Le produit scalaire

Cours

Sommaire

I Le produit scalaire dans l'espace

Le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace est défini de la même manière que dans le plan, il possède les mêmes propriétés opératoires et permet de caractériser l'orthogonalité dans l'espace.

A Une définition du produit scalaire dans l'espace

Le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace est défini de la même manière que dans le plan.

DÉFINITION

La norme d'un vecteur

Dans l'espace, une unité de longueur étant choisie, soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et A et B deux points tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$.

On appelle **norme du vecteur** $\overrightarrow{u}$ la longueur AB.

EXEMPLE

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 5 unités.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour norme la longueur AB, soit 5.

PROPRIÉTÉ

Comme dans le plan, la norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace est notée $\|\overrightarrow{u}\|$.

DÉFINITION

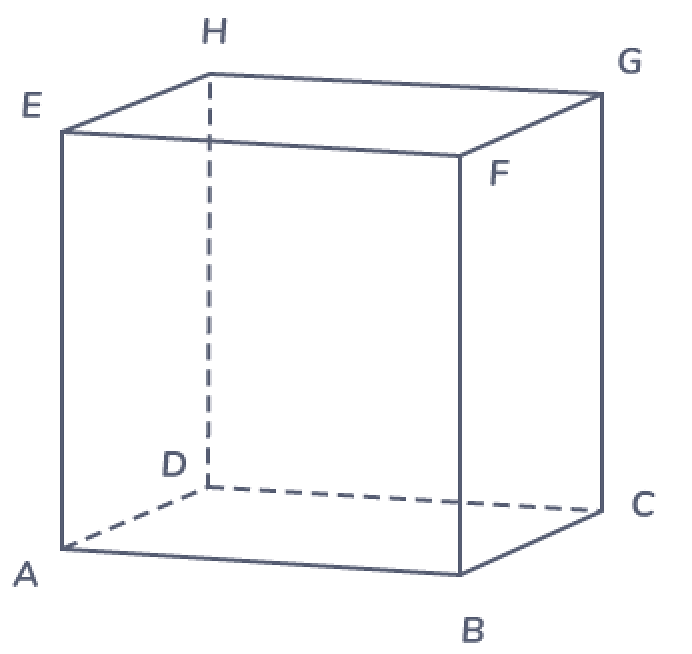
Le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace

Dans l'espace, une unité de longueur étant choisie, **le produit scalaire des vecteurs** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le réel noté :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

défini par :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6 unités.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2\right)$$

Le triangle ABC est rectangle en B.

D'après le théorème de Pythagore, on a :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 6^2 + 6^2$
$AC^2 = 72$

On en déduit :
$||\overrightarrow{AC}||^2 = 72$

puis :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(72 - 6^2 - 6^2\right)$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(72 - 36 - 36)$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \times 0$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

REMARQUE

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace sont nécessairement coplanaires. Autrement dit, il existe A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et (au moins) un plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C.

L'unité de longueur dans le plan $\mathcal{P}$ étant celle choisie dans l'espace, la définition du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ coïncide avec celle du produit scalaire de ces mêmes vecteurs dans le plan $\mathcal{P}$.

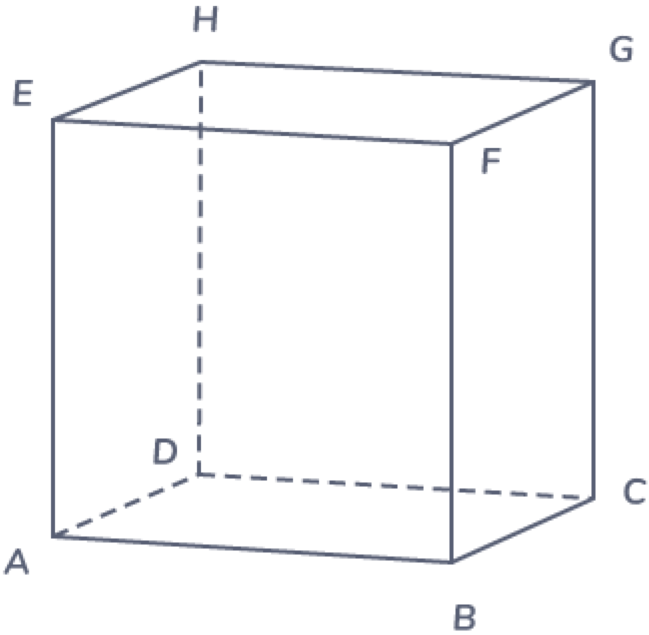
PROPRIÉTÉ

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, alors :

- $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2 \times \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2\right)$

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|^2\right)$$

Comme $ABCD$ est un carré, la règle du parallélogramme donne :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Comme $ABCD$ est un carré, on a :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- $-\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$

On en déduit :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$$

La relation de Chasles permet de conclure :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{DB}\|^2\right)$$

Comme les diagonales d'un carré ont la même longueur :

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{DB}\|$$

D'où :

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{DB}\|^2 = 0$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

DÉFINITION

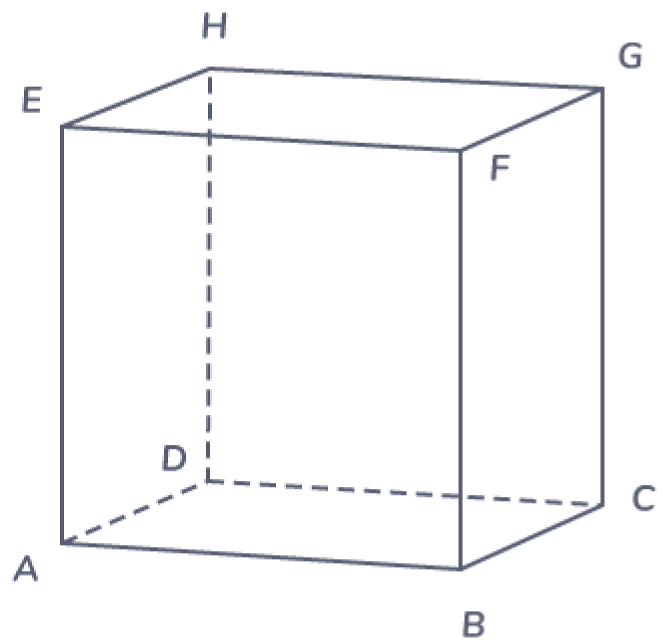
Angle orienté et angle géométrique

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- On appelle **angle orienté** $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ l'angle orienté formé par des représentants, dans un même plan, des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
- On appelle **angle géométrique** formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ l'angle géométrique formé par des représentants, dans un même plan, des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.



Comme $ADHE$ est un carré, on a :

$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$$

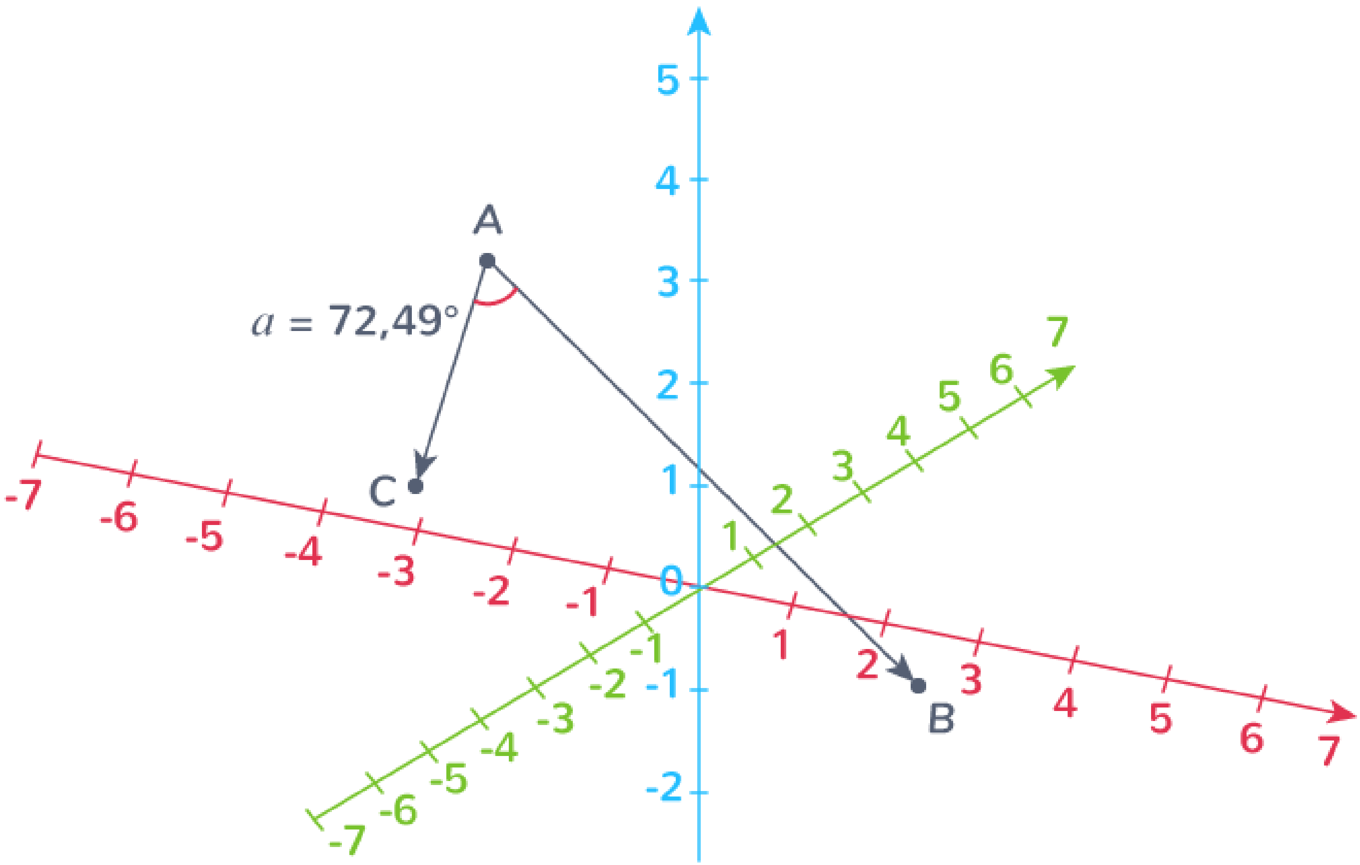
Comme A, B et D sont dans le plan (ABD), l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EH}\right)$ est l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$,

qui lui-même correspond à l'angle géométrique $\widehat{BAD}$.

PROPRIÉTÉ

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls et α est la mesure de l'angle géométrique associé à $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\alpha)$$



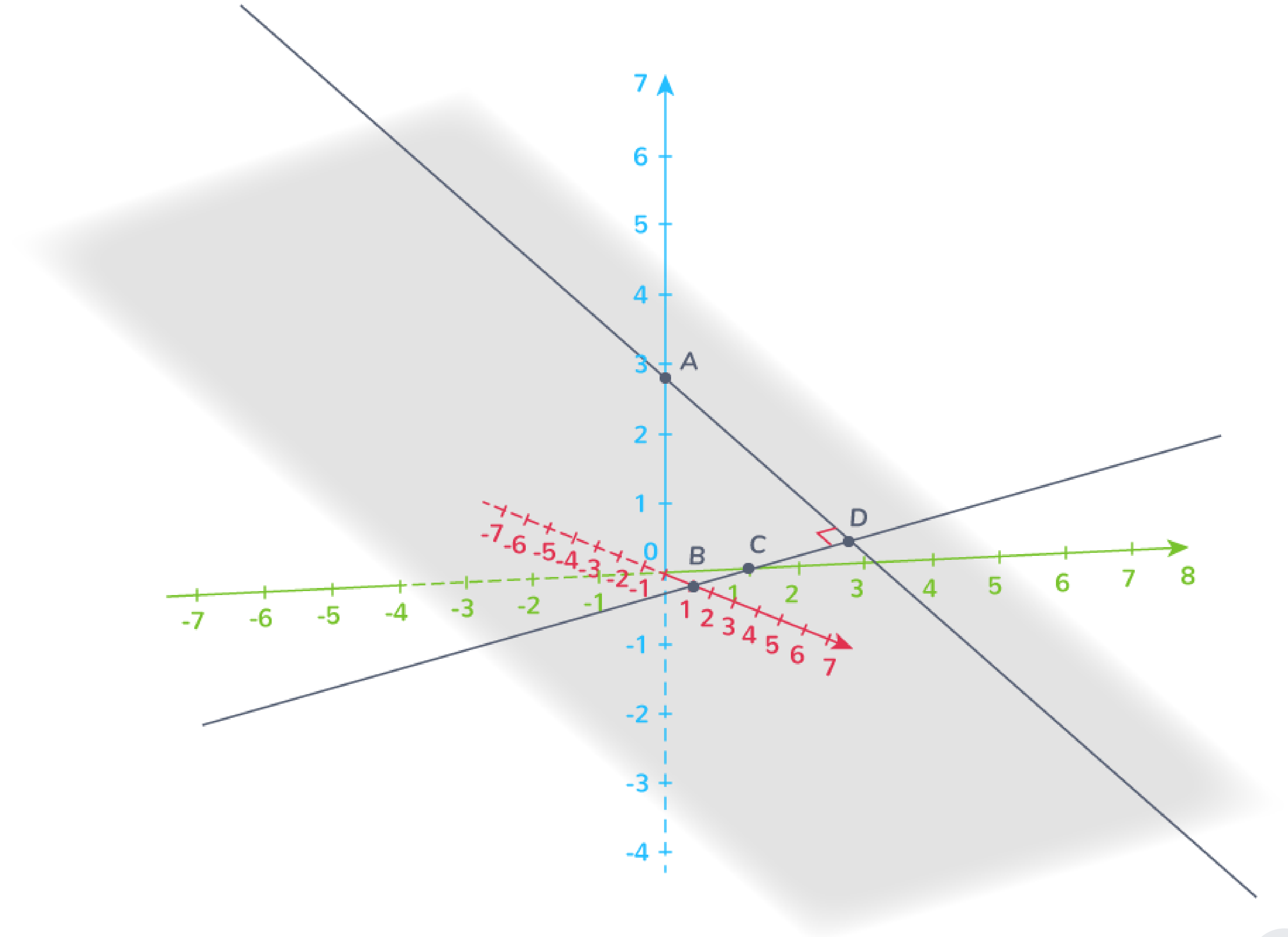
Dans le cas de la figure on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(72{,}49^\circ)$$

DÉFINITION

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

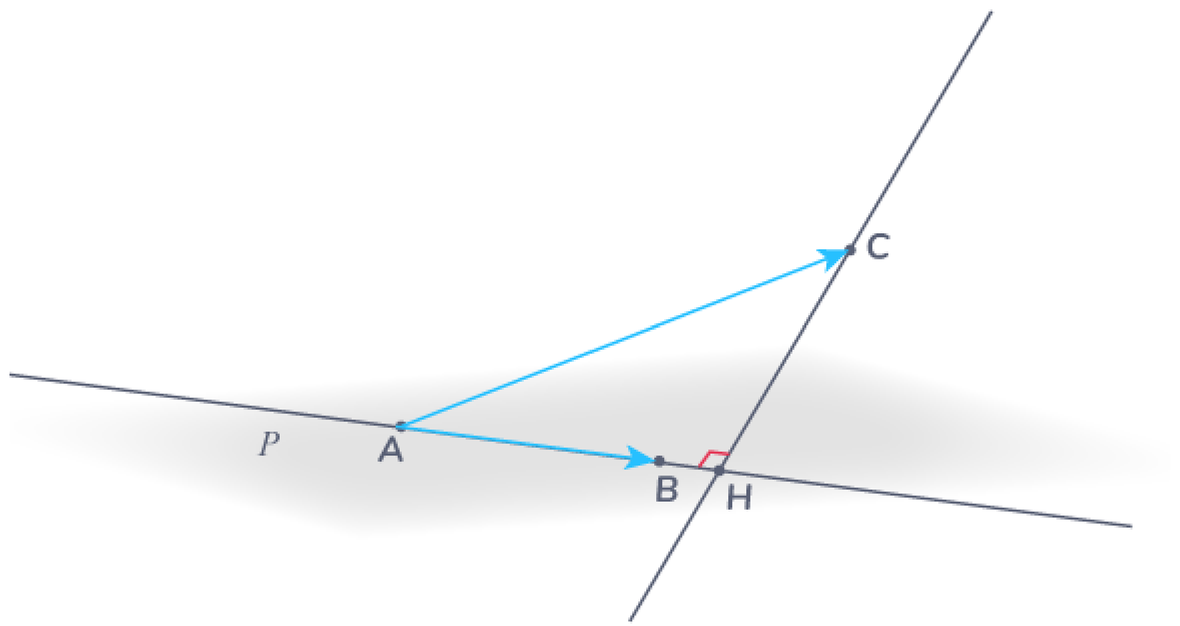
Le projeté orthogonal d'un point A de l'espace sur une droite $\mathcal{D}$ de l'espace est le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$ dans un plan contenant le point A et la droite $\mathcal{D}$.



PROPRIÉTÉ

Si, dans un plan $\mathcal{P}$, le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$



B Les propriétés opératoires du produit scalaire

Le produit scalaire dans l'espace possède les mêmes propriétés opératoires que le produit scalaire dans le plan.

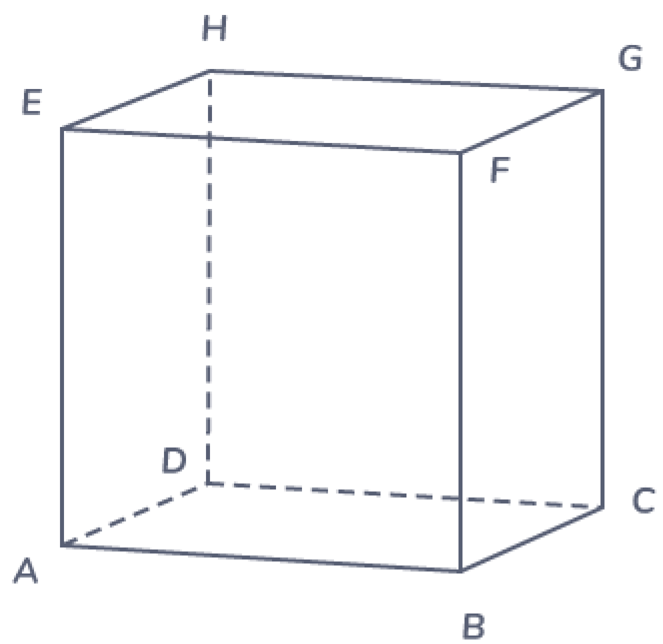
PROPRIÉTÉ

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$$

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 5 unités.



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\times5\times\cos\left(45^\circ\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=25\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=25\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cette propriété est la propriété de symétrie du produit scalaire.

REMARQUE

PROPRIÉTÉ

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et soit α et β deux réels. Alors :

- $\left(\alpha\overrightarrow{u}\right)\cdot\left(\beta\overrightarrow{v}\right)=\alpha\beta\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
- $\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$

EXEMPLE

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que :

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=10$

Alors :

$\left(10\overrightarrow{u}\right)\cdot\left(-5\overrightarrow{v}\right)=10\times(-5)\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$

$\left(10\overrightarrow{u}\right)\cdot\left(-5\overrightarrow{v}\right)=10\times(-5)\times10$

$\left(10\overrightarrow{u}\right)\cdot\left(-5\overrightarrow{v}\right)=-500$

REMARQUE

Les deux propriétés précédentes donnent la propriété de bilinéarité du produit scalaire.

REMARQUE

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.

En couplant la dernière propriété avec la propriété de symétrie du produit scalaire, on déduit :

$\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$

C Les vecteurs orthogonaux dans l'espace

On définit l'orthogonalité de deux vecteurs dans l'espace comme dans le plan. Le produit scalaire permet de caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs dans l'espace.

DÉFINITION

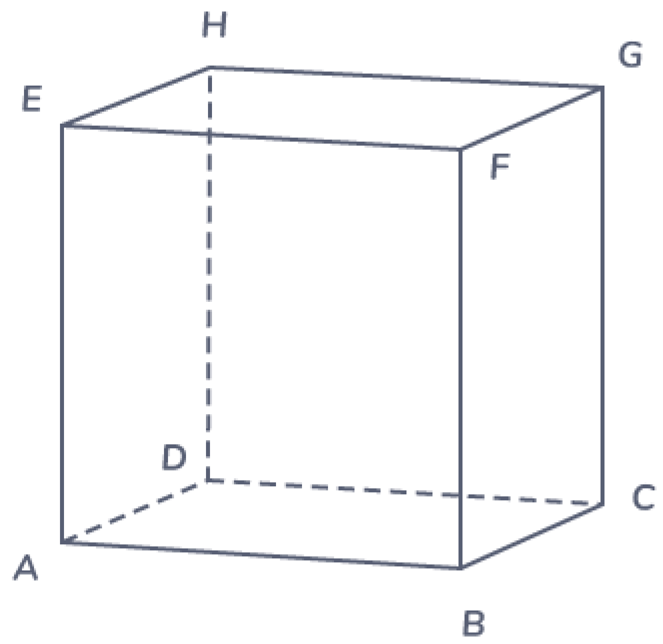
Vecteurs orthogonaux

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace dans lequel une unité de longueur a été choisie.

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si leurs directions sont orthogonales.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.



Les droites (AB) et (CG) sont orthogonales.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont donc orthogonaux.

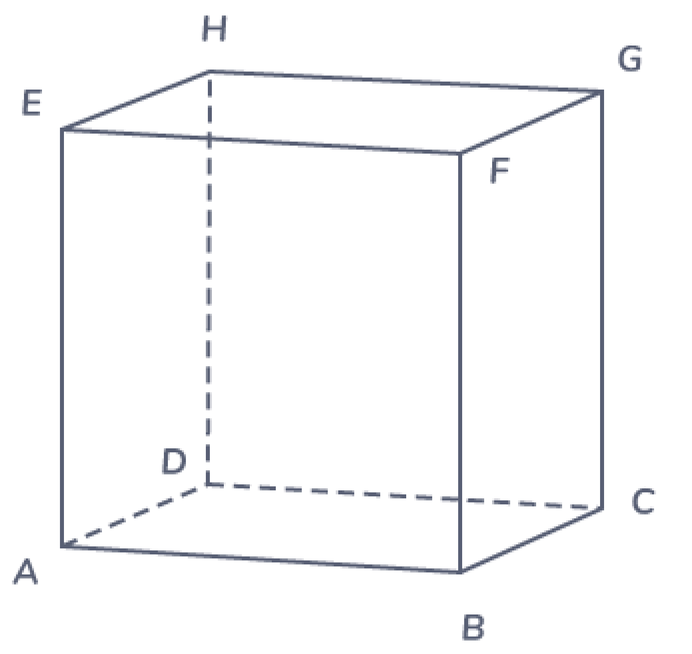
PROPRIÉTÉ

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace dans lequel une unité de longueur a été choisie.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.



Les droites (AB) et (CG) sont orthogonales.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont donc orthogonaux.

On en déduit :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$

II Le produit scalaire dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, on peut définir le produit scalaire avec les coordonnées des vecteurs.

A Les bases et les repères orthonormés de l'espace

Afin de définir des coordonnées de points et de vecteurs dans l'espace, il faut définir des bases et des repères.

REMARQUE

On considère l'espace dans lequel une unité de longueur a été choisie.

DÉFINITION

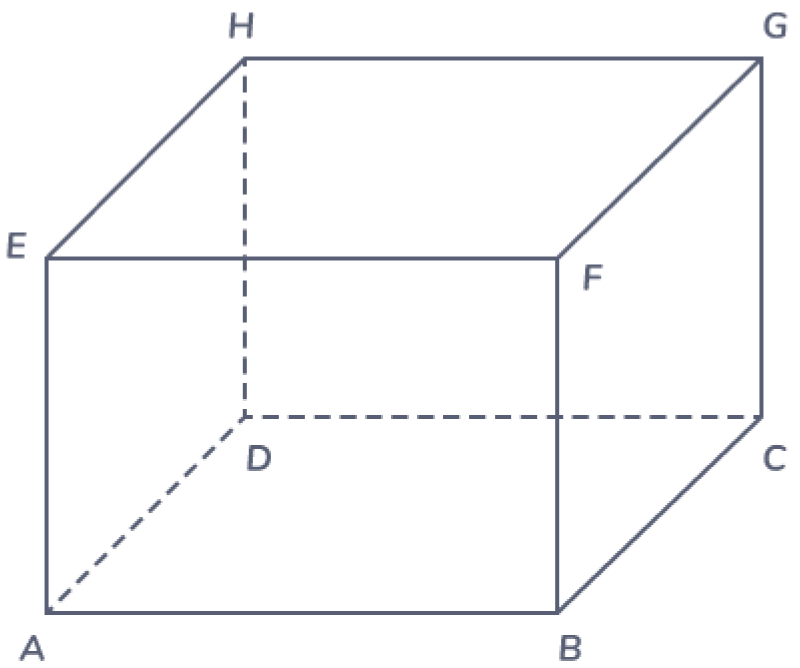
Base orthogonale

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace formant une base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$.

$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est une **base orthogonale** si les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont deux à deux orthogonaux.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un pavé droit.



Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ forment une base $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$ orthogonale de l'espace.

DÉFINITION

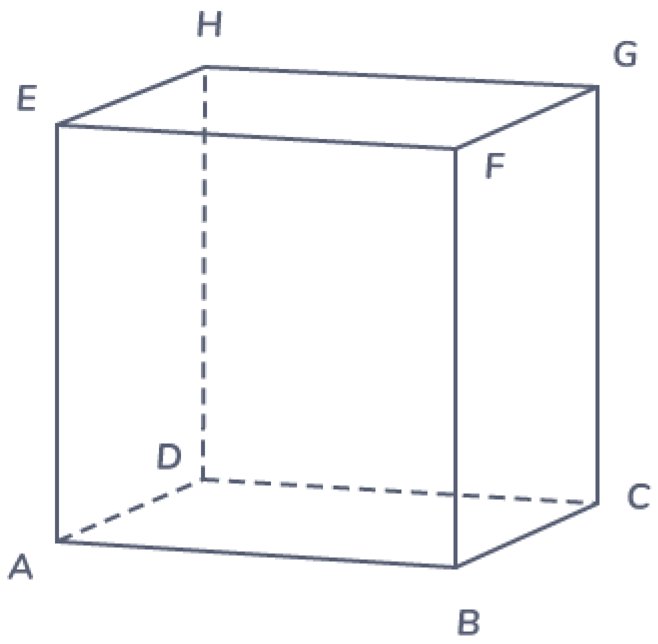
Base orthonormée

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace formant une base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$.

$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est une **base orthonormée** si la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est orthogonale et si $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{w}|| = 1$.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 unité.



Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ forment une base $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$ orthonormée de l'espace.

DÉFINITION

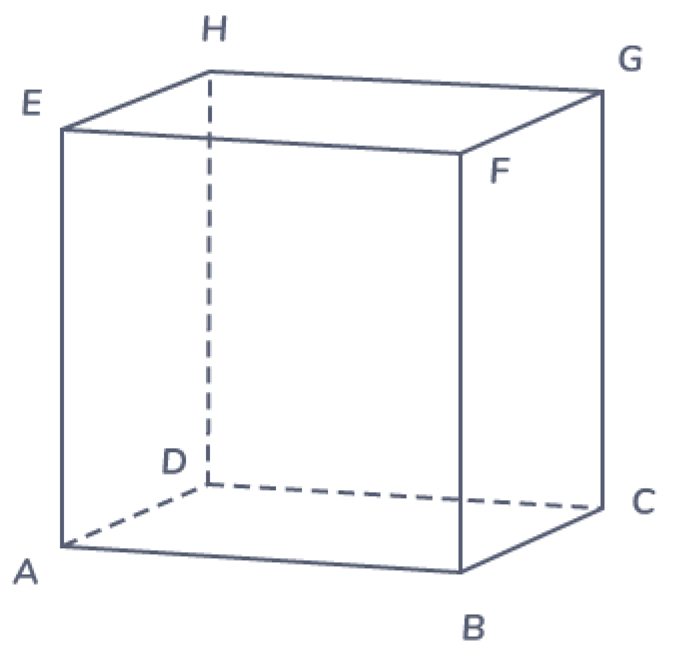
Repère orthonormé

Soit A un point de l'espace et soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace formant une base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$.

On dit que le quadruplet $\left(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est un **repère orthonormé** de l'espace si le triplet $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est une base orthonormée de l'espace.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 unité.



Le quadruplet $\left(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

B L'expression analytique du produit scalaire

Grâce au repère orthonormé de l'espace, on peut définir les coordonnées d'un vecteur comme dans le plan et définir le produit scalaire avec les coordonnées des vecteurs.

REMARQUE

Soit $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base de l'espace et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ sont définies de la même façon que la base soit orthonormée ou non.

Elles correspondent à l'unique triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

PROPRIÉTÉ

Soit $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormée de l'espace.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Alors :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$

EXEMPLE

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de l'espace.

Alors :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times 0 + 2 \times (-1) + 3 \times 3$
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 7$

PROPRIÉTÉ

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

Alors :
$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

EXEMPLE

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de l'espace.

Alors :
$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$
$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{14}$

PROPRIÉTÉ

Soient A et B deux points de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans un repère orthonormé de l'espace, alors :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

EXEMPLE

Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(1; 2; 3)$ et $(4; 5; 6)$ dans un repère orthonormé de l'espace.

Alors :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2 + (6-3)^2}$
$AB = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}$
$AB = \sqrt{27}$
$AB = 3\sqrt{3}$

PROPRIÉTÉ

Soit $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormée de l'espace.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si :

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

EXEMPLE

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de l'espace.

En notant $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans cette base, on a :

$$xx' + yy' + zz' = 1 \times 0 + 2 \times (-3) + 3 \times 2$$
$$xx' + yy' + zz' = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

III L'orthogonalité dans l'espace

Le produit scalaire permet de caractériser l'orthogonalité dans l'espace.

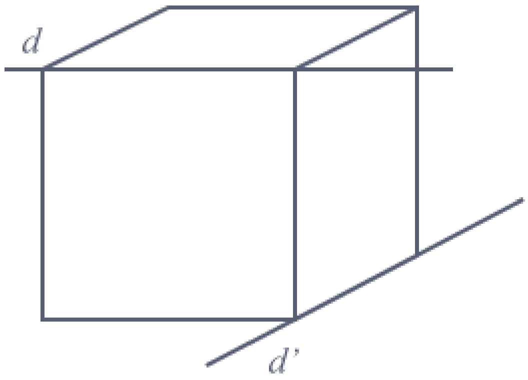
A L'orthogonalité de deux droites

Le produit scalaire permet de caractériser simplement l'orthogonalité de deux droites de l'espace.

DÉFINITION

Orthogonalité de deux droites

Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de l'espace sont **orthogonales** si leurs directions sont orthogonales.



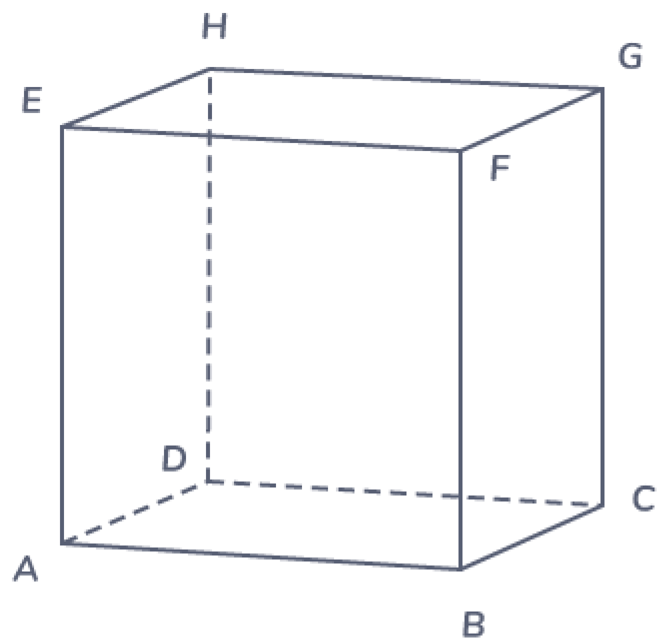
PROPRIÉTÉ

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales si, et seulement si, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.



Comme $BCGF$ est un carré, on a :

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$

Comme $ABCD$ est un carré, on a :

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

On en déduit :

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$

Les droites (AD) et (BF) sont donc orthogonales.

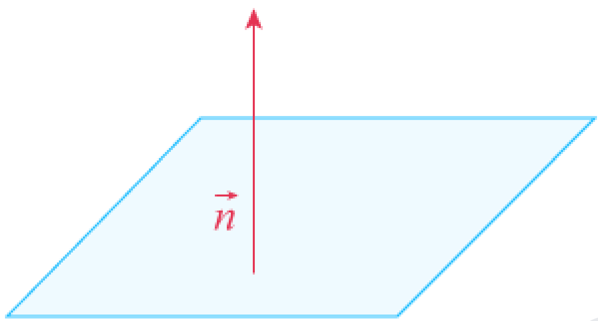
B L'orthogonalité d'une droite et d'un plan

Le produit scalaire permet de caractériser de façon simple l'orthogonalité d'un plan et d'une droite grâce à la définition du vecteur normal à un plan.

DÉFINITION

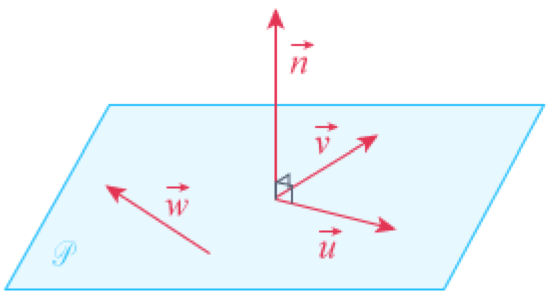
Vecteur normal à un plan

Un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ est un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ dont la direction est orthogonale au plan.



PROPRIÉTÉ

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tous les vecteurs du plan $\mathcal{P}$.

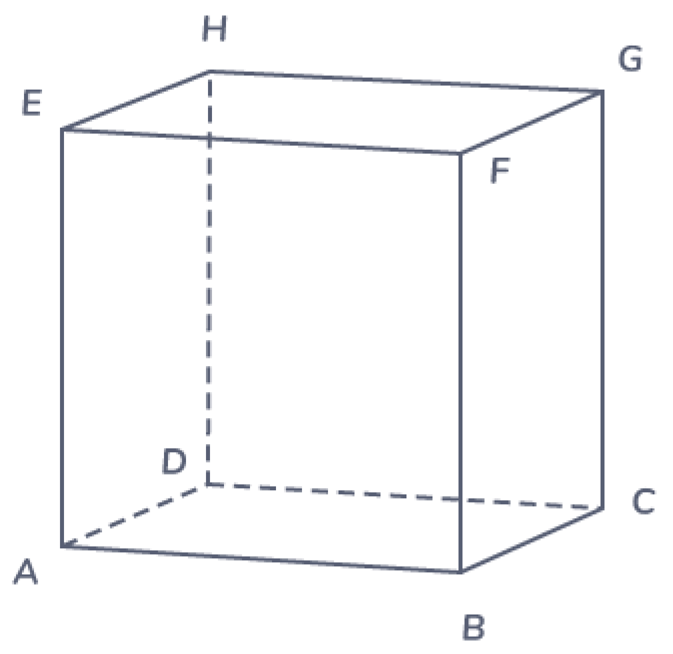


PROPRIÉTÉ

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires formant une base du plan $\mathcal{P}$.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.



$ABFE$ est un carré.

Donc $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

$ADHE$ est un carré.

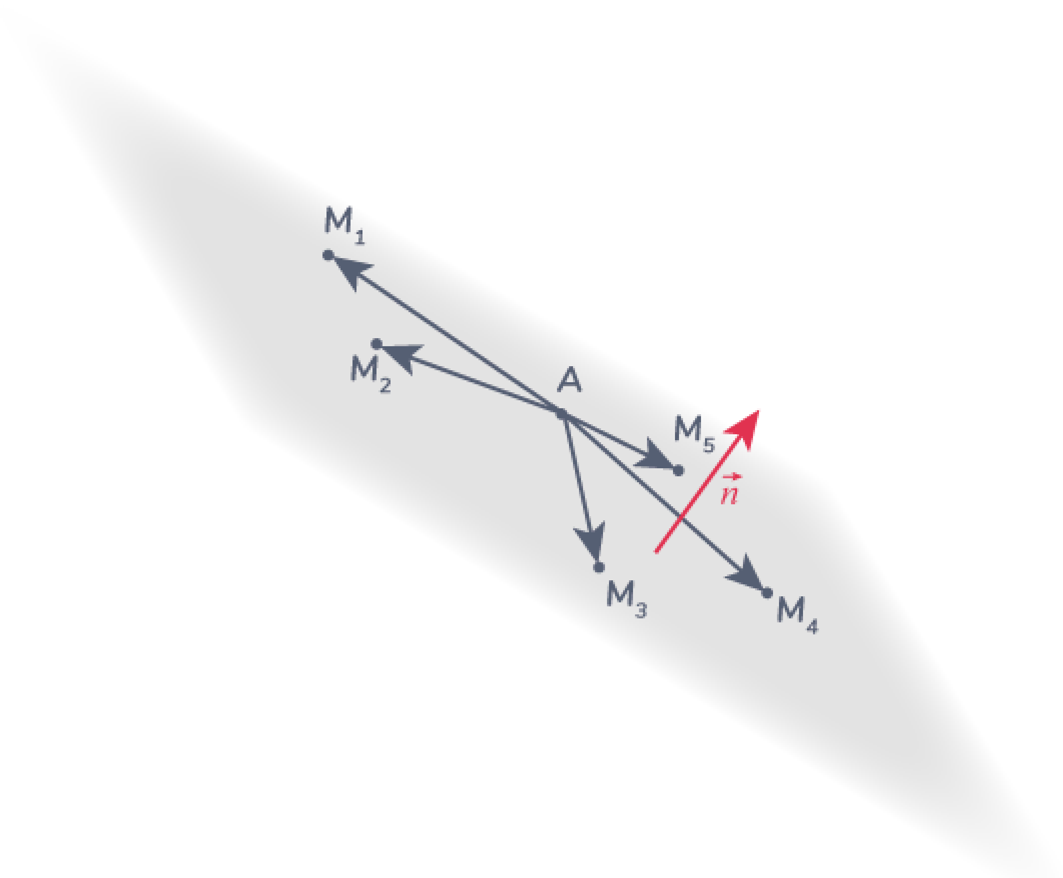
Donc $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AD}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont deux vecteurs non colinéaires formant une base du plan (ABD).

Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est donc normal au plan (ABD).

PROPRIÉTÉ

Soient A un point de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul.
Il existe un unique plan $\mathcal{P}$ passant par A et admettant le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal.
C'est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.



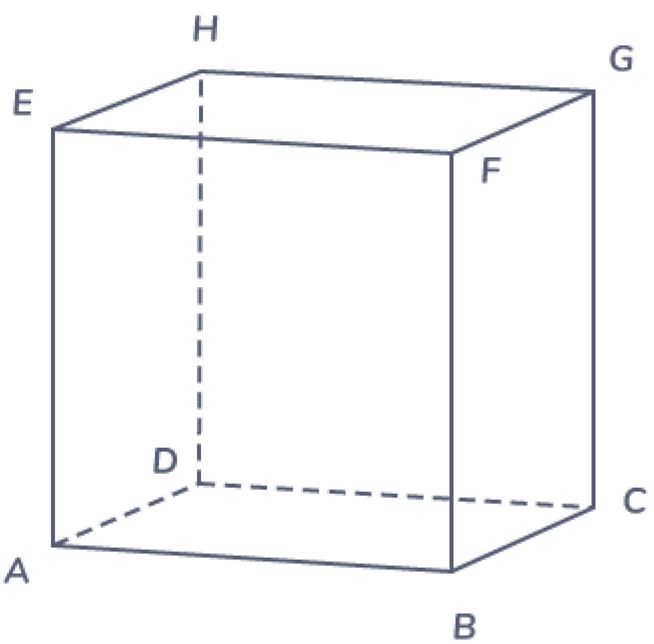
DÉFINITION

Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$ sont dits **orthogonaux** si tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.



Comme $ABFE$ et $BCGF$ sont des carrés :

- le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BA}$;
- le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) , le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est normal au plan (ABC) .

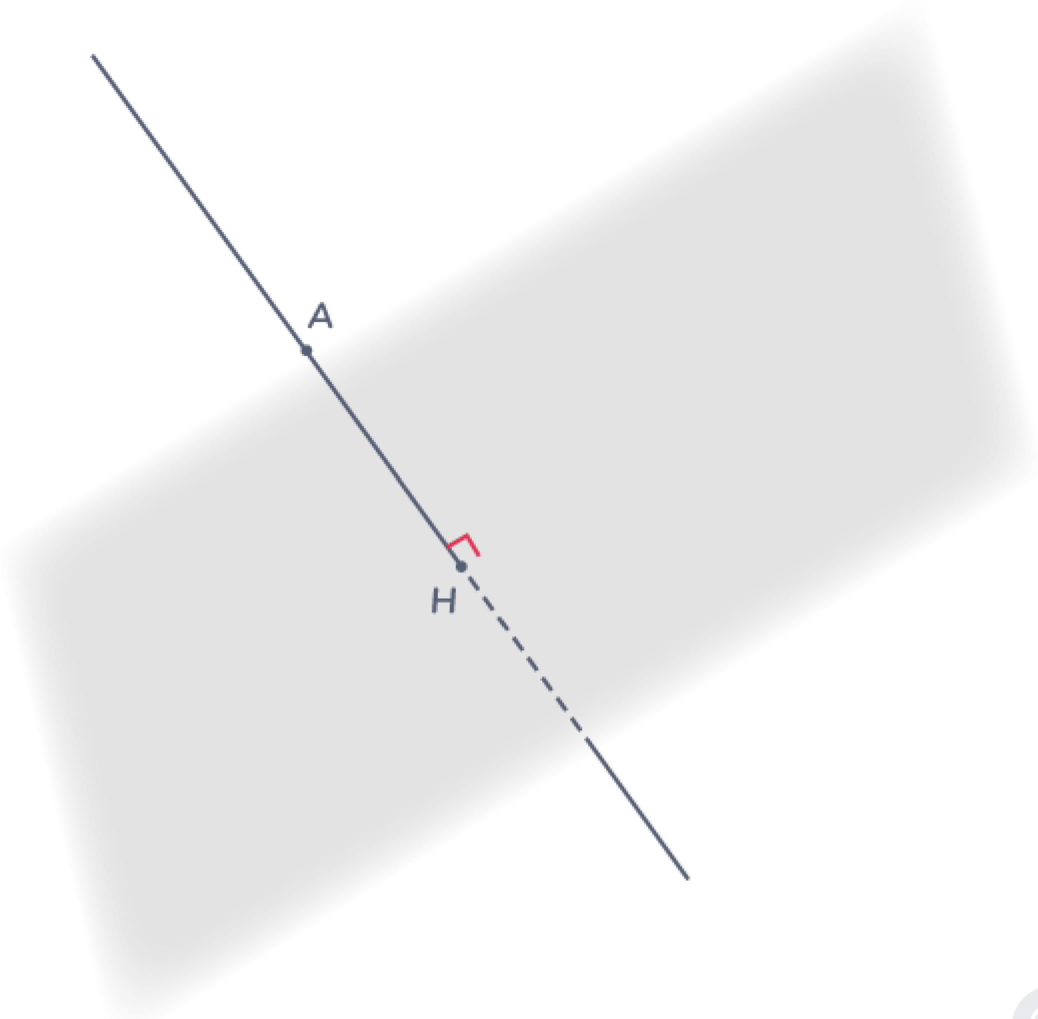
On en déduit :
La droite (BF) est orthogonale au plan (ABC) .

DÉFINITION

Projeté orthogonal d'un point sur un plan

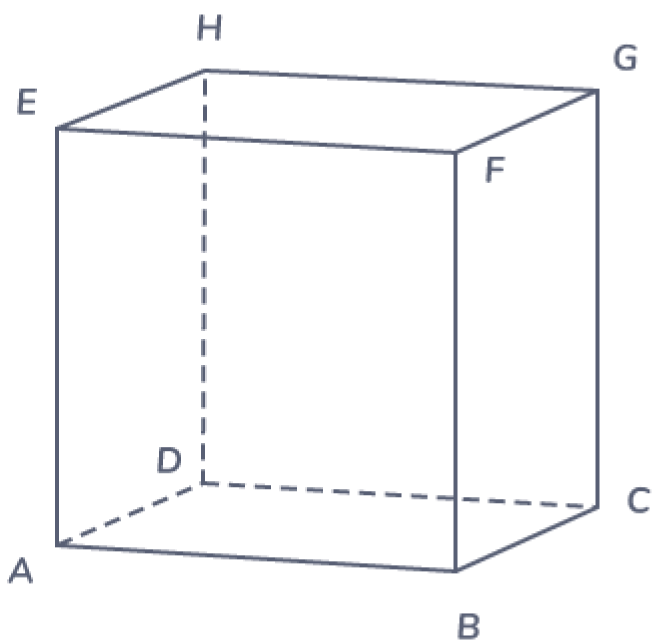
Soit A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On appelle **projeté orthogonal** du point A sur le plan $\mathcal{P}$:

- le point A , si $A \in \mathcal{P}$;
- le point H du plan $\mathcal{P}$, tel que $\overrightarrow{AH}$ soit un vecteur normal à $\mathcal{P}$, si $A \notin \mathcal{P}$.



EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.

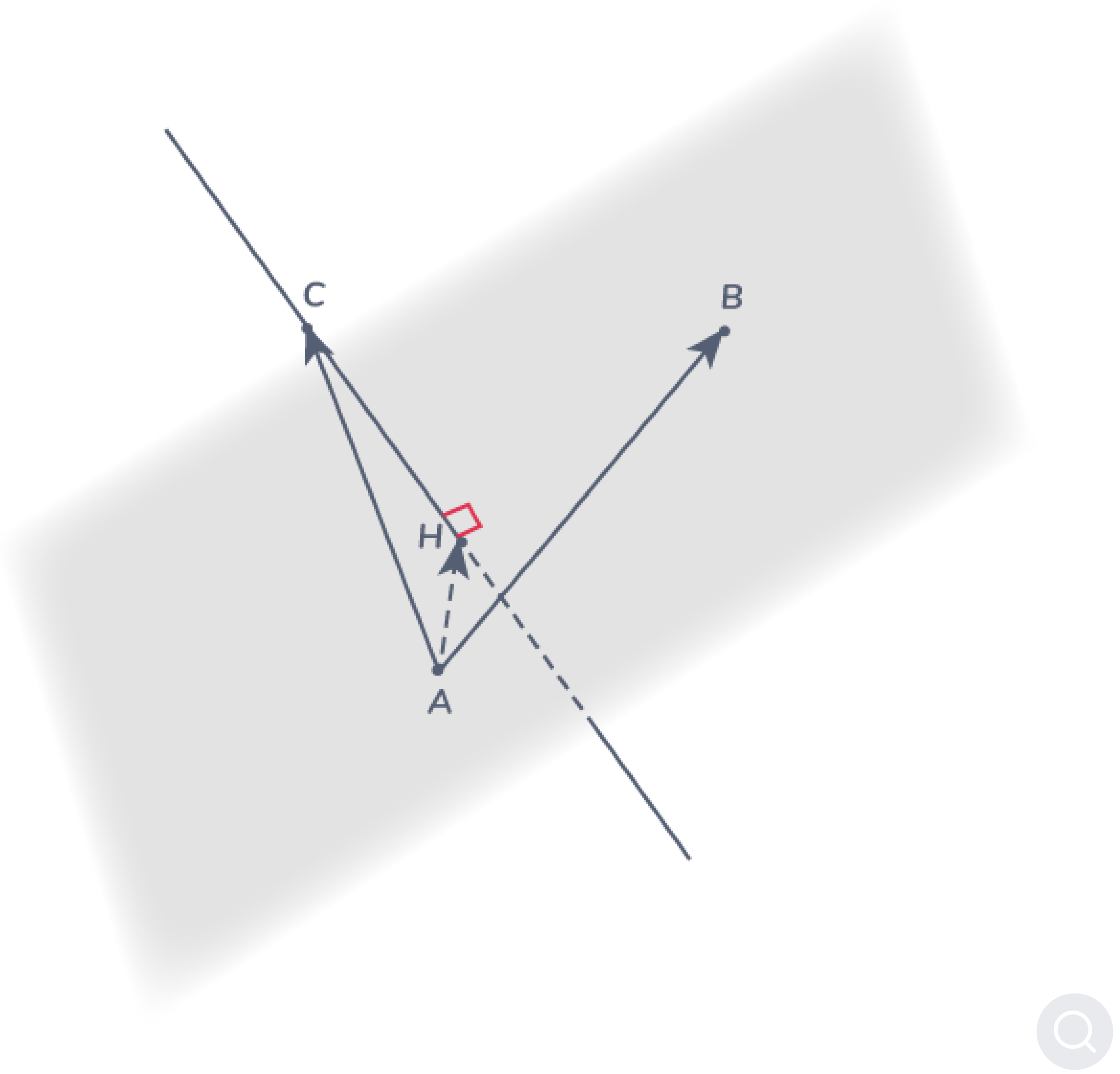


Le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est normal au plan (ABC).

Le projeté du point F dans le plan (ABC) est donc le point B .

PROPRIÉTÉ

On ne change pas le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en remplaçant l'un d'eux, par exemple $\overrightarrow{AC}$, par son projeté orthogonal sur un plan contenant la droite (AB) .



Le point H étant le projeté orthogonal du point C dans un plan $\mathcal{P}$ contenant la droite (AB) , on a :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

PROPRIÉTÉ

Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M .

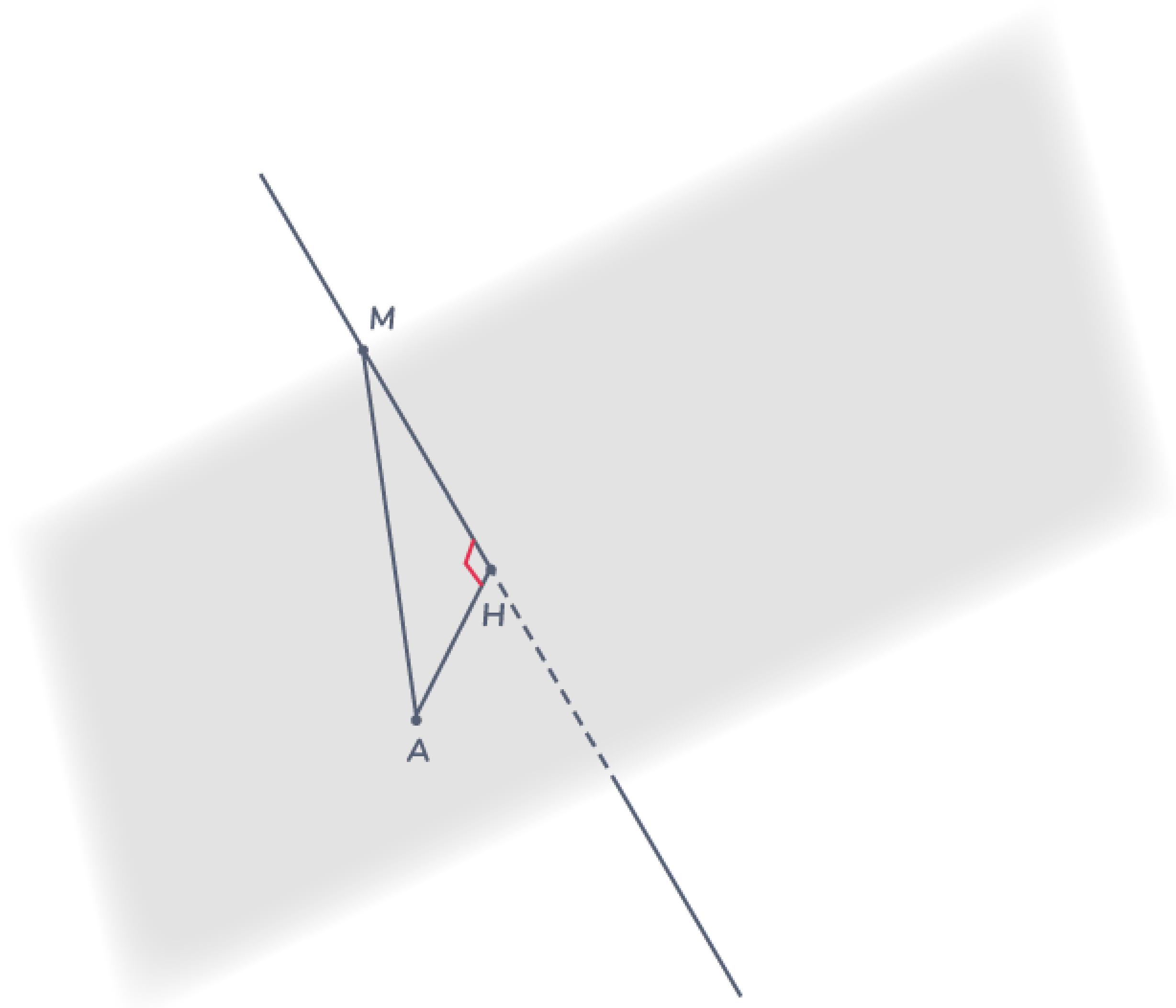
DÉMONSTRATION

Soient M un point et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.

On note H le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathcal{P}$.

L'objectif est de montrer que la distance MH est la plus courte distance MA où A est un point du plan $\mathcal{P}$.

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$.



Le triangle MAH est donc rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore, on a :
$MA^2 = AH^2 + MH^2$

Par conséquent :
$MH^2 \leq MA^2$

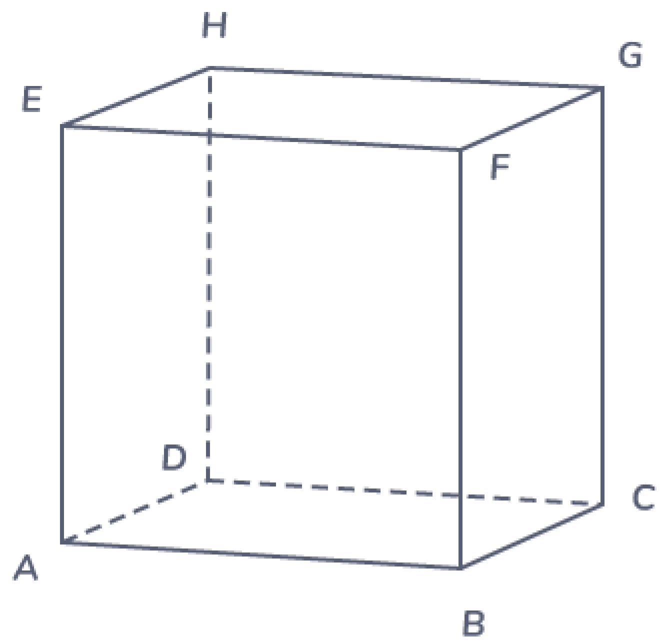
On en déduit :
$MH \leq MA$

La distance MH est donc inférieure ou égale à toutes les distances MA obtenues avec un point A quelconque du plan $\mathcal{P}$.

La distance MH est donc bien la plus courte distance entre M et un point du plan $\mathcal{P}$.

EXEMPLE

$ABCDEFGH$ est un cube.



Le point B est le projeté orthogonal du point F sur le plan (ABC) .

Le point D appartient au plan (ABC) .

Par conséquent :
$FB \leq FD$