Intégration

Pour retrouver le cours correspondant de la spécialité « Mathématiques » :

→ *Calcul intégral*

Introduction :

Dans ce cours de l'option « Mathématiques complémentaires », nous allons aborder la notion de calcul intégral. Ce type de calcul permet de mesurer des grandeurs (aires, volumes...) et permettra également, dans le supérieur, de déterminer des probabilités et des statistiques.

1 Intégrale d'une fonction continue positive

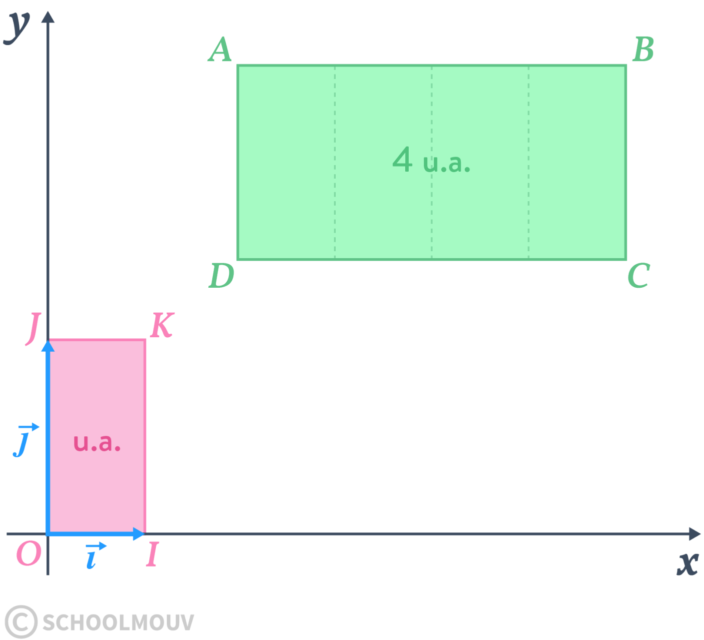
Commençons par définir l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle.

a. Définitions et vocabulaire

Définition

Unité d'aire :

Dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, l'unité d'aire (notée u.a.) est l'aire du rectangle $OIKJ$, où K est le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$.



À partir de cette notion d'unité d'aire, on peut exprimer l'aire d'autres figures géométriques.

Exemple

L'aire du rectangle $ABCD$ sur l'image ci-dessus est de 4 u.a.

Définition

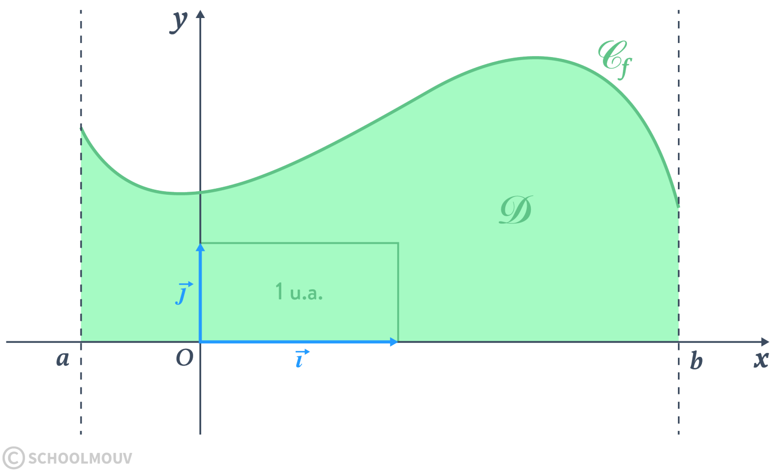
Intégrale d'une fonction positive :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, avec $a < b$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'intégrale de a à b de f est égale à l'aire (en unité d'aire) du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

→ Elle se note ainsi :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

→ On parle aussi d'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.



Astuce

On constate donc que, pour toute fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est un **nombre réel positif ou nul**.

Précisons aussi que, dans la notation donnée :

- a et b sont les **bornes** de l'intégrale ;
- x est la **variable** d'intégration et peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre, si celle-ci n'est pas utilisée ailleurs, et $\mathrm{d}x$ indique que la variable est x.

➜ Ainsi, par exemple, les deux expressions suivantes sont égales :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Si f est une fonction continue et positive, il résulte alors de la définition précédente de l'intégrale deux propriétés.

Propriété

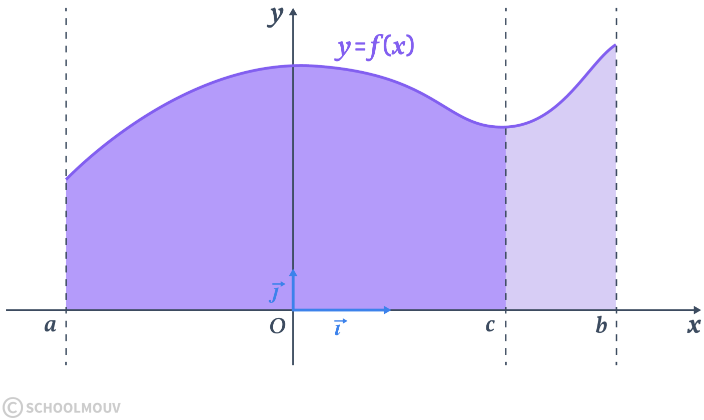
f est une fonction continue et positive sur un intervalle I.
a, b et c sont des réels de I.

- **Intervalle de longueur nulle** :

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

- **Relation de Chasles**, ou additivité des aires :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$



Exemple

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On donne :

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$$
$$\int_{-4}^1 f(x)\mathrm{d}x = 5$$

→ Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\int_{-4}^2 f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-4}^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= 5+3 \\ &= 8\end{aligned}$$

b. Calcul d'une intégrale d'une fonction continue positive

Le cours précédent nous a fait découvrir la notion de **primitives** d'une fonction. Elle va nous servir pour calculer une intégrale.

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

- La fonction F_a définie sur $[a\ ;\ b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.
- Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Astuce

Nous pouvons aussi noter :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Démontrons que la fonction F_a définie ci-dessus est bien une primitive de la fonction f qui s'annule en a.

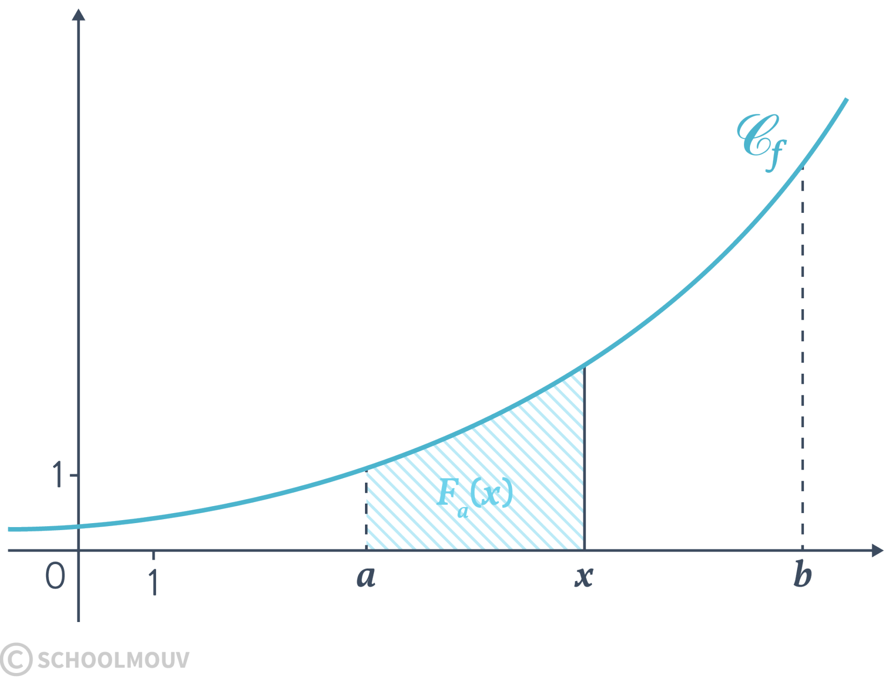
Démonstration

1 On considère :

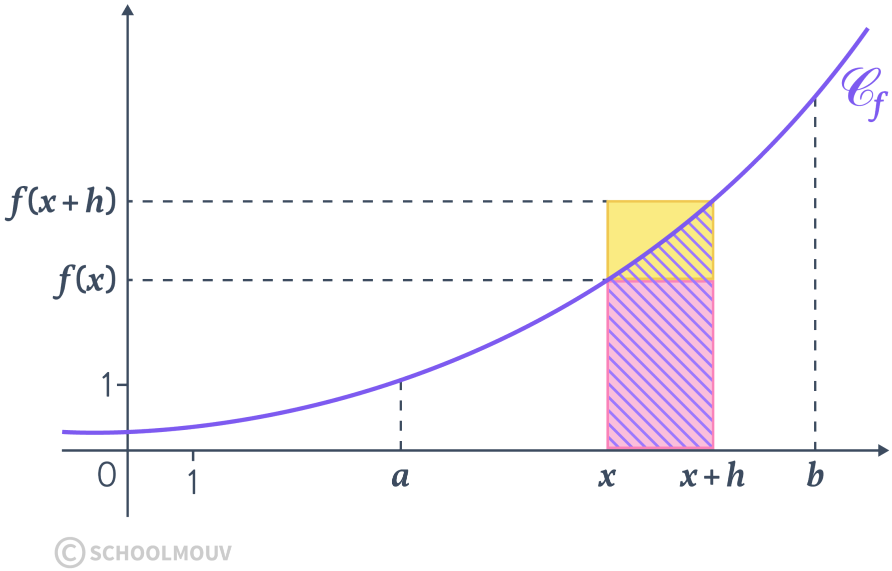
- une fonction f positive et croissante sur $[a\ ;\ b]$,
- une fonction F_a :

$$\begin{aligned} F_a\ :\ [a\ ;\ b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

→ D'après la définition de l'intégrale, $F_a(x)$ est l'aire de la surface hachurée ci-dessous.



② On calcule le taux de variation de F_a en x dans le cas où h est un réel strictement positif (avec $x + h \leq b$).

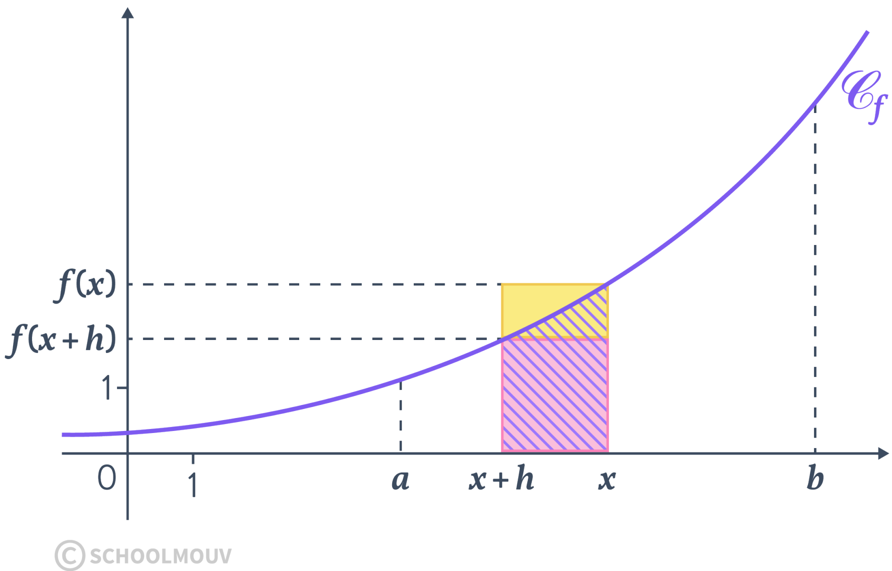


f est croissante sur $[x\ ;\ x + h]$, on constate sur l'image que l'aire qui représente $F_a(x + h) - F_a(x)$ est comprise entre deux rectangles de largeur h, et chacun de hauteur respective $f(x)$ et $f(x + h)$, donc :

$$h \times f(x) \leq F_a(x + h) - F_a(x) \leq h \times f(x + h)$$

$$f(x) \leq \frac{F_a(x + h) - F_a(x)}{h} \leq f(x + h) \rightarrow \text{ inégalité (1)}$$

③ On calcule le taux de variation de F_a en x dans le cas où h est un réel strictement négatif (avec $a \leq x + h$).



f est croissante sur $[x+h\ ;\ x]$, on constate sur l'image que l'aire qui représente $F_a(x) - F_a(x+h)$ est comprise entre deux rectangles de largeur $-h$, et chacun de hauteur respective $f(x+h)$ et $f(x)$, donc :

$$-h \times f(x+h) \leq F_a(x) - F_a(x+h) \leq -h \times f(x)$$

$$f(x+h) \leq \frac{F_a(x) - F_a(x+h)}{-h} \leq f(x)$$

[ici, le sens des inégalités ne change pas car $-h$ est un nombre positif]

$$f(x+h) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x) \rightarrow \text{ inégalité (2)}$$

4 On en déduit la dérivée de $F_a(x)$ lorsque h tend vers 0.

- f est continue sur $[a\ ;\ b]$, donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.
- Ainsi, d'après les inégalités (1) et (2), en passant à la limite quand h tend vers 0, on obtient par encadrement :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)$$

$$F_a'(x) = f(x) \text{ pour } x \in [a\ ;\ b]$$

[d'après la définition du nombre dérivé]

→ Par définition, la fonction F_a est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, et elle s'annule en a car :

$$F_a(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$$

C Ainsi, la fonction $x \mapsto F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ qui s'annule en a.

Prenons maintenant un exemple de calcul.

Exemple

Calculons l'intégrale :

$$\int_1^3 (4x^2 + 3x)\mathrm{d}x$$

- La fonction $f\ :\ x \mapsto 4x^2 + 3x$ est continue et positive sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$, donc son intégrale existe d'après ce qui précède.

On pose, pour tout $x \in [1\ ;\ 3]$:

$$F(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

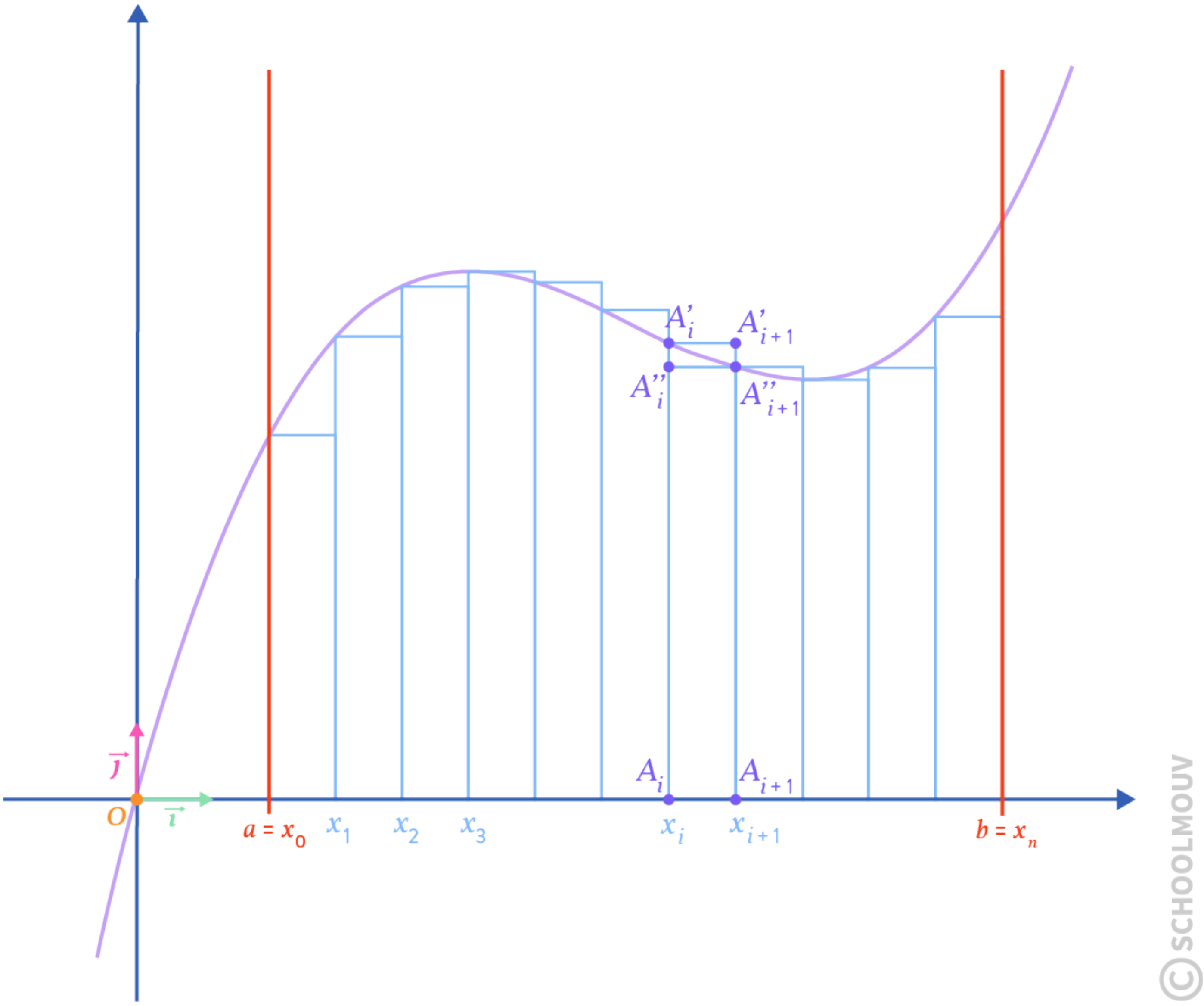
➜ La fonction F est une primitive de f sur cet intervalle.

- On calcule maintenant l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_1^3 (4x^2 + 3x)\mathrm{d}x &= F(3) - F(1) \\ &= \left(\frac{4}{3} \times 3^3 + \frac{3}{2} \times 3^2\right) - \left(\frac{4}{3} \times 1^3 + \frac{3}{2} \times 1^2\right) \\ &= \left(36 + \frac{27}{2}\right) - \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) \\ &= 36 + \frac{27}{2} - \frac{4}{3} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{216}{6} + \frac{81}{6} - \frac{8}{6} - \frac{9}{6} \\ &= \frac{280}{6} \\ &= \frac{140}{3} \text{ u.a.}\end{aligned}$$

Nous allons maintenant présenter une méthode d'approximation d'une intégrale.

1. Considérons une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ ($a < b$), représentée graphiquement ci-dessous.



Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles

2. Partageons l'intervalle $[a\ ;\ b]$ en n intervalles de même longueur, où n est un entier naturel plus grand que 2.

➜ Le but est que n soit le plus grand possible pour approcher le plus possible la courbe représentative de la fonction f.

3. Pour tout $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, plaçons les abscisses x_i et les points A_i, $A_i^{'}$ et $A_i^{''}$ d'abscisse x_i, et les points A_{i+1}, $A_{i+1}^{'}$ et $A_{i+1}^{''}$ d'abscisse x_{i+1}, comme indiqué sur le graphique.

Pour tout $i \in 1\ ;2\ ;\ldots\ ;n$:

- l'aire du rectangle $A_iA_i^{'}A_{i+1}^{'}A_{i+1}$ est :

$$(x_{i+1} - x_i)f(x_i)$$

- l'aire du rectangle $A_i A_i'' A_{i+1}'' A_{i+1}$ est :

$$(x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1})$$

- la fonction f est positive sur l'intervalle $[x_i \ ; \ x_{i+1}]$, donc l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t$ est égale (en $\mathrm{u.a.}$) à l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$.

➜ $(x_{i+1} - x_i) f(x_i)$ ou $(x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1})$ sont donc des valeurs approchées de l'intégrale :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t$$

4. En faisant la somme des aires des rectangles ainsi définis, nous obtenons, pour $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, les valeurs approchées :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i) = u_n$$
$$\text{ou : } \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}) = v_n$$

5. Comme nous avons partagé $[a \ ; \ b]$ en n intervalles de même longueur, nous avons, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b - a}{n}$$

➜ Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_i) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \ \text{[en factorisant par } \tfrac{b-a}{n}\text{]} \\ &= \frac{b-a}{n} \left(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right) \end{aligned}$$

$$\text{De même : } v_n = \frac{b-a}{n} \left(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \right)$$

C. Cette méthode d'approximation d'une aire est appelée la **méthode des rectangles**.

- En faisant tendre n tend $+\infty$, on peut se rapprocher de plus en plus (en utilisant la suite (u_n) ou la suite (v_n), ou les deux) de la valeur de cette aire qui est égale (en u.a.) à :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

2 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

a. Définition

Nous allons maintenant définir l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle, donc dans le cas général, à l'aide des primitives de cette fonction.

Définition

Intégrale d'une fonction continue :

Si f est une fonction continue sur l'intervalle I, si F est une primitive de f sur I et si a et b sont deux réels quelconques de I, alors on appelle intégrale de f entre a et b la différence $F(b) - F(a)$.

- Cette intégrale est toujours notée :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

b. Propriétés

Donnons quelques propriétés, qui nous permettront de calculer de nombreuses intégrales.

Propriété

Soit f et g une fonction continue sur un intervalle I, a, b et c des réels quelconques de I et k un réel.

- On a les propriétés suivantes :

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$
$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$\text{Linéarité : } \int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

- **Relation de Chasles**

Pour tous réels a, b et c tels que $a \leq c \leq b$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

- **Positivité de l'intégrale**

a et b sont maintenant deux réels de I tels que $a < b$.

➜ Si $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[a\ ;\ b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

➜ Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout x de $[a\ ;\ b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

C. Exemple

Regardons comment appliquer ces propriétés dans le calcul d'une intégrale.

Exemple

Nous cherchons à calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$$
$$J = \int_0^1 \frac{2}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$$

⚠

Attention

On constate que l'on ne va pas pouvoir directement calculer l'intégrale J, puisqu'il est impossible de calculer une primitive de $x \mapsto \frac{2}{e^x + 2}$ avec les formules classiques.

➜ Nous allons donc calculer I, puis $I + J$, pour en déduire J.

1 Calculons l'intégrale I.

Soit f la fonction définie sur $[0 \ ; \ 1]$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}$$

f est de la forme $\frac{u'}{u}$, où $u(x) = \mathrm{e}^x + 2 > 0$, donc une primitive F de f sur l'intervalle $[0 \ ; \ 1]$ sera de la forme $\ln(u)$:

$$F(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 2)$$

➜ Nous pouvons ainsi calculer I :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2} \mathrm{d}x \\ &= F(1) - F(0) \\ &= \ln(\mathrm{e}^1 + 2) - \ln(\mathrm{e}^0 + 2) \\ &= \ln(\mathrm{e} + 2) - \ln(3) \ [\text{car } \mathrm{e}^0 = 1] \end{aligned}$$

2 Calculons l'intégrale $I + J$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
I + J &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{2}{e^x+2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x+2} + \frac{2}{e^x+2}\right)\mathrm{d}x \\
&\text{[d'après la propriété de linéarité]} \\
&= \int_0^1 \frac{e^x+2}{e^x+2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 1\mathrm{d}x \\
&= G(1) - G(0) \ \text{[en prenant } G(x) = x\text{]} \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

➜ On a donc : $I + J = 1$.

③ **Trouvons maintenant la valeur de l'intégrale J.**

On a $I + J = 1$.

➜ On en déduit la valeur de l'intégrale J :

$$\begin{aligned}
J &= 1 - I \\
&= 1 - (\ln(e+2) - \ln(3)) \\
&= 1 - \ln(e+2) + \ln(3) \\
&= 1 - \ln\left(\frac{e+2}{3}\right) \ \left[\text{car } \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)\right]
\end{aligned}$$

3 Applications du calcul intégral

Nous savons maintenant comment calculer une intégrale. Regardons deux exemples d'application des intégrales, pour mieux comprendre à quoi elles servent, notamment pour le calcul d'une aire.

a. Calculer une aire à l'aide d'une intégrale

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de I tels que $a < b$.

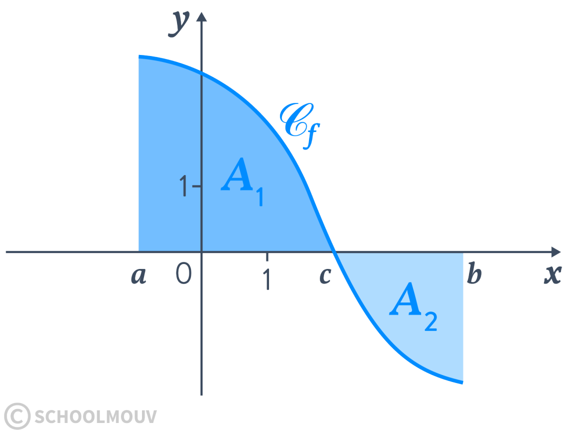
Soit $\mathscr{E}$ la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

- Si $f \geq 0$ sur I, alors :

$$\text{Aire}(\mathscr{E}) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

- Si $f \leq 0$, alors :

$$\text{Aire}(\mathscr{E}) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$



Sur le graphique, on peut constater que sur l'intervalle $[a\ ;\ c]$, la fonction f est positive (sa courbe est au-dessus de l'axe des abscisses).

➜ L'aire A_1 sera donc égale à :

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

En revanche, sur l'intervalle $[c\ ;\ b]$, la fonction f est négative (sa courbe est en dessous de l'axe des abscisses).

➜ L'aire A_2 sera donc égale à :

$$-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Attention

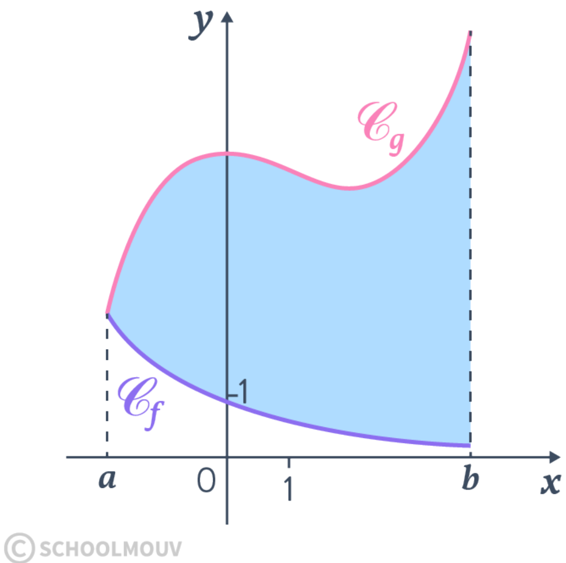
On retiendra qu'une intégrale peut être positive ou négative, mais qu'une **aire**, elle, **est toujours positive**.

Propriété

Soit f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I telles que $f(x) \leq g(x)$ sur I, et a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

➜ Alors l'aire de la surface comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$$



b. Valeur moyenne d'une fonction

Définition

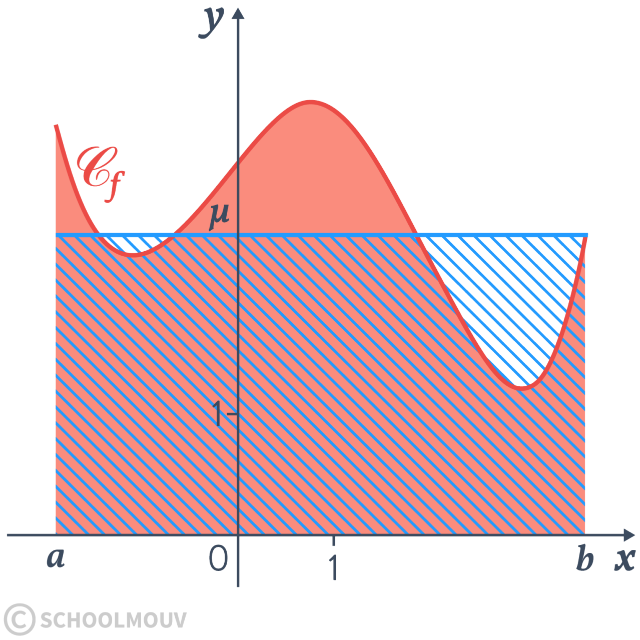
Valeur moyenne d'une fonction :

Si f est une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$, avec $a \neq b$ et $a < b$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Étudions un exemple pour mieux comprendre cette nouvelle notion.

Exemple



Ici, la fonction f est positive sur $[a\ ;\ b]$, on interprète la valeur moyenne de la manière suivante : l'aire « sous la courbe » de f est égale à l'aire « sous la courbe » de la fonction constante égale à μ.

➜ Sur notre schéma, l'aire rouge est égale à l'aire hachurée en bleu.

Nous allons maintenant, à travers un exemple, interpréter une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Exemple

On considère la fonction dérivable f définie sur $I = [0\ ;\ 20]$ par :

$$f(x) = 1\,000 \times (x+5) \times \mathrm{e}^{-0{,}2x}$$

Cette fonction est la fonction de demande d'un produit.

➜ Le nombre $f(x)$ représente la quantité d'objets demandés lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ par :

$$F(x) = -5\,000 \times (x+10) \times \mathrm{e}^{-0{,}2x}$$

Montrons que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$.

Soit $x \in [0\ ;\ 20]$. Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= -5\,000 \times (1 \times e^{-0,2x} - 0,2 \times (x+10) \times e^{-0,2x}) \\
&\text{[car } (uv)' = u'v + uv' \text{ et } (e^{w})' = w'e^{w}\text{]} \\
&= -5\,000 \times (1 - 0,2 \times (x+10)) \times e^{-0,2x} \\
&= (1\,000 \times (x+10) - 5\,000) \times e^{-0,2x} \\
&= (1\,000 \times (x+10) - 1\,000 \times 5) \times e^{-0,2x} \\
&= 1\,000 \times (x + 10 - 5) \times e^{-0,2x} \\
&= 1\,000 \times (x+5)e^{-0,2x} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

→ La fonction F est donc bien une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$.

(2) Déterminons la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 8]$.

D'après la définition que nous venons de voir, la valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 8]$ est :

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{8-2} \times \int_2^8 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6} \times [F(x)]_2^8 \text{ [car } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [2\ ;\ 8]\text{]} \\
&= \frac{1}{6} \times (F(8) - F(2)) \\
&= \frac{1}{6} \times (-5\,000 \times (8+10) \times e^{-0,2\times 8} - (-5\,000 \times (2+10) \times e^{-0,2\times 2})) \\
&= \frac{5\,000}{6} \times ((2+10) \times e^{-0,4} - (8+10) \times e^{-1,6}) \\
&= \frac{2\,500}{3} \times (12 \times e^{-0,4} - 18 \times e^{-1,6}) \\
&= 2\,500 \times (4 \times e^{-0,4} - 6 \times e^{-1,6}) \\
&\approx 3\,675 \text{ [à l'entier près]}
\end{aligned}
$$

(C) Interprétons ce résultat.

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 8]$ est :

$$\mu \approx 3\,675 \text{ [à l'entier près]}$$

→ Par définition de la fonction f, la quantité moyenne d'objets demandés, lorsque le prix unitaire est compris entre 2 euros et 8 euros, est d'environ $3\,675$.

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons commencé par définir l'intégrale de a à b (avec $a < b$), d'une fonction f continue et positive comme étant égale à l'aire (en unité d'aire) du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.
Nous avons ensuite défini cette intégrale lorsque f est de signe quelconque comme étant égale à la différence $F(b) - F(a)$, où la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$.
Enfin, nous avons vu les propriétés que vérifie cette intégrale et avons défini la valeur moyenne d'une fonction continue f sur $[a\ ;\ b]$.