -0,1 \times 2 + 0,4 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

b. En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.

Nous venons de montrer que :

$$(I-M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = I$$

→ Cela signifie que $I - M$ est inversible et :

$$(I-M)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

c. Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.

Nous allons isoler U pour résoudre cette équation :

$$\begin{aligned} U = M \times U + P &\Leftrightarrow U - M \times U = P \\ &\Leftrightarrow (I-M) \times U = P \\ &\Leftrightarrow (I-M)^{-1} \times (I-M) \times U = (I-M)^{-1} \times P \\ &\text{[nous avons montré que } I - M \text{ est inversible]} \\ &\Leftrightarrow I \times U = (I-M)^{-1} \times P \\ &\Leftrightarrow U = (I-M)^{-1} \times P \end{aligned}$$

→ En nous servant du calcul du 2.b. et des coefficients de P, nous obtenons :

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 60 + 2 \times 70 \\ 1 \times 60 + 3 \times 70 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 **Question 3**

Pour tout entier naturel n, on pose : $V_n = U_n - U$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M \times V_n$.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - U \text{ [par définition de } (V_n)\text{]} \\ &= M \times U_n + P - (M \times U + P) \\ &\text{[par définition de } (U_n) \text{ et car } U = M \times U + P\text{]} \\ &= M \times U_n - M \times U \\ &= M \times (U_n - U) \\ &= M \times V_n \text{ [toujours par définition de } (V_n)\text{]} \end{aligned}$$

→ Nous avons donc bien, pour tout entier naturel n :

$$V_{n+1} = M \times V_n$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = M^n \times V_0$.

Nous avons montré que la suite de matrices colonnes (V_n) est définie, pour tout entier naturel n, par : $V_{n+1} = M \times V_n$.

→ Nous pouvons donc en déduire que son terme général est, pour tout entier naturel n :

$$V_n = M^n \times V_0$$

$$\begin{aligned} \text{Avec : } V_0 &= U_0 - U \\ &= \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -80 \\ 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 Question 4 :

On admet que, pour tout entier naturel n :

$$V_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ \\ -\dfrac{50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

a. Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).

D'après la définition de (V_n), nous avons, pour tout entier naturel n :

$$V_n = U_n - U \Leftrightarrow U_n = V_n + U$$

→ Et en utilisant l'égalité admise ci-dessus, nous obtenons, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} U_n &= \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n + 380 \\ -\frac{50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n + 270 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que, pour tout entier naturel n :

$$a_n = -\frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n + 380$$

Or, par le théorème de la limite de (q^n), et comme $0 < 0,8 < 1$ et $0 < 0,5 < 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} 0,8^n = \lim_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$$

→ Nous pouvons finalement conclure que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} -\overbrace{\frac{100}{3} \times 0,8^n}^{\to 0} - \overbrace{\frac{140}{3} \times 0,5^n}^{\to 0} + 380 \\ &= 380 \end{aligned}$$

b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

Nous avons montré que la suite (a_n) est convergente et que sa limite est 380.

→ À long terme, l'opérateur A aura 380 milliers d'abonnés.

> Conclusion :
>
> Dans ce cours, nous avons découvert la notion de suite de matrices colonnes. Nous avons aussi vu, sur des exemples concrets, combien les matrices sont utiles pour étudier des suites numériques plus compliquées, notamment lorsque plusieurs sont interdépendantes.
> Si le calcul matriciel est parfois lourd, il reste assez simple, pour peu que l'on fasse preuve de rigueur, sans oublier non plus qu'une calculatrice peut nous servir pour vérifier les résultats (voire pour les obtenir directement).
>
> Dans les prochains cours, nous allons continuer à découvrir des applications concrètes des matrices, notamment avec les graphes et les chaînes de Markov.