Suites numériques, modèles discrets et limites

Introduction :

Étudier le comportement d'une suite conduit à déterminer la limite d'une suite lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque les rangs de la suite deviennent de plus en plus grands.

Nous allons étudier en particulier deux cas :

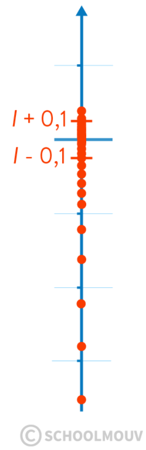
- celui où la limite de la suite est finie et vaut une valeur que l'on notera « l » ;
- celui où la limite est infinie, la suite tendra alors vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Nous verrons ensuite les théorèmes qui permettent de déterminer une limite de suite, notamment la limite d'une suite géométrique de raison positive et d'une somme de termes d'une suite géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1.
Enfin, nous définirons les suites arithmético-géométrique et en étudierons un exemple concret.

1 | Définition de la limite d'une suite

a. Limite finie

Regardons la représentation suivante d'une suite, avec les termes placés sur un axe gradué :



On peut constater que, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]l-0,1\ ;\ l+0,1[$. Les termes de la suite s'accumulent autour d'une certaine valeur l de cet intervalle.

→ Ce phénomène traduit la notion de limite finie.

Définition

Limite finie :

Dire qu'un réel l est limite d'une suite (u_n) signifie que tout intervalle ouvert de centre l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

→ On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

On dit que la suite (u_n) est convergente de limite l, ou que la suite (u_n) converge vers l.

À retenir

Donnons les limites de quelques suites de référence :

→ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

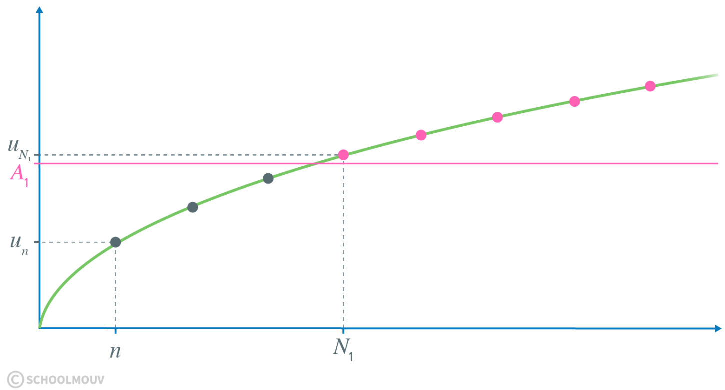
→ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

→ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$

→ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

b. Limite infinie

Regardons maintenant la représentation suivante d'une autre suite :



On constate cette fois-ci que, sur l'axe des ordonnées, tous les termes de la suite, à partir de l'indice N_1, appartiennent à l'intervalle ouvert $]A_1\ ;\ +\infty[$.

→ Autrement dit, plus n est grand, plus les termes u_n arrivent à dépasser tout nombre A.

Définition

Suite divergeant vers $+\infty$:

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $[A\ ;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

→ On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

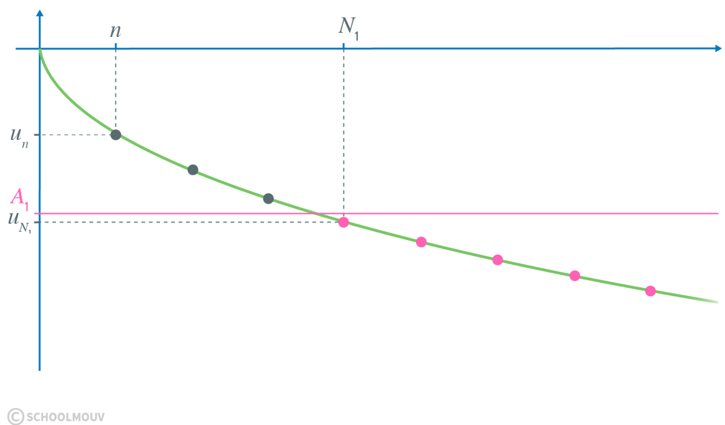
On dit alors que (u_n) est divergente ou que (u_n) diverge vers $+\infty$.

À retenir

Donnons quelques limites de suites de référence :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Étudions cette fois la représentation graphique suivante :



Définition

Suite divergeant vers $-\infty$:

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty\ ;\ A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

- On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

On dit alors que (u_n) est divergente ou que (u_n) diverge vers $-\infty$.

Théorème

La limite d'une suite, si elle existe, est unique.

Attention

Une suite n'a pas nécessairement de limite. C'est le cas pour les suites alternées, c'est-à-dire qui alternent entre deux valeurs, ou pour celles dont les valeurs oscillent.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ alterne entre les valeurs -1 et 1, selon la parité de l'entier n :

- si n est pair, $u_n = 1$;
- si n est impair, $u_n = -1$.

→ Cette suite n'a donc pas de limite.

2 | Théorèmes sur la limite d'une suite

Nous venons de définir la notion de limite. Voyons maintenant des moyens efficaces pour déterminer la limite éventuelle d'une suite :

- en comparant deux suites entre elles ;
- en utilisant le théorème des gendarmes ;
- ou encore en utilisant les suites géométriques.

Commençons par faire un rappel de vocabulaire.

a. Limite et comparaison

Dans certains cas, **comparer deux suites**, si l'on connaît la divergence de l'une, permet de déduire la divergence de l'autre.

Théorème

Théorème de comparaison des limites :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.

1. Si, pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 :

- $u_n \leq v_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

→ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

2. Si, pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 :

- $u_n \leq v_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

→ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

b. Le théorème des gendarmes

Le **théorème des gendarmes** permet de trouver la limite d'une suite dans le cas particulier où elle est encadrée par deux autres suites.

Astuce

Pour utiliser une image simple, imaginez deux gendarmes encadrant un suspect.

→ Si les deux gendarmes vont dans la même direction, le suspect ne peut qu'aller dans cette direction !

Théorème

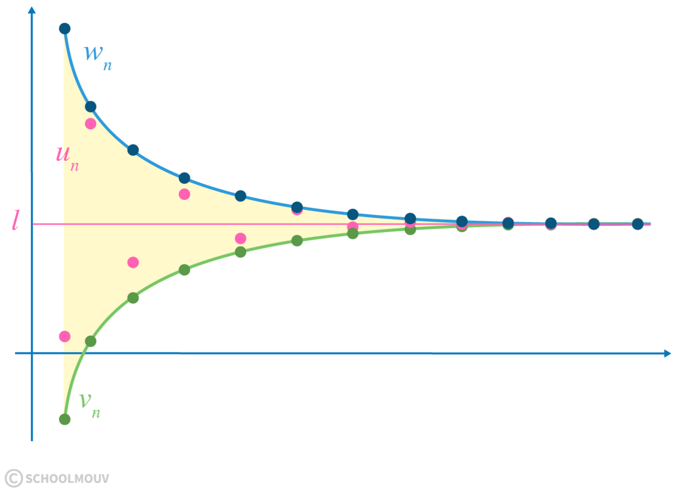
Théorème des gendarmes :

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Si :

- pour tout entier naturel supérieur à un certain entier naturel n_0, $v_n \leq u_n \leq w_n$,
- les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l,

→ alors la suite (u_n) converge vers l.

Les suites (u_n), (v_n) et (w_n), avec $v_n \leq u_n \leq w_n$, sont représentées ci-dessous.



Les suites (v_n) et (w_n) convergent vers le réel l.

→ On voit que c'est aussi le cas de la suite (u_n).

c. Suites géométriques (q^n), q positif

En classe de première, nous avions vu le théorème de la limite des suites géométriques (q^n), avec q réel.
Rappelons-le ici, pour q positif seulement.

Théorème

Théorème de la limite de (q^n) :

Soit q un nombre positif.
On a alors les limites suivantes :

- si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- si $0 \leq q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante égale à 1 et a pour limite 1.

Exemple

Appliquons le théorème de la limite de (q^n) sur quelques suites.

1. Pour la suite $(u_n = 1,05^n)$, on a : $q = 1,05 > 1$.
   - Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
2. Pour la suite $\left(v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, on a : $0 \leq q = \frac{1}{2} < 1$.
   - Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

→ Dans le cas général d'une suite géométrique de terme général $u_n = u_0 \times q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite dépendra également du signe de u_0.

Après avoir étudié la limite d'une suite géométrique, donnons les propriétés des opérations sur les limites et, en application, étudions la limite d'une suite constituée par la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique.

3 | Opérations sur les limites et application

a. Opérations sur les limites

La partie précédente nous a donné des théorèmes qui nous permettent de calculer, dans certains cas, la limite d'une suite. Regardons maintenant les règles opératoires qui s'appliquent aux limites.

Lorsque deux suites (u_n) et (v_n) ont des limites connues, on peut en général en déduire la limite :

- de $(u_n + v_n)$: la limite correspond à la somme des limites de (u_n) et (v_n) ;

- de $(u_n \times v_n)$: la limite correspond au produit des limites de (u_n) et (v_n) ;
- et de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$: la limite correspond au quotient des limites de (u_n) et (v_n).

Nous allons donner ci-dessous les tableaux des règles opératoires : on peut les retrouver facilement, par exemple en se disant que, pour la somme, l'infini l'« emporte » sur le fini, ou que $+$ multiplié par $-$ donne $-$.

Attention

Toutefois, il existe des cas où il n'y a pas de règle générale (par exemple, dans une multiplication, qui de 0 ou de l'infini l'« emporte » ?).

→ Nous parlons alors de **forme indéterminée** (FI).

Nous découvrirons, un peu plus loin, comment « lever » ces indéterminations.

À retenir

Limites de la somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\mathbf{FI}$

Limites du produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n$	$l \times l'$	$\pm\infty$	FI

Limites du quotient de deux suites

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	l	l	0	$l \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	l'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Exemple

Soit la suite définie par $u_n = \frac{2}{3n+5}$ pour tout entier naturel n.

Calculons les limites suivantes :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 = 2$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n + 5 = +\infty$

→ Par quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{3n+5} = 0$

À retenir

Le principe est toujours le même pour lever une indétermination :

→ il faut changer l'écriture de la suite en factorisant, la plupart du temps, par le terme de plus haut degré.

Exemple

Soit la suite définie par $u_n = 3n^2 - n - 5$ pour tout entier naturel n.

Calculons les limites suivantes :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} -n - 5 = -\infty$

→ Il s'agit donc d'une forme indéterminée $\infty - \infty$.

1. On factorise par le terme de plus haut degré, c'est-à-dire n^2 (que l'on suppose non nul car on s'intéresse à n grand) :

$$\begin{aligned} u_n &= n^2\left(\frac{3n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} - \frac{5}{n^2}\right) \\ &= n^2\left(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right) \end{aligned}$$

2. On calcule les limites des termes :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = 3$, car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$

→ Donc, par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exemple

Soit la suite définie par $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$ pour tout entier naturel $n \geq 4$.

Calculons les limites suivantes :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n + 5 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} -2n + 7 = -\infty$

→ Il s'agit d'une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Levons maintenant l'indétermination.

1. On factorise le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré, c'est-à-dire n :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n(3+\frac{5}{n})}{n(-2+\frac{7}{n})} \\ &= \frac{3+\frac{5}{n}}{-2+\frac{7}{n}} \end{aligned}$$

2 On calcule les limites du numérateur et du dénominateur.

On calcule d'abord : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{n} = 0$

Ainsi :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{5}{n} = 3$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} -2+\dfrac{7}{n} = -2$

→ Par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{3}{2}$

Astuce

D'une manière générale, lorsque l'on veut déterminer la limite d'un polynôme ou d'un quotient de polynômes, on peut passer l'étape de la factorisation et ne garder que le terme de plus haut degré.

Exemple

Appliquons cette astuce sur un exemple simple :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2} \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

b. Limite de la somme de termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1

En classe de première, nous avons vu les propriétés de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q réel différent de 1.
Rappelons-les ici.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q positive strictement inférieure à 1.
La formule suivante donne la somme de termes consécutifs :

$$S_n = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Avec $k \leq n$, nous pouvons écrire :

$$S_n = u_k \times \frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q}$$

Nous en déduisons la propriété suivante.

Propriété

Soit n un entier naturel non nul et q un réel positif strictement inférieur à 1. Nous avons alors :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 256$ et de raison $\frac{3}{4}$.

On cherche à calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$.

D'après la formule précédente :

$$\begin{aligned} S_{10} &= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= 256 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{11}}{1-\frac{3}{4}} \\ &= 256 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{11}}{\frac{1}{4}} \\ &= 256 \times 4 \times \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{11}\right) \\ &= 1024 \times \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{11}\right) \end{aligned}$$

Donnons maintenant la limite de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, un réel positif strictement inférieur à 1, et S_n la somme de ses termes consécutifs $u_k + u_{k+1} + \ldots + u_n$, avec k entier naturel tel que $k \leq n$.
Nous avons alors :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{u_k}{1-q}$$

En particulier, pour la somme des premiers termes de la suite (u_n) de premier terme u_0 :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}$$

Nous allons démontrer cette propriété.

Démonstration

1 Nous avons par hypothèse $0 \leq q < 1$, donc, d'après le théorème de la limite de q^n :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

2 Par somme et quotient des limites, nous en déduisons :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

C Par produit des limites, nous pouvons conclure :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} S_n &= \lim_{n \to +\infty} u_k \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \\ &= \frac{u_k}{1 - q} \end{aligned}$$

4 | Suites arithmético-géométriques

a. Définition

En première, nous avons étudié les suites arithmétiques et les suites géométriques.
Définissons pour commencer, à partir de ces dernières, un nouveau type de suites : les **suites arithmético-géométriques**.

Définition

Suite arithmético-géométrique :

Soit (u_n) une suite de nombres vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$, où $a \neq 1$ et b sont des nombres réels non nuls.

→ Une telle suite est dite arithmético-géométrique ou récurrence affine.

Nous pouvons remarquer :

- si $a = 1$, nous avons une suite arithmétique simple ;
- si $b = 0$, nous avons une suite géométrique simple.

Regardons comment passer de la formule de récurrence à la formule explicite avec de telles suites.

Astuce

Considérons une suite de nombres (u_n) qui vérifie $u_{n+1} = au_n + b$, pour tout entier naturel n, où $a \neq 1$ et b sont des nombres réels non nuls.

1. On résout l'équation $x = ax + b$.

→ Elle a une solution unique c.

2. On introduit la suite auxiliaire (x_n) définie par $x_n = u_n - c$ pour tout entier naturel n : on prouve qu'elle est géométrique (de raison a)

→ Il en résulte que, pour tout entier naturel n, $x_n = a^n x_0$.

C. On revient à la suite initiale : pour tout entier naturel n, $u_n = x_n + c$.

→ D'où l'expression : $u_n = a^n (u_0 - c) + c$, pour tout entier naturel n.

Prenons un exemple pour montrer comment appliquer cette méthodologie.

Exemple

Intéressons-nous à la suite arithmético-géométrique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = 0,2u_n + 4, \ \textbf{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Si (u_n) converge, alors sa limite x est solution de l'équation $x = 0,2x + 4$.

→ Résolvons cette équation simple :

$$x = 0,2x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{0,8} = 5$$

2 Cela suggère de poser : pour tout entier naturel n, $x_n = u_n - 5$.

Nous avons ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0,2u_n + 4 \\ 5 = 0,2 \times 5 + 4 \end{cases}$$

Nous en déduisons par soustraction, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 5 &= 0,2u_n - 1 \\ &= 0,2(u_n - 5) \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } x_{n+1} = 0,2x_n$$

La suite (x_n) est géométrique de raison $a = 0,2$ et de premier terme $x_0 = u_0 - 5 = 7$.

→ D'où, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 a^n \\ &= 7 \times 0,2^n \end{aligned}$$

c Ainsi, $u_n - 5 = 7 \times 0,2^n$, pour tout entier naturel n.

→ On obtient donc la formule explicite. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = 7 \times 0,2^n + 5$$

De cet exemple, nous pouvons tirer une propriété sur la convergence d'une suite arithmético-géométrique.

Propriété

Convergence :

Considérons une suite de nombres (u_n) qui vérifie $u_{n+1} = a\ u_n + b$, avec a et b des nombres réels non nuls, et $-1 < a < 1$.

→ La suite (u_n) converge vers le nombre c qui vérifie $c = ac + b$.

À retenir

La suite est divergente si $a \leq -1$ ou $a \geq 1$.

Exemple

Reprenons la suite de l'exemple précédent définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = 0,2u_n + 4, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$a = 0,2$, nous avons donc $-1 < a < 1$, et :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} 0,2^n &= 0 \\ \text{Ainsi : } \lim_{n \to +\infty} u_n &= \lim_{n \to +\infty} 7 \times 0,2^n + 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

b. Application d'une suite arithmético-géométrique

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2020, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.
Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre $8\ \%$ des colonies durant l'hiver.
Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n), le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2020 + n$.

Ainsi, $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2020.

Exprimons pour tout entier naturel n le terme C_{n+1} en fonction de C_n, et montrons que la suite (C_n) est définie par une relation de récurrence arithmético-géométrique.

Soit n un entier naturel.
Soit C_n le nombre de colonies d'abeilles l'année $2020 + n$.
L'hiver de l'année $2020 + (n + 1)$, l'apiculteur perd $8\ \%$ du nombre de ses colonies de l'année précédente.
Il perd donc $0,08C_n$ colonies, car le coefficient multiplicateur associé à une baisse de $8\ \%$ est $\frac{8}{100} = 0,08$.

→ À la fin de l'hiver de l'année $2020 + (n + 1)$, le nombre de colonies d'abeilles est donc égal à $C_n - 0,08C_n = 0,92C_n$.

Au printemps de l'année $2020 + (n + 1)$, l'apiculteur installe 50 nouvelles colonies.
Au mois de juillet de l'année $2020 + (n + 1)$, il a donc $0,92C_n + 50$ colonies d'abeilles, et ce nombre correspond à C_{n+1}.

→ Pour tout entier naturel n, on a donc $C_{n+1} = 0,92C_n + 50$.

Il s'agit bien d'une relation de récurrence arithmético-géométrique.

2. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = 625 - C_n$.

Montrons que la suite (V_n) est géométrique et que, pour tout nombre entier naturel n, nous avons $V_{n+1} = 0,92V_n$.

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= 625 - C_{n+1} \text{ [par définition de } (V_n)] \\ &= 625 - (0,92C_n + 50) \text{ [par définition de } (C_n)] \\ &= 625 - 0,92C_n - 50 \\ &= 575 - 0,92C_n \\ &= 0,92 \times 625 - 0,92C_n \text{ [car } 575 = 0,92 \times 625] \\ &= 0,92 \times (625 - C_n) \text{ [en factorisant l'expression par } 0,92] \\ &= 0,92 \times V_n \text{ [par définition de } (V_n)] \end{aligned}$$

→ La suite (V_n) est donc bien une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme :

$$\begin{aligned} V_0 &= 625 - C_0 \\ &= 625 - 300 \\ &= 325 \end{aligned}$$

Remarque :
La solution x de l'équation $x = 0,92x + 50$ vérifie $0,08x = 50$, donc $x = \frac{50}{0{,}08} = 625$.
Ce qui explique l'apparition du nombre 625.

3. **Déterminons le terme général de la suite (V_n), puis celui de la suite (C_n).**

D'après la formule donnant le terme d'une suite géométrique en fonction de son premier terme, $V_0 = 325$, et de sa raison, $q = 0,92$, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} V_n &= V_0 \times q^n \\ &= 325 \times 0,92^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et donc : } C_n &= 625 - V_n \\ &= 625 - 325 \times 0,92^n \end{aligned}$$

4. **Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2030 ?**

L'année 2030 correspond à la valeur $n = 10$.
En juillet 2030, le nombre de colonies que l'apiculteur peut espérer posséder est donc :

$$\begin{aligned} C_{10} &= 625 - 325 \times 0,92^{10} \\ &\approx 484 \text{ [arrondi à l'entier près]} \end{aligned}$$

5 **Pour un grand nombre n d'années, vers quel nombre de colonies tend la suite (C_n) ?**

Nous avons $0 < 0,92 < 1$, donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} 0,92^n &= 0 \\ \text{Ainsi : } \lim_{n \to +\infty} V_n &= \lim_{n \to +\infty} 325 \times 0,92^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Finalement : } \lim_{n \to +\infty} C_n &= \lim_{n \to +\infty} 625 - V_n \\ &= 625 \end{aligned}$$

En conclusion, pour un grand nombre n d'années, le nombre de colonies tend vers 625.

> Conclusion :
>
> Dans ce cours, nous avons vu la définition d'une limite de suite quand elle existe, puis des théorèmes permettant de déterminer cette limite. Nous avons également découvert, à travers un exemple concret, de nouvelles suites définies par récurrence : les suites arithmético-géométriques.
>
> Nous avons ici étudié des suites discrètes. Dans les prochains cours, nous nous intéresserons aux limites de fonctions continues.