La dynamique d'un système électrique capacitif

Cours

Sommaire

I L'intensité d'un courant électrique et le modèle du condensateur

En régime variable, les grandeurs électriques varient avec le temps. L'intensité d'un courant électrique correspond au débit des charges électriques. Un condensateur est un dispositif électrique particulier. Le condensateur possède une tension électrique entre ses deux armatures. La capacité d'un condensateur est liée à la charge électrique portée par ses armatures et à la tension existant entre les armatures.

A L'intensité d'un courant électrique en régime variable

En un point du circuit, l'intensité d'un courant électrique est égale à la dérivée de la charge électrique ayant circulé par rapport au temps.

À RETENIR

Lorsque les grandeurs électriques varient avec le temps, on dit qu'on est en régime variable. Généralement, on utilise alors de minuscules comme symboles des grandeurs électriques : i pour l'intensité, u pour la tension et q pour la charge électrique circulant dans le circuit.

FORMULE

Intensité d'un courant électrique en régime variable

L'intensité d'un courant électrique correspond au débit des charges électriques. En régime variable, elle correspond donc à la dérivée, par rapport au temps, de la charge électrique q :

$$i_{(\text{A})} = \frac{dq_{(\text{C})}}{dt_{(\text{s})}}$$

EXEMPLE

Si en un point du circuit la charge électrique est constante, l'intensité du courant électrique est nulle :

$$i_{(\text{A})} = \frac{dq_{(\text{C})}}{dt_{(\text{s})}} = 0 \text{ A} \text{ si } q = \text{constante}$$

B Définition et représentation d'un condensateur

Un condensateur est un dispositif électrique constitué de deux conducteurs : les armatures. Les armatures sont souvent planes et parallèles. Elles sont séparées par un milieu isolant. Lorsqu'un condensateur est dans un circuit fermé, des charges électriques opposées apparaissent sur ses armatures. Ces charges produisent une tension électrique.

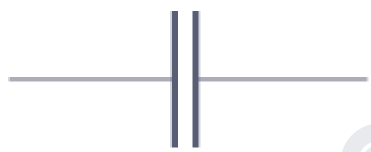
DÉFINITION

Condensateur

Un condensateur est un dipôle électrique constitué de deux conducteurs électriques, les armatures (le plus souvent planes et parallèles) séparées par un milieu isolant.

EXEMPLE

La représentation d'un condensateur est la suivante :



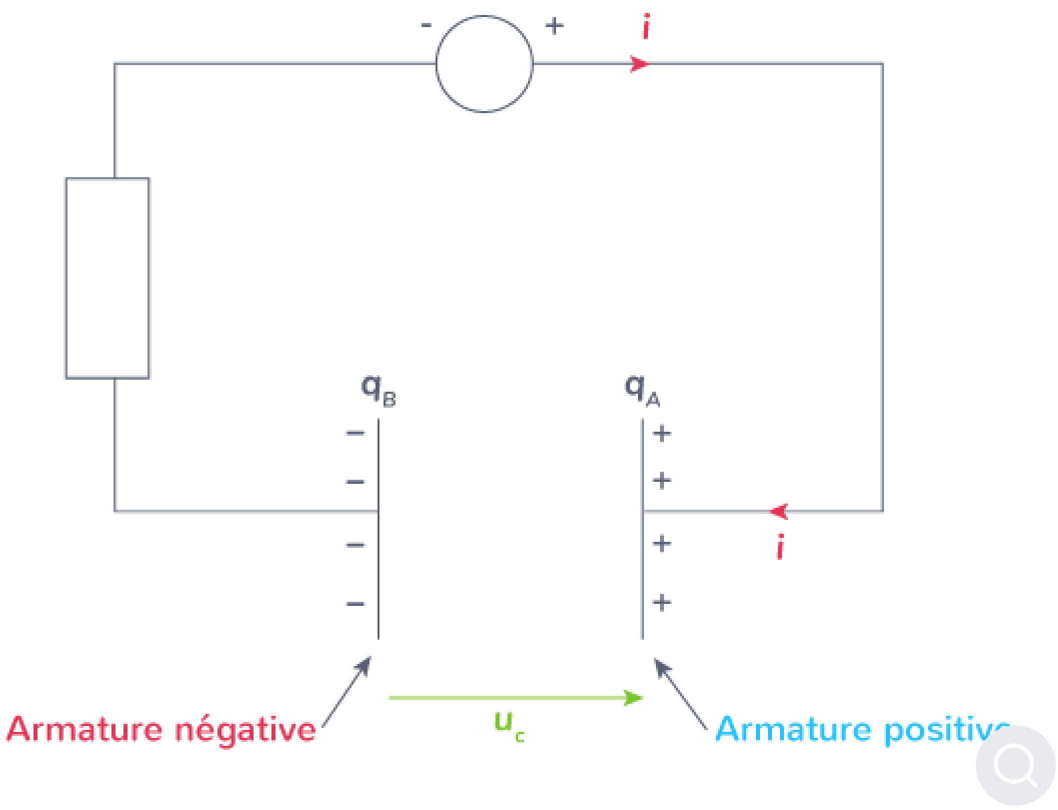
Représentation d'un condensateur

PROPRIÉTÉ

Lorsqu'un condensateur est dans un circuit fermé et relié à un générateur, des charges électriques opposées apparaissent sur ses armatures. Ces charges produisent une tension électrique, orientée dans le sens opposé à celui du courant électrique (ce qui correspond à la convention récepteur), soit de l'armature négative vers l'armature positive. Cette tension s'oppose à celle du générateur et, les armatures étant séparées par un isolant électrique, l'intensité du courant électrique s'annule et le circuit est ouvert.

EXEMPLE

La tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit fermé est comme suit :



Accumulation de charges électriques

C La capacité d'un condensateur

La charge électrique portée par les armatures d'un condensateur est proportionnelle à la tension entre ses bornes. Le coefficient de proportionnalité entre ces deux grandeurs est la capacité du condensateur. Elle dépend de la taille et de la géométrie du condensateur.

FORMULE

Capacité d'un condensateur

La charge électrique q portée par les armatures d'un condensateur est proportionnelle à la tension u_C entre ses bornes :

$$q_{(\text{C})} = C_{(\text{F})} \times u_{C(\text{V})}$$

Le coefficient de proportionnalité entre ces deux grandeurs est la capacité du condensateur, notée C et exprimée en farads (F).

EXEMPLE

La charge électrique accumulée sur les armatures d'un condensateur de capacité $25 \ \mu\text{F}$ et dont la tension entre les bornes est de 6,8 V est :

$q_{(\text{C})} = C_{(\text{F})} \times u_{AB(\text{V})}$

$q = 25 \times 10^{-6} \times 6{,}8$

$q = 1{,}7 \times 10^{-4} \text{ C}$

PROPRIÉTÉ

La capacité C d'un condensateur dépend de sa taille, de sa géométrie et de la nature de l'isolant qui sépare les deux armatures.

EXEMPLE

La capacité d'un condensateur augmente avec la surface des armatures, diminue avec la distance qui les sépare et augmente avec la polarité de l'isolant qui les sépare.

II Le modèle du circuit RC série

Dans un circuit RC série, un condensateur peut subir une charge ou une décharge. La tension entre les armatures est alors la solution d'une équation différentielle linéaire.

A Le circuit RC série

On appelle circuit RC série tout circuit électrique composé d'une résistance et d'un condensateur montés en série. Dans un circuit RC série, le condensateur peut être un récepteur, s'il est en charge, ou un générateur s'il est en décharge.

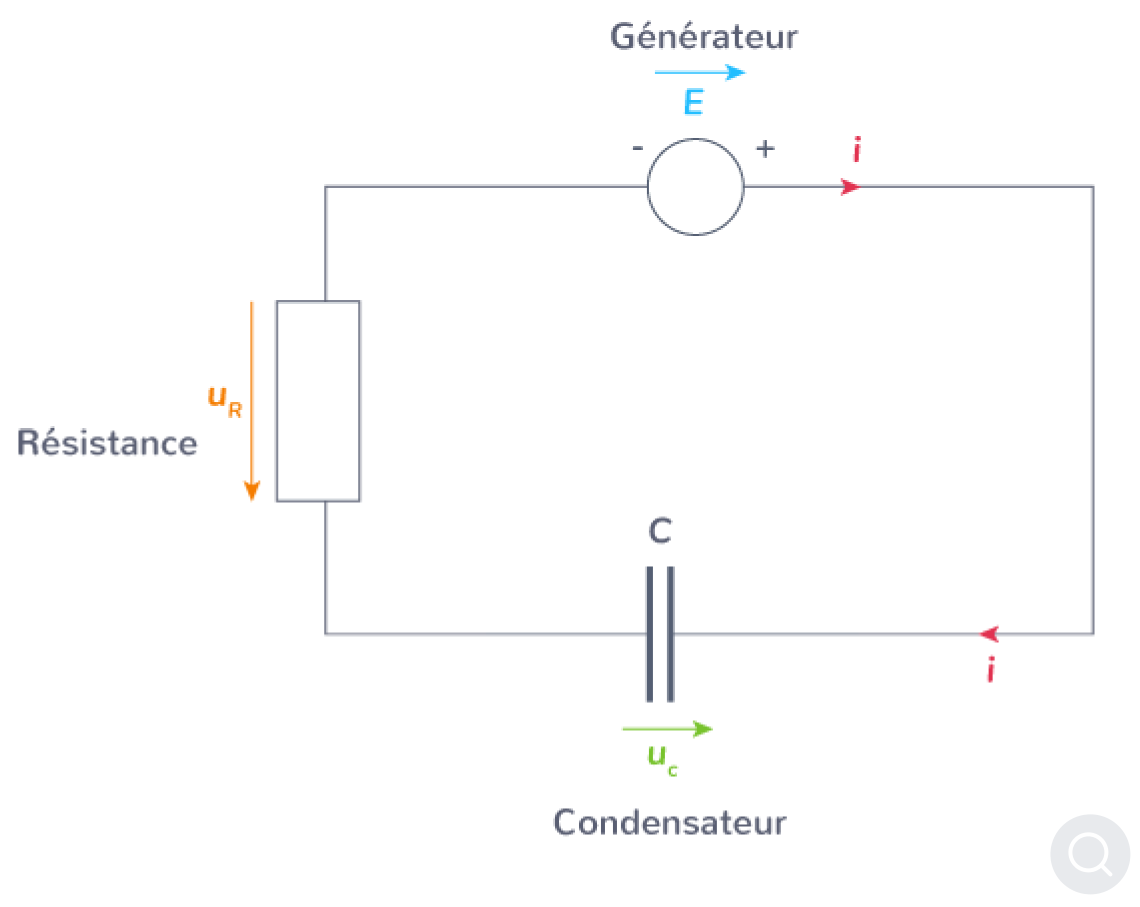
DÉFINITION

Circuit RC série

Un circuit RC série est un circuit électrique composé d'une résistance et d'un condensateur montés en série, avec ou sans générateur électrique.

EXEMPLE

Lors de la charge du condensateur, le circuit RC série comprend un générateur.



Circuit RC série

PROPRIÉTÉ

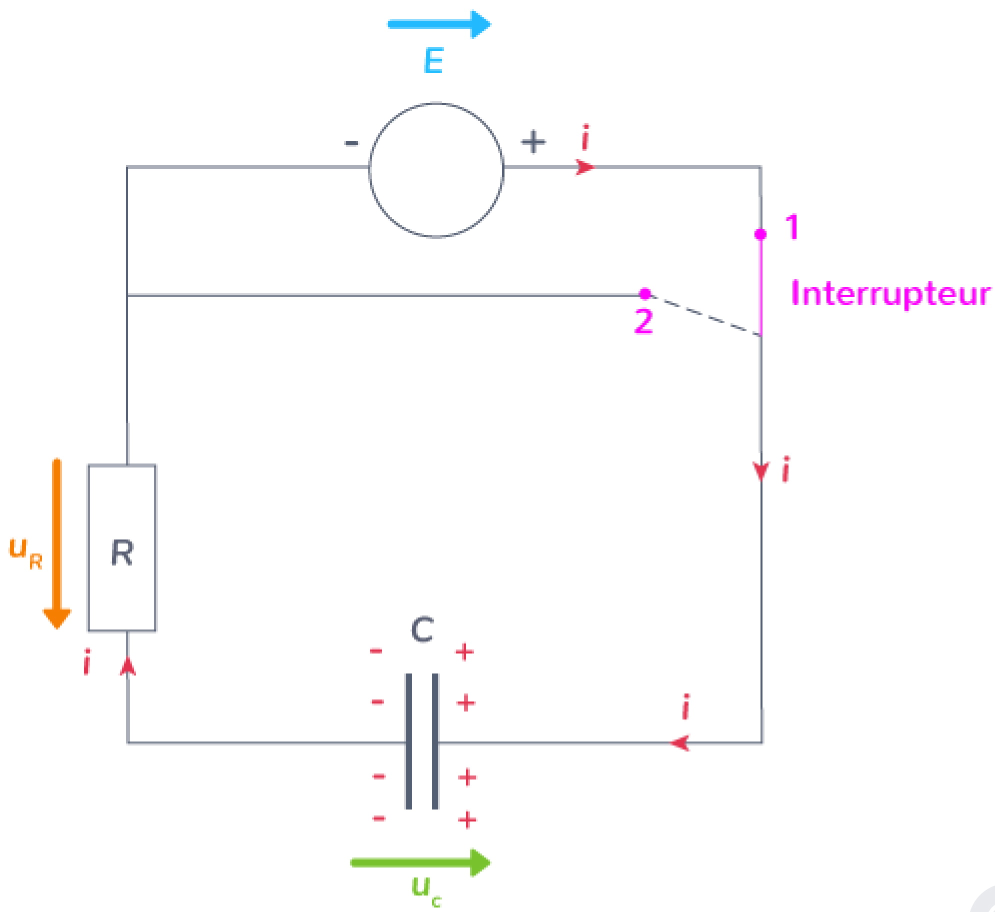
Dans un circuit RC série, on distingue deux états du condensateur :

- Lorsque le condensateur est en charge, il est relié à un générateur électrique et reçoit des charges électriques qui s'accumulent sur ses armatures. Le condensateur joue alors le rôle de récepteur.
- Lorsque le condensateur est en décharge, il n'est pas relié à un générateur électrique et les charges électriques précédemment accumulées sont libérées, produisant une intensité électrique. Le condensateur joue alors le rôle de générateur.

En pratique, on peut utiliser un interrupteur pour passer d'un état à l'autre.

EXEMPLE

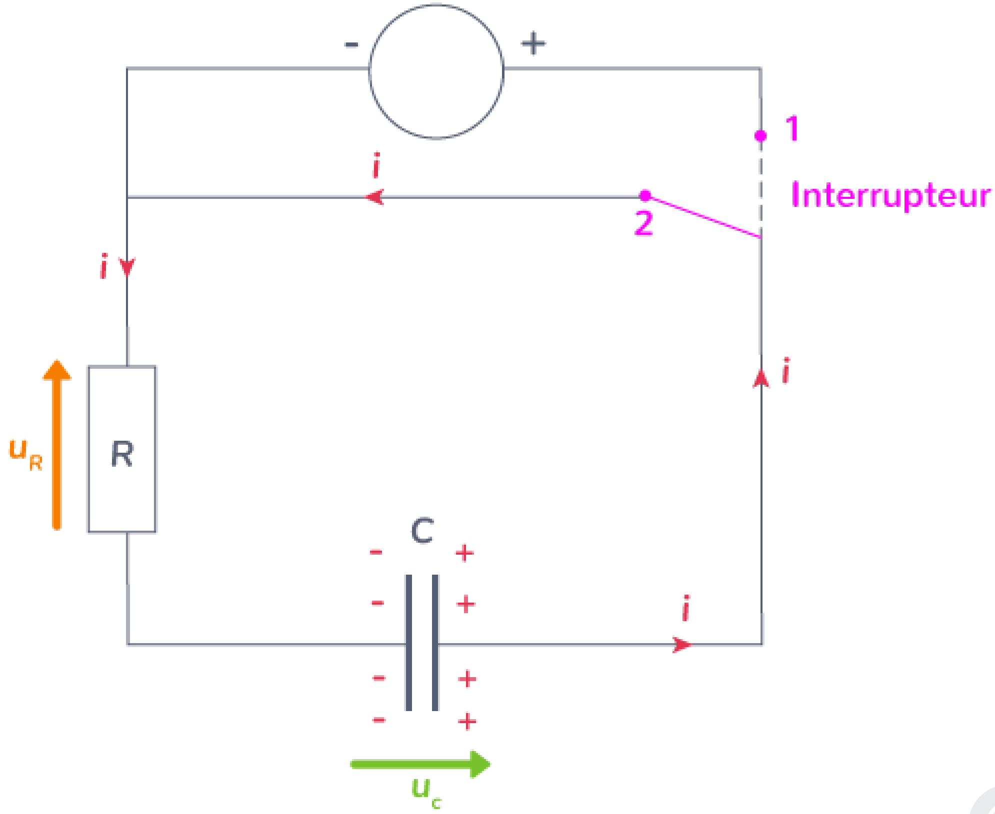
Lorsque le condensateur est en charge, les orientations de la tension et de l'intensité correspondent à la convention récepteur :



Condensateur en charge

EXEMPLE

Lorsque le condensateur est en décharge, les orientations de la tension et de l'intensité correspondent à la convention générateur :



Condensateur en décharge

B L'expression de la tension aux bornes d'un condensateur

Lors de la charge ou de la décharge d'un condensateur, on établit une équation différentielle linéaire dont la solution est la tension aux armatures du condensateur. Cette solution fait apparaître un temps caractéristique.

1. La charge d'un condensateur

Lors de la charge d'un condensateur, celui-ci est alimenté par un générateur. Sa tension vérifie alors une équation différentielle.

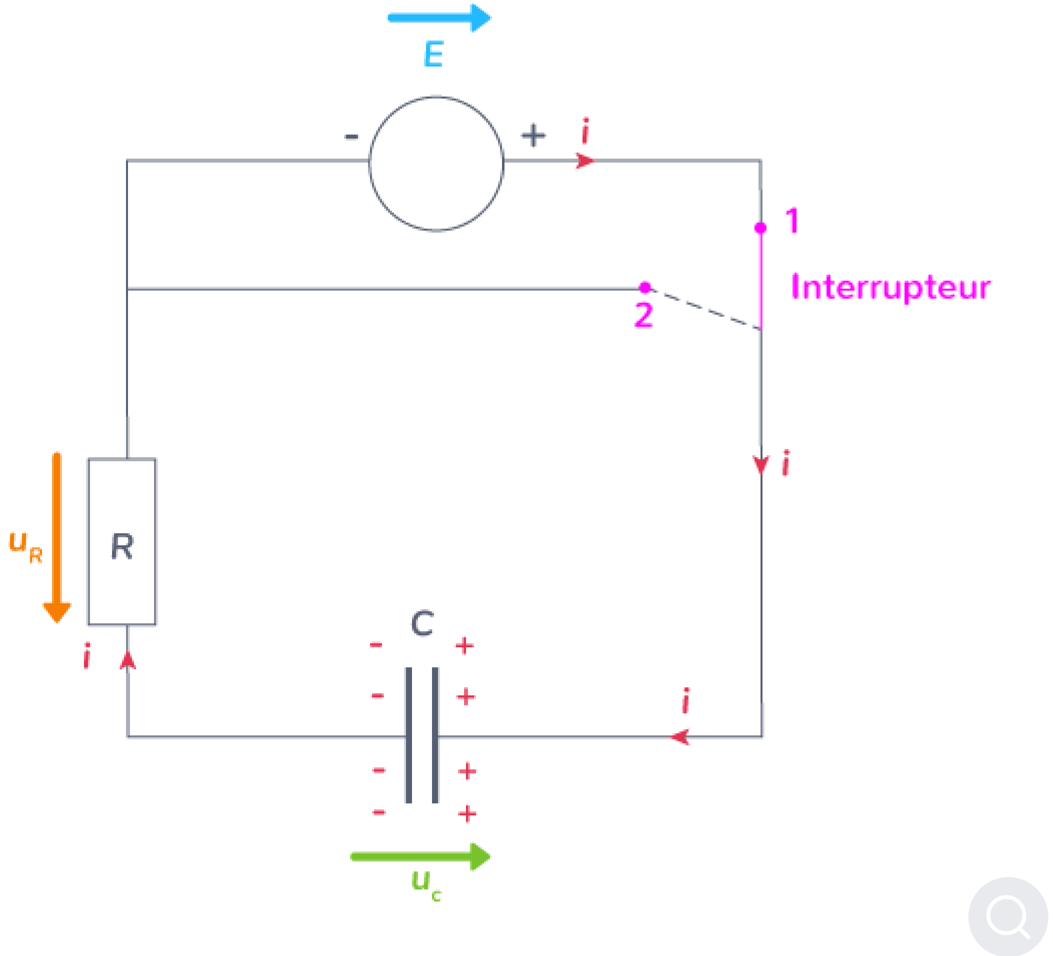
PROPRIÉTÉ

Lorsque, dans un circuit RC série, un condensateur est chargé par un générateur de force électro-motrice E, la tension u_C à ses bornes vérifie l'équation différentielle de premier ordre en u_C suivante :

$$\frac{du_{C(t)}}{dt} + \frac{u_{C(t)}}{R \times C} = \frac{E}{R \times C}$$

DÉMONSTRATION

Soit un circuit RC série dans lequel le condensateur est initialement déchargé. À l'instant $t = 0$, un interrupteur ferme le circuit permettant la charge du condensateur :



Circuit RC série en charge

D'après la loi d'additivité des tensions, on a :

$$u_{\text{résistance}} + u_{\text{condensateur}} = u_{\text{générateur}}$$

Soit avec les notations adoptées :

$$u_{\mathrm{R}} + u_{\mathrm{C}} = E$$

La tension aux bornes de la résistance s'obtient avec la loi d'Ohm :

$$u_R = R \times i$$

D'où :

$$R \times i + u_{\mathrm{C}} = E$$

Or, l'intensité i du courant électrique dans le circuit dépend de la tension du condensateur u_C car $i = \dfrac{dq}{dt}$ et $q = C \times u_C$.

L'expression de i en fonction de u_C est donc :

$$i = \frac{dq}{dt} \Leftrightarrow i = \frac{d(C \times u_C)}{dt} \Leftrightarrow i = \frac{dC}{dt} \times u_C + C \times \frac{du_C}{dt}$$

La capacité C du condensateur étant une constante : $\dfrac{dC}{dt} = 0$ et finalement :

$$i = C \times \frac{du_C}{dt}$$

D'où :

$$R \times i + u_{\mathrm{C}} = E \Leftrightarrow R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_{\mathrm{C}} = E$$

Que l'on peut mettre en forme ainsi :
$$\frac{du_{C(t)}}{dt} + \frac{u_{C(t)}}{R \times C} = \frac{E}{R \times C}$$

FORMULE

Tension aux bornes d'un condensateur en charge

Dans un circuit RC série, en phase de charge, la tension aux bornes du condensateur évolue comme suit :

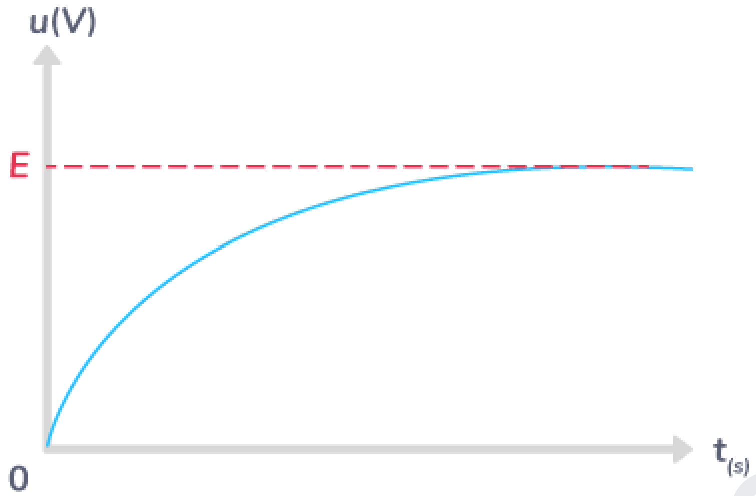
$$u_C(t) = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{R \times C}}\right)$$

Avec :

- E , la force électromotrice du générateur, exprimée en volts (V) ;
- t , la variable temps, exprimée en secondes (s) ;
- R , la valeur de la résistance, exprimée en Ohms (Ω) ;
- C , la capacité du condensateur, exprimée en farads (F).

EXEMPLE

La tension aux bornes d'un condensateur en charge augmente en suivant une courbe exponentielle, jusqu'à atteindre la valeur de la force électromotrice E du générateur.



Évolution de la tension aux bornes d'un condensateur qui se charge

DÉMONSTRATION

La tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle de premier ordre suivante :
$$\frac{du_{C(t)}}{dt} + \frac{u_{C(t)}}{R \times C} = \frac{E}{R \times C}$$

La solution de cette équation différentielle est :
$$u_C(t) = A \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + B$$

Où A et B sont des constantes dépendant du comportement circuit RC.

Ici, on sait que :
À $t = 0 \text{ s}$, $u_C = 0 \text{ V}$

D'où :

$$u_C(0) = A \times e^{-\dfrac{0}{R \times C}} + B = A + B = 0 \text{ V}$$

Donc :
$A = -B$

Pour $t \longmapsto \infty$, $u_C \longmapsto E$

D'où :

$$u_C(t \longmapsto \infty) = A \times e^{-\dfrac{\infty}{R \times C}} + B = A \times 0 + B = E$$

Donc :
$B = E$ et $A = -E$

Finalement :

$$u_C(t) = -E \times e^{-\dfrac{t}{R \times C}} + E$$

Ce qui donne bien :

$$u_C(t) = E \times \left(1 - e^{-\dfrac{t}{R \times C}}\right)$$

2. La décharge d'un condensateur

Lors de la décharge d'un condensateur, les charges électriques accumulées sur les armatures produisent un courant électrique. Sa tension vérifie alors une équation différentielle différente de celle de sa charge.

PROPRIÉTÉ

Lorsque, dans un circuit RC série, un condensateur se décharge en délivrant un courant électrique, la tension u_C à ses bornes vérifie l'équation différentielle de premier ordre en u_C suivante :

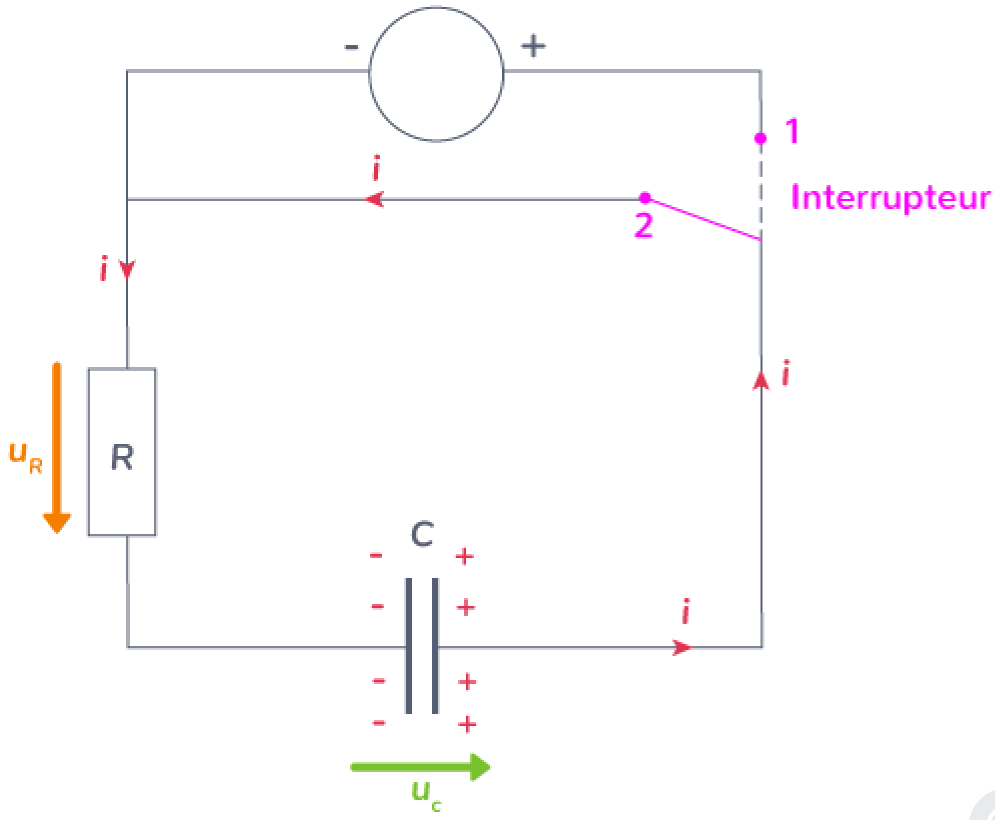
$$\frac{du_{C(t)}}{dt} + \frac{u_{C(t)}}{R \times C} = 0$$

EXEMPLE

Les batteries de téléphone sont constituées de condensateurs qui alimentent le circuit électrique du téléphone lorsque celui-ci est débranché du secteur.

DÉMONSTRATION

Soit un circuit RC série dans lequel le condensateur est initialement chargé. À l'instant $t=0$, un interrupteur ferme le circuit permettant la décharge du condensateur :



Circuit RC série en décharge

D'après la loi d'additivité des tensions, on a :

$$u_{\text{résistance}}+u_{\text{condensateur}}=0$$

Soit, avec les notations adoptées :

$$u_{\mathrm{R}}+u_{\mathrm{C}}=0$$

La tension aux bornes de la résistance s'obtient avec la loi d'Ohm :

$$u_R=R\times i$$

D'où :

$$R\times i+u_{\mathrm{C}}=0$$

Comme précédemment, l'expression de l'intensité circulant dans le circuit est :

$$i=C\times\frac{du_C}{dt}$$

D'où :

$$R\times i+u_{\mathrm{C}}=0\Leftrightarrow R\times C\times\frac{du_C}{dt}+u_{\mathrm{C}}=0$$

Que l'on peut mettre en forme ainsi :

$$\frac{du_{C(t)}}{dt}+\frac{u_{C(t)}}{R\times C}=0$$

REMARQUE

On aurait pu écrire l'équation différentielle vérifiée lors de la décharge du condensateur à partir de celle de sa charge et en considérant l'absence de générateur.

EXEMPLE

L'équation différentielle vérifiée lors de la charge du condensateur par un générateur de force électromotrice E est la suivante :

$$\frac{du_{C(t)}}{dt} + \frac{u_{C(t)}}{R \times C} = \frac{E}{R \times C}$$

Lors de la décharge du condensateur, le générateur est absent, ce qui revient à écrire que sa force électromotrice est nulle :

$$E = 0 \text{ V}$$

On retrouve alors bien l'équation différentielle vérifiée lors de la décharge du condensateur :

$$\frac{du_{C(t)}}{dt} + \frac{u_{C(t)}}{R \times C} = 0$$

FORMULE

Tension aux bornes d'un condensateur en décharge

La tension aux bornes d'un condensateur en décharge dans un circuit RC série est :

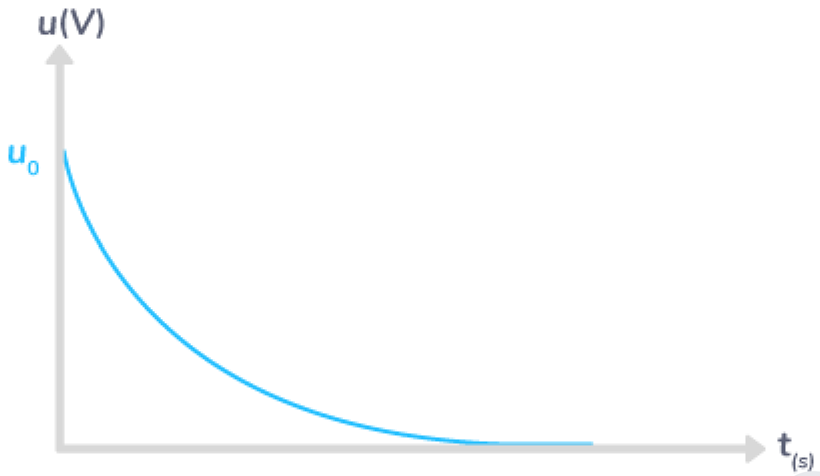
$$u_C(t) = u_0 \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$$

Avec :

- u_0 , tension initiale du condensateur, pour $t = 0 \text{ s}$, exprimée en volts (V) ;
- t , la variable temps, exprimée en secondes (s) ;
- R , la valeur de la résistance, exprimée en Ohms (Ω) ;
- C , la capacité du condensateur, exprimée en farads (F).

EXEMPLE

Lorsqu'un condensateur se décharge, la tension entre ses bornes, initialement égale à u_0 , diminue de manière exponentielle, jusqu'à devenir nulle.



Évolution de la tension aux bornes d'un condensateur qui se décharge

REMARQUE

Si, le condensateur a été précédemment chargé par un générateur de force électromotrice E, sa tension initiale u_0 est égale à E et l'expression de la tension entre ses bornes s'écrit :

$$u_C(t) = E \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$$

DÉMONSTRATION

La tension aux bornes du condensateur en décharge vérifie l'équation différentielle de premier ordre suivante :

$$\frac{du_{C(t)}}{dt} + \frac{u_{C(t)}}{R \times C} = 0$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$u_C(t) = A \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + B$$

Où A et B sont des constantes dépendant du comportement circuit RC.

Ici, on sait que :
À $t = 0 \text{ s}$, $u_C = u_0$

D'où :

$$u_C(0) = A \times e^{-\frac{0}{R \times C}} + B = A + B = u_0$$

Donc :
$$A + B = u_0$$

Pour $t \longmapsto \infty$, $u_C \longmapsto 0 \text{ V}$, d'où :

$$u_C(t \longmapsto \infty) = A \times e^{-\frac{\infty}{R \times C}} + B = A \times 0 + B = 0$$

Donc :
$B = 0$ et $A = u_0$

Finalement :

$$u_C(t) = u_0 \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$$

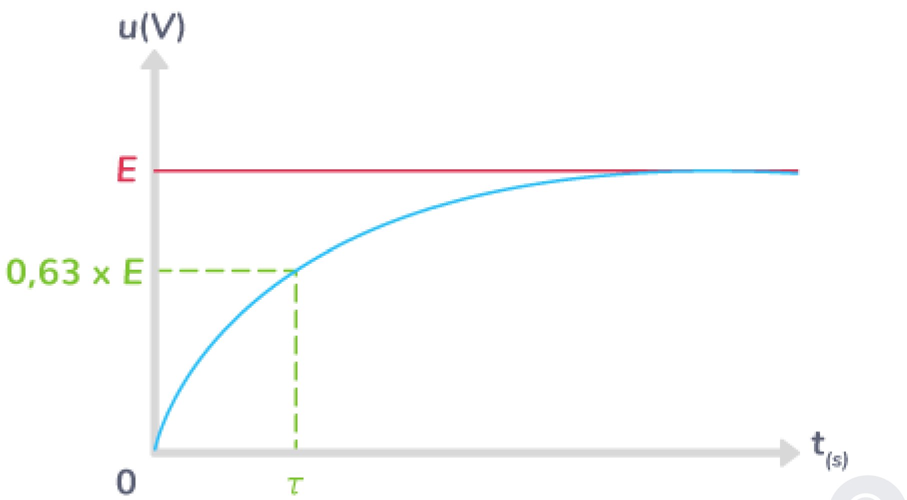
3. Le temps caractéristique d'un circuit RC série

Le produit RC est le temps caractéristique (ou constante de temps) d'un circuit RC. On peut le mesurer graphiquement de deux façons différentes.

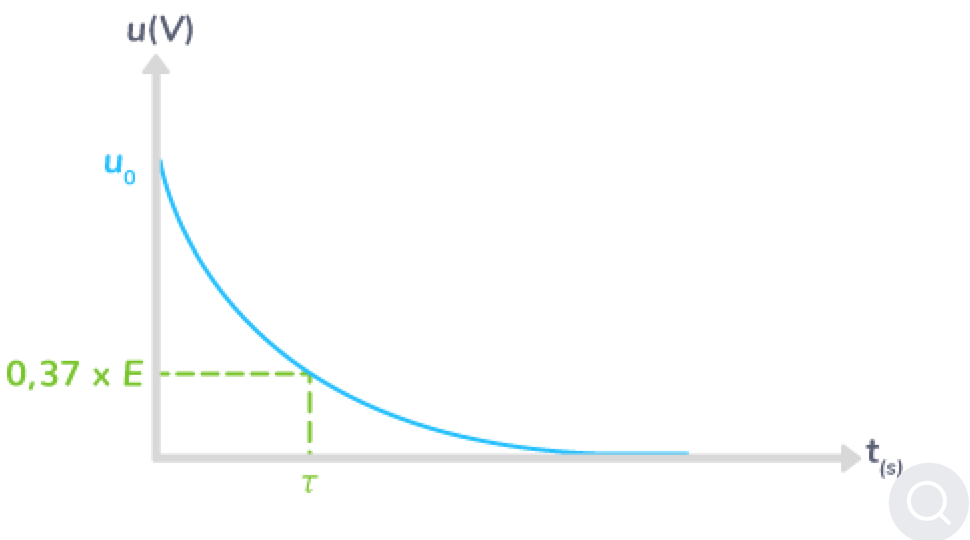
DÉFINITION

Temps caractéristique (ou constante de temps) d'un circuit RC

Le produit $R \times C$ de la résistance et de la capacité d'un circuit RC série est le temps caractéristique (ou constante de temps) de ce circuit. C'est la durée nécessaire pour que la tension d'un condensateur en charge atteigne une valeur égale à 0,63 fois la force électromotrice E du générateur et pour que la tension d'un condensateur en décharge atteigne une valeur égale à 0,37 fois la tension initiale u_0 .



Temps caractéristique et charge d'un condensateur

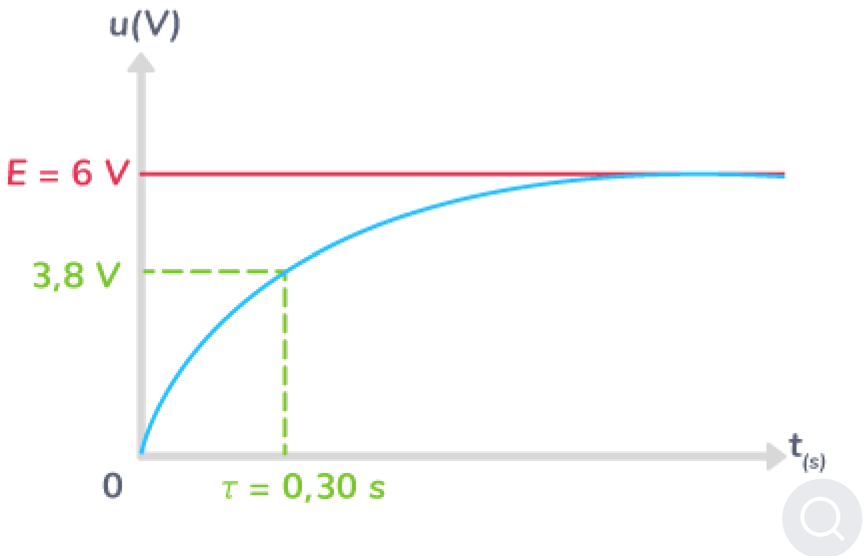


EXEMPLE

Un circuit RC série est composé d'un générateur de force électromotrice 6,0 V, d'une résistance de valeur $12 \text{ k}\Omega$ et d'un condensateur de capacité $25 \ \mu\text{F}$.

Le temps caractéristique de ce circuit est :
$\tau_{\text{ (s)}} = R_{(\Omega)} \times C_{\text{ (F)}}$
$\tau = 12 \times 10^3 \times 25 \times 10^{-6}$
$\tau = 0{,}30 \text{ s}$

Au bout d'une durée de 0,30 s, la tension du condensateur atteint la valeur $0{,}63 \times E = 0{,}63 \times 6{,}0 = 3{,}8 \text{ V}$.



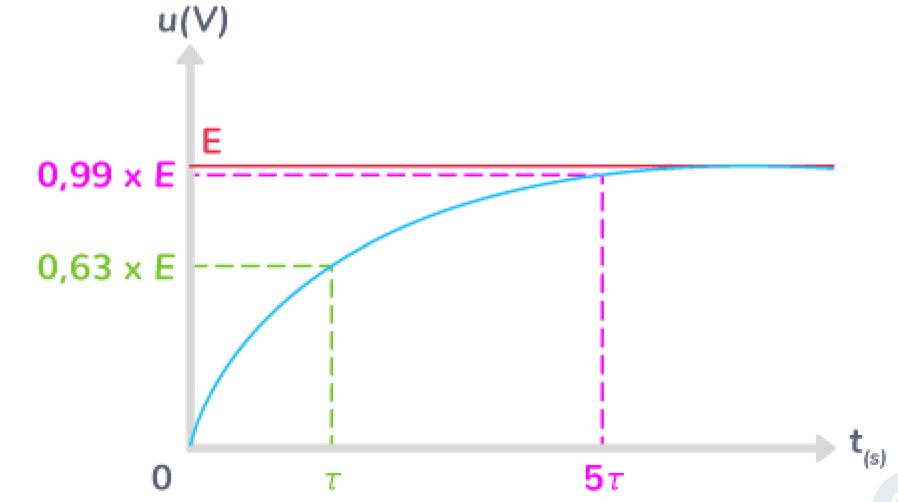
Temps caractéristique d'un circuit RC

Le temps caractéristique d'un circuit RC série permet d'évaluer la durée nécessaire pour que la charge ou la décharge du condensateur soit complète.

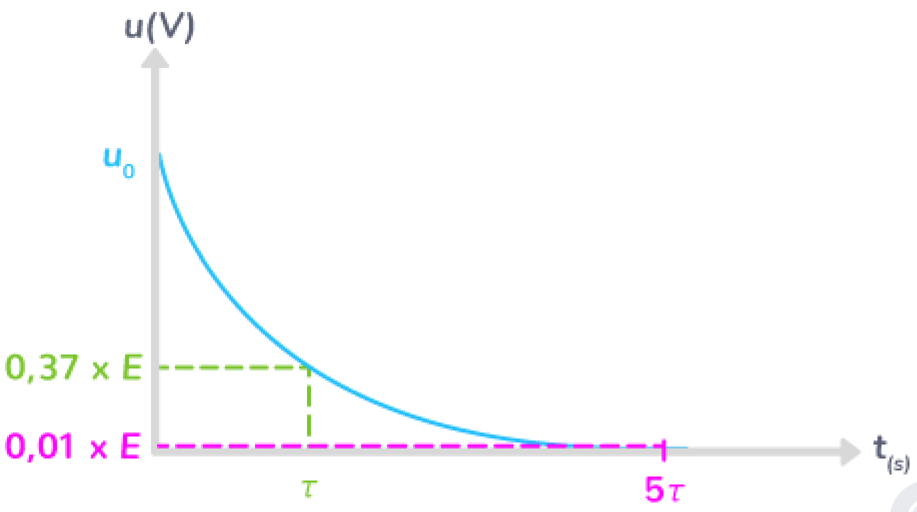
PROPRIÉTÉ

On peut estimer que, dans un circuit RC, un condensateur est complètement chargé, ou déchargé, au bout d'une durée égale à 5 fois le temps caractéristique τ :

- La tension d'un condensateur en charge atteint alors $0{,}99 \times E$.
- La tension d'un condensateur en décharge atteint alors $0{,}01 \times u_0$.



Charge considérée complète

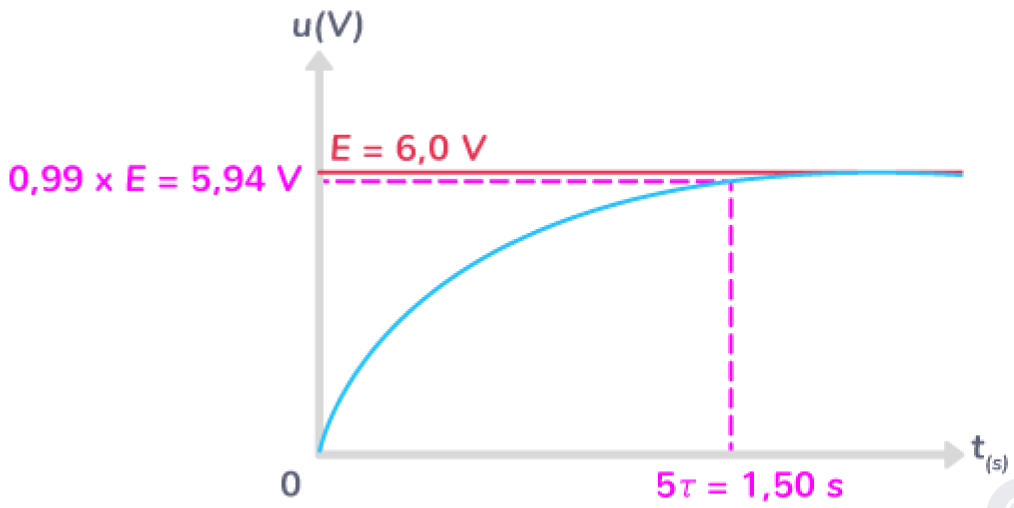


Décharge considérée complète

EXEMPLE

Un condensateur est chargé par un générateur de force électromotrice de 6,0 V dans un circuit RC série, son temps caractéristique est $\tau = 0{,}30 \text{ s}$.

On peut estimer qu'au bout d'une durée égale à 5τ, soit $5 \times 0{,}30 = 1{,}50 \text{ s}$, le condensateur est pratiquement chargé. La tension entre ses bornes atteint alors la valeur $0{,}99 \times E$, soit $0{,}99 \times 6{,}0 = 5{,}94 \text{ V}$.



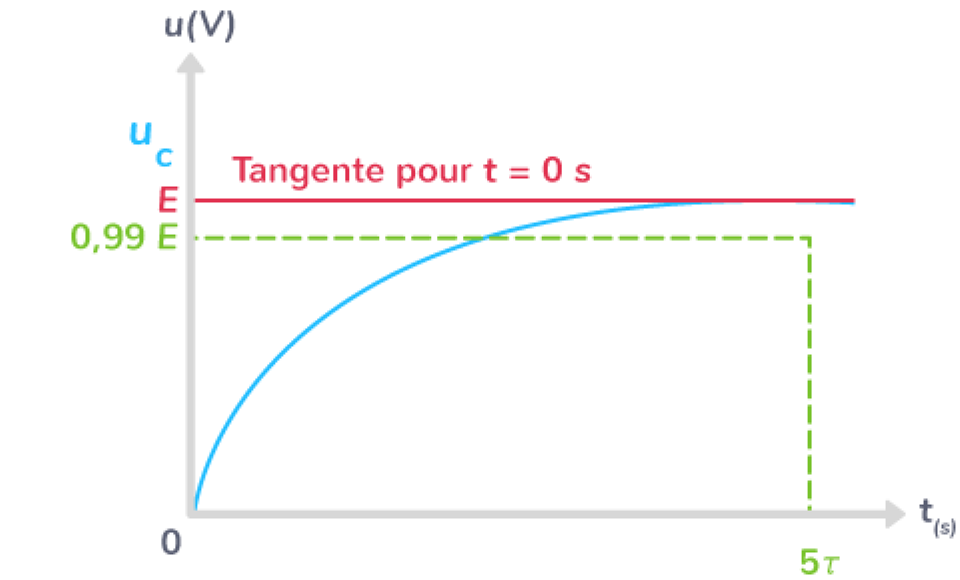
Charge considérée complète du condensateur

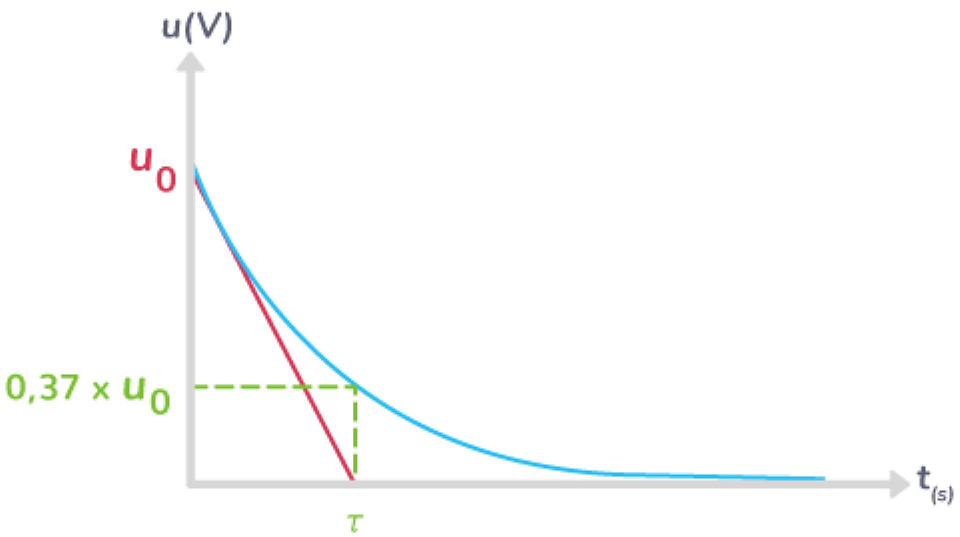
PROPRIÉTÉ

Le temps caractéristique (ou constante de temps) τ d'un circuit RC série peut être déterminé graphiquement de deux façons, que le condensateur soit en charge ou en décharge :

- Premièrement, on peut lire en abscisse la valeur du temps correspondant à la définition du temps caractéristique : lorsque la tension d'un condensateur en charge atteint $0{,}99 \times E$ ou lorsque la tension d'un condensateur en décharge atteint $0{,}01 \times u_0$.
- Deuxièmement, en traçant la tangente à la courbe $u_C = f(t)$ pour $t = 0 \text{ s}$: cette droite coupe la droite d'équation $u_C = E$ pour un condensateur en charge et celle d'équation $u_C = 0$ pour un condensateur en décharge au bout d'une durée égale à τ .

EXEMPLE





Détermination graphique de τ

III Les capteurs capacitifs

Les capteurs capacitifs peuvent être des capteurs de déplacement et tactiles. Ces capteurs utilisent les variations de la capacité d'un condensateur.

A Les capteurs de déplacement

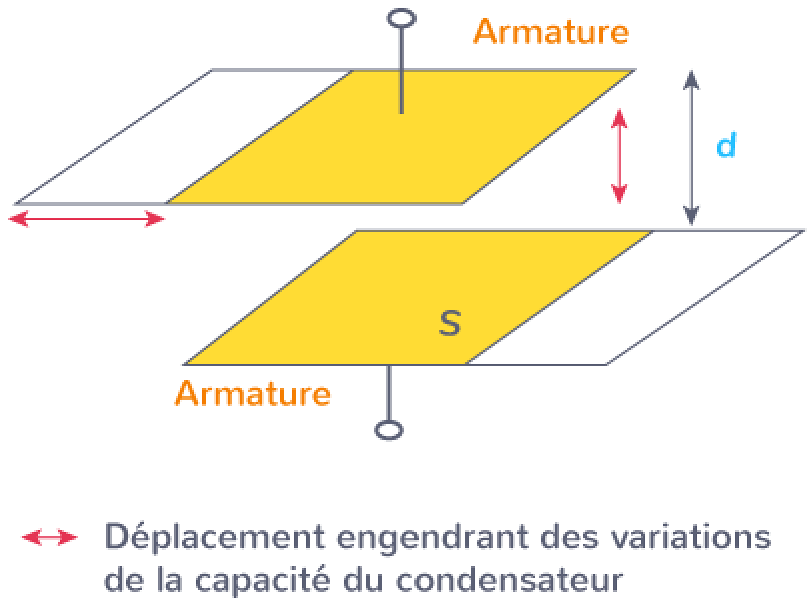
Certains capteurs de déplacement utilisent la variation de la capacité d'un condensateur lorsqu'on introduit un corps entre ses armatures.

PROPRIÉTÉ

Les condensateurs peuvent être utilisés dans des capteurs de déplacement. Ces capteurs utilisent le fait que le déplacement d'une des armatures par rapport à l'autre modifie la capacité du condensateur.

EXEMPLE

Des déplacements très faibles d'une armature par rapport à l'autre, de l'ordre du micromètre, produisent des variations mesurables de la capacité du condensateur.



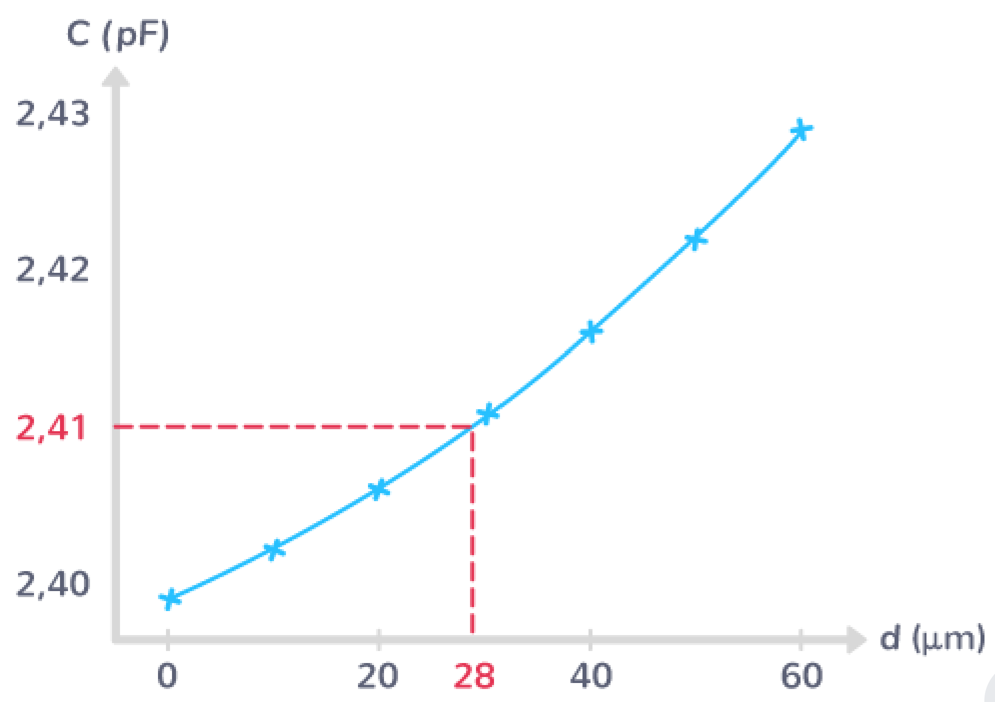
Capteur capacitif de déplacement

PROPRIÉTÉ

Pour déterminer la valeur d'un déplacement à l'aide d'un capteur capacitif, on peut utiliser une courbe d'étalonnage d'équation $C = f(d)$ que l'on obtient en mesurant la capacité C du condensateur avec des déplacements d connus.

EXEMPLE

On obtient la courbe d'étalonnage suivante d'un capteur de déplacement capacitif en mesurant la capacité C du condensateur en fonction de déplacements d connus.



Utilisation d'une courbe d'étalonnage avec un capteur de déplacement capacitif

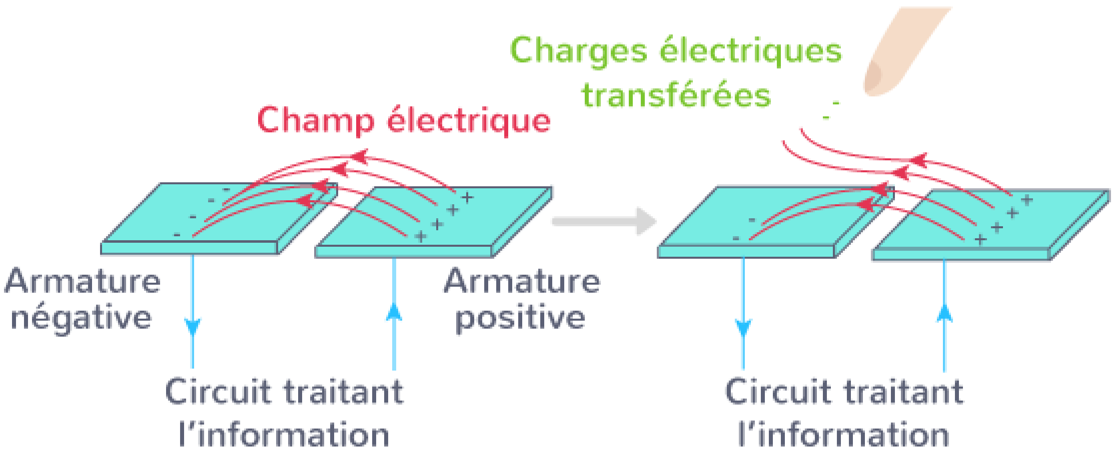
Pour un déplacement inconnu, si l'on mesure une capacité du capteur $C = 2{,}41 \text{ pF}$, la courbe d'étalonnage permet de déterminer la valeur du déplacement : $d = 28\ \mu\text{m}$.

B Les capteurs tactiles

Certains capteurs tactiles mettent à profit la variation de la capacité d'un condensateur, recouvrant un écran, lorsqu'on le touche.

PROPRIÉTÉ

Dans les capteurs tactiles capacitifs, un verre qui se comporte comme un condensateur recouvre un écran. Lorsqu'on touche ce capteur, des charges électriques sont transférées au doigt, conducteur d'électricité. Des systèmes de mesures placés aux quatre coins de l'écran détectent la valeur de la perte de charge ce qui permet de repérer l'emplacement du point de contact.



Perte de charge électrique à la surface d'un capteur capacitif

EXEMPLE

La plupart des Smartphones utilisent des écrans tactiles capacitifs assez onéreux mais qui ont une meilleure transparence que les capteurs tactiles résistifs.