Calcul intégral

Pour retrouver le cours correspondant de l'option « Mathématiques complémentaires » :

→ *Intégration*

Introduction :

Dans ce cours de la spécialité « Mathématiques », nous allons aborder la notion de calcul intégral. Ce type de calcul permet de mesurer des grandeurs (aires, volumes…) et permettra également, dans le supérieur, de déterminer des probabilités et des statistiques.

1 Intégrale d'une fonction continue positive

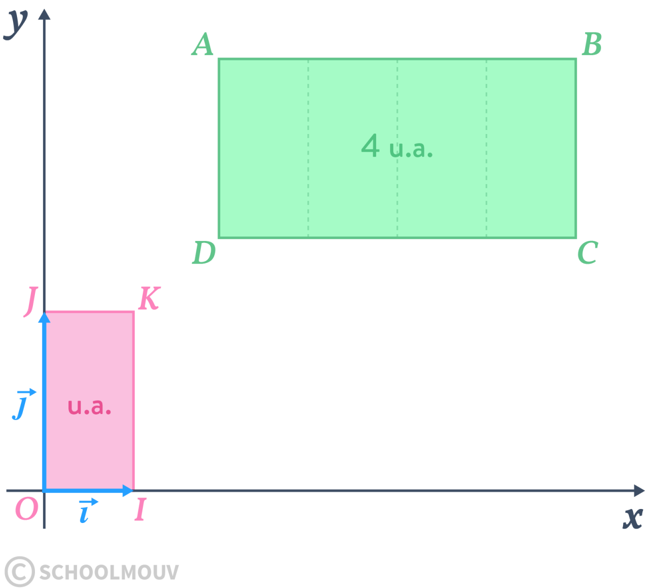
Commençons par définir l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle.

a. Définitions et vocabulaire

Définition

Unité d'aire :

Dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, l'unité d'aire (notée u.a.) est l'aire du rectangle $OIKJ$, où K est le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$.



À partir de cette notion d'unité d'aire, on peut exprimer l'aire d'autres figures géométriques.

Exemple

> L'aire du rectangle $ABCD$ sur l'image ci-dessus est de 4 u.a.

Définition

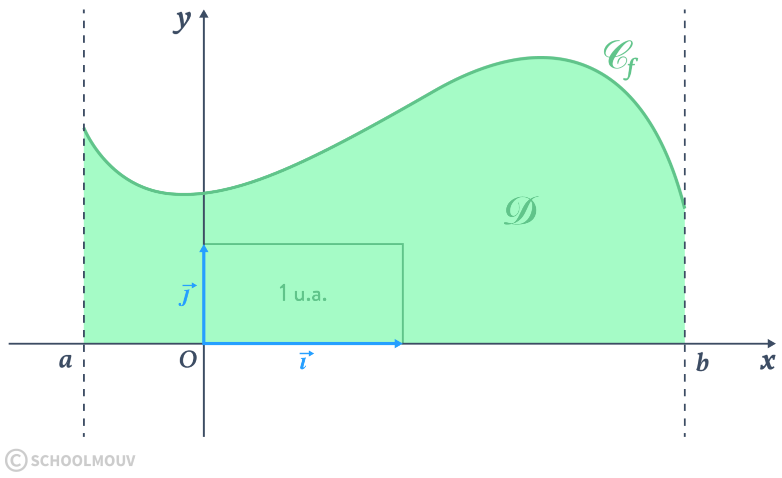
Intégrale d'une fonction positive :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, avec $a < b$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'intégrale de a à b de f est égale à l'aire (en unité d'aire) du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

→ Elle se note ainsi :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

→ On parle aussi d'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.



Astuce

On constate donc que, pour toute fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est un **nombre réel positif ou nul**.

Précisons aussi que, dans la notation donnée :

- a et b sont les **bornes** de l'intégrale ;
- x est la **variable** d'intégration et peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre, si celle-ci n'est pas utilisée ailleurs, et $\mathrm{d}x$ indique que la variable est x.

→ Ainsi, par exemple, les deux expressions suivantes sont égales :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Si f est une fonction continue et positive, il résulte alors de la définition précédente de l'intégrale deux propriétés.

Propriété

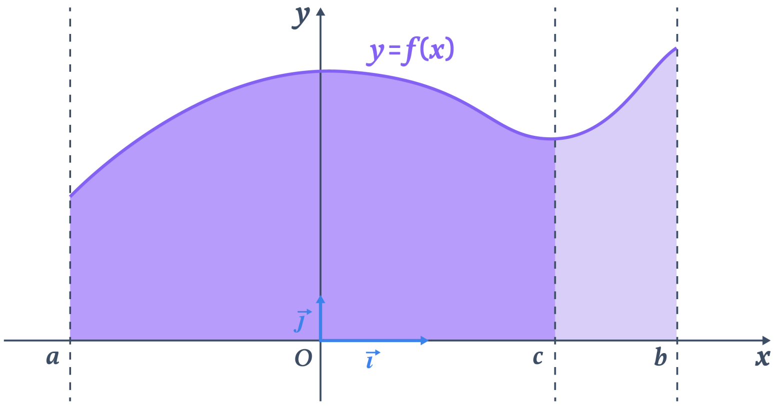
f est une fonction continue et positive sur un intervalle I.
a, b et c sont des réels de I.

- **Intervalle de longueur nulle** :

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

- **Relation de Chasles**, ou additivité des aires :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$



Exemple

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On donne :

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$$
$$\int_{-4}^1 f(x)\mathrm{d}x = 5$$

→ Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\int_{-4}^2 f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-4}^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= 5 + 3 \\ &= 8\end{aligned}$$

b. Calcul d'une intégrale d'une fonction continue positive

Le cours précédent nous a fait découvrir la notion de **primitives** d'une fonction. Elle va nous servir pour calculer une intégrale.

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

- La fonction F_a définie sur $[a\ ;\ b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.
- Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Astuce

Nous pouvons aussi noter :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \big[F(x)\big]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Cette propriété nous dit que la quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie. C'est-à-dire que, si G est une autre primitive de f, alors on a :

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$
$$\text{[car, pour tout } x \in [a\ ;\ b],\ G(x) = F(x) + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}]$$

Démontrons dans un premier temps que la fonction F_a définie ci-dessus est bien une primitive de la fonction f qui s'annule en a.

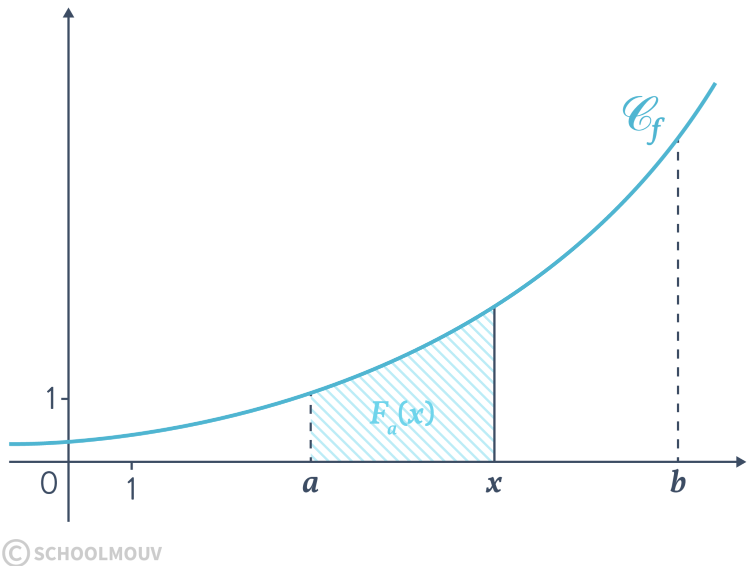
Démonstration

1. On considère :

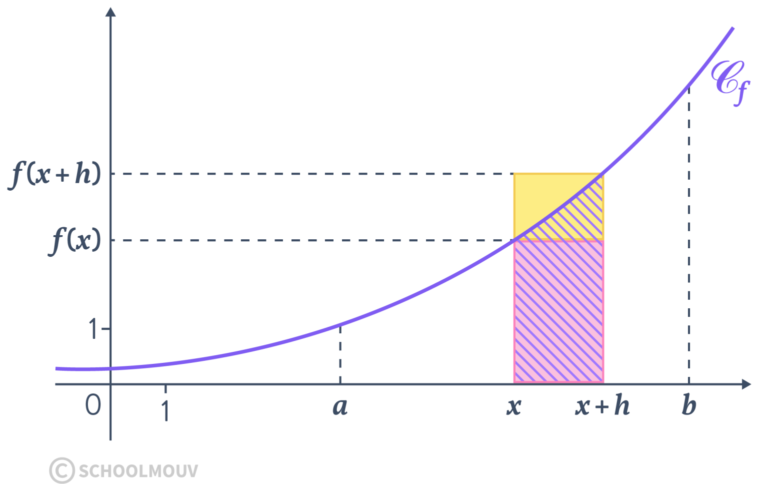
- une fonction f positive et croissante sur $[a\ ;\ b]$,
- une fonction F_a :

$$\begin{aligned} F_a\ :\ [a\ ;\ b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

→ D'après la définition de l'intégrale, $F_a(x)$ est l'aire de la surface hachurée ci-dessous.



2 On calcule le taux de variation de F_a en x dans le cas où h est un réel strictement positif (avec $x + h \leq b$).

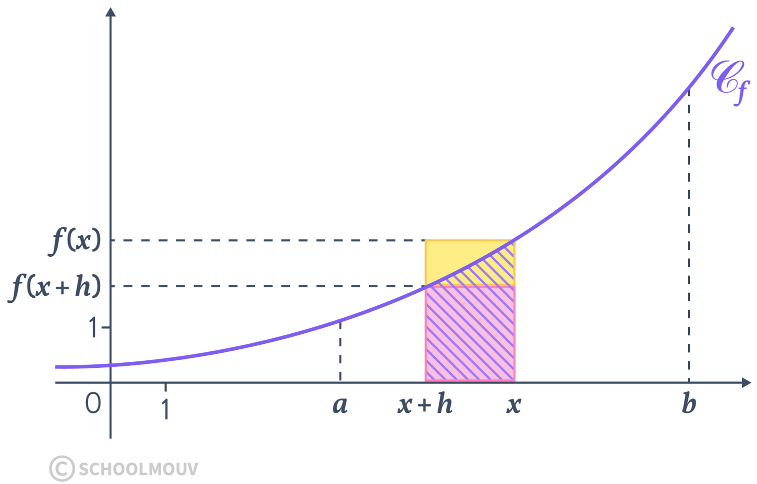


f est croissante sur $[x\ ;\ x+h]$, on constate sur l'image que l'aire qui représente $F_a(x+h) - F_a(x)$ est comprise entre deux rectangles de largeur h, et chacun de hauteur respective $f(x)$ et $f(x+h)$, donc :

$$h \times f(x) \leq F_a(x+h) - F_a(x) \leq h \times f(x+h)$$

$$f(x) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x+h) \longrightarrow \text{ inégalité } (1)$$

3 On calcule le taux de variation de F_a en x dans le cas où h est un réel strictement négatif (avec $a \leq x+h$).



f est croissante sur $[x+h~;~x]$, on constate sur l'image que l'aire qui représente $F_a(x) - F_a(x+h)$ est comprise entre deux rectangles de largeur $-h$, et chacun de hauteur respective $f(x+h)$ et $f(x)$, donc :

$$-h \times f(x+h) \leq F_a(x) - F_a(x+h) \leq -h \times f(x)$$

$$f(x+h) \leq \frac{F_a(x) - F_a(x+h)}{-h} \leq f(x)$$

$[\text{ici, le sens des inégalités ne change pas car } -h \text{ est un nombre positif}]$

$$f(x+h) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x) \longrightarrow \text{ inégalité } (2)$$

4 On en déduit la dérivée de $F_a(x)$ lorsque h tend vers 0.

- f est continue sur $[a~;~b]$, donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.
- Ainsi, d'après les $\text{inégalités } (1) \text{ et } (2)$, en passant à la limite quand h tend vers 0, on obtient par encadrement :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)$$

$$F_a'(x) = f(x) \text{ pour } x \in [a\ ;\ b]$$

$$\text{[d'après la définition du nombre dérivé]}$$

→ Par définition, la fonction F_a est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, et elle s'annule en a car :

$$F_a(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$$

C Ainsi, la fonction $x \mapsto F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ qui s'annule en a.

Démontrons maintenant que si la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Démonstration

1 Posons l'écriture des primitives de f.

On sait que la fonction F_a une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$, d'après la démonstration précédente.

On a donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ qui est une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$.

Pour tout x dans $[a\ ;\ b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + c$, avec c un réel, est donc une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ (car deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante).

2 On calcule $F(b) - F(a)$:

$$\begin{aligned}F(b)-F(a) &= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + c - \left(\int_a^a f(t)\mathrm{d}t + c\right) \\ &= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + c - c \\ &= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\ &\text{[la variable est muette, donc on peut la changer} \\ &\text{par n'importe quelle autre variable]}\end{aligned}$$

→ La **variable est muette**, nous avons :

$$F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

C Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

Exemple

Calculons l'intégrale :

$$\int_1^3 (4x^2+3x)\mathrm{d}x$$

- La fonction $f\ :\ x \mapsto 4x^2+3x$ est continue et positive sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$, donc son intégrale existe d'après ce qui précède.

On pose, pour tout $x \in [1\ ;\ 3]$:

$$F(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

→ La fonction F est une primitive de f sur cet intervalle.

- On calcule maintenant l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_1^3 (4x^2+3x)\mathrm{d}x &= F(3)-F(1)\\ &= \left(\frac{4}{3}\times 3^3+\frac{3}{2}\times 3^2\right)-\left(\frac{4}{3}\times 1^3+\frac{3}{2}\times 1^2\right)\\ &= \left(36+\frac{27}{2}\right)-\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)\\ &= 36+\frac{27}{2}-\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\\ &= \frac{216}{6}+\frac{81}{6}-\frac{8}{6}-\frac{9}{6}\\ &= \frac{280}{6}\\ &= \frac{140}{3}\ \text{u.a.}\end{aligned}$$

2 | Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

a. Définition

Nous allons maintenant définir l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle, donc dans le cas général, à l'aide des primitives de cette fonction.

Définition

Intégrale d'une fonction continue :

Si f est une fonction continue sur l'intervalle I, si F est une primitive de f sur I et si a et b sont deux réels quelconques de I, alors on appelle intégrale de f entre a et b la différence $F(b)-F(a)$.

→ Cette intégrale est toujours notée :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

b. Propriétés

Donnons quelques propriétés, qui nous permettront de calculer de nombreuses intégrales.

Propriété

Soit f et g une fonction continue sur un intervalle I, a, b et c des réels quelconques de I et k un réel.

- On a les propriétés suivantes :

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\text{Linéarité : } \int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

- **Relation de Chasles**

Pour tous réels a, b et c tels que $a \leq c \leq b$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

- **Positivité et ordre de l'intégrale**

a et b sont maintenant deux réels de I tels que $a < b$.

→ Si $f(x) \geq 0$ pour tout x de $[a\ ;\ b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

→ Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout x de $[a\ ;\ b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

c. Exemple

Regardons comment appliquer ces propriétés dans le calcul d'une intégrale.

Exemple

Nous cherchons à calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}\mathrm{d}x$$
$$J = \int_0^1 \frac{2}{\mathrm{e}^x + 2}\mathrm{d}x$$

Attention

On constate que l'on ne va pas pouvoir directement calculer l'intégrale J, puisqu'il est impossible de calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{e^x + 2}$ avec les formules classiques.

→ Nous allons donc calculer I, puis $I + J$, pour en déduire J.

1 Calculons l'intégrale I.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}$$

f est de la forme $\frac{u'}{u}$, où $u(x) = \mathrm{e}^x + 2 > 0$, donc une primitive F de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ sera de la forme $\ln(u)$:

$$F(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 2)$$

→ Nous pouvons ainsi calculer I :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}\mathrm{d}x \\ &= F(1) - F(0) \\ &= \ln(\mathrm{e}^1 + 2) - \ln(\mathrm{e}^0 + 2) \\ &= \ln(\mathrm{e} + 2) - \ln(3) \ \textcolor{gray}{[\text{car } \mathrm{e}^0 = 1]} \end{aligned}$$

2 Calculons l'intégrale $I + J$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{2}{\mathrm{e}^x + 2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2} + \frac{2}{\mathrm{e}^x + 2}\right)\mathrm{d}x \\ &\quad \textcolor{gray}{[\text{d'après la propriété de linéarité}]} \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x + 2}{\mathrm{e}^x + 2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1\mathrm{d}x \\ &= G(1) - G(0) \ \textcolor{gray}{[\text{en prenant } G(x) = x]} \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

→ On a donc : $I + J = 1$.

3 Trouvons maintenant la valeur de l'intégrale J.

On a $I + J = 1$.

→ On en déduit la valeur de l'intégrale J :

$$
\begin{aligned}
J &= 1 - I \\
&= 1 - \left(\ln(\mathrm{e}+2) - \ln(3)\right) \\
&= 1 - \ln\left(\frac{\mathrm{e}+2}{3}\right) \quad \text{[car } \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\tfrac{a}{b}\right)\text{]} \\
&= 1 + \ln\left(\frac{3}{\mathrm{e}+2}\right) \quad \text{[car } -\ln(a) = \ln\left(\tfrac{1}{a}\right)\text{]}
\end{aligned}
$$

3 | Applications du calcul intégral

Nous savons maintenant comment calculer une intégrale.
Regardons deux exemples d'application des intégrales, pour mieux comprendre à quoi elles servent, notamment pour le calcul d'une aire.

a. Calculer une aire à l'aide d'une intégrale

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de I tels que $a < b$.

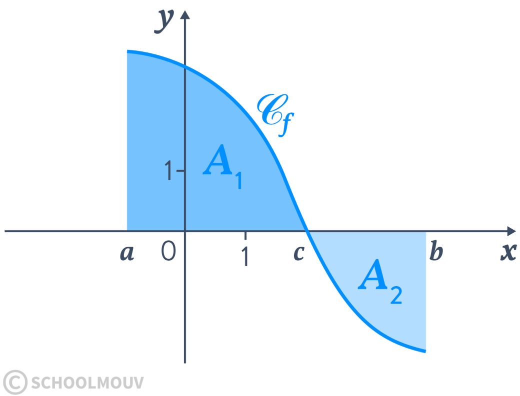
Soit $\mathscr{E}$ la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

- Si $f \geq 0$ sur I, alors :

$$\text{Aire}(\mathscr{E}) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

- Si $f \leq 0$, alors :

$$\text{Aire}(\mathscr{E}) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$



Sur le graphique, on peut constater que sur l'intervalle $[a\ ;\ c]$, la fonction f est positive (sa courbe est au-dessus de l'axe des abscisses).

→ L'aire A_1 sera donc égale à :

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

En revanche, sur l'intervalle $[c\ ;\ b]$, la fonction f est négative (sa courbe est en dessous de l'axe des abscisses).

→ L'aire A_2 sera donc égale à :

$$-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Attention

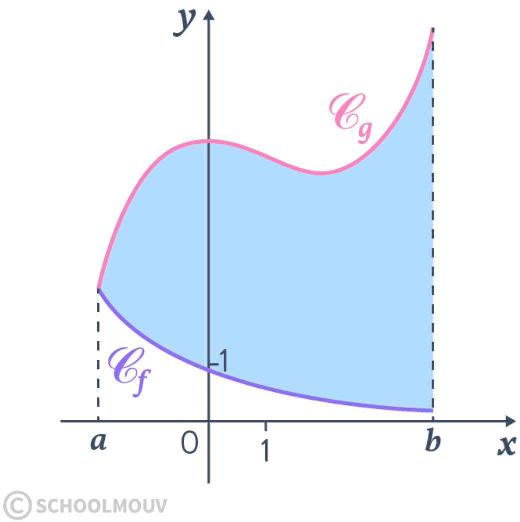
On retiendra qu'une intégrale peut être positive ou négative, mais qu'une **aire**, elle, **est toujours positive**.

Propriété

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I telles que $f(x) \leq g(x)$ sur I, et si a et b sont deux réels de I tels que $a \leq b$.

→ Alors l'aire de la surface comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\mathrm{d}x$$



b. Valeur moyenne d'une fonction

Définition

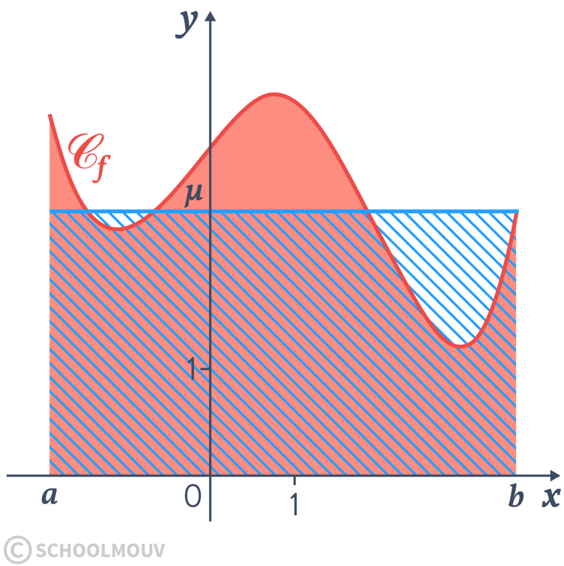
Valeur moyenne d'une fonction :

Si f est une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$, avec $a \neq b$ et $a < b$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Étudions un exemple pour mieux comprendre cette nouvelle notion.

Exemple



Ici, la fonction f est positive sur $[a\ ;\ b]$, on interprète la valeur moyenne de la manière suivante : l'aire « sous la courbe » de f est égale à l'aire « sous la courbe » de la fonction constante égale à μ.

→ Sur notre schéma, l'aire rouge est égale à l'aire hachurée en bleu.

4 | Intégration par parties

De même que la dérivée d'un produit n'est pas égale au produit des dérivées, la primitive d'un produit n'est pas égale au produit des primitives. Nous allons ainsi voir un théorème puissant, qui permet de calculer des intégrales plus complexes que nous n'aurions pas pu calculer sans, car nous ne sommes pas en mesure de trouver simplement une primitive de la fonction à intégrer.
Après l'avoir exprimé et démontré, nous donnerons trois exemples d'application.

a. Théorème

Théorème

Soit f et g deux fonctions continues et dérivables sur $[a\ ;\ b]$, avec $a < b$.
On suppose que les fonctions dérivées de f et g sont continues sur $[a\ ;\ b]$.

→ Alors, on a :

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \left[f(x) \times g(x)\right]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

Démontrons-le.

Démonstration

Soit f et g deux fonctions continues et dérivables sur $[a\ ;\ b]$.
On suppose que les fonctions dérivées de f et g sont continues sur $[a\ ;\ b]$.

1. On a :

$$(f \times g)' = g \times f' + f \times g'$$

→ On en déduit :

$$f \times g' = (f \times g)' - g \times f'$$

2. En intégrant la relation sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \times g'(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b (f \times g)'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x) \times f'(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[f(x) \times g(x)\right]_a^b - \int_a^b g(x) \times f'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

C. On a donc :

$$\boxed{\int_a^b f(x) \times g'(x)\mathrm{d}x = \left[f(x) \times g(x)\right]_a^b - \int_a^b g(x) \times f'(x)\mathrm{d}x}$$

a. Exemples

Exemple

Exemple 1
Calculons à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale :

$$\int_0^2 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$$

Attention

Dans la formule de l'intégration par parties où la fonction à intégrer est un produit de fonctions, on « intègre » une fonction et on dérive l'autre. Il s'agit donc de bien les choisir pour « ne pas tourner en rond » dans les calculs.

→ Ici, on doit choisir de dériver $x \mapsto x$ pour la faire devenir une fonction constante et « intégrer » $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ car cela ne présente pas de difficultés.

1. On pose :

- $f(x) = x$,

→ ce qui donne : $f'(x) = 1$.

- $g'(x) = \mathrm{e}^{2x}$,

→ ce qui donne : $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$.

Les fonctions f et g sont bien dérivables et de fonctions dérivées continues sur $[0\ ;\ 2]$.

2. D'après la formule de l'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x &= \left[f(x)\times g(x)\right]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \int_0^2 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x &= \left[x \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\mathrm{d}x \\ &= 2\times\frac{\mathrm{e}^4}{2} - 0\times\frac{\mathrm{e}^0}{2} - \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_0^2 \\ &= \mathrm{e}^4 - \left(\frac{\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^0}{4}\right) \\ &= \mathrm{e}^4 - \frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3\mathrm{e}^4}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3\mathrm{e}^4+1}{4}\end{aligned}$$

Exemple

Exemple 2

Montrons à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$$

Dans la formule de l'intégration par parties, une fonction est à « intégrer » et une autre à dériver.

→ Ici, on doit choisir d'intégrer $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, car nous connaissons une primitive qui est $x \mapsto -\frac{1}{x}$, et de dériver $x \mapsto \ln(x)$, car nous ne savons pas l'« intégrer ».

1. On pose :

- $f(x) = \ln(x)$,

→ ce qui donne : $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

- $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}$,

→ ce qui donne : $g(x) = -\dfrac{1}{x}$.

Les fonctions f et g sont bien dérivables et de fonctions dérivées continues sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.

2 D'après la formule de l'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x &= [f(x)\times g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} + \frac{\ln(1)}{1} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}} - \left(\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{1}\right) \quad [\text{car } \ln(\mathrm{e}) = 1 \text{ et } \ln(1) = 0] \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} + 1 \\
&= 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

Exemple

Exemple 3

Calculons à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x$$

Astuce

Dans la formule de l'intégration par parties, une fonction est à « intégrer » et une autre à dériver.

→ Lorsqu'on ne voit pas de produit, il faut introduire un 1 devant l'expression pour en avoir un.

→ Ici, on introduit un 1 devant $\ln(x)$. On doit choisir d'intégrer $x \mapsto 1$, car nous connaissons une primitive qui est $x \mapsto x$, et de dériver $x \mapsto \ln(x)$, car nous ne savons pas l'« intégrer ».

1 On pose :

- $f(x) = \ln(x)$,

→ ce qui donne $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

- $g'(x) = 1$,

→ ce qui donne $g(x) = x$.

Les fonctions f et g sont bien dérivables et de fonctions dérivées continues sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.

2 D'après la formule de l'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x &= \big[f(x) \times g(x)\big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}} 1 \times \ln(x)\mathrm{d}x \\
&= \big[x\ln(x)\big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \big(\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - 1 \times \ln(1)\big) - \int_1^{\mathrm{e}} 1\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e} - \big[x\big]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) \\
&= \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

> Conclusion :
>
> Dans ce cours, nous avons commencé par définir l'intégrale de a à b (avec $a < b$), d'une fonction f continue et positive comme étant égale à l'aire (en unité d'aire) du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.
>
> Nous avons ensuite défini cette intégrale lorsque f est de signe quelconque comme étant égale à la différence $F(b) - F(a)$, où la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$.

Puis nous avons vu les propriétés que vérifient cette intégrale et avons défini la valeur moyenne d'une fonction continue f sur $[a\ ;\ b]$.

Enfin, nous avons donné la formule de l'intégration par parties qui permet de calculer des intégrales plus complexes.