Compléments sur la dérivation

Introduction :

En première, nous avons vu la notion de dérivée d'une fonction. Nous allons ici en faire des rappels, avant de découvrir de nouvelles formules de dérivées spécifiques. Enfin, nous appliquerons la notion de dérivée en étudiant une fonction.

1 Rappels sur les calculs de dérivées

Commençons par nous remémorer les **dérivées de quelques fonctions usuelles**, que nous avons vues en première.

À retenir

$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur
$ax+b$ (a et $b \in \mathbb{R}$)	a	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{Z}$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Exemple

Dérivons, par exemple, la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ telle que : $f(x) = x^4 + 2x + \dfrac{3}{x}$.

→ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 4x^3 + 2 - \frac{3}{x^2}$$

Revoyons maintenant les formules de dérivation pour un **produit** et un **quotient** de deux fonctions.

Propriété

1. Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction $u \times v$ est dérivable sur I et :

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

2. Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors :

- la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

- la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = (2x+5)\sqrt{x}$.

La fonction g est le produit des deux fonctions : $x \mapsto 2x+5$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$.

- g est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$.

1. Posons :

- $u(x) = 2x + 5$, nous obtenons $u'(x) = 2$;
- $v(x) = \sqrt{x}$, nous obtenons $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Utilisons la formule de la dérivée d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \times \sqrt{x} + (2x+5) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{2x+5}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{2x+5}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{4x+2x+5}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x+5}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Enfin, terminons ces rappels en redonnant l'**équation de la tangente** en un point à la courbe d'une fonction.

À retenir

f est une fonction dérivable en $a \in I$. La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse a est la droite d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

➜ $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

2 Nouvelles formules de dérivées

Ces rappels faits, nous pouvons découvrir de nouvelles formules, qui nous permettront d'étudier des fonctions plus complexes.

a. Fonctions de la forme $x \mapsto f(ax+b)$

Propriété

Soit la fonction $x \mapsto ax + b$ (a et b réels) définie et dérivable sur I, à valeurs dans J.

Soit la fonction f définie et dérivable sur J.

Alors la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction :

$$x \mapsto af'(ax+b)$$

Exemple

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \sqrt{2x+3}$.

Considérons la fonction racine carrée $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Et, pour tout x strictement positif :

$$f^{'}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Nous avons ainsi, pour tout x positif :

$$g(x) = f(2x+3)$$

Comme, pour tout $x \geq 0$, $2x+3 > 0$, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+}$.

➜ Pour tout x positif, nous avons finalement :

$$\begin{aligned} g^{'}(x) &= 2 \times f^{'}(2x+3) \\ &= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \end{aligned}$$

b. Fonctions de la forme u^2

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction u^2 est dérivable sur I et :

$$(u^2)^{'} = 2u^{'}u$$

Exemple

Prenons un exemple et dérivons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-3x^2+4)^2$.

1. On reconnaît la forme u^2, avec $u(x) = -3x^2+4$.
2. u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. On dérive u pour pouvoir appliquer la formule : $(u^2)^{'} = 2u^{'}u$.

➜ On obtient : $u^{'}(x) = -6x$.

C. Enfin, pour tout nombre réel x :

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= 2 \times (-6x) \times (-3x^2+4) \\ &= -12x(-3x^2+4) \end{aligned}$$

C. Fonctions de la forme e^u

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction e^u est dérivable sur I et :

$$(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$$

Exemple

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. On reconnaît la forme e^u, avec $u(x) = -x^2$.
2. u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. On dérive u pour pouvoir appliquer la formule : $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$.

→ On obtient : $u'(x) = -2x$.

C. Enfin, pour tout nombre réel x :

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^u)'(x) &= u'(x) \times (\mathrm{e}^u)(x) \\ &= -2x\mathrm{e}^{-x^2}\end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser la dernière formule pour démontrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\ln(x)}$$

1. D'une part, comme les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques, nous avons, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = x$$

→ Donc, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 1$$

2. D'autre part, en utilisant la propriété donnée ci-dessus, nous avons, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln(x)}$$
$$= \ln'(x) \times x$$

(c) Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$x \ln'(x) = 1 \Leftrightarrow \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Nous allons maintenant voir une généralisation de cette formule.

d. Fonctions de la forme $\ln(u)$

Propriété

Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

Exemple

On considère la fonction $g : x \mapsto \ln(2x+6)$ sur l'intervalle $I =]-3\ ;\ +\infty[$.

Posons $u(x) = 2x + 6$.

Pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$, donc la fonction g est définie et dérivable sur I.

Nous avons, pour tout $x \in I$: $u'(x) = 2$.

→ Nous obtenons, pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$
$$= \frac{2}{2x+6}$$
$$= \frac{1}{x+3}$$

3 Exemple d'étude de fonction

Nous allons maintenant appliquer les propriétés découvertes sur l'étude complète d'une fonction.

→ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

① Calcul de la dérivée

Posons, pour tout x réel, $u(x) = -x^2$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel :

$$u'(x) = -2x$$

➜ La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, nous avons :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\mathrm{e}^u)'(x) \\ &= u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)} \\ &= -2x\mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$$

② Étude du signe de f' et des variations de f

Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, car la fonction exponentielle est strictement positive.

➜ Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x$.

On a donc :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow -2x > 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\Leftrightarrow -2x < 0 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

➜ f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$,

➜ f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

③ Extremum et limites aux bornes de l'ensemble de définition de f

- Commençons par calculer l'extremum :

$$f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$$

- Calculons maintenant la limite en $-\infty$.

Posons $X = -x^2$.

Quand x tend vers $-\infty$, x^2 tend vers $+\infty$, donc $X = -x^2$ tend vers $-\infty$.

➜ On a donc, d'après ce que nous avons vu dans le cours sur les limites :

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = \lim_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$$

- Terminons par la limite en $+\infty$.

Posons $X = -x^2$.
Quand x tend vers $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$, donc $X = -x^2$ tend vers $-\infty$.

➜ On a donc, toujours d'après ce que nous avons vu dans le cours sur les limites :

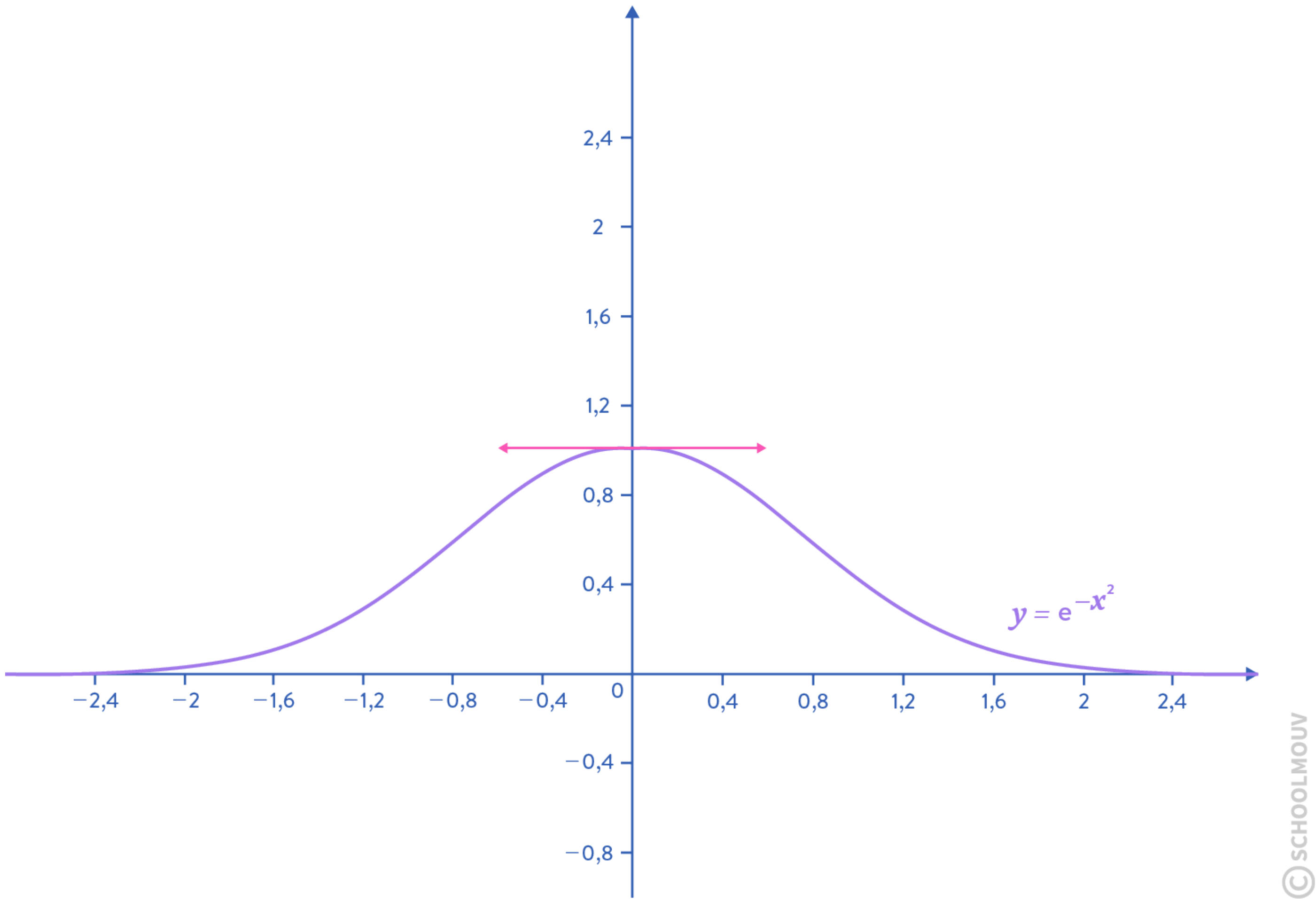
$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = \lim_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$$

4 Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$	
e^{-x^2}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	0	↗	1	↘	0

Tableau de variations de la fonction f

5 Représentation graphique de la fonction f



Représentation graphique de la fonction f

Astuce

Nous pouvons remarquer que la fonction f est **paire**, c'est-à-dire que sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

➜ En effet, pour tout x réel, $-x$ est aussi un nombre réel et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{-(-x)^2} \\ &= e^{-x^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons revu les formules de dérivation de première et en avons découvert de nouvelles. Puis nous avons mis en pratique une de ces formules et avons calculé des limites, afin de mener l'étude d'une fonction.