Continuité de fonctions

Pour retrouver le cours correspondant de la spécialité « Mathématiques » :

→ *Continuité des fonctions d'une variable réelle*

Introduction :

Ce cours de l'option « Mathématiques complémentaires » va nous permettre de compléter encore l'étude de fonctions.
Nous aborderons ainsi le langage de la continuité avec quelques rappels, des définitions, des propriétés, des théorèmes, des méthodes et des exemples d'applications.

1 Continuité

Définition

Continuité d'une fonction sur un intervalle :

f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel de I.

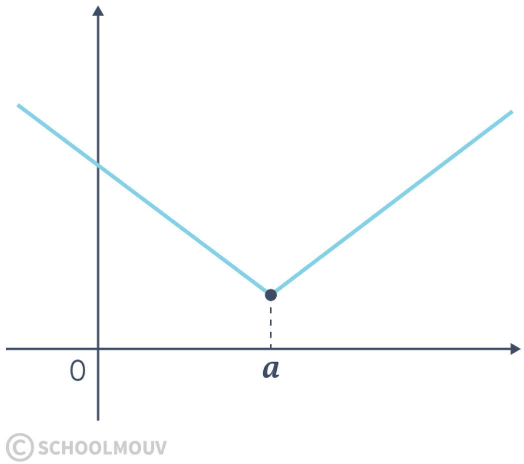
- f est continue en a si et seulement si f a une limite finie en a et si cette limite est égale à $f(a)$ (réel). C'est-à-dire que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout nombre réel de I.

Regardons les courbes représentatives de deux fonctions.

1

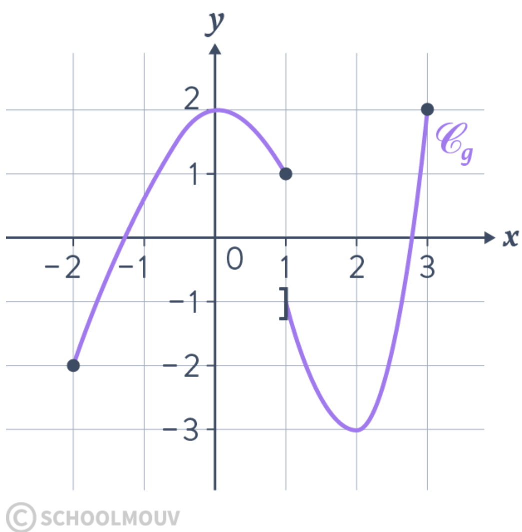


→ La fonction f est continue en a.

Astuce

> On peut tracer la courbe représentative de la fonction sans lever le crayon.

2



→ La fonction g n'est pas continue sur $[-2\ ;\ 3]$ car elle n'est pas continue en 1. En effet :

$$g(1) = 1 \neq \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = -1$$

Astuce

On ne peut pas tracer la courbe de cette fonction sans lever le crayon.

Donnons quelques propriétés de la continuité de fonction.

Propriété

- Les fonctions dérivables sur un intervalle I sont continues sur cet intervalle.
- Si u et v sont deux fonctions continues sur I, alors $u + v$ et $u \times v$ sont continues sur I.
- Si u et v sont deux fonctions continues sur I et si de plus v est non nulle sur I, alors $\frac{u}{v}$ est continue sur I.

→ En particulier, la fonction $\frac{1}{v}$ est continue sur I.

c. Continuité des fonctions usuelles

Propriété

Les fonctions affines, polynômes, inverse, racine carrée, exponentielle, sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

C'est-à-dire :

- les **fonctions affines** sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les **fonctions polynômes** sont continues sur $\mathbb{R}$;
- la **fonction inverse** est continue sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$;
- la **fonction racine carrée** est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$;
- la **fonction exponentielle** est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Étudions la continuité de la fonction définie par $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)\text{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et la fonction $x \mapsto \text{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

→ Or, f est le produit de ces deux fonctions, donc on peut affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2 | Théorème des valeurs intermédiaires

Nous savons maintenant ce qu'est une fonction continue sur un intervalle. Dans cette partie, nous allons voir un théorème valable seulement pour une fonction f continue sur un intervalle.

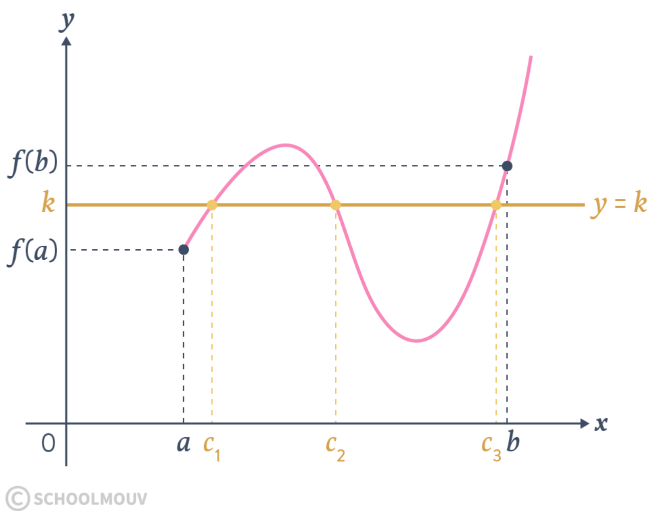
→ Cela nous permettra de déterminer l'existence (et éventuellement l'unicité) de solutions de l'équation $f(x) = k$ (k réel) sur cet intervalle.

a. Théorème concernant les fonctions continues

Théorème

Théorème des valeurs intermédiaires :

Si une fonction f est définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ ($a < b$), alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Le théorème des valeurs intermédiaires est un **théorème d'existence** : il affirme l'existence d'au moins une solution pour l'équation $f(x) = k$.

b. Corollaire pour les fonctions continues et strictement monotones

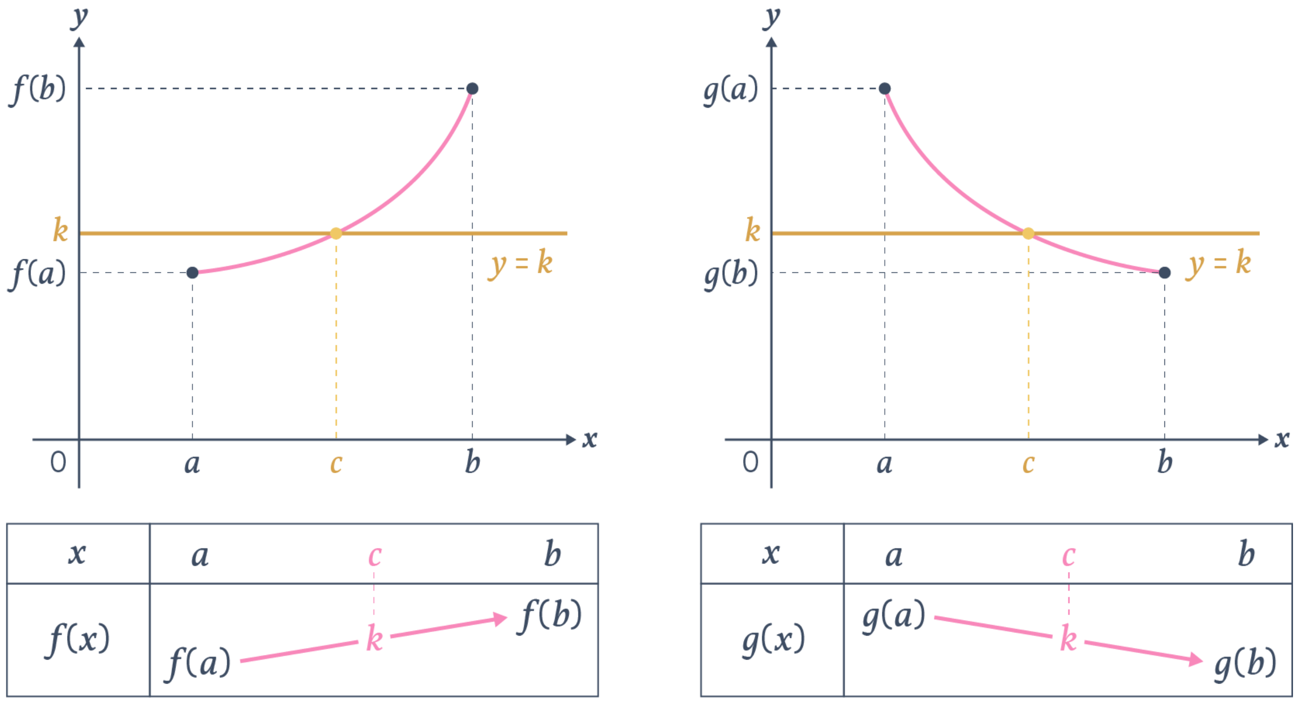
→ Un **corollaire** est un **théorème**, ou une proposition, qui est une **conséquence** directe d'un ou d'une autre.

Théorème

Corollaire :

Si une fonction f est définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ $(a < b)$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une unique solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Illustrons ce corollaire pour mieux nous le représenter, avec les courbes représentatives et les tableaux de variations de deux fonctions f et g.



1. La fonction f est continue et strictement croissante sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

→ Le réel c est l'unique solution de l'équation $f(x) = k$ dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

2. La fonction g est continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

→ Le réel c est l'unique solution de l'équation $g(x) = k$ dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

À retenir

> Ce corollaire est un **théorème d'unicité** : il affirme l'existence d'une unique solution pour l'équation $f(x) = k$, que, souvent, l'on ne peut résoudre facilement par le calcul.
>
> → On peut, dans ce cas, essayer de donner une valeur approchée de cette solution.

c. Un exemple

Nous allons maintenant illustrer ce corollaire par un exemple, qui nous permettra de mieux en comprendre les applications.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

→ Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans $\mathbb{R}$.

Astuce

> L'expression « unique solution » doit immédiatement faire penser au corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

1. Commençons par étudier les variations de la fonction f, afin de voir si elle est **strictement monotone**.

→ Calculons la dérivée de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x \\ &= 6x^2 - 6x \\ &= 6x(x-1) \end{aligned}$$

→ Nous cherchons maintenant à construire les tableaux de signes et de variations.

Pour cela, il faut d'abord savoir pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée s'annule :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Calculons les extremums et les limites en l'infini.

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \times 0^3 - 3 \times 0^2 - 1 \\ &= \boxed{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 - 1 \\ &= \boxed{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \\ &\text{[en factorisant par } x^3 \text{ que nous considérons non nul]} \\ &= \boxed{-\infty} \\ &\left[\text{car } \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} 2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} = 2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \\ &= \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

Nous avons tous les éléments pour construire le tableau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

2 Recherchons les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Il apparaît clairement dans le tableau de variations que cette équation n'admet aucune solution sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1]$ puisque, sur cet intervalle, la fonction f ne s'annule pas.

En revanche, sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, nous pouvons justifier de la manière suivante que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

À retenir

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'il s'agit d'une fonction polynôme : elle est donc continue sur $[1\ ;\ +\infty[$.
- La fonction f est strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.
- $f(1) = -2 < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-2\ ;\ +\infty[$.

→ D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, donc finalement sur $\mathbb{R}$.

d. Méthode d'encadrement d'une solution

Astuce

Pour encadrer une solution, nous allons nous servir de la fonction table de notre calculatrice.

Reprenons notre exemple précédent : on sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans l'intervalle $[1\ ;+\infty[$.

→ Nous cherchons à encadrer la solution à 10^{-2} près.

Pour ce faire, nous allons opérer par étapes.

1. Entrer l'**expression de la fonction** dans la calculatrice : $\boxed{2\text{X}^3 - 3\text{X}^2 - 1}$.
2. Régler le **point de départ** de la table.

   → Nous réglons le point de départ sur $\boxed{1}$ puisque nous nous intéressons à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
3. Régler le **pas du tableau**.

   → Nous réglons le pas sur $\boxed{1}$, cela signifie qu'il donne toutes les images des nombres entiers (1, 2, 3, 4, etc.).

Nous observons maintenant la table correspondante :

X	Y
1	-2
2	3
3	26
4	79

Nous repérons facilement que $-2 < 0 < 3$ (on choisit toujours un encadrement avec les valeurs les plus proches de k, qui vaut ici 0).

→ Notre solution est encadrée de la manière suivante : $1 < a < 2$.

Il ne s'agit que d'un encadrement à l'unité, et non pas à 10^{-2}.
Nous recommençons donc les étapes 2 et 3.

→ Nous laissons le point de départ sur $\boxed{1}$, puisque nous nous intéressons maintenant à l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, et nous réglons le pas cette fois sur $\boxed{0,1}$.

Nous observons un extrait de la table obtenue :

X	Y
$1,5$	-1
$1,6$	$-0,488$
$1,7$	$0,156$
$1,8$	$0,944$

Ici, nous avons : $-0,488 < 0 < 0,156$.

→ Notre solution est désormais encadrée de la manière suivante : $1,6 < a < 1,7$.

Il s'agit d'un encadrement à 10^{-1} près.
Nous continuons donc, en reprenant les étapes 2 et 3.

→ Nous réglons alors le point de départ du tableau sur $\boxed{1,6}$ et le pas sur $\boxed{0,01}$.

Nous obtenons finalement :

X	Y
$1,66$	$-0,1182$
$1,67$	$-0,0518$
$1,68$	$0,01606$
$1,69$	$0,08532$

Nous repérons : $-0,0518 < 0 < 0,01606$.

→ Un encadrement de a à 10^{-2} est : $1,67 < a < 1,68$.

→ Une valeur approchée de a à 10^{-2} près est donc : $a \approx 1,68$.

3 | Étude d'une suite définie par une relation de récurrence

Dans cette dernière partie, nous allons étudier graphiquement un exemple de suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

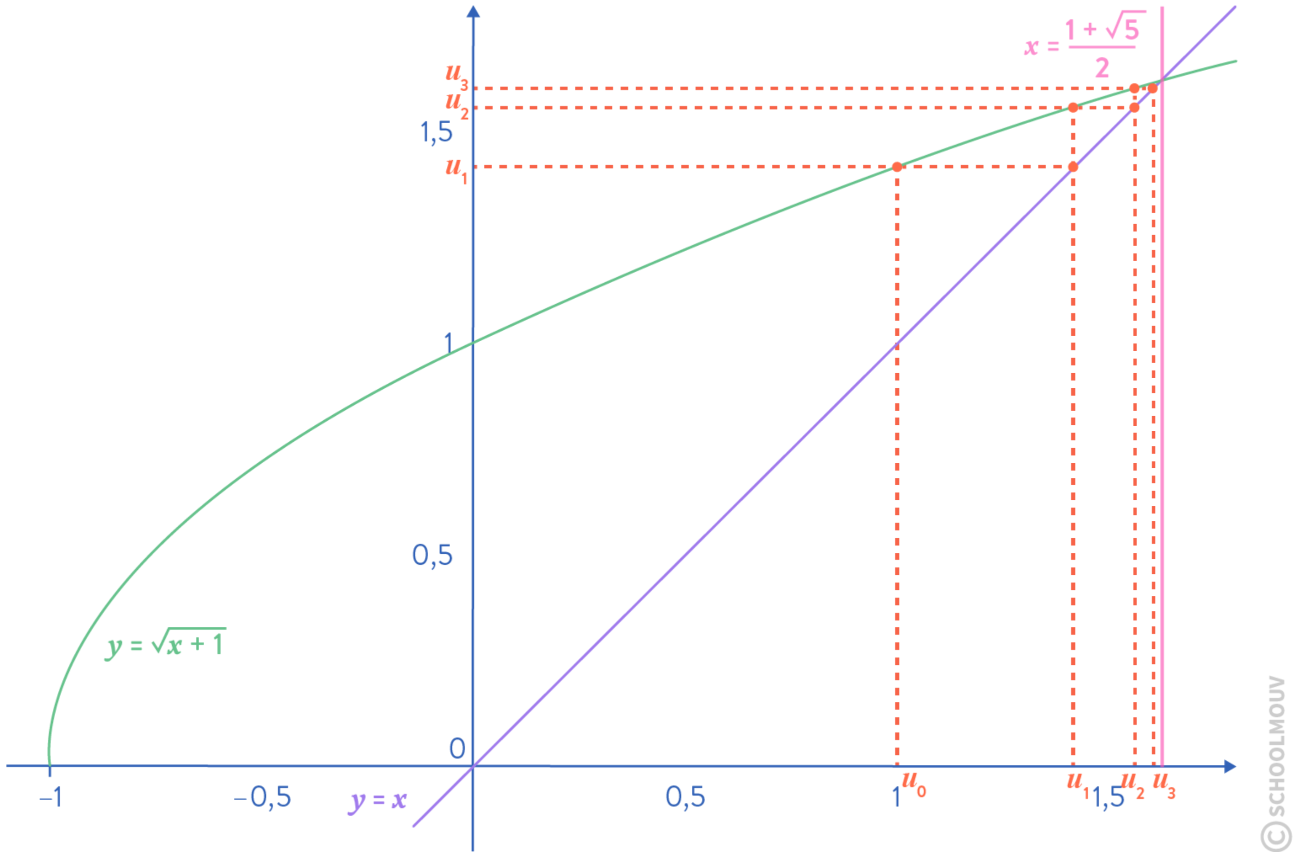
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

→ La fonction f est donc la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$ sur $[-1\ ;\ +\infty[$ et continue sur cet intervalle.

Nous avons :

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{2} \\ u_2 &= \sqrt{u_1 + 1} = \sqrt{\sqrt{2} + 1} \approx 1,554 \\ u_3 &= \sqrt{u_2 + 1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 1} + 1} \approx 1,598 \\ &\dots \end{aligned}$$

Cette suite récurrente est représentée graphiquement ci-dessous.



Graphiquement, nous nous apercevons que les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs et que la suite (u_n) est croissante.

→ Elle semble converger vers la valeur $1,6$.

En fait, des théorèmes qui ne sont pas au programme nous permettraient de montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite est $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, seule solution positive de l'équation $f(x) = x$.

Conclusion :

Les derniers cours nous ont permis de découvrir la notion de limites d'une fonction et, ici, la notion de continuité d'une fonction sur un intervalle.

La continuité d'une fonction sur un intervalle permet d'établir, sous certaines hypothèses, l'existence de solutions aux équations du type $f(x) = k$ (k un réel).
Si, de plus, la fonction continue sur l'intervalle est aussi monotone sur cet intervalle, sous les mêmes conditions, nous pourrons établir l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = k$ (k un réel).

Ces deux propriétés peuvent être appelées théorèmes des valeurs intermédiaires.