Droites, plans et vecteurs de l'espace

Introduction :

En géométrie plane, nous avons utilisé les vecteurs dès la seconde. Ils permettent de modéliser les translations, d'étudier les figures et différentes configurations du plan : déterminer si deux droites sont parallèles, perpendiculaires, si un point appartient à une droite à l'aide des vecteurs directeurs sont quelques exemples.
Dans ce cours, la notion de vecteur va être prolongée dans l'espace à 3 dimensions ; ce sont des outils efficaces, notamment en sciences physiques ou en sciences de l'ingénieur, pour décrire des forces, la position, ou la vitesse de certains objets dans leurs déplacements dans l'espace.

Dans une première partie, nous définirons le vecteur dans l'espace et étudierons ses propriétés, similaires aux propriétés dans le plan. Les vecteurs vont permettre de définir l'appartenance à une droite ou à un plan.
Le lien entre droite, plan et vecteurs sera détaillé en deuxième partie.
Enfin, nous verrons, dans la troisième partie, comment on peut repérer un point en utilisant un système de coordonnées dans l'espace.

Dans tout le chapitre, nous nous placerons dans une configuration spatiale à 3 dimensions, qui est notre espace naturel.

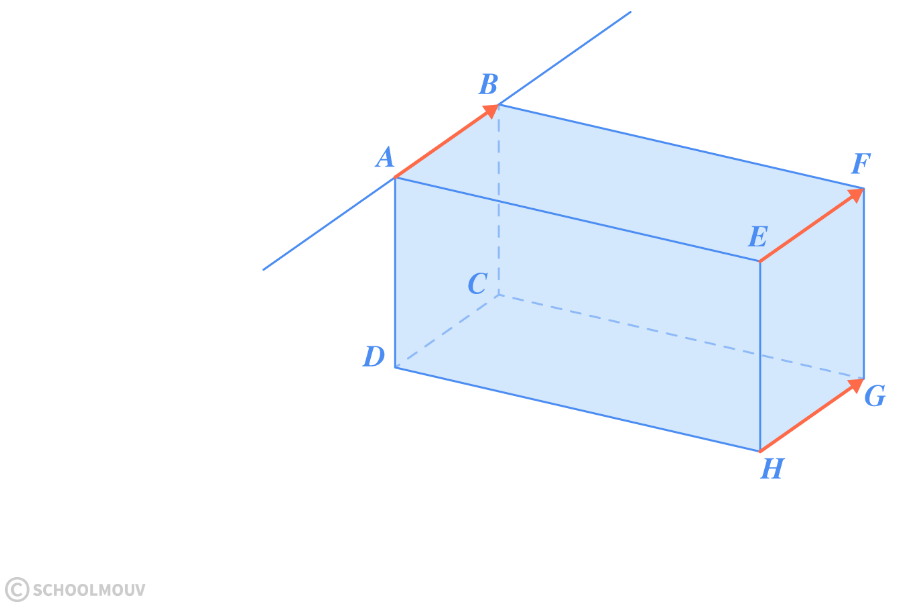
→ Nous le notons $\mathcal{E}$.

1 | Vecteurs de l'espace

La plupart des notions vues en seconde se généralisent dans $\mathcal{E}$.

a. Vecteurs et translations

Considérons le pavé droit $ABCDEFGH$:



Observons la translation qui amène A vers B ; c'est un déplacement qui :

- a pour direction la droite (AB) ;
- sur cette direction, va dans le sens de A vers B ;
- se fait sur la longueur AB.

→ On définit avec ces trois caractéristiques le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Ce même déplacement transforme E en F et H en G.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux à $\overrightarrow{AB}$.

→ Ils **représentent** le même vecteur et la même translation.

Définition

Vecteur :

À tout couple de points $(A,\ B)$ de $\mathcal{E}$, on peut associer un unique vecteur $\overrightarrow{AB}$ à la translation qui transforme A en B.
Ce vecteur $\overrightarrow{AB}$ a trois caractéristiques :

- sa direction : la droite (AB) ;
- son sens : de A vers B ;
- et sa norme : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Tout vecteur qui vérifie ces trois caractéristiques est égal à $\overrightarrow{AB}$.

→ C'est un représentant du même vecteur, qu'on peut noter $\vec{u}$.

Nous avons les cas particuliers suivants.

- Si B et A sont confondus, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur nul : $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur de direction (AB), de sens de B vers A et de norme AB.

→ On l'appelle **vecteur opposé à** $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

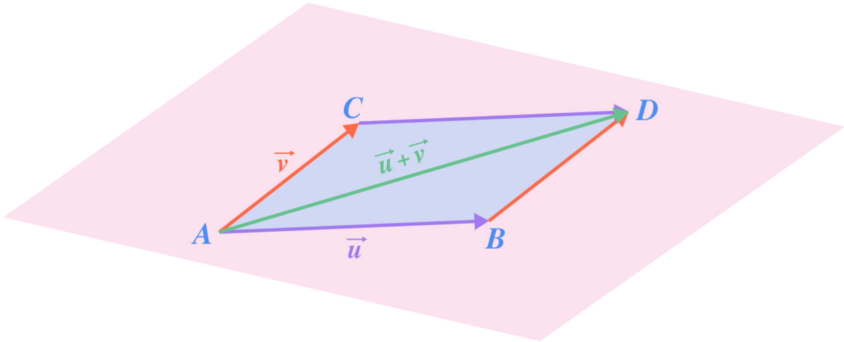
Comme dans le plan, nous pouvons définir la somme de vecteurs et le produit de vecteurs par des réels, puis les combinaisons linéaires de vecteurs.

b. Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition

Somme de deux vecteurs :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{E}$.
Si $\overrightarrow{AB}$ représente $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ représente $\vec{v}$, alors la somme $\vec{u} + \vec{v}$ est représentée par le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ est un parallélogramme.



Propriété

Relation de Chasles :

A, B et C sont trois points de $\mathcal{E}$. On a alors :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Définition

Produit d'un vecteur par un nombre réel :

Soit λ un nombre réel et un vecteur $\vec{u}$.
Le produit de $\vec{u}$ par λ est un vecteur noté $\lambda \cdot \vec{u}$, et si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\vec{u} \neq 0$, alors $\lambda \cdot \vec{u}$ est un vecteur qui a :

- la direction de $\vec{u}$;
- pour norme $\|\lambda \cdot \vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$;
- le sens de $\vec{u}$ si $\lambda > 0$, et le sens contraire si $\lambda < 0$.

Nous avons, par convention :

- $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$;
- pour tout nombre réel λ : $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

À retenir

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\lambda \cdot \vec{u}$ et $\vec{u}$ sont dits **colinéaires**.

Définition

Vecteurs colinéaires :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$.

→ En particulier, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

Comme dans le plan, nous avons les propriétés de calcul suivantes.

Propriété

On considère $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de $\mathcal{E}$, et λ et μ, deux nombres réels.

- $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\lambda = 0$;
- $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$;
- $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$;
- $\lambda(\mu \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot \mu \cdot \vec{u}$.

Nous pouvons maintenant définir une nouvelle notion, à partir des propriétés que nous venons de voir.

Définition

Combinaison linéaire :

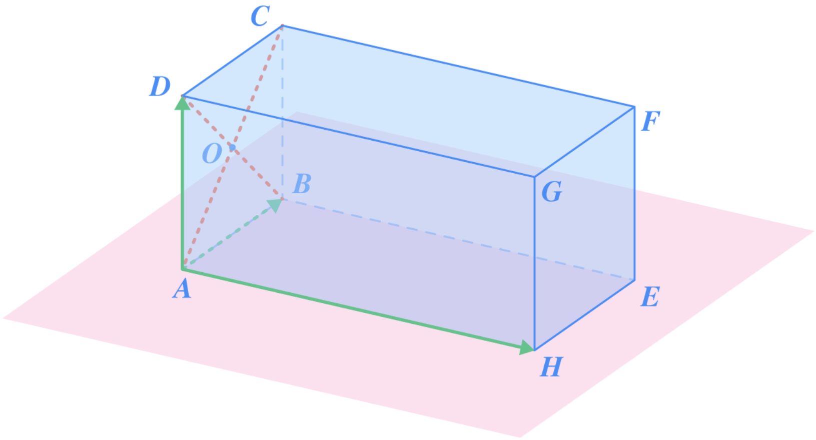
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{E}$, et λ et μ deux nombres réels.
On appelle $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarquons que l'on peut définir une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs.

Nous allons voir avec un exemple comment utiliser les combinaisons linéaires de vecteurs pour placer ou situer un point dans l'espace.

Exemple

Considérons le pavé droit $ABCDHEFG$, où O est le centre du rectangle $ABCD$.



1 Exprimons le vecteur $\overrightarrow{BG}$ comme **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Pour cela, utilisons les propriétés du pavé droit et la décomposition avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DG} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{AD}}_{=\overrightarrow{BC}} - \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{=\overrightarrow{DC}} + \underbrace{\overrightarrow{AH}}_{=\overrightarrow{DG}}\end{aligned}$$

2. Représentons ensuite le point J tel que :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{BE}$$

→ $\overrightarrow{AJ}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{BE}$.

Pour trouver le point J, commençons par chercher le représentant de $\overrightarrow{HF}$ d'origine A.

→ C'est $\overrightarrow{AC}$.

Puisque O est le milieu de $[AC]$, on a ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{HF} \\ &= \overrightarrow{AO}\end{aligned}$$

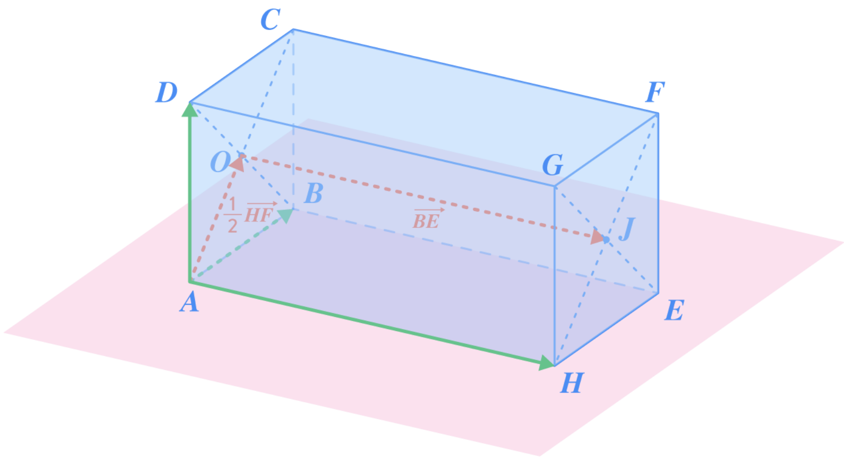
Nous avons donc :

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BE}$$

→ Le point J est le translaté de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

O étant le centre du rectangle $ABCD$, l'image de O par $\overrightarrow{BE}$ est le centre du rectangle $EFGH$.

→ Nous pouvons donc placer le point J :



L'écriture sous forme de combinaisons linéaires d'autres vecteurs sera utile quand nous voudrons repérer un point de l'espace.

Commençons d'abord par étudier le lien entre les vecteurs et les droites et plans de l'espace.

2 | Droites et plans de l'espace

a. Droites de l'espace

Comme en géométrie plane, une droite de l'espace est déterminée par deux points distincts.

→ Nous pouvons donc, comme dans le plan, définir une droite avec un **vecteur**.

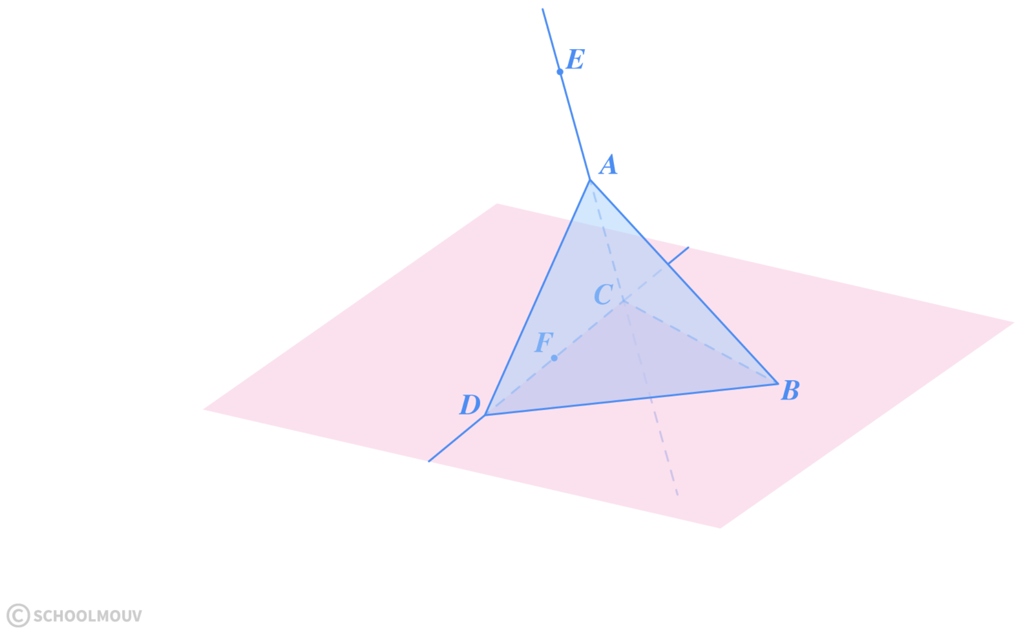
Définition

Vecteur directeur d'une droite :

On considère $\vec{u}$ un vecteur non nul, et (d) une droite de $\mathcal{E}$.
On dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d) lorsqu'il existe deux points distincts A et B appartenant à (d) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Prenons l'exemple simple d'un tétraèdre.

Exemple



Ici, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite (AC).
Et $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont deux vecteurs directeurs de (CD).

Nous pouvons en tirer quelques conclusions.

À retenir

- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d), il indique la direction de (d).
- Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de (d).
- (d) admet donc une infinité de vecteurs directeurs : tous les vecteurs non nuls et colinéaires à $\vec{u}$.

Nous allons maintenant nous servir des vecteurs pour caractériser l'**alignement de points**.

On considère deux points distincts A et B de $\mathcal{E}$.
Soit M un point de $\mathcal{E}$.

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est confondu avec } A \\ \text{ou} \\ M \neq A, \text{ et } (AM) \text{ et } (AB) \text{ ont la même direction} \end{cases}$$

Donc, M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

→ Nous en déduisons les propriétés suivantes.

Propriété

La droite (D) passant par les points A et B est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nous pouvons formuler cette propriété d'une autre façon : la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont **colinéaires**.

→ Une droite est caractérisée par la donnée d'un point A lui appartenant et d'un vecteur directeur $\vec{u}$.

→ On note : $(D) = (A\ ;\ \vec{u})$.

À retenir

Méthodologie :

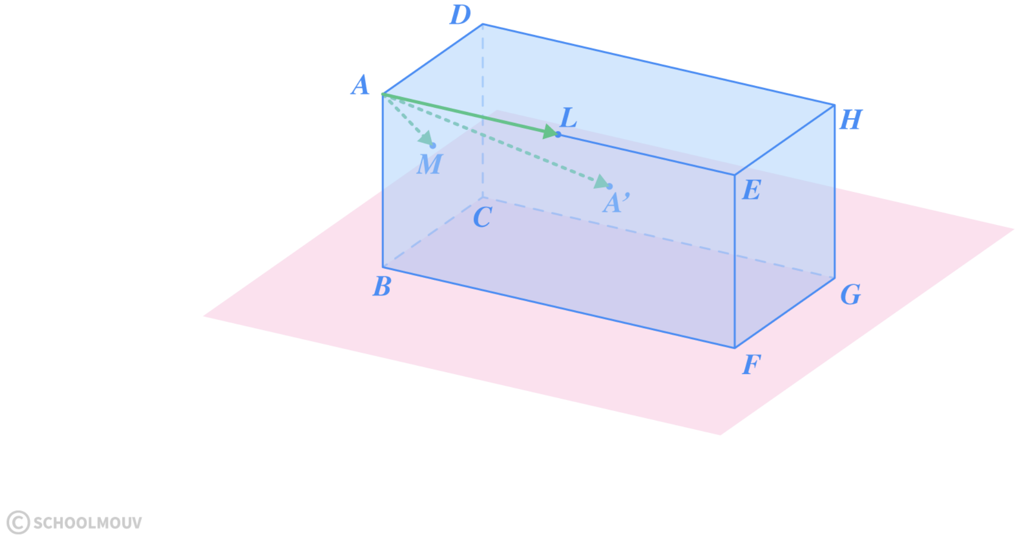
En pratique, quand nous voudrons montrer l'alignement de trois points A, M et B de l'espace, nous prouverons qu'ils forment deux vecteurs colinéaires.

→ Nous vérifierons qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$.

Nous allons appliquer cette méthode dans l'exemple ci-dessous.

Exemple

Soit le pavé droit $ABCDEFGH$.



On a placé le point A' tel que :

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Transformons maintenant l'expression de $\overrightarrow{AA'}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{EG} \text{ [car } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}\text{]} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}\right) \text{ [par distributivité]} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AG} \text{ [par la relation de Chasles]} \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires.

→ Cela indique que les points A, A' et G sont alignés, et donc que le point A' appartient à la droite (AG).

→ Plus précisément, en comparant le sens et la norme de $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AG}$, A' est le milieu de $[AG]$.

Nous venons de voir comment montrer, avec les vecteurs, qu'un point appartient à une droite et que l'alignement de trois points peut être démontré en utilisant les vecteurs directeurs.
Qu'en est-il maintenant de l'appartenance à un plan de l'espace ?

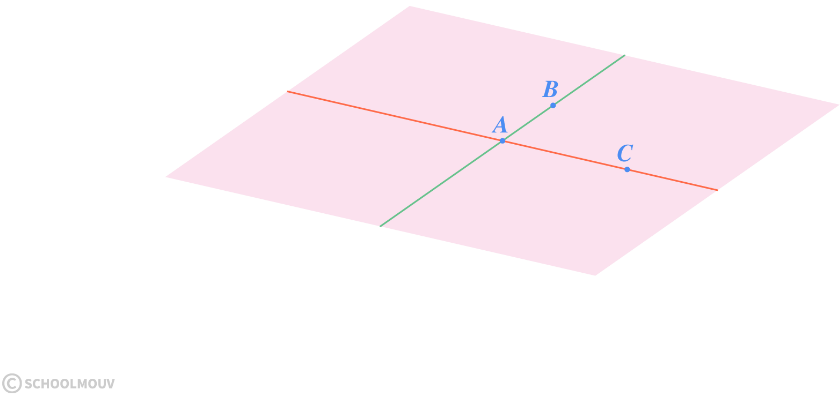
b. Plans de l'espace

Commençons par donner une définition précise d'un plan de l'espace.

Définition

Plan :

Un plan de l'espace $\mathcal{E}$ est défini par 3 points non alignés, c'est-à-dire 2 droites sécantes.



On schématise un plan par un parallélogramme pour donner un effet de perspective, mais il n'a pas de bord.

→ Il est semblable à une étendue plane sans limite.

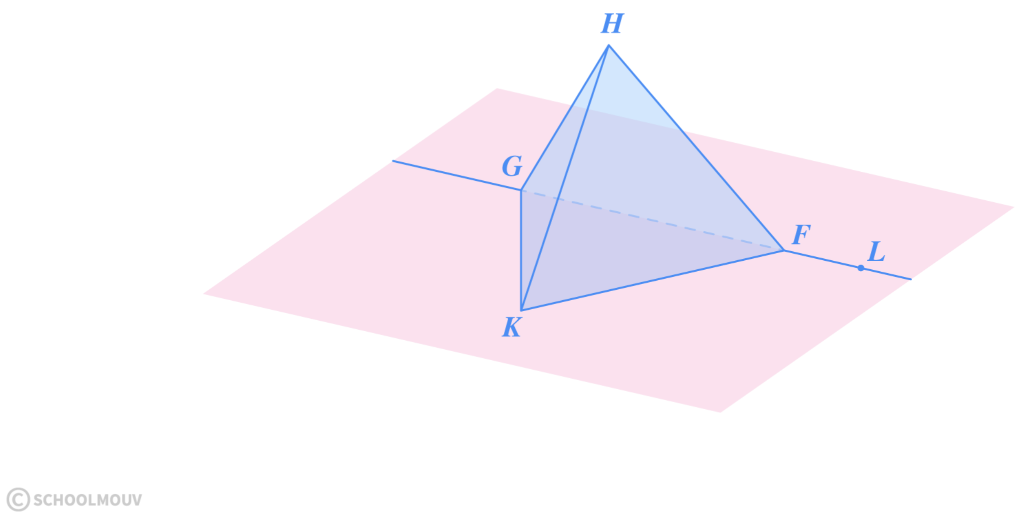
À retenir

On peut nommer ce plan à l'aide de 3 de ses points non alignés, ou le désigner par une lettre.

→ Ici, le plan peut s'appeler indifféremment (P), ou (ABC), ou (BCA)...

Exemple

Prenons l'exemple d'un tétraèdre $HGKF$ posé sur une table :



Ici, le plan (GKF) et le plan (P) du plateau de la table sont identiques.

→ Le point H n'appartient pas à (P).

→ Le point L appartient à la droite (GF), donc appartient aussi au plan (P).

Nous approfondirons ces notions dans le chapitre suivant « Positions relatives de droites et de plans de l'espace ».

Dans l'exemple ci-dessus, (GF) et (GK) sont deux droites sécantes du plan (P).

→ Nous pouvons donc choisir un vecteur directeur de chaque droite pour former une base de ce plan.

Définition

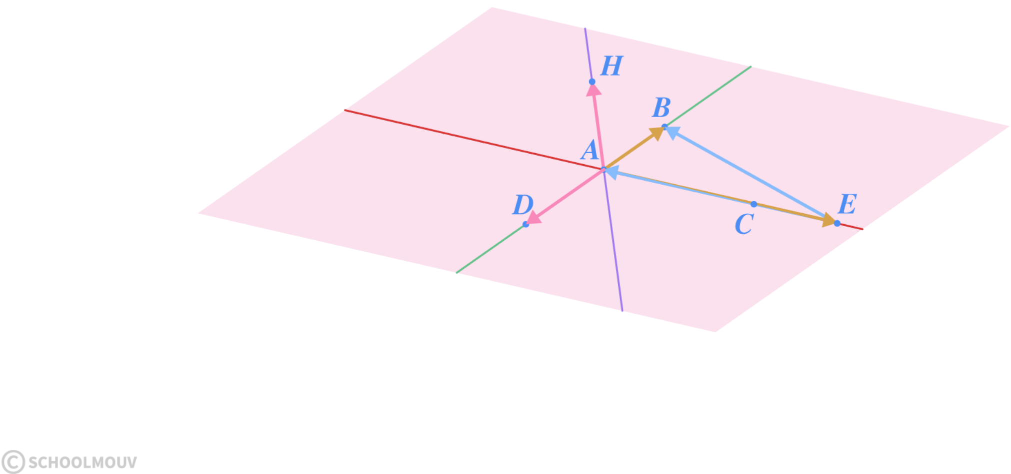
Base d'un plan :

(P) est un plan de $\mathcal{E}$.
On appelle base du plan (P) tout couple $(\vec{u},\ \vec{v})$ de vecteurs non nuls et non colinéaires dont il existe des représentants dans le plan.

→ Il existe une infinité de bases dans un plan donné.

Exemple

Étudions le plan (P) suivant et les points représentés qui lui appartiennent :



Nous pouvons relever différentes bases en choisissant des couples de vecteurs non colinéaires :

→ $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AE}\right)$, $\left(\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AH}\right)$ et $\left(\overrightarrow{EB},\ \overrightarrow{EA}\right)$ en sont trois.

Dans cet exemple, nous pouvons aussi dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont **coplanaires**.
Il en va de même pour les vecteurs $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{DH}$.

Vecteurs coplanaires :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont 3 vecteurs de $\mathcal{E}$.
Ces 3 vecteurs sont dits coplanaires lorsqu'il existe 4 points A, B, C et D du plan (P) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Ces vecteurs coplanaires vont nous permettre de mieux définir le **repère d'un plan**, que nous manipulons depuis la seconde.

On considère un plan (P) de $\mathcal{E}$ dans lequel on a une base $(\vec{u},\ \vec{v})$.
A est un point de (P) ; B et C sont 2 points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Soit M un point du plan.

- Si M appartient à (AB), alors $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

→ $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \vec{u}$, avec λ réel.

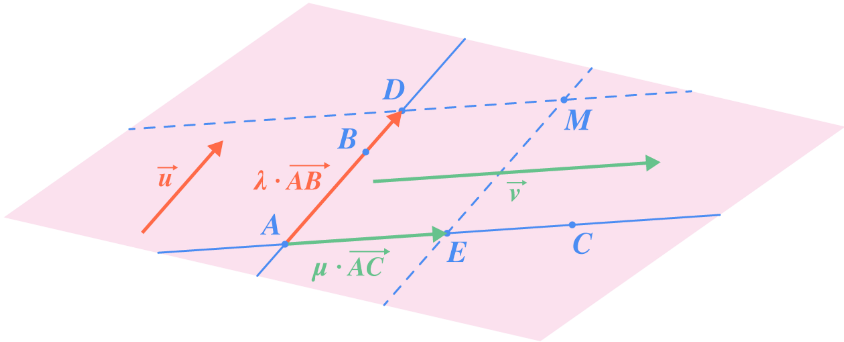
- Si M appartient à (AC), alors $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.

→ $\overrightarrow{AM} = \mu \cdot \overrightarrow{AC} = \mu \cdot \vec{v}$, avec μ réel.

- Dans les autres cas, on peut construire un parallélogramme $AEMD$ tel que :

$$\begin{cases} D \in (AB) \text{ et } (MD) \text{ parallèle à } (AC) \\ E \in (AC) \text{ et } (ME) \text{ parallèle à } (AB) \end{cases}$$

Illustrons cette situation :



On peut, d'après la règle du parallélogramme, écrire, avec λ et μ deux réels :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\ &= \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} \\ &\text{[car } D \in (AB) \text{ et } E \in (AC)] \\ &= \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

→ Ainsi, dans tous les cas, $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

→ Réciproquement, il est possible de montrer que, si $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$, alors on peut construire un seul point M sur le plan.

Nous en déduisons les propriétés suivantes.

Propriété

On considère un plan (P), contenant le point A et dont $(\vec{u},\ \vec{v})$ est une base.

- M appartient à (P) si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

→ C'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

→ Ou encore si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **coplanaires**.

- Un plan est caractérisé par un point A lui appartenant et un couple de vecteurs $(\vec{u},\ \vec{v})$ formant une base.

→ On note $(P) = (A\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

Définition

Repère du plan :

On appelle repère du plan (P) tout triplet $(A\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, où A est un point du plan et $(\vec{u},\ \vec{v})$ est une base de ce plan.

→ A est appelée origine du repère.

À retenir

Dans ce repère, tout point M de (P) est déterminé par des coordonnées uniques, c'est-à-dire le couple de réels $(\lambda\ ;\ \mu)$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$.

Nous allons maintenant donner une méthodologie, suivie d'un exemple, pour montrer comment exprimer un vecteur dans une base donnée.

À retenir

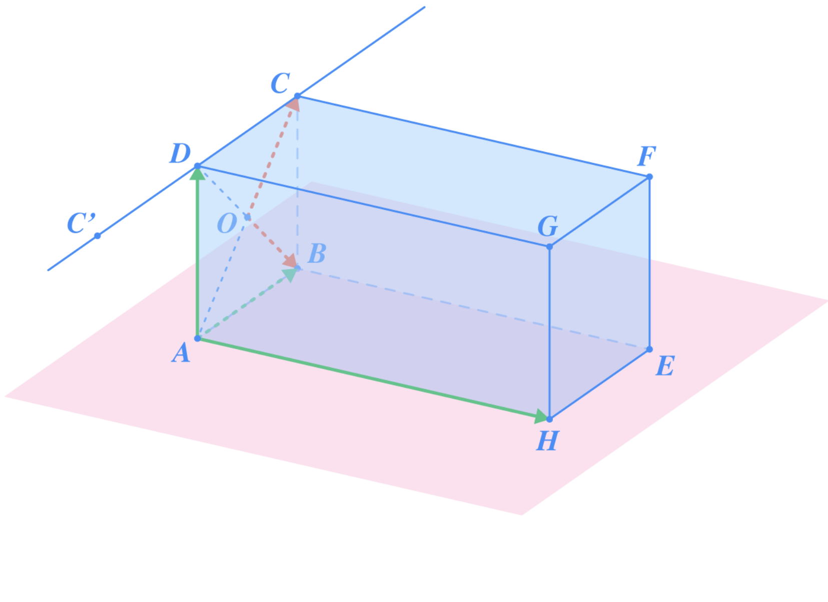
Méthodologie :

M est un point du plan (P) muni d'un repère $(A\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$.
Pour trouver les coordonnées d'un point M dans le repère $(A\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, on décompose le vecteur $\overrightarrow{AM}$ pour retrouver une combinaison linéaire des vecteurs du repère.

→ Pour décomposer ce vecteur, nous pouvons utiliser la relation de Chasles, les propriétés de calcul vues dans la partie 1 de ce cours, ainsi que toute propriété induite par la figure ou déjà démontrée.

Exemple

$ABCDHEFG$ est un pavé droit. O est le centre du rectangle $ABCD$.



Prenons $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ comme repère du plan (ABC) : c'est possible puisque O, B et C appartiennent au plan (ABC) et que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont deux vecteurs non nuls et non colinéaires.

Dans ce repère, le point O a pour coordonnées $(0\ ;\ 0)$, car $\overrightarrow{OO} = 0 \cdot \overrightarrow{OB} + 0 \cdot \overrightarrow{OC}$.

Et nous avons :

- $\overrightarrow{OB} = 1 \cdot \overrightarrow{OB} + 0 \cdot \overrightarrow{OC}$.

→ B a pour coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

- $\overrightarrow{OA} = 0 \cdot \overrightarrow{OB} - 1 \cdot \overrightarrow{OC}$.

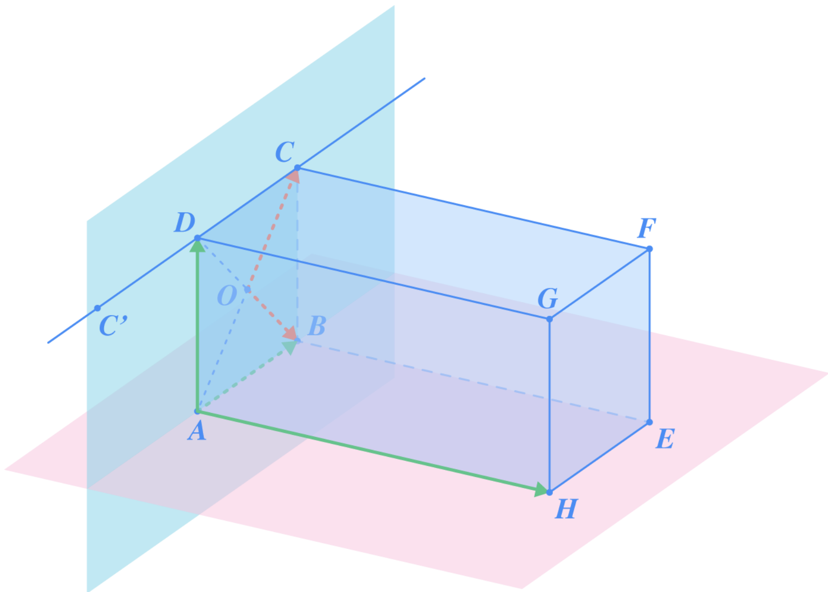
→ A a pour coordonnées $(0\ ;\ -1)$.

Soit C' le symétrique de C par rapport à D.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC'} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC'} \ \text{[par la relation de Chasles]} \\
&= \overrightarrow{OC} + 2 \cdot \overrightarrow{CD} \ \left[\text{car } D \text{ est le milieu de } [CC']\right] \\
&= \overrightarrow{OC} + 2 \cdot \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD}\right) \\
&= \overrightarrow{OC} - 2 \cdot \overrightarrow{OC} - 2 \cdot \overrightarrow{OB} \ [\text{car } \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD}] \\
&= -2 \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OC'}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB}$, donc les trois vecteurs sont coplanaires.

→ Ce qui vérifie que C' appartient bien au plan (ABC).



De plus, la relation $\overrightarrow{OC'} = -2 \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ donne les coordonnées de C' dans ce repère du plan (ABC).

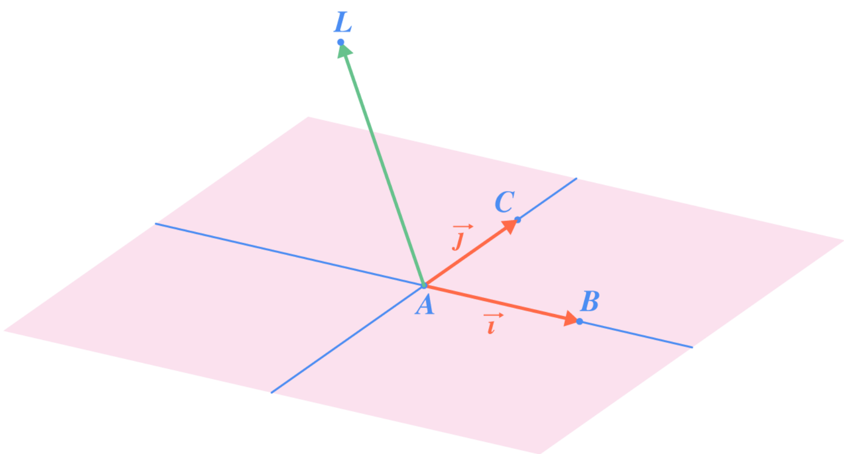
→ C' a pour coordonnées $(-2\ ;\ -1)$.

Nous avons redécouvert la notion de repère du plan, cette fois en en donnant une définition rigoureuse.
Nous allons maintenant étudier comment on peut repérer un point dans l'espace en nous aidant des notions de ce paragraphe.

3 | Repérage dans l'espace

a. Bases et repères de l'espace

Considérons un plan (P) de l'espace muni d'un repère $(A\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Considérons L, un point de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à (P).



Dans ce cas, les vecteurs $\overrightarrow{AL}$, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ne sont pas coplanaires.

→ On note : $\vec{k}=\overrightarrow{AL}$.

Définition

Base de l'espace :

On appelle base de l'espace $\mathcal{E}$ tout triplet de vecteurs $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ non coplanaires.

→ Nous remarquons qu'il existe une infinité de choix pour les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$, et donc une infinité de bases possibles.

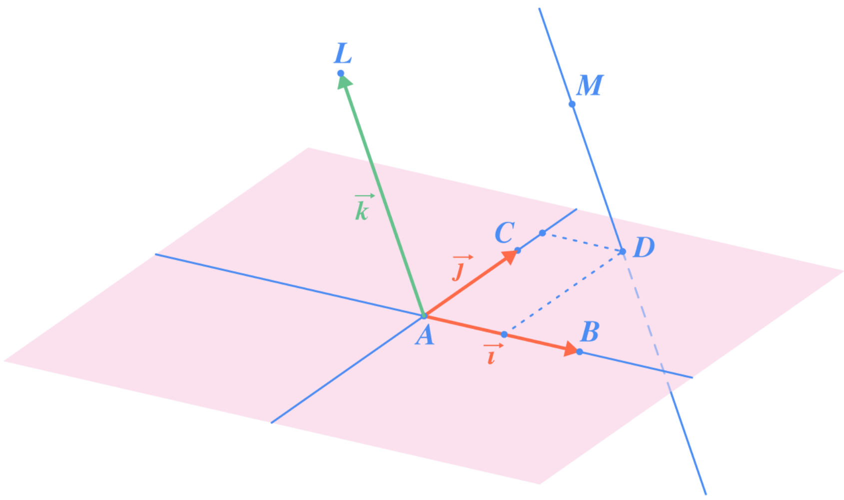
Par analogie avec le travail vu pour les plans, nous admettons les propriétés suivantes.

Propriété

A est un point et $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ une base de $\mathcal{E}$.
Quel que soit le point M de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{AM}$ peut s'écrire de manière unique comme **combinaison linéaire** des vecteurs $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

→ C'est-à-dire qu'il existe un triplet unique de 3 réels $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que :

$$\overrightarrow{AM}=x\cdot\vec{\imath}+y\cdot\vec{\jmath}+z\cdot\vec{k}$$



Définition

Repère de l'espace :

On appelle repère de l'espace $\mathcal{E}$ tout quadruplet $(A\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ où A est un point et $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ une base de $\mathcal{E}$.

→ A est appelée origine du repère.

À retenir

Dans ce repère, tout point M est déterminé par ses **coordonnées uniques** telles que :

$$\overrightarrow{AM} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

→ On note : $M\ (x\ ;\ y\ ;\ z)$.

→ On appelle x l'**abscisse** de M, y son **ordonnée** et z sa **cote**.

Astuce

En sciences physiques, la coordonnée z est souvent utilisée pour repérer l'altitude d'un objet ou d'un point en mouvement.

Il ne faudra pas oublier que, dans un repère de $\mathcal{E}$, la position des points est déterminée par 3 nombres. Nous remarquons d'ailleurs le lien avec la dénomination « 3 dimensions » ou « 3D » quand on parle de volumes ou de figures spatiales.

Nous allons maintenant nous servir de ces coordonnées pour résoudre des problèmes de géométrie dans l'espace. Elles vont servir à démontrer certaines propriétés.

À retenir

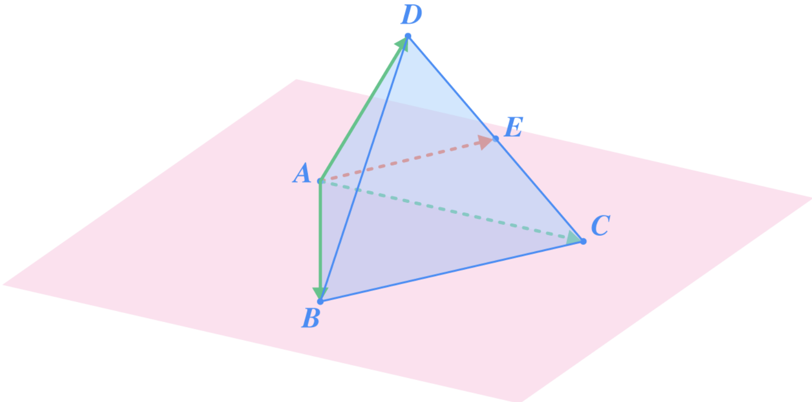
Méthodologie :

Pour trouver les coordonnées d'un point M dans le repère $(A\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, on décompose le vecteur $\overrightarrow{AM}$ pour retrouver une combinaison linéaire des vecteurs du repère.

→ Comme dans le plan, pour décomposer ce vecteur, nous pouvons utiliser la relation de Chasles, les propriétés de calcul vues dans la partie 1 de ce cours, ainsi que toute propriété induite par la figure ou déjà démontrée.

Exemple

Prenons l'exemple du tétraèdre $ABCD$:



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires. Donc ces 3 vecteurs forment une base de l'espace.

→ On peut munir l'espace du repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$.

Soit E le milieu de $[DC]$.
On cherche les coordonnées de E dans ce repère.

On décompose le vecteur :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} \\ &= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées de E dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$ sont $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Nous remarquons ce faisant que C a pour coordonnées $(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $D\,(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

→ Donc les coordonnées du milieu de $[CD]$ sont égales à la demi-somme des coordonnées de C et de D.

Nous admettons ainsi la propriété suivante.

Propriété

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.
Dans ce repère, A a pour coordonnées $(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$.

→ Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\ ;\ \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Comme dans le plan, les vecteurs de l'espace ont des coordonnées dans un repère donné. Les propriétés dans un plan se généralisent à l'espace.

b. Coordonnées d'un vecteur

On considère un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ de $\mathcal{E}$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur et le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

→ Nous avons vu que M a des coordonnées uniques dans ce repère.

Définition

Coordonnées d'un vecteur :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{E}$.
On appelle coordonnées de $\vec{u}$ le triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

→ On note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

En particulier, le vecteur nul a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Propriété

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans un même repère de $\mathcal{E}$.
- Ces coordonnées ne dépendent pas du choix du représentant.

Attention

Si on change de repère, les coordonnées des points et des vecteurs changent.

Nous pouvons effectuer des opérations sur les coordonnées des vecteurs de l'espace comme celles dans le plan, en n'oubliant pas qu'il y a 3 coordonnées, et non 2.

Propriété

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathcal{E}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

- $\lambda \cdot \vec{u}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

Propriété

Soit $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ deux points de $\mathcal{E}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Prenons un exemple pour illustrer toutes ces propriétés.

Exemple

On considère un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ de $\mathcal{E}$ dans lequel les points A, B, C et D ont pour coordonnées :

$$A\,(-6\ ;\ 1\ ;\ 2),\ \ B\,(3\ ;\ 4\ ;\ 5),\ \ C\,(-9\ ;\ 0\ ;\ 1),\ \ D\,(0\ ;\ 3\ ;\ 4)$$

Nous allons calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}+3\cdot\overrightarrow{AC}$, puis de $\overrightarrow{OD}-\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OB}\right)$.
Nous en tirerons ensuite des propriétés géométriques.

1. Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}+3\cdot\overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-6) \\ 4-1 \\ 5-2 \end{pmatrix}$$

→ Donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9-(-6) \\ 0-1 \\ 1-2 \end{pmatrix}$$

→ Donc : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}+3\cdot\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 9+3\times(-3) \\ 3+3\times(-1) \\ 3+3\times(-1) \end{pmatrix}$$

→ Donc : $\overrightarrow{AB}+3\cdot\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

C'est le vecteur nul. Cela signifie que $\overrightarrow{AB}=-3\cdot\overrightarrow{AC}$.

→ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.

2 Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OD} - \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{OB}\right)$.

Nous avons les coordonnées suivantes :

$$\overrightarrow{OD} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OD} - \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{OB}\right)$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 0 - \dfrac{1}{3} \times (-6 + 2 \times 3) \\ \\ 3 - \dfrac{1}{3} \times (1 + 2 \times 4) \\ \\ 4 - \dfrac{1}{3} \times (2 + 2 \times 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons :

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OB}$$

→ Cela implique que les vecteurs $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont coplanaires : D appartient au plan (OAB).

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons commencé l'étude de configurations spatiales en utilisant les vecteurs de l'espace. Les vecteurs permettent de caractériser l'appartenance à une droite, à un plan, ou encore de placer un point de l'espace sur une figure.

Ils permettent également de définir des repères de l'espace, où un point sera déterminé par la donnée de ses trois coordonnées.

L'utilisation des vecteurs avec ou sans coordonnées facilitera dans les prochains chapitres certaines démonstrations : comme déterminer l'intersection de plans et de droites entre eux ; ou bien encore calculer des longueurs ou prouver l'existence d'un angle droit.