Factorielle, k-uplet, permutation et combinaison

Introduction :

La découverte des ensembles a débuté en seconde avec :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbb{D}$: l'ensemble des décimaux ;
- $\mathbb{Q}$: l'ensemble des rationnels ;
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.

Nous allons dans ce cours aborder les propriétés des ensembles finis quelconques. Plus particulièrement, nous nous attarderons sur les concepts fondamentaux permettant de calculer le nombre d'éléments (ou le cardinal) de ces ensembles.

1 Principe additif et multiplicatif

Avant d'introduire ces deux principes, il faut savoir que « **dénombrer** », c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est-à-dire en déterminer le **cardinal**.

Définition

Cardinal d'un ensemble fini :

Soit E un ensemble fini.
On appelle cardinal de E le nombre de ses éléments.

→ On le note : $\text{Card}(E)$.

→ Et : $\text{Card}(E) \in \mathbb{N}$.

Exemple

Soit l'ensemble $E = \{0,\ 2,\ 6,\ 7\}$.

→ $\text{Card}(E) = 4$.

Nous allons donc voir un certain nombre de formules permettant d'exprimer le cardinal d'un ensemble donné.

a. Principe additif

Commençons par regarder le cas de la réunion de deux ensembles finis.

Propriété

Soit A et B deux ensembles finis.
Nous avons la formule suivante :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Exemple

Prenons un exemple très simple : dans une classe de 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'espagnol, 8 élèves étudient les deux langues.

→ En notant A l'ensemble des élèves étudiant l'anglais et E celui des élèves étudiant l'espagnol, on a :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup E) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(E) - \text{Card}(A \cap E) \\ &= 20 + 15 - 8 \\ &= 27 \end{aligned}$$

Ainsi, 27 élèves étudient soit l'anglais, soit l'espagnol, soit les deux.
On en déduit aussi que $30 - 27 = 3$ élèves n'étudient ni l'anglais ni l'espagnol.

Rappelons maintenant la définition d'un **sous-ensemble**.

Définition

Sous-ensemble :

$F \subset E$ si tout élément de F est aussi un élément de E.

➜ On dit alors que F est un sous-ensemble, ou une partie, de E.

En première, nous avons également abordé la notion de **partition d'un ensemble fini**, que nous redonnons ici.

Définition

Partition d'un ensemble fini :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_p$ des sous-ensembles non vides d'un ensemble fini E.

➜ On dit que $\mathcal{P} = \{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_p\}$ est une partition de E si et seulement si :

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = E \\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_p \text{ sont disjoints 2 à 2} \end{cases}$$

Si A est une partie de E, non vide et non égale à E, A et $\bar{A}$ forment une partition.

Exemple

Soit $E = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9,\ 10\}$ l'ensemble des nombres entiers non nuls jusqu'à 10, A et B deux parties de E, où A contient les nombres pairs et B les nombres impairs.
On constate que :

- A et B ne sont pas vides,
- $A \cup B = E$,
- $A \cap B = \varnothing$ (c'est-à-dire que A et B sont disjoints).

➜ On conclut que A et B forment bien une partition de E.

Nous remarquons aussi que $B = \bar{A}$, A et $\bar{A}$ forment bien une partition de E.

Propriété

Soit $\mathcal{P} = \{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_p\}$ une partition d'un ensemble fini E. Alors on a :

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_p)$$

➜ Cette propriété est appelée principe additif ou aussi « lemme des bergers ».

Exemple

Reprenons l'exemple précédent.

Comme A et B forment bien une partition de E, nous avons :

$$\begin{aligned}\text{Card}(E) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) \\ &= 5 + 5 \\ &= 10\end{aligned}$$

b. Principe multiplicatif

Après avoir vu les propriétés du principe additif, découvrons le principe multiplicatif et définissons le **produit cartésien** de deux ensembles, avant de généraliser et de donner les propriétés principales qui en découlent.

Définition

Produit cartésien de deux ensembles :

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est noté $E \times F$ et est défini par :

$$E \times F = \{(x,\ y) \text{ avec } x \in E \text{ et } y \in F\}$$

→ Il s'agit de l'ensemble des couples dont le premier élément est un élément de E et le second un élément de F.

Attention

Le produit cartésien n'est pas commutatif : $E \times F \neq F \times E$.

Exemple

Prenons le produit cartésien suivant : $\{0,\ 1\} \times \{1,\ 2,\ 3\}$.

→ C'est l'ensemble des couples $(x,\ y)$ où $x \in \{0,\ 1\}$ et $y \in \{1,\ 2,\ 3\}$. D'où :

$$\{0,\ 1\} \times \{1,\ 2,\ 3\} = \{(0,\ 1),\ (0,\ 2),\ (0,\ 3),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)\}$$

Nous pouvons voir aussi que, comme dit plus haut, le produit cartésien n'est pas commutatif :

$$\{1,\ 2,\ 3\} \times \{0,\ 1\} = \{(1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0),\ (3,\ 1)\}$$

Maintenant, généralisons au produit cartésien de plusieurs ensembles.

À retenir

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le **produit cartésien de n ensembles** est :

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \text{ avec, pour tout } i \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\} : x_i \in E_i\}$$

Donnons quelques propriétés du produit cartésien.

Propriété

1. Soit deux ensembles finis E et F.

Alors, $E \times F$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1,\, \ldots,\, E_n$ des ensembles finis.

On a : $E_1 \times \ldots \times E_n$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E_1 \times \ldots \times E_n) = \mathrm{Card}(E_1) \times \ldots \times \mathrm{Card}(E_n)$$

→ Une conséquence immédiate de cette propriété est la suivante :

$$\mathrm{Card}(E^n) = (\mathrm{Card}(E))^n \text{ [où } E \text{ est un ensemble fini]}$$

À retenir

Les éléments d'un produit cartésien de k ensembles sont appelés des k-listes ou des k-uplets.

Prenons un exemple simple, pour mieux comprendre.

Exemple

Soit $E = \{0,\, 1\}$.

Soit $F = \{1,\, 2,\, 3\}$.

Soit $G = \{2,\, 3,\, 4,\, 5\}$.

Soit P le produit cartésien : $P = E \times F \times G$.

➜ $(0,\ 1,\ 2)$, $(0,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 3,\ 5)$ sont des éléments de P, et ce sont des 3-uplets, aussi appelés triplets.

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \text{Card}(P) &= \text{Card}(E \times F \times G) \\ &= \text{Card}(E) \times \text{Card}(F) \times \text{Card}(G) \\ &= 2 \times 3 \times 4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

➜ P a donc 24 éléments.

Et illustrons la dernière propriété grâce aux nombres binaires.

Exemple

Soit $B = \{0,\ 1\}$.
Soit le produit cartésien P tel que :

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n \text{ fois}} \\ &= B^n \end{aligned}$$

P est l'ensemble des listes de la forme $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ où les n éléments $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ appartiennent à $\{0,\ 1\}$, c'est-à-dire qu'ils sont égaux à 0 ou 1.

➜ Nous définissons ainsi les nombres binaires de n chiffres.

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \text{Card}(P) &= \text{Card}(B^n) \\ &= (\text{Card}(B))^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

➜ Nous retrouvons ainsi la formule que vous connaissez sans doute : avec n bits, on peut représenter 2^n nombres binaires.

Ainsi, par exemple, avec $1 \text{ mot} = 2 \text{ octets} = 16 \text{ bits}$, on peut représenter $2^{16} = 65\,536$ valeurs.

2 Parties, permutations et k-uplets d'un ensemble fini

a. Nombre des parties d'un ensemble et applications

Un autre calcul fondamental consiste à compter les parties d'un ensemble E à n éléments.
On remarque pour cela que choisir une partie A de E revient à choisir pour chaque élément de E entre les possibilités : il appartient à A, ou non.

➜ Nous avons la propriété suivante.

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre des parties de E est égal à 2^n.

Attention

L'ensemble vide (pour chaque élément de E, on choisit qu'il n'appartient pas à A) et E lui-même (pour chaque élément de E, on choisit qu'il appartient à A) sont donc bien des parties de E.

Nous allons ici donner trois applications qui découlent de tout ce que nous venons de voir.

1. Soit l'ensemble $E = \{0,\ 1\}$.

Le nombre de parties de E est alors égal à $2^2 = 4$.

➜ En effet, les parties de E sont : $\varnothing,\ \{0\},\ \{1\},\ \{0,\ 1\}$.

2. Pour un mot de longueur n sur un alphabet à 2 éléments, nous avons 2^n possibilités.

Prenons un mot de longueur 8 et uniquement les lettres A et B comme choix pour constituer ce mot.

➜ Nous avons alors $2^8 = 256$ mots possibles.

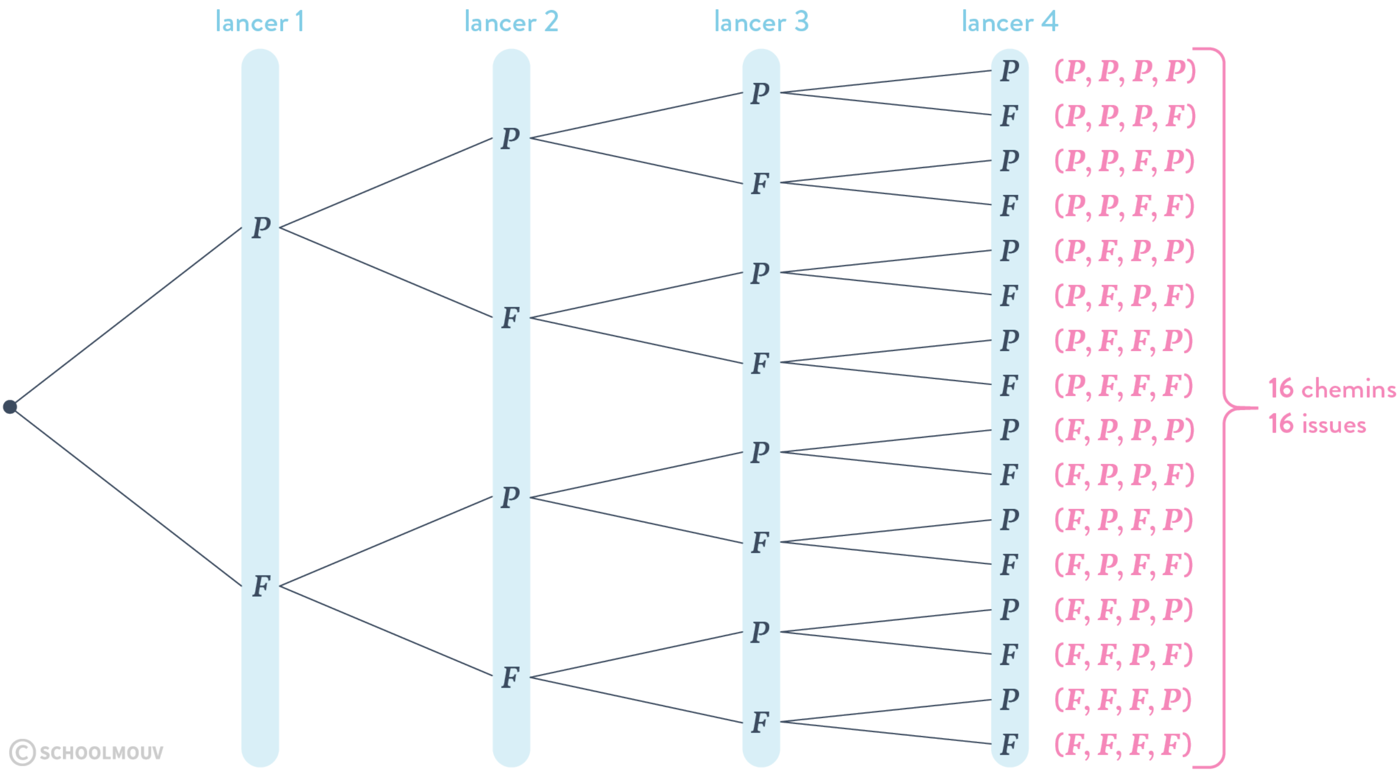
3. Dans le cas d'une succession de n épreuves de Bernoulli (épreuve à 2 issues), nous avons au total 2^n issues possibles.

Prenons l'expérience d'une pièce de monnaie non truquée qu'on lance 4 fois.

➜ Le nombre d'issues au total est alors égal $2^4 = 16$.

En utilisant un arbre pour représenter cette succession d'épreuves de Bernoulli, nous aurons une racine et des nœuds à 2 branches, et le nombre total de chemins possibles sera égal à 2^n.

En reprenons la même expérience du lancer de la pièce de monnaie, nous obtenons l'arbre suivant :



➜ Nous avons donc $2^4 = 16$ chemins, et donc issues, possibles.

Remarque : Nous reviendrons longuement, dans la partie « Probabilités », sur les épreuves de Bernoulli.

b. Nombre de k-uplets d'éléments d'un ensemble fini

Dans la première partie, nous avons défini les k-uplets comme éléments d'un produit cartésien de k ensembles. Nous allons maintenant parler des k-uplets d'un ensemble fini de n éléments : c'est une liste de k éléments choisis parmi les n éléments de E.

Attention

Ici, l'ordre est important : k éléments choisis rangés dans 2 ordres différents sont 2 k-uplets différents.

Commençons par donner deux propriétés.

Propriété

Soit n et k deux entiers naturels non nuls.

1. Le nombre de $k\text{-uplets}$ d'un ensemble à n éléments est : n^k.
2. Le nombre de $k\text{-uplets}$ d'éléments **distincts** d'un ensemble à n éléments, avec $1 \leq k \leq n$, est :

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$$

Nous allons maintenant donner deux exemples pour bien comprendre ces propriétés et notamment leur logique.

Exemple

Soit une urne de 10 boules numérotées de 0 à 9.

1. Procédons dans un premier temps à un tirage, **avec remise**, de 3 boules dont on note le numéro. Cela veut dire que nous pouvons tirer 2 ou 3 fois le même numéro.

→ Cela correspond donc à un 3-uplet d'un ensemble à 10 éléments, leur nombre est donc de $10^3 = 1\,000$.

2. Procédons ensuite à un tirage cette fois **sans remise** de 3 boules. Ainsi, nous ne pourrons tirer plusieurs fois la même boule.

→ Cela correspond donc à un 3-uplet d'éléments **distincts** d'un ensemble à 10 éléments, leur nombre est donc de :

$$\overbrace{10}^{n} \times \overbrace{9}^{n-1} \times \overbrace{8}^{n-k+1} = 720$$

$$[\text{avec } n = 10,\ k = 3]$$

Astuce

N'oubliez pas que le tirage de boules dans une urne (avec ou sans remise) permet de modéliser bon nombre de problèmes, cela vous sera souvent utile !

Donnons encore un exemple concret du nombre de $k\text{-uplets}$ distincts d'un ensemble.

Exemple

Combien peut-on écrire de nombres de 3 chiffres 2 à 2 distincts avec les chiffres 1, 2 , 3, 4, 5 et 6 ?
Nous sommes ici en présence du 3-uplet d'éléments distincts $(a,\ b,\ c)$ pour former le nombre abc.

Nous avons donc :

- pour a, 6 possibilités (tous les chiffres),
- pour b, 5 possibilités (tous les chiffres, sauf celui utilisé à l'étape précédente, car nous souhaitons des nombres composés de chiffres distincts 2 à 2),
- pour c, 4 possibilités.

→ Nous pouvons donc écrire $6 \times 5 \times 4 = 120$ nombres de 3 chiffres 2 à 2 distincts avec les chiffres 1, 2 , 3, 4, 5 et 6.

c. Nombre de permutations d'un ensemble fini et factorielle

Intéressons-nous maintenant à une nouvelle notation mathématique : $n!$, afin de calculer le nombre de **permutations** d'un ensemble fini.

Commençons par définir cette nouvelle notion, que nous pouvons en fait comprendre intuitivement.

Définition

Permutation :

On appelle permutation d'un ensemble E de n éléments tout $n\text{-uplet}$ d'éléments distincts.

Exemple

Soit l'ensemble $E = \{1,\ 2,\ 3\}$.

→ Alors les 6 permutations de E sont les suivantes : $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 2)$, $(2,\ 1,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 2)$ et $(3,\ 2,\ 1)$.

Pour calculer le nombre de permutations d'un ensemble fini, nous utilisons la propriété suivante.

Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments $(n \geq 1)$ est le nombre noté $n!$ (qui se lit : « **factorielle de n** », ou plus simplement : « **factorielle n** »), défini de la façon suivante :

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$$

- On convient que : $0! = 1$.
- Et l'on a : $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Exemple

(1) Calculons la factorielle de 4 et celle de 5.

$$\begin{aligned} 4! &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \times 4! \\ &= 5 \times 24 \\ &= 120 \end{aligned}$$

(2) Combien de mots différents de 5 lettres peut-on composer avec les lettres A, B, C, D, E, sachant qu'une lettre ne peut être utilisée qu'une seule fois ?

Chaque mot correspond tout simplement à une permutation de l'ensemble $\{\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}, \text{E}\}$, dont le cardinal est égal à 5.

- Il y a donc $5! = 120$ mots possibles.

Reprenons la formule que nous avons vue pour déterminer le nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments, que nous notons ici N (avec $1 \leq k \leq n$).

- Et voyons comment la notion de factorielle nous permet de simplifier le calcul (notamment avec une calculatrice) :

À retenir

$$\begin{aligned} N &= n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \times (n-k)!}{(n-k)!} \\ &\text{[la factorielle d'un entier naturel n'est jamais nulle]} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \times (n-k) \times (n-k-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-k)!} \\ &= \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}} \end{aligned}$$

3 Combinaisons et triangle de Pascal

Tout d'abord, nous allons définir la **combinaison** de k éléments d'un ensemble à n éléments. Puis nous introduirons le **coefficient binomial**, avant de découvrir le **triangle de Pascal**.

a. Combinaison et dénombrement

Définition

Combinaison :

Soit E un ensemble fini de n éléments et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.
On appelle combinaison de k éléments de E toute partie de E ayant k éléments.

Attention

Une combinaison est un **sous-ensemble**.

➜ L'ordre n'est pas important : $\{0,\ 1\} = \{1,\ 0\}$.

À retenir

Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{k}$ (qui se lit « **k parmi n** »).

➜ Il est appelé **coefficient binomial**.

Dans un ensemble E à n éléments, il y a :

- n parties à 1 élément,

  ➜ $\binom{n}{1} = n$;
- 1 seule à n éléments (E),

  ➜ $\binom{n}{n} = 1$;
- 1 seule à 0 élément ($\varnothing$),

  ➜ $\binom{n}{0} = 1$.

Dans la pratique, le nombre $\binom{n}{k}$ permet entre autres de compter le nombre de chemins dans un arbre.

Exemple

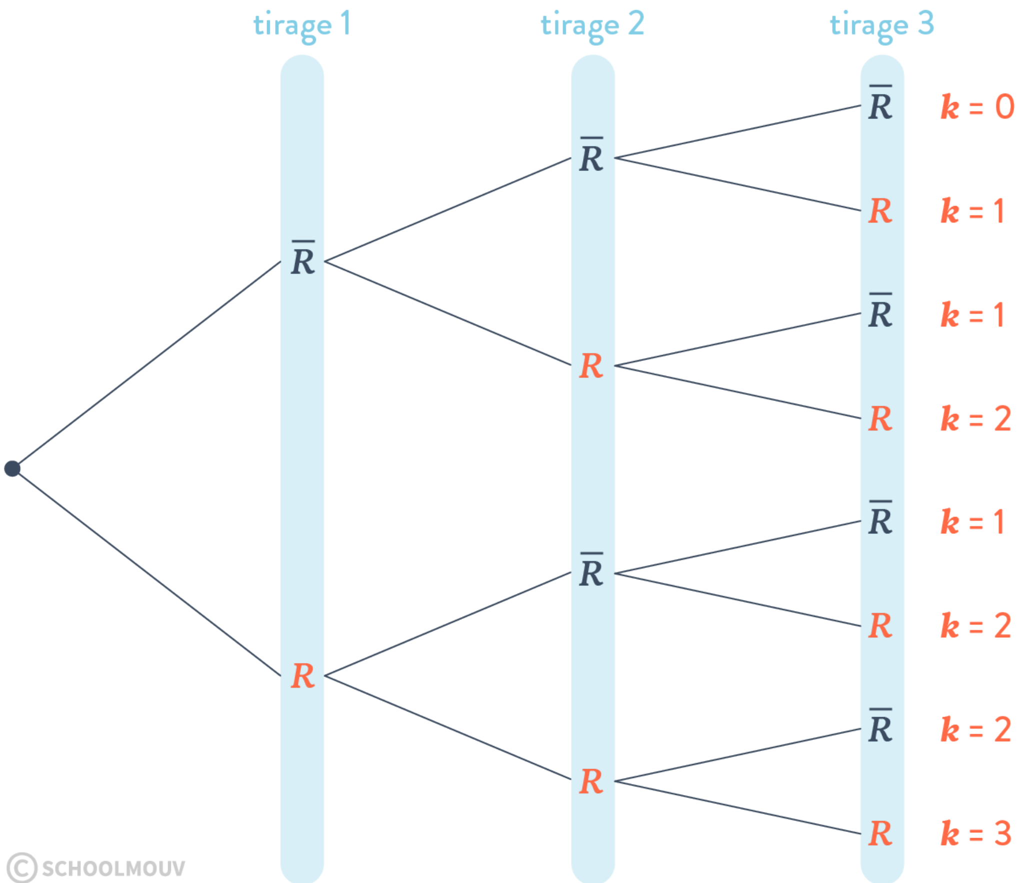
Prenons une urne contenant 3 boules noires et 4 boules rouges, indiscernables au toucher.
L'expérience consiste à prélever dans l'urne 3 boules successivement et avec remise.

→ On peut donc modéliser cette expérience à l'aide d'un arbre, en notant R l'événement : « La boule prélevée est rouge ».

Nous pouvons remarquer que $p(R) = \frac{4}{7}$ et $p(\bar{R}) = \frac{3}{7}$, mais nous allons nous intéresser au nombre de chemins de l'arbre, indépendant donc de la valeur de ces probabilités.

Nous considérons 3 tirages et nous regardons uniquement le nombre de boules rouges obtenues après les 3 tirages. Nous le notons k.

→ Et nous cherchons le nombre de chemins de l'arbre où on a k boule(s) rouge(s), peu importe l'ordre.



Examinons maintenant les différents cas possibles.

0. $k = 0$.

→ Cela revient à chercher les chemins qui mènent à 0 boule rouge obtenue après les 3 tirages. Il n'y en a que 1 :

$$\binom{3}{0} = 1$$

1. $k = 1$.

→ Cela revient à chercher les chemins qui mènent à 1 boule rouge obtenue après les 3 tirages. Il y en a 3 :

$$\binom{3}{1} = 3$$

2. $k = 2$.

→ Cela revient à chercher les chemins qui mènent à 2 boules rouges obtenues après les 3 tirages. Il y en a 3 :

$$\binom{3}{2} = 3$$

3. $k = 3$.

→ Cela revient à chercher les chemins qui mènent à 3 boules rouges obtenues après les 3 tirages. Il n'y en a que 1 :

$$\binom{3}{3} = 1$$

Astuce

L'exemple que nous venons de prendre nous montre que :

$$\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$$
$$\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$$

Et ceci est intuitivement compréhensible dans notre triple tirage :

- il y a une seule possibilité qu'aucune boule ne soit rouge (i.e. les 3 sont noires) comme il y a une seule possibilité que les 3 boules soient rouges ;

- il y a 3 possibilités que 1 boule, et 1 seule, soit rouge, celle-ci pouvant être tirée au premier, *ou* au deuxième, *ou* au troisième tirage ;
- tirer 1 boule rouge revient à tirer $3-1=2$ boules noires.

Nous retrouvons ainsi les propriétés vues plus haut.
Et nous pressentons aussi la symétrie des coefficients binomiaux, que nous expliciterons dans la partie suivante.

b. Coefficient binomial et triangle de Pascal

Dans cette sous-partie, nous allons passer en revue des propriétés importantes permettant notamment de simplifier le calcul du coefficient binomial, puis nous établirons la « fameuse » formule de Pascal.

Propriété

1. Soit n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Démontrons cette dernière propriété.

Démonstration

1. D'après ce que nous avons vu dans la deuxième partie, si l'on prend un ensemble E à n éléments, alors nous avons le nombre des parties N_{parties} de E :

$$N_{\text{parties}} = 2^n$$

2. Or, pour tout entier k, il y a $\binom{n}{k}$ parties de E à k éléments, ce qui nous donne le nombre total des parties de E :

$$N_{\text{parties}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

C Nous obtenons ainsi :

$$N_{\text{parties}} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

Exemple

Prenons le cas du Loto et plus précisément du tirage de 6 numéros parmi 49. C'est en fait une combinaison de 6 éléments parmi 49.

→ Le nombre de tirages possibles, c'est-à-dire le coefficient binomial, est donc :

$$\begin{aligned}\binom{49}{6} &= \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 13\,983\,816\end{aligned}$$

Nous pouvons aussi utiliser la seconde formule donnée :

$$\begin{aligned}\binom{49}{6} &= \frac{49!}{6! \times 43!} \\ &= 13\,983\,816\end{aligned}$$

Remarquons au passage que, si nous ne jouons qu'une seule grille, et donc une seule combinaison, nous avons 1 chance sur $13\,983\,816$ de gagner !

Attention

Il s'agit de tirages sans remise, simultanés, et l'ordre n'a pas d'importance.

Donnons maintenant deux nouvelles propriétés des coefficients binomiaux.

Propriété

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel.

1 **Symétrie :**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \ [\text{où } 0 \leq k \leq n]$$

2 **Formule de Pascal :**

Si de plus $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$, nous avons alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{ [où } 1 \leq k \leq n-1\text{]}$$

Nous allons démontrer la formule de Pascal.

→ Pour cela, nous allons utiliser une méthode combinatoire.

Démonstration

Soit E un ensemble à n éléments ($n \geq 2$).
Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$.
Soit un élément $a \in E$.

1. Intéressons-nous à F, l'ensemble de toutes les combinaisons à k éléments de E.

→ Le cardinal de F est égal au nombre de combinaisons possibles de k éléments parmi les n éléments de E :

$$\text{Card}(F) = \binom{n}{k}$$

2. Parmi les combinaisons, nous trouvons celles qui contiennent a et celles qui ne contiennent pas a.

Soit G l'ensemble des combinaisons à k éléments ne contenant pas a (G n'est pas vide car, dans E, il y a au moins un autre élément que a).

→ Le cardinal de G est égal au nombre de combinaisons possibles de k éléments parmi les $n-1$ éléments de E distincts de a :

$$\text{Card}(G) = \binom{n-1}{k}$$

Soit H l'ensemble des combinaisons à k éléments contenant a.
On les obtient en ajoutant l'élément a aux parties à $k-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments de E distincts de a.

→ Le cardinal de H est égal au nombre de combinaisons possibles de $k-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments de E distincts de a :

$$\text{Card}(H) = \binom{n-1}{k-1}$$

3 Nous voyons que G et H ne sont pas vides, que $G \cup H = F$ et que $G \cap H = \varnothing$.

G et H forment une partition de F.

➜ Ainsi, d'après la formule vue dans la première partie :

$$\text{Card}(F) = \text{Card}(G) + \text{Card}(H)$$

C Nous en déduisons finalement :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Nous pouvons maintenant passer à la construction du **triangle de Pascal**.

À retenir

Si nous plaçons les coefficients binomiaux dans un tableau avec les n en ligne et les k en colonne, nous obtenons un **triangle** et la formule de Pascal permet de calculer les coefficients de la ligne $n+1$ connaissant ceux de la ligne n.

➜ On a donc une formule de **récurrence** pour calculer les coefficients binomiaux et on peut tous les calculer de proche en proche.

Astuce

Nous plaçons dans un premier temps les coefficients suivants (selon les propriétés vues plus haut) :

- $\binom{n}{0} = 1$;
- $\binom{n}{n} = 1$;
- $\binom{n}{1} = n$.

Ensuite, selon la formule de Pascal, il suffit de faire la somme du coefficient juste au-dessus et de celui à gauche de ce dernier.

Nous pouvons également utiliser la propriété de symétrie.

Commençons à remplir, de manière détaillée, le triangle jusqu'à $n = 3$.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$n=0$	$\binom{0}{0}=1$			
$n=1$	$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=n=1$		
$n=2$	$\binom{2}{0}=1$	$\binom{2}{1}=\binom{1}{1}+\binom{1}{0}$ $=n=2$	$\binom{2}{2}=1$	
$n=3$	$\binom{3}{0}=1$	$\binom{3}{1}=\binom{2}{1}+\binom{2}{0}$ $=n=3$	$\binom{3}{2}=\binom{2}{2}+\binom{2}{1}$ $=\binom{3}{1}=3$	$\binom{3}{3}=1$

Maintenant que nous avons compris le principe, remplissons simplement le triangle de Pascal, jusqu'à $n=9$.

➜ N'hésitez pas à ajouter vous-mêmes quelques lignes, pour vous familiariser avec le calcul des coefficients binomiaux.

$k \rightarrow$ $n \downarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Conclusion :

Nous avons découvert la notion de combinatoire, une partie importante des mathématiques que l'on appelle « discrètes » (par opposition à « continues ») et qui s'intéressent notamment aux ensembles *dénombrables*.
Et cette branche a une part prépondérante aujourd'hui, car la recherche et le développement informatiques reposent en grande partie dessus.

En outre, nous nous sommes servis dans ce cours des épreuves de Bernoulli, que nous détaillerons dans la partie sur les probabilités. Ainsi la combinatoire y est-elle également importante.