Produit scalaire, orthogonalité et distances dans l'espace

Introduction :

En première, nous avons découvert le produit scalaire de deux vecteurs du plan. Il permet de calculer des longueurs, des angles, de démontrer des configurations géométriques liées à des droites perpendiculaires. Cette notion existe aussi dans l'espace et trouve une utilité dans des problèmes de distance, d'orthogonalité, de lieux géométriques.

Nous allons, dans ce cours, définir le produit scalaire dans l'espace, retrouver ses propriétés et nous en servir pour définir l'orthogonalité dans une première partie.
Dans une deuxième partie, nous l'utiliserons dans un repère particulier de l'espace qui est un repère orthonormé : cela facilitera les preuves d'orthogonalité et les calculs de longueur.
Enfin, nous définirons la distance dans l'espace entre un point et une droite, ou entre un point et un plan dans une troisième partie.

→ Dans tout le cours, nous travaillerons dans l'espace noté $\mathcal{E}$.

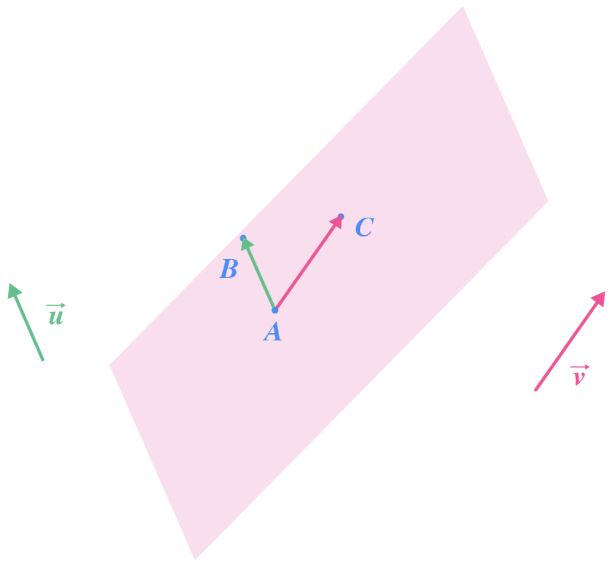
1 Produit scalaire de deux vecteurs de $\mathcal{E}$

a. Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et A un point de $\mathcal{E}$.
On note B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et C le point tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors les points A, B, et C sont alignés.
- Sinon, (AB) et (AC) sont sécantes et déterminent un plan.

→ Dans les deux cas, A, B et C sont contenus dans un plan (P).



Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

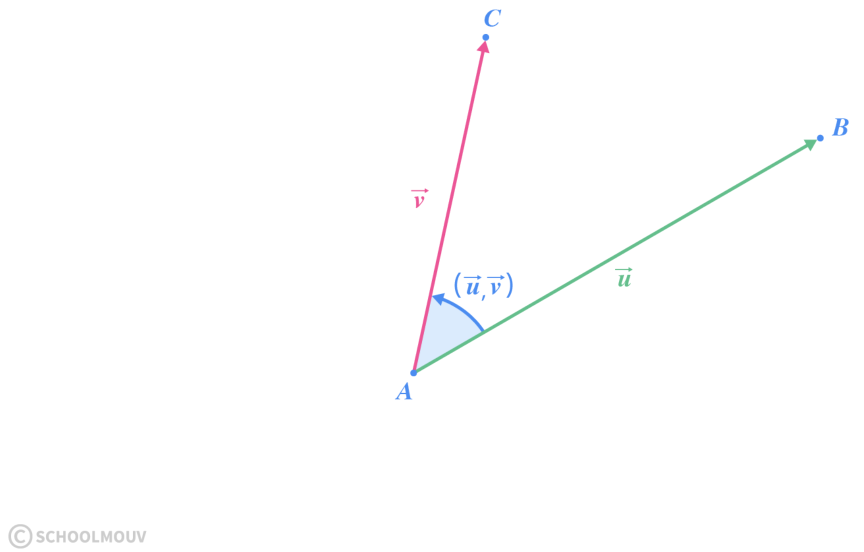
Plaçons-nous dans (P) : nous pouvons exprimer et calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan comme nous l'avons fait en première.

Rappel

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan.

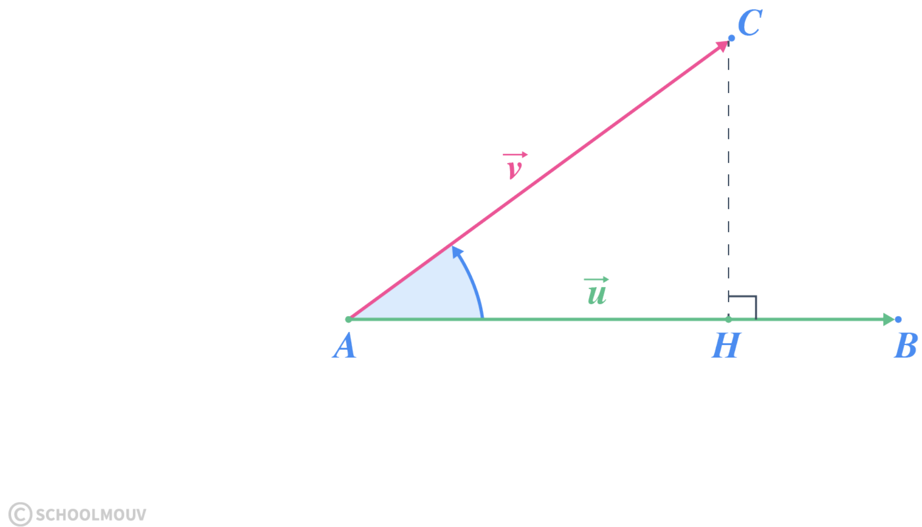
1. Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\ \vec{v})$$



Produit scalaire et angle

2) Nous pouvons aussi calculer le produit scalaire de deux vecteurs en utilisant le **projeté orthogonal** de C sur (AB) :

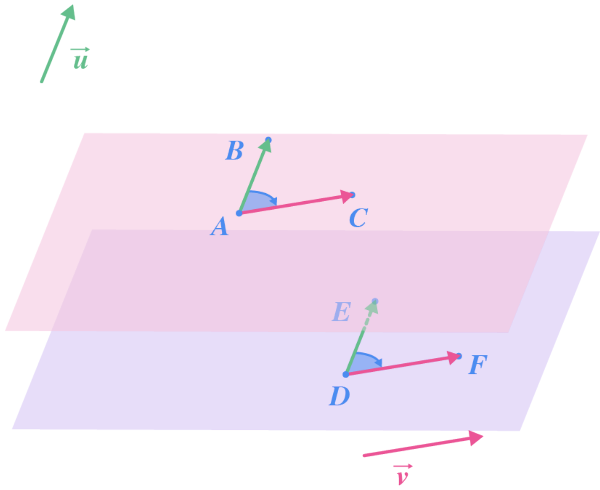


Produit scalaire et projeté orthogonal

Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \begin{cases} AB\times AH \text{ si } H\in[AB) \\ -AB\times AH \text{ si } H\notin[AB)\end{cases}\end{aligned}$$

Revenons dans $\mathcal{E}$, et changeons de représentants pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Produit scalaire

$$\begin{cases}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DF}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\|\vec{u}\| = AB = DE\\ \|\vec{v}\| = AC = DF\\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\right)\end{cases}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\ &= DE\times DF\times\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\right)\\ &= \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}\end{aligned}$$

➜ Nous pouvons ainsi définir le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans $\mathcal{E}$ par cet unique nombre.

Définition

Angle de vecteurs dans l'espace :

Soit deux vecteurs $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

L'angle de vecteurs $(\vec{u},\, \vec{v})$ est égal à l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}\right)$ dans un plan contenant A, B et C.

➜ Cette mesure ne change pas lorsqu'on change les représentants de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

Définition

Produit scalaire de deux vecteurs de $\mathcal{E}$:

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls. A, B et C sont trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre réel :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}\right)\end{aligned}$$

➜ Le choix des représentants ne change pas la valeur du produit scalaire. Comme dans le plan :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\, \vec{v})$$

2. Par convention, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Nous venons de définir le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathcal{E}$ comme le produit scalaire de leurs représentants dans un plan.
Les propriétés vues en première sur le produit scalaire sont donc applicables ; nous allons les reprendre.

b. Propriétés du produit scalaire

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathcal{E}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriété

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

➜ Le produit scalaire est symétrique.

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

➜ Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition.

3. $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}$.

→ Le produit scalaire est associatif.

4. $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.

Nous pouvons démontrer toutes ces propriétés en utilisant la définition du produit scalaire dans le plan.

Démonstration

En particulier intéressons-nous à la dernière : $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{u}&=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\vec{u},\,\vec{u})\\&=\|\vec{u}\|^2\times\cos(0)\\&=\|\vec{u}\|^2\ \text{[car }\cos(0)=1\text{]}\end{aligned}$$

Dans $\mathcal{E}$, nous avons également les mêmes formules de polarisation que dans le plan.

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{E}$:

1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$.
3. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.

Démonstration

Démontrons la première propriété.

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2&=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\ \text{[car }\vec{w}\cdot\vec{w}=\|\vec{w}\|^2\text{]}\\&=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\&\text{[par distributivité]}\\&=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}\\&\text{[par symétrie : }\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\text{]}\end{aligned}$$

Nous utilisons les propriétés du produit scalaire pour calculer des longueurs, des angles ou des aires.

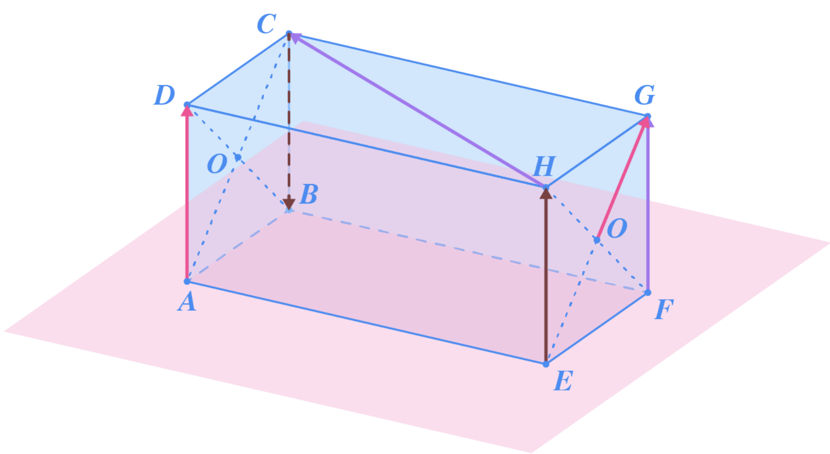
Prenons un exemple.

Exemple

Considérons le pavé droit $ABCDEFGH$ où les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont des carrés de côté 4.

Nous allons calculer les nombres suivants :

1. $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CB}$,
2. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OG}$,
3. l'angle $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OG}\right)$.
4. Nous calculerons, finalement, $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{HC}$.



Pavé droit ABCDEFGH

1. $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CB}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CB} &= -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} \ [\text{car } \overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{CB}] \\ &= -CB^2 \ [\text{car } \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \text{ et } \|\overrightarrow{CB}\| = CB] \\ &= -4^2 \\ &= \boxed{-16} \end{aligned}$$

Avant de continuer l'exemple avec le point 2, expliquons la méthodologie suivante.

À retenir

Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs non colinéaires :

- se placer dans un plan contenant les représentants de ces vecteurs ;
- calculer le produit scalaire dans ce plan, en utilisant les propriétés de calcul et les propriétés de la figure.

Ceci étant précisé, revenons à notre exemple.

Exemple

2. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OG}$

Dans (EFG), $\overrightarrow{EH}$ est un représentant de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{EO}$.

➜ Nous avons ainsi :

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EO}$$

Utilisons la méthode du projeté orthogonal : $EFGH$ est un carré, donc le projeté orthogonal de O sur (EH) est le milieu de $[EH]$.

➜ En conclusion :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OG} &= EH \times \frac{EH}{2} \\ &= \frac{4^2}{2} \\ &= \boxed{8} \end{aligned}$$

3. Nous pouvons également en déduire l'angle $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OG}\right)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OG} &= AD \times OG \times \cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OG}\right) \\ \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OG}\right) &= \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OG}}{AD \times OG} \end{aligned}$$

OG est la longueur d'une demi-diagonale du carré $EFGH$. Donc :

$$\begin{aligned} OG &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times EF \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}\cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OG}\right) &= \frac{8}{4\times 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\text{En conclusion : } \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OG}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}\ \text{rad}}$$

4 $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{HC}$

Pour ce dernier, il est difficile de trouver des représentants de $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HC}$ dans une face du pavé.

➜ Utilisons donc la relation de Chasles pour décomposer le vecteur $\overrightarrow{HC}$.

Nous choisissons d'introduire le point G qui est l'extrémité de $\overrightarrow{FG}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{HC} &= \overrightarrow{FG}\cdot\left(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GC}\right) \\ &= \overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{GC}\end{aligned}$$

Dans (FGH), $(FG)\perp(GH)$.
Nous savons qu'alors $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{GH}=0$.

➜ Nous rappelons que ces vecteurs sont appelés **orthogonaux**.

Dans (FGC), $(FG)\perp(GC)$, donc $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont **orthogonaux** : $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{GC}=0$.

➜ Nous obtenons finalement :

$$\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{HC}=\boxed{0}$$

Dans ce dernier exemple, nous avons utilisé une propriété vue en première : dans un plan, le produit scalaire de deux vecteurs vaut 0 si et seulement si les deux vecteurs sont orthogonaux.

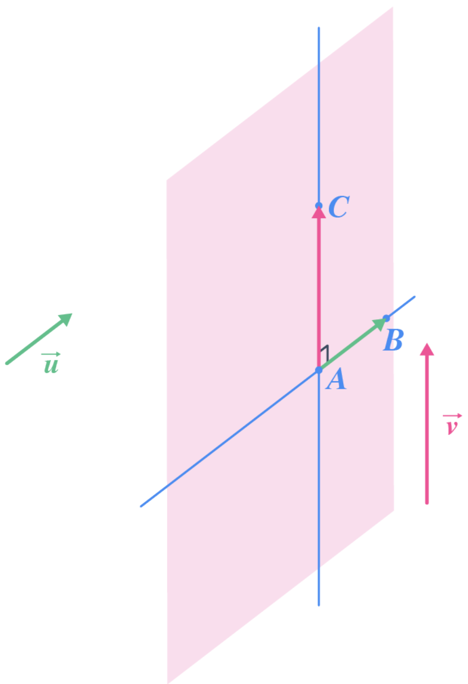
➜ Nous allons étendre cette notion d'orthogonalité aux vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$.

C. Vecteurs orthogonaux et droites orthogonales de $\mathcal{E}$

Définition

Vecteurs orthogonaux de $\mathcal{E}$:

- $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ sont orthogonaux si et seulement si il existe deux droites coplanaires, perpendiculaires et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- $\vec{0}$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{E}$.



Vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que, dans (ABC), $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

➜ Nous en déduisons la propriété suivante.

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition

Droites orthogonales de l'espace :

Deux droites (d) et (d') sont orthogonales lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

À retenir

$(d) = (A\ ;\ \vec{u})$ et $(d') = (B\ ;\ \vec{v})$ sont ortho ⚠ eulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Attention

Contrairement à ce qu'il se passe dans le plan, deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes. Elles peuvent être non coplanaires.
Deux droites orthogonales et coplanaires sont perpendiculaires ; elles se coupent en formant un angle droit.

À retenir

Méthodologie :

Pour montrer que deux droites de $\mathcal{E}$ sont orthogonales, nous privilégierons les vecteurs.

- Trouver un vecteur directeur de chaque droite.
- Calculer le produit scalaire des vecteurs directeurs.
  - → Si ce produit scalaire est nul, alors les deux droites sont orthogonales.
  - → Si ce produit scalaire est différent de 0 alors les deux droites ne sont pas orthogonales.

Nous allons donc utiliser le produit scalaire pour démontrer que deux droites sont orthogonales.

Exemple

Nous reprenons le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessus.

- Nous avons montré que $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$. Ces deux vecteurs sont **orthogonaux**.
  - → Nous en déduisons que (FG) et (HC) sont **orthogonales**. Mais, elles ne sont pas coplanaires.
- Pour trouver deux droites coplanaires qui ont la même direction, il suffit de se placer dans (BCH) :
  - → $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$, donc (BC) et (FG) sont parallèles, et (BC) et (HC) sont orthogonales, sécantes et perpendiculaires en C.

Nous allons maintenant calculer les produits scalaires dans un repère particulier de $\mathcal{E}$: le **repère orthonormé**. Cela rendra l'outil encore plus efficace.

2 Produit scalaire dans un repère orthonormé

a. Bases et repères orthonormés de $\mathcal{E}$

Dans un plan, nous connaissons déjà la définition d'un repère orthonormé : c'est un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ dans lequel les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.

De façon analogue, nous allons définir une base et un repère orthonormés de $\mathcal{E}$.
Dans les définitions suivantes, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs de $\mathcal{E}$, **non nuls et non coplanaires**.

→ Nous savons vu dans un cours précédent qu'ils forment une **base de $\mathcal{E}$**.

Définition

Base orthonormée de $\mathcal{E}$:

$(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}$

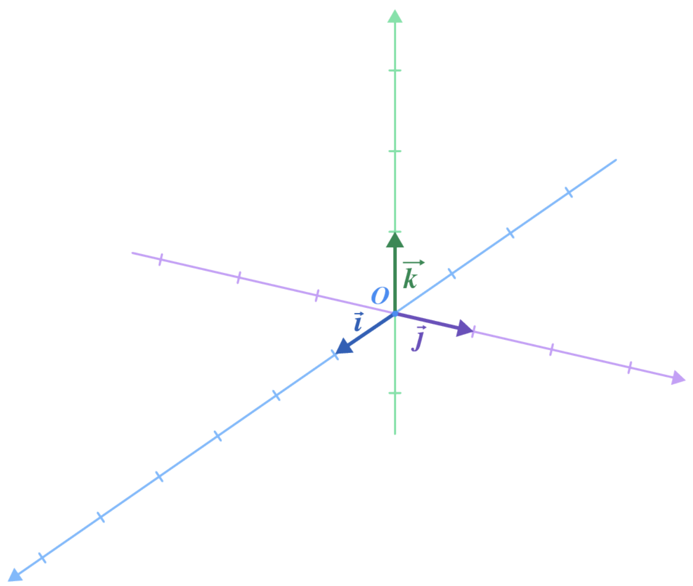
$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{Les vecteurs sont deux à deux orthogonaux} \\ \text{Les trois vecteurs sont non coplanaires} \\ \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$$

Définition

Repère orthonormé de $\mathcal{E}$:

O est un point de l'espace $\mathcal{E}$.
$(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ forme un repère orthonormé de $\mathcal{E}$ lorsque $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}$.



Repère orthonormé de l'espace

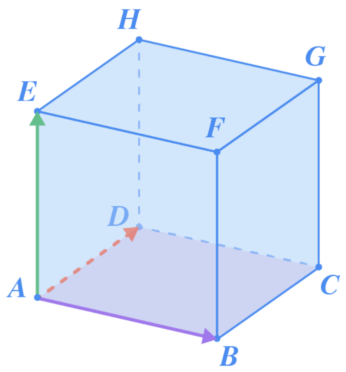
Dans ce repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, nous pouvons toujours repérer les points et les vecteurs comme nous l'avons fait dans un cours précédent.

Rappel

A est un point de l'espace. Le triplet $(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ tel que $\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{\imath} + y_A \cdot \vec{\jmath} + z_A \cdot \vec{k}$ s'appelle les **coordonnées de** A. x_A est l'abscisse, y_A l'ordonnée, z_A la cote.

Prenons l'exemple du cube pour illustrer une base et un repère orthonormé possibles.

Exemple



Cube et repère orthonormé

Le cube $ABCDEFGH$ a des arêtes de longueur 1.
Nous pouvons choisir $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ comme **base orthonormée**. En effet :

- Ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.
- Ces trois vecteurs sont deux à deux orthogonaux :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ car } (AB) \perp (AD) \text{ dans } (ABD)$$

De même, en envisageant les plans (ABE) et (ADE), nous avons respectivement $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$.

- Ces trois vecteurs ont la même norme, égale à 1, puisque leurs représentants sont les arêtes du cube.

En conséquence, $\left(A \,;\, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ forme un **repère orthonormé** de $\mathcal{E}$.

Dans ce repère, trouvons les coordonnées de quelques points.

➜ A est l'origine du repère, donc ses coordonnées sont $(0 \,;\, 0 \,;\, 0)$.

$$\overrightarrow{AC} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AD} + 0 \cdot \overrightarrow{AE} \text{ donc } C\,(1\,;\,1\,;\,0)$$
$$\overrightarrow{AH} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AD} + 1 \cdot \overrightarrow{AE} \text{ donc } H\,(0\,;\,1\,;\,1)$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \text{ [par la relation de Chasles]} \\ &= 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AD} + 1 \cdot \overrightarrow{AE} \text{ donc } G\,(1\,;\,1\,;\,1)\end{aligned}$$

Dans ce même repère, donnons les coordonnées de quelques vecteurs.

$$\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} x_G - x_H \\ y_G - y_H \\ z_G - z_H \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned}3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Astuce

Quand on étudie des systèmes mécaniques en sciences physiques ou en sciences de l'ingénieur, on se place le plus souvent dans un repère orthonormé.

Voyons à présent comment calculer et utiliser le produit scalaire dans un repère orthonormé.

b. Produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée de $\mathcal{E}$

Propriété

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

➜ Le produit scalaire dans un repère orthonormé est égal à la somme des produits des coordonnées des deux vecteurs.

Démontrons cette propriété.

Démonstration

Plaçons-nous dans $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$, un repère orthonormé de $\mathcal{E}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ signifie que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

$\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ signifie que $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$.

→ On en tire :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})\cdot(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k})$$

En développant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} = {} & (xx')\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} + (xy')\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} + (xz')\vec{\imath}\cdot\vec{k} \\ & + (yx')\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath} + (yy')\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} + (yz')\vec{\jmath}\cdot\vec{k} \\ & + (zx')\vec{k}\cdot\vec{\imath} + (zy')\vec{k}\cdot\vec{\jmath} + (zz')\vec{k}\cdot\vec{k}\end{aligned}$$

- Tous les produits scalaires écrits en rouge sont nuls, car les vecteurs de la base $(\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ sont deux à deux orthogonaux.
- Il reste à calculer les produits scalaires écrits en vert.

Or, $\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = \|\vec{\imath}\|^2 = 1$.
Il en est de même pour $\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}$ et $\vec{k}\cdot\vec{k}$.

→ Nous trouvons bien :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Au passage, la démonstration nous fait réaliser que cette formule n'est pas vraie si la base n'est pas orthonormée.

Cette expression du produit scalaire dans un repère orthonormé donne l'occasion d'utiliser le calcul pour prouver l'orthogonalité de deux vecteurs ou de deux droites.

Propriété

Dans un repère orthonormé de $\mathcal{E}$:

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$

À retenir

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow$ Dans une base orthonormée :
$xx' + yy' + zz' = 0$

Exemple

Dans un repère orthonormé de $\mathcal{E}$, considérons les points $A\,(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$, $B\,(0\ ;\ 0\ ;\ 4)$ et $C\,(0\ ;\ 4\ ;\ 2)$.

→ Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$.

- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\overrightarrow{OC}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Nous calculons ainsi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} &= -1 \times 0 + (-1) \times 4 + 2 \times 2 \\ &= -4 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

→ Nous en déduisons que les deux vecteurs sont orthogonaux. (AB) et (OC) sont donc orthogonales.

L'expression du produit scalaire va nous permettre également de calculer les distances entre deux points dans l'espace.

C. Calcul de la distance entre deux points de l'espace $\mathcal{E}$

1 Expression de la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé de $\mathcal{E}$, soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

En nous servant de l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= \vec{u} \cdot \vec{u} \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

➜ Comme la norme d'un vecteur est positive, nous avons la propriété suivante.

Propriété

Dans un repère orthonormé, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

La norme du vecteur $\vec{u}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2 Distance entre deux points A et B dans un repère orthonormé de $\mathcal{E}$

Soit $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ deux points de $\mathcal{E}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} &= AB^2 \\ &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \end{aligned}$$

➜ Nous obtenons ainsi la propriété suivante.

Propriété

$A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ sont deux points de $\mathcal{E}$, muni d'un repère orthonormé.

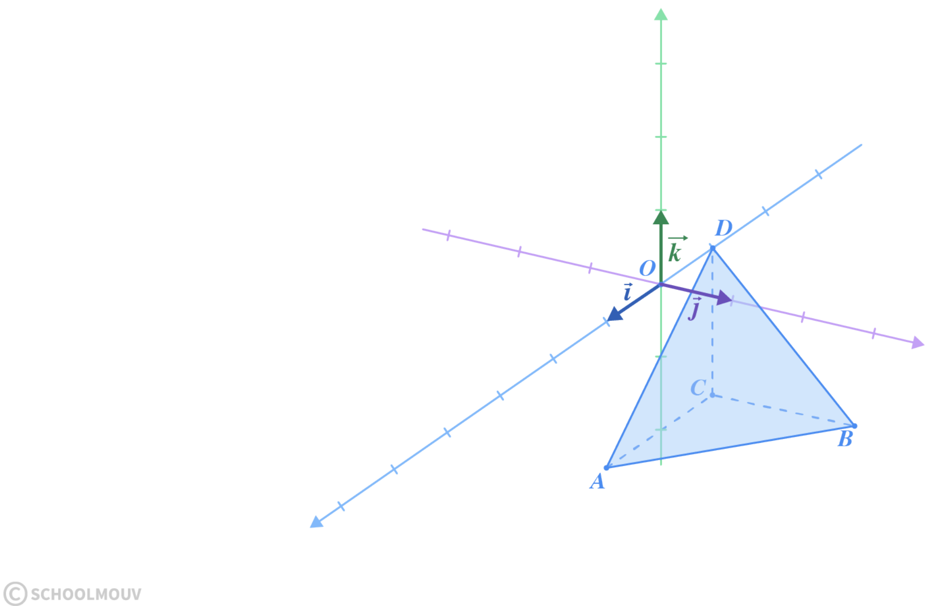
La distance entre deux points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Nous allons illustrer l'utilisation du produit scalaire et des formules établies ci-dessus.

Exemple

L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.



Tétraèdre ABCD dans un repère orthonormé

$A\,(1\ ;\ 0\ ;\ -2)$, $B\,(-1\ ;\ 2\ ;\ -2)$, $C\,(-1\ ;\ 0\ ;\ -2)$ et $D\,(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ forment le tétraèdre $ABCD$.

➜ Démontrons que ABD est équilatéral et calculons son aire.

Dans ce but, calculons d'abord les coordonnées, puis les normes de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } AB &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \\ z_D - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } AD &= \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Enfin, $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \\ z_D - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } BD &= \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Nous trouvons que $AB = AD = BD = 2\sqrt{2}$.

➜ ABD est bien un triangle équilatéral.

Pour calculer son aire $\mathcal{A}$, nous allons utiliser la formule d'aire vue en seconde :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin(\widehat{DAB}) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(2\sqrt{2}\right)^2 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{[}ABD \text{ est équilatéral, donc } \widehat{DAB} = \tfrac{\pi}{3}\text{]} \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Nous venons d'étudier comment calculer la distance entre deux points de $\mathcal{E}$ dans un repère orthonormé.

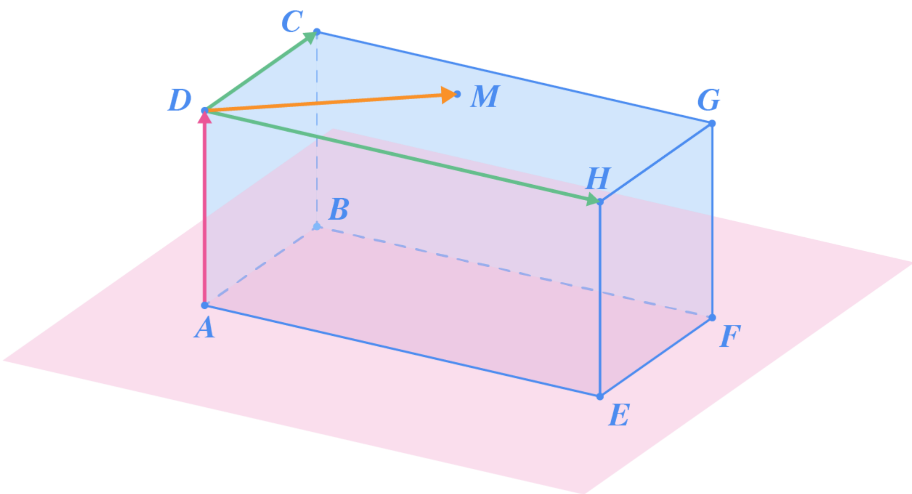
Nous allons nous intéresser maintenant à la définition et au calcul de la distance entre un point et une droite, puis entre un point et un plan.

3 Distance d'un point à une droite, distance d'un point à un plan

a. Vecteur normal à un plan

Reprenons le pavé droit $ABCDEFGH$ que nous avons vu plus haut.

Nous avons : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DH} = 0$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$.



Pavé droit ABCDEFGH

Munissons le plan (HDC) du repère $\left(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}\right)$.

Soit $M \in (HDC)$, il existe deux réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{DM} = a \cdot \overrightarrow{DH} + b \cdot \overrightarrow{DC}$$

Calculons le produit scalaire entre $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DM}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{AD} \cdot \left(a \cdot \overrightarrow{DH} + b \cdot \overrightarrow{DC}\right) \\ &= a \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DH} + b \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{DM}$ représenté dans (HDC) : $\overrightarrow{AD}$ est appelé **vecteur normal au plan** (HDC).

➜ Nous remarquons que tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AD}$ sera aussi normal à (HDC).

Allons plus loin, et étudions ce que nous pouvons déduire de la position relative de (AD) et de (HDC).
(AD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AD}$.
Puisque $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{DM}$, cela signifie que (AD) est orthogonale à toute droite de (HDM).
(AD) est donc orthogonale à (CH), (DH) et (GD) par exemple.

→ On dit alors qu'elle est **orthogonale au plan**.

En nous appuyant sur cet exemple, nous pouvons écrire les définitions suivantes.

Définition

Vecteur normal à un plan :

On considère un plan (P) et un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$.
$\vec{n}$ est un **vecteur normal de** (P) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à une base de (P).

À retenir

$\vec{n} \neq \vec{0}$ est normal à $(P) = (A\ ;\ \vec{v},\ \vec{w})$
$\Leftrightarrow$
$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{w} = 0$

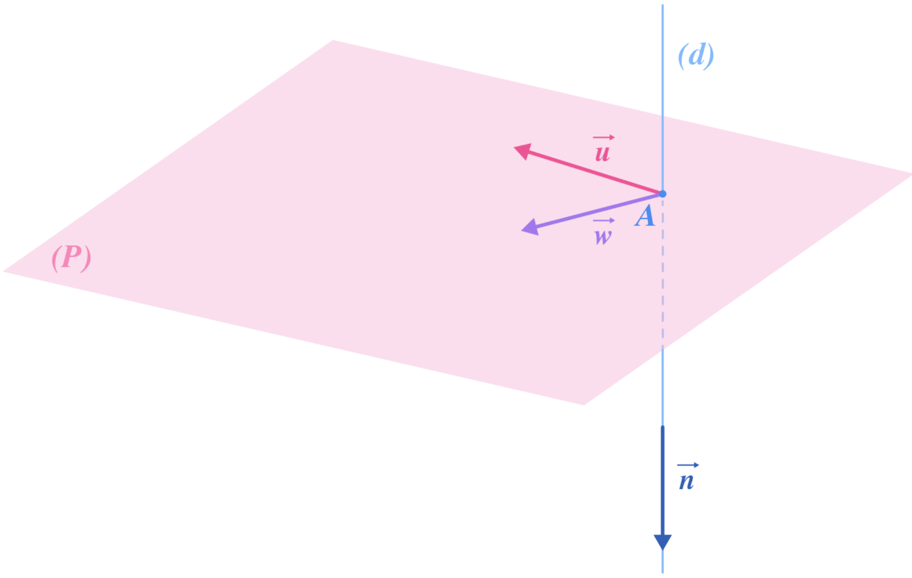
Astuce

En sciences physiques, quand on étudie les forces qui s'appliquent sur un système, on parle de la réaction normale du support. Cela s'explique parce que cette force est représentée par un vecteur dont la direction est orthogonale au support.

Définition

Droite orthogonale à un plan (P) :

(P) est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et (d) une droite de $\mathcal{E}$.
(d) est dite orthogonale à (P) si $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d).



Droite orthogonale à un plan

Nous admettons les propriétés suivantes.

Propriété

Soit $\vec{n} \neq \vec{0}$ et A un point de $\mathcal{E}$.
Il existe un unique plan passant par A et ayant $\vec{n}$ comme vecteur normal.

➜ Ce plan est appelé le **plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$**.

Exemple

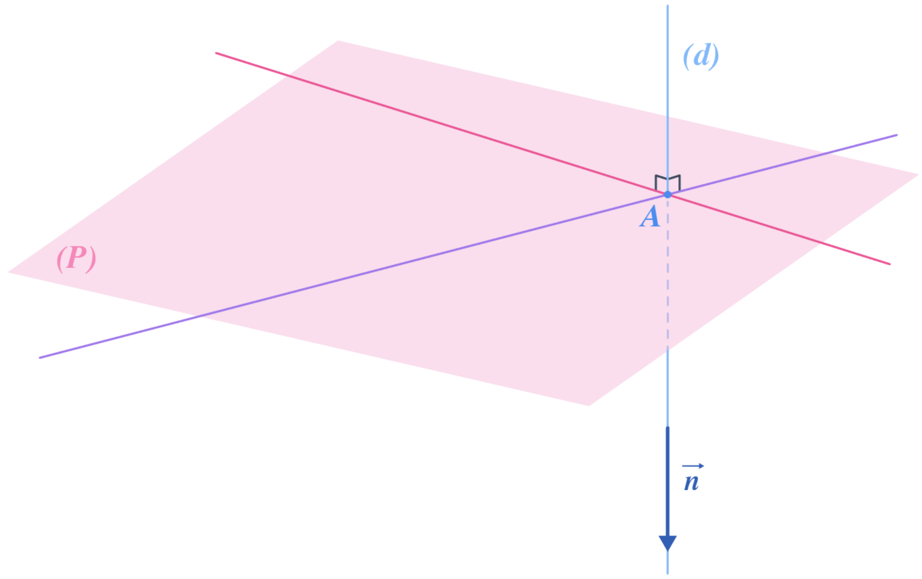
Observons de nouveau le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessus.

- Le plan passant par D et de vecteur normal $\overrightarrow{AD}$ est (DGH).
- Le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AD}$ est (ABE).
- Le plan passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{DH}$ est (ABD).

Propriété

- Si (d) est orthogonale à (P), alors elle est orthogonale à toutes les droites de (P).

- (d) est orthogonale à (P) si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de (P).



Droite orthogonale à un plan et droites sécantes du plan

À retenir

Méthodologie :

Pour montrer qu'une droite (d) est orthogonale à un plan (P), nous avons vu deux possibilités.

1. Nous pouvons montrer que (d) est orthogonale à deux droites sécantes de (P).
2. Ou nous pouvons montrer qu'un vecteur directeur de (d) est normal à (P).

Dans ces deux cas, il s'agit de montrer l'orthogonalité du vecteur directeur de la droite avec deux vecteurs dont les représentants sont dans le plan. Nous utiliserons donc le produit scalaire.

Nous allons maintenant définir la distance d'un point de $\mathcal{E}$ à une droite.

b. Distance d'un point à une droite

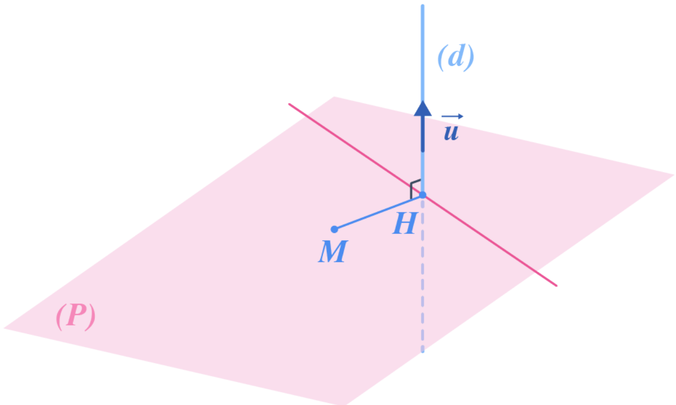
Pour définir la distance d'un point à une droite, nous avons d'abord besoin définir ce qu'est précisément le projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Définition

Projeté orthogonal d'un point sur une droite :

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point de $\mathcal{E}$.
Le projeté orthogonal de M sur (d) est le point d'intersection de (d) avec le plan passant par M et normal à $\vec{u}$.

H est le projeté orthogonal de M sur $(d) = (A\ ;\ \vec{u})$.



Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Propriété

Soit M un point et (d) une droite de $\mathcal{E}$.
Soit H le projeté orthogonal de M sur (d).
La longueur MH est la plus courte distance entre M et un point de (d).

Définition

Distance d'un point à une droite :

Soit M un point de $\mathcal{E}$ et H son projeté orthogonal sur la droite (d).
MH est appelée distance de M à la droite (d).

Nous allons prendre un exemple pour calculer la distance d'un point à une droite.

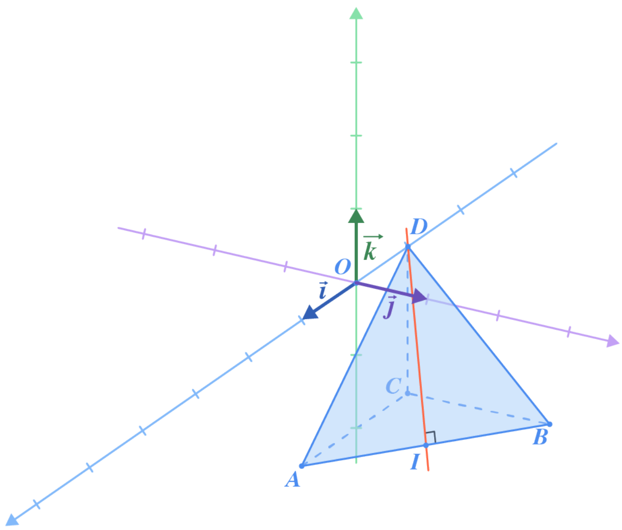
Exemple

Reprenons l'exemple du tétraèdre $ABCD$ traité plus haut.

Nous avions :

- $A\,(1\ ;\ 0\ ;\ -2)$, $B\,(-1\ ;\ 2\ ;\ -2)$, $C\,(-1\ ;\ 0\ ;\ -2)$ et $D\,(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)$;
- ABD triangle équilatéral de côté $2\sqrt{2}$;
- aire $\mathcal{A}$ de ABD égale à $2\sqrt{3}$.

→ Nous cherchons la distance de D à (AB).



Tétraèdre ABCD

Soit I le projeté orthogonal de D sur (AB) : le triangle ABD est équilatéral, I est le milieu de $[AB]$

.

→ Ainsi la distance de D à (AB) est la longueur DI.

Les coordonnées de I sont :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\ ;\ \frac{z_A + z_B}{2}\right) = (0\ ;\ 1\ ;\ -2)$$

Nous en déduisons les coordonnées de $\overrightarrow{DI}$:

$$\begin{pmatrix} x_I - x_D \\ y_I - y_D \\ z_I - z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

➜ Nous pouvons ainsi calculer la distance de D à (AB) :

$$\begin{aligned} DI &= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

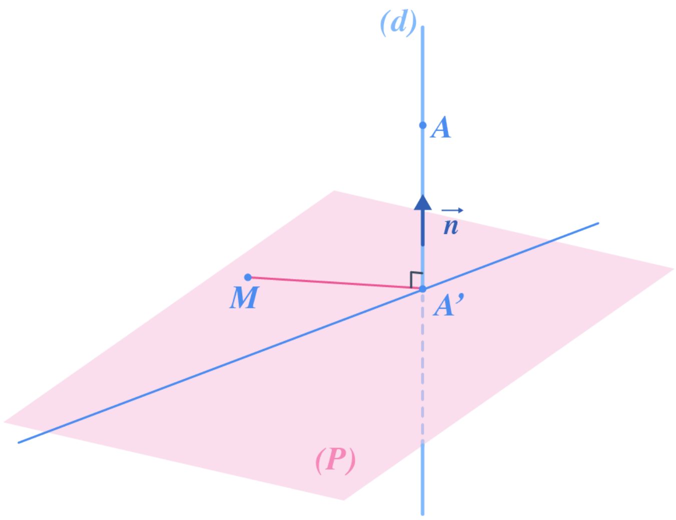
➜ Servons-nous-en pour retrouver l'aire $\mathcal{A}$ de ABD :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{AB \times DI}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{2} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{6} \\ &= \sqrt{12} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

c. Distance d'un point à un plan

Nous allons maintenant nous intéresser à la distance d'un point à un plan ; pour cela, nous avons besoin de définir ce qu'est une projection orthogonale sur un plan.

A est un point et (P) un plan, de vecteur normal $\vec{n}$, de $\mathcal{E}$.
(d) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$.
(d) est orthogonale à (P), donc elle ne lui est pas parallèle : elle coupe (P) en un seul point A'.



Distance d'un point à un plan

Définition

Projeté orthogonal d'un point sur un plan :

Dans $\mathcal{E}$, A est un point et (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$.
Le projeté orthogonal de A sur (P) est l'unique point d'intersection $A^{'}$ de la droite $(d) = (A\ ;\ \vec{n})$ et de (P).

➜ Dans le cas particulier où A appartient à (P), $A^{'}$ est confondu avec A.

Soit M un point quelconque du plan (P), démontrons que $AA^{'}$ est la plus petite des distances AM.

Démonstration

1. Si M est confondu avec $A^{'}$, alors $AM = AA^{'}$.
2. Supposons maintenant que M n'est pas confondu avec $A^{'}$.

Comme M, A et $A^{'}$ sont distincts et non alignés, ils forment le triangle $AA^{'}M$ rectangle en $A^{'}$.
Nous savons alors que AM, la longueur de l'hypoténuse, est strictement supérieure à la longueur de chacun des autres côtés.

➜ Ainsi, $AA^{'} < AM$.

Nous avons donc démontré la propriété suivante.

Propriété

Dans $\mathcal{E}$, A est un point et (P) un plan.
Soit A' le projeté orthogonal de A sur (P).
AA' est la plus courte distance entre A et un point du plan.

→ Cette distance est la **distance de A au plan (P)**.

Nous allons calculer la distance d'un point à un plan en reprenant l'exemple du tétraèdre $ABCD$ vu plus haut.

Exemple

Nous cherchons à calculer la distance de A à (BCD), et nous allons d'abord montrer que (AC) est orthogonale à (BCD).
Nous utilisons les coordonnées dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Nous y avons déjà calculé les coordonnées de $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De manière analogue, on calcule les coordonnées de :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= -2 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times 0 \\ &= 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= -2 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires et non nuls de (BCD). On en déduit que c'est un vecteur normal de (BCD).
Le projeté orthogonal de A sur (BCD) est donc l'intersection entre (AC) et (BCD).

→ C'est le point C.

→ Nous concluons que la distance de A à (BCD) est :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 0^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que c'est la longueur de la hauteur issue de A de la pyramide $ABCD$.

Nous pourrions nous en servir pour calculer le volume de la pyramide.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini et utilisé le produit scalaire dans l'espace pour calculer des longueurs, des angles. Il est très utile également pour démontrer l'orthogonalité de deux directions ou d'une droite et d'un plan. L'utilisation d'un repère orthonormé et du produit scalaire permettront par la suite de résoudre des questions d'incidence, de longueurs, d'appartenance grâce au calcul : nous parlerons de géométrie analytique.