Fonctions convexes

Pour retrouver le cours correspondant de la spécialité « Mathématiques » :

➜ *Fonctions convexes*

Introduction :

Les objectifs de ce cours de l'option « Mathématiques complémentaires » sont de définir la notion graphique de convexité (et de concavité) sur un intervalle, puis de donner le lien entre la convexité et la dérivée f' de f, puis la dérivée seconde f'' de f, et enfin de définir un point d'inflexion pour la courbe représentative d'une fonction.

1 Définitions graphiques

Pour bien nous représenter les choses, nous allons commencer par définir graphiquement cette nouvelle notion de **convexité** d'une fonction.

a. Fonction convexe sur un intervalle

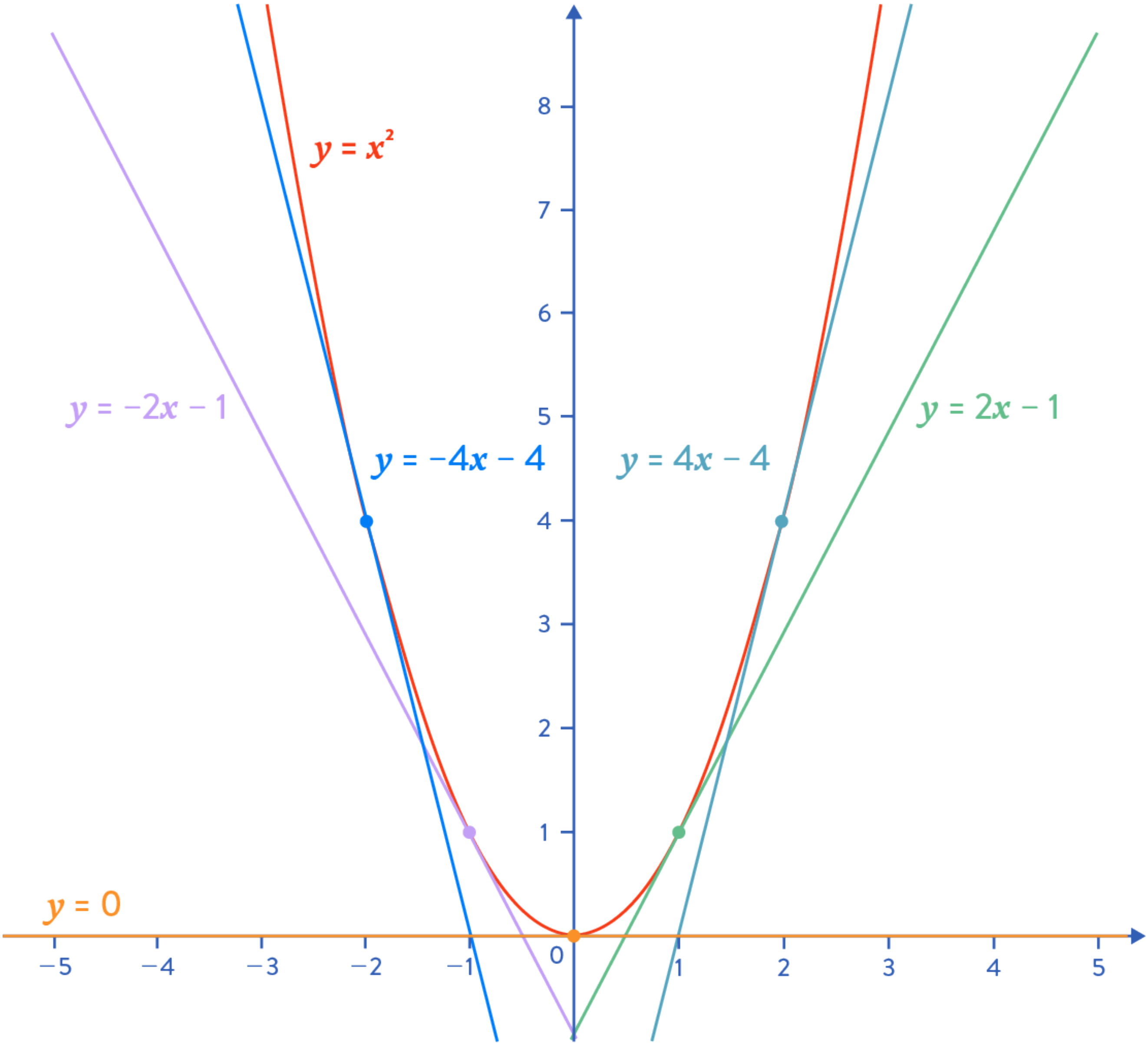
Définition

Fonction convexe :

Soit I un intervalle et f une fonction définie et dérivable sur I.
Une fonction est convexe sur l'intervalle I lorsque la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle.

Prenons un exemple avec la fonction carré : $x \mapsto x^2$.

➜ Traçons sa courbe représentative et quelques-unes de ses tangentes.



Courbe représentative de la fonction carré avec quelques tangentes

À retenir

- Nous voyons sur le graphe ci-dessus que la courbe représentative de la **fonction carré** est au-dessus de toutes ses tangentes.

  → Elle est convexe sur $\mathbb{R}$.

- La **fonction cube** est convexe sur $[0\ ;\ +\infty[$.
- La **fonction inverse** est convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$.

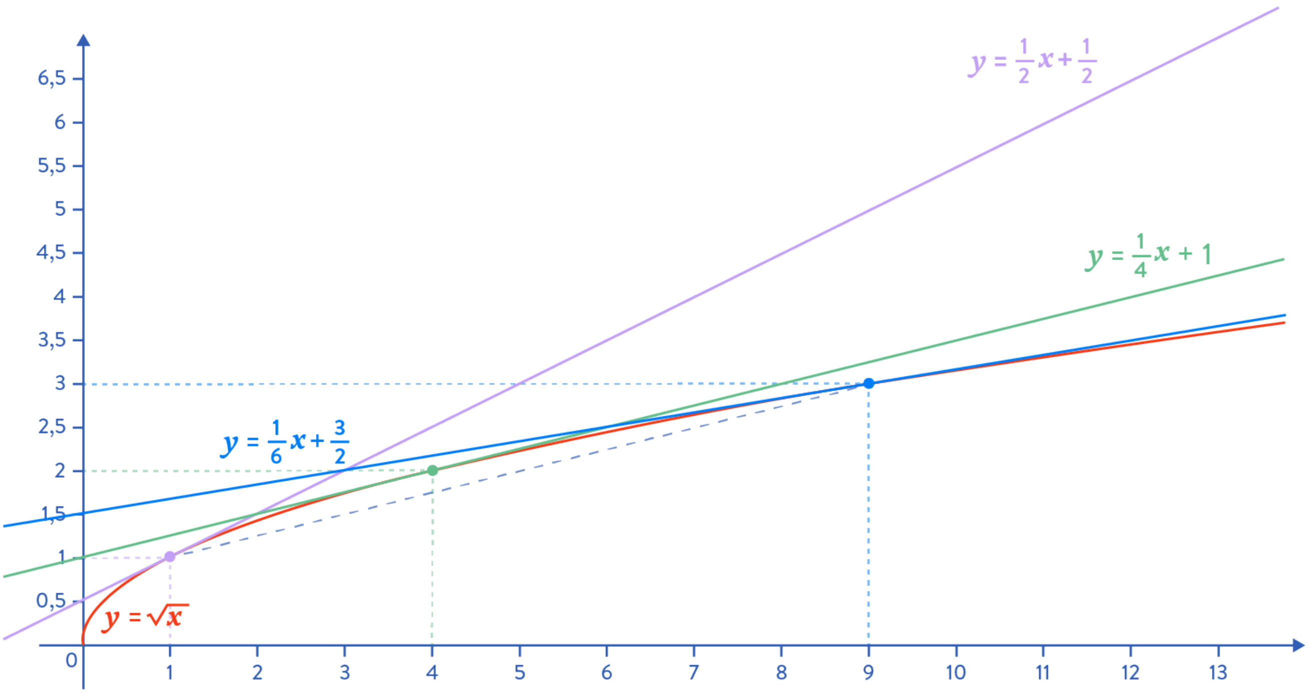
b. Fonction concave sur un intervalle

Définition

Fonction concave :

Soit I un intervalle et f une fonction définie et dérivable sur I.
Une fonction est concave sur l'intervalle I lorsque la courbe représentative de la fonction f est au-dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle.

Illustrons la concavité avec la fonction racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$.



Courbe représentative de la fonction racine carrée avec quelques tangentes

À retenir

- Nous voyons sur le graphe ci-dessus que la courbe représentative de la **fonction racine carrée** est au-dessous de toutes ses tangentes.

  ➜ Elle est concave sur $[0\ ;\ +\infty[$.

- La **fonction cube** est concave sur $]-\infty\ ;\ 0]$.
- La **fonction inverse** est concave sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

2 Convexité et lien avec la dérivation

a. Convexité et sens de variation de la dérivée

Nous allons maintenant voir une autre méthode pour démontrer la convexité ou la concavité d'une fonction sur un intervalle : il s'agit d'établir le lien qui existe entre une fonction convexe ou concave sur un intervalle et la dérivée de cette fonction sur cet intervalle.

Théorème

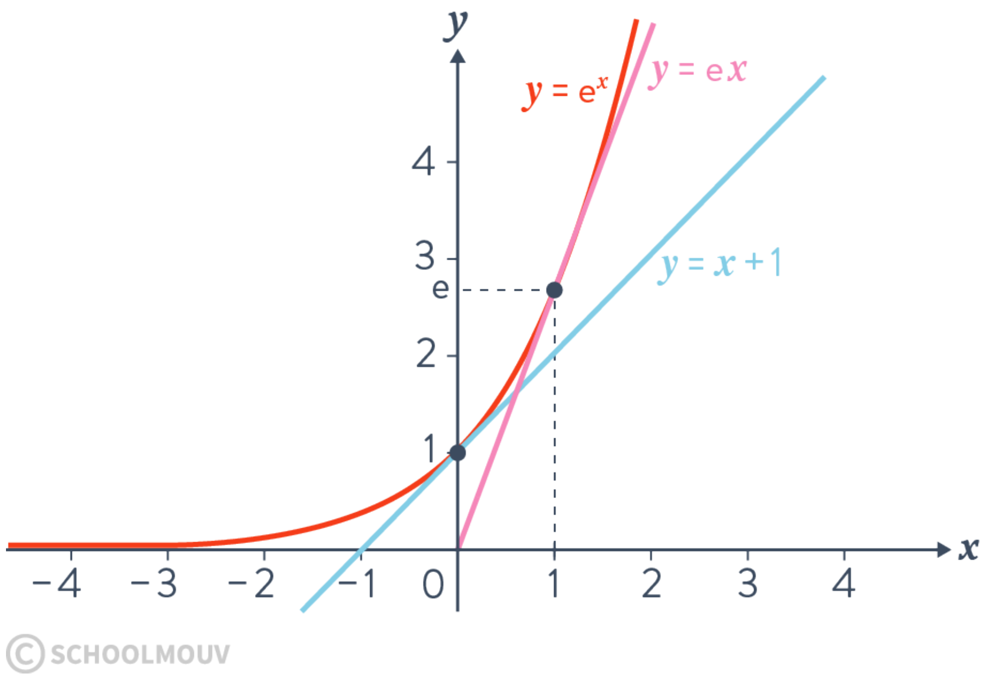
Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Prenons un exemple simple, avec la fonction exponentielle que nous avions étudiée en première.

➜ La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, car sa dérivée, qui est la fonction exponentielle, est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Graphiquement, on peut remarquer que la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de toutes ses tangentes sur $\mathbb{R}$, notamment de celles aux points de la courbe d'abscisse 0 et 1.



b. Convexité et signe de la dérivée seconde

Nous avons parlé dans le paragraphe précédent de fonction dérivée croissante et décroissante. Cela nous fait naturellement penser à la dérivée de la fonction dérivée, c'est-à-dire la **dérivée seconde**.

Définition

Dérivée seconde :

Soit I un intervalle ; f est une fonction définie et dérivable sur I ; f' est sa dérivée.
Si la fonction f' est dérivable sur I, on note f'' (« f seconde ») sa dérivée. f'' est aussi appelée dérivée seconde de la fonction f.

Nous pouvons maintenant relier convexité et dérivée seconde.

Théorème

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable deux fois sur I.

- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.

Prenons un premier exemple avec la fonction logarithme népérien que nous avons découverte cette année.

Exemple

On note f la fonction logarithme népérien qui est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Nous l'avons démontré dans le cours précédent, sa dérivée est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

2. Sa dérivée seconde est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

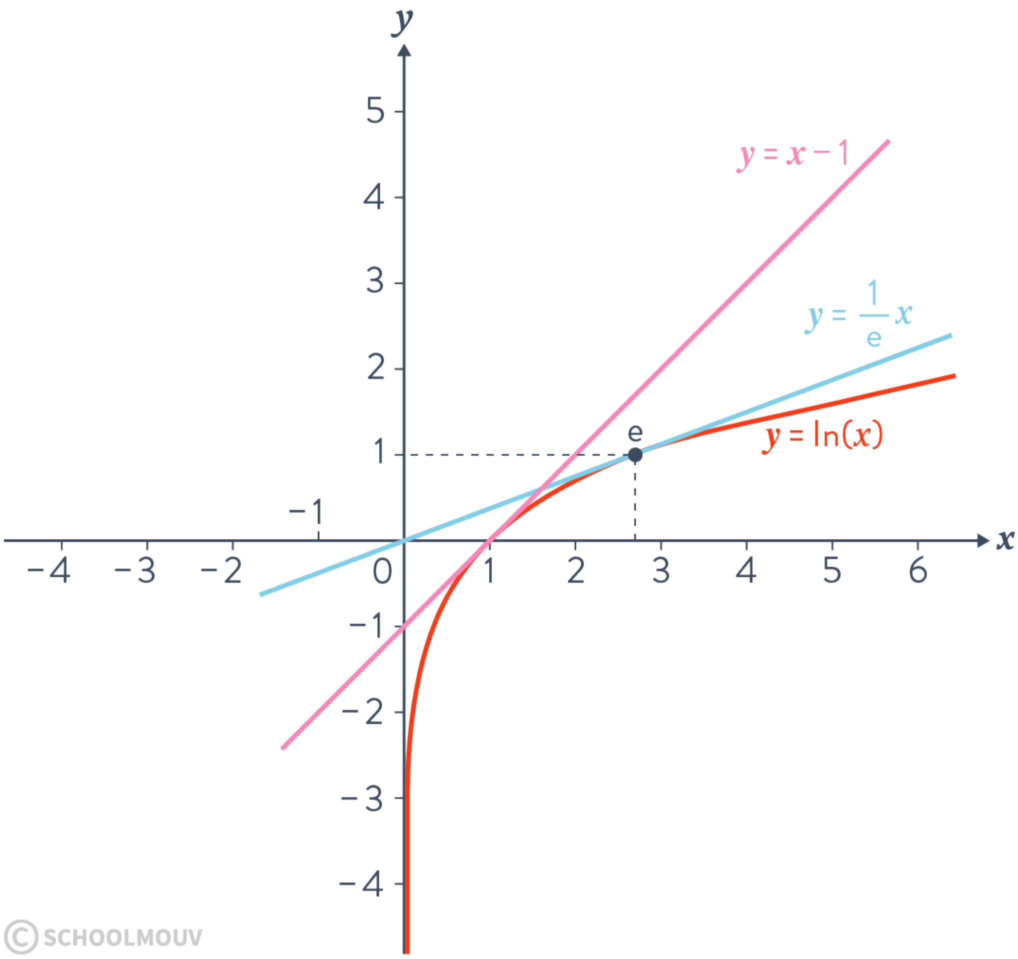
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

C. Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

→ La fonction logarithme népérien est concave sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Graphiquement, on peut remarquer que la courbe représentative de la fonction logarithme népérien est bien au-dessous de toutes ses tangentes sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, notamment de celle aux points de la courbe d'abscisses 1 et e.



Prenons encore un exemple, avec une fonction un peu plus compliquée.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\mathrm{e}^x + (2 - x)\mathrm{e}^x \\ &= (1 - x)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

2. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\mathrm{e}^x + (1 - x)\mathrm{e}^x \\ &= -x\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

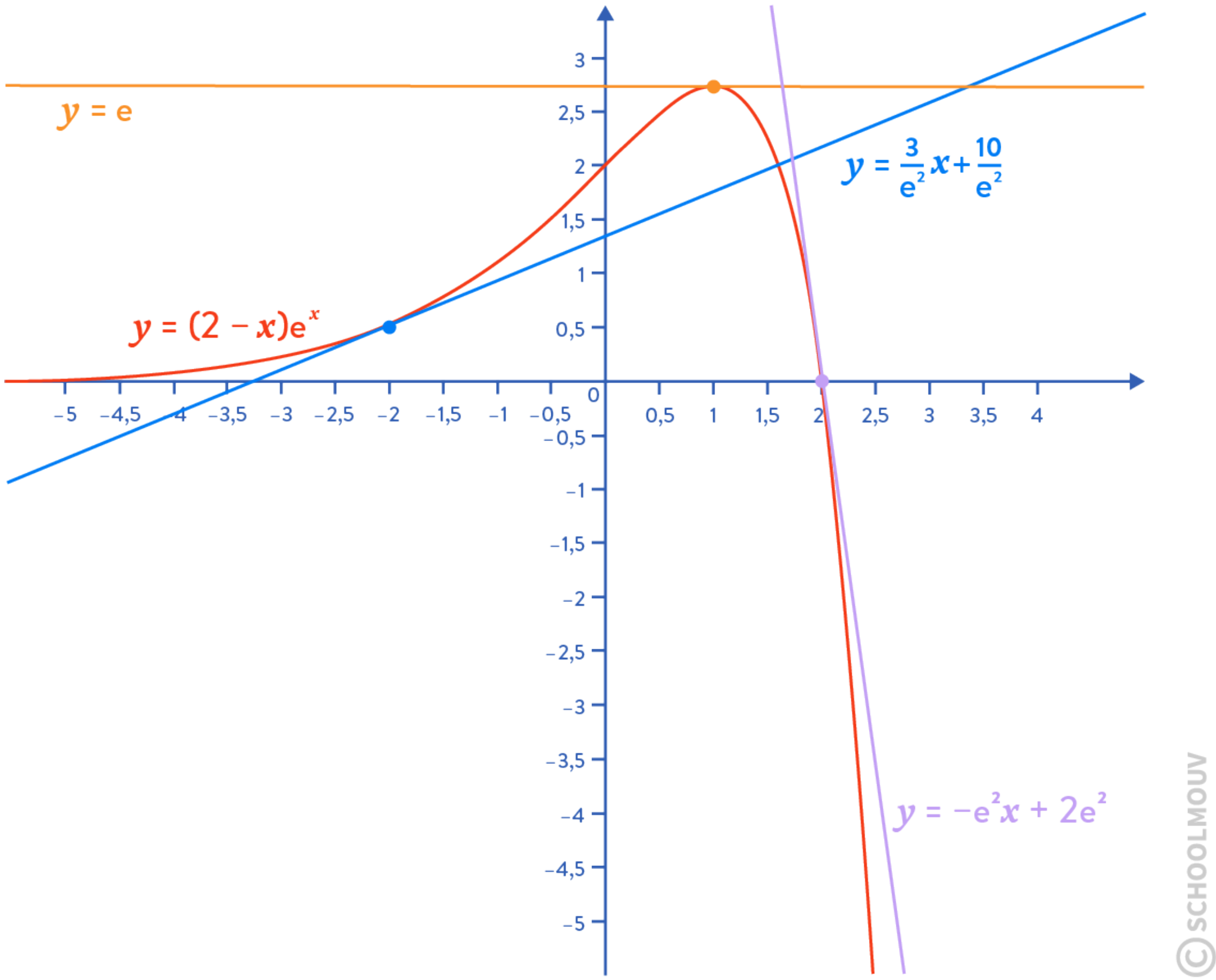
C La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc :

- $f''(x) = -x\mathrm{e}^x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^-$.

→ La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^-$.

- $f''(x) = -xe^x \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

➜ La fonction f est concave sur $\mathbb{R}^+$.



Courbe représentative de la fonction f avec quelques tangentes

Comme nous pouvons l'observer sur le graphique ci-dessus, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de toutes ses tangentes sur l'intervalle $\mathbb{R}^-$ et la courbe représentative de la fonction f est au-dessous de toutes ses tangentes sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$, indépendamment des variations de la fonction f.

Attention

La tangente horizontale au point de la courbe d'abscisse 1 correspond à l'abscisse x où $f'(x) = 0$, donc où le sens de variation de f change.

➜ Cela n'a rien à voir avec la convexité ou la concavité.

Le point d'abscisse 0, lui, ne voit pas le sens de variation de f changer, mais c'est aussi un point particulier, puisque c'est le point où f'' s'annule.

→ Nous allons définir ce point dans la partie suivante.

3 Point d'inflexion

Dans le dernier exemple, nous avons vu que la fonction $f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x$ était convexe sur $\mathbb{R}^-$ et concave sur $\mathbb{R}^+$.

→ Le point d'abscisse 0 est appelé **point d'inflexion** pour la courbe représentative de f.
Définissons cette notion.

a. Définition

Définition

Point d'inflexion :

Soit I un intervalle et f une fonction définie et dérivable sur I, de représentation graphique $\mathscr{C}_f$.
Soit un point $A \in \mathscr{C}_f$.

Le point A est un point d'inflexion pour la courbe $\mathscr{C}_f$ lorsque la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en A.

→ En l'abscisse du point A, la fonction f passe de concave à convexe, ou l'inverse.

Attention

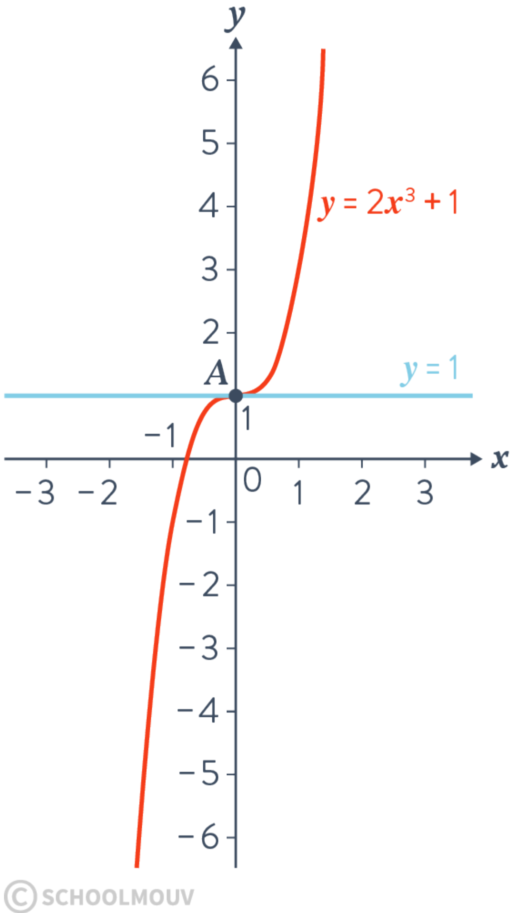
Un point est « point d'inflexion » pour la **courbe représentative d'une fonction**, et non pas pour la fonction elle-même.

Prenons un nouvel exemple.

Exemple

On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 1$.
La courbe représentative de f traverse sa tangente au point d'abscisse 0, qui a pour équation $y = 1$.

→ Le point $A\,(0\ ;\ 1)$ de la courbe représentative de f est donc un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.



b. Point d'inflexion et dérivée seconde

Toujours dans l'exemple de la partie 2 que nous évoquions, nous avons vu que la dérivée seconde s'annulait et changeait de signe au point d'abscisse 0.

Théorème

Soit I un intervalle et f une fonction définie et deux fois dérivable sur I, de représentation graphique $\mathscr{C}_f$.
Soit un point $A \in \mathscr{C}_f$, d'abscisse x_A.
A est un **point d'inflexion** pour $\mathscr{C}_f$ si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x_A.

Complétons maintenant l'exemple de la partie précédente.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 1$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 6x^2$$

2. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = 12x$$

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow 12x > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 &\Leftrightarrow 12x < 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(0) &= 12 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

C. f'' s'annule en changeant de signe en $x = 0$.

➜ Le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 est un point d'inflexion pour la courbe représentative de f

.

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons découvert les notions de dérivée seconde d'une fonction, de convexité et de concavité sur un intervalle, ainsi que de point d'inflexion pour la courbe représentative d'une fonction.
Grâce à elles, nous pouvons encore approfondir l'étude des fonctions.