

# Combinatoire et dénombrement

Cours

## Sommaire

### I Les notions ensemblistes

### II Le dénombrement

#### A Le cardinal d'un ensemble

#### B Le nombre de $k$ -uplets et de sous parties

### III Les coefficients binomiaux

## I Les notions ensemblistes

Quand on parle d'ensembles ayant un nombre fini d'éléments, on s'intéresse aux listes d'éléments que l'on peut former ainsi qu'à la façon de regrouper différents ensembles. Pour cela il existe trois opérateurs : l'union, l'intersection et le produit cartésien.



Les ensembles considérés dans ce chapitre sont finis mais les notions introduites dans cette section seront introduites dans le cas général.

REMARQUE

EXEMPLE

L'ensemble des « couleurs » dans un jeu de 32 cartes est un ensemble fini :

{pique, cœur, carreau, trèfle}

DÉFINITION

### Liste ou $k$ -uplet

On appelle **liste** (d'ordre  $k$ ) ou  **$k$ -uplet** toute suite ordonnée de  $k$  éléments d'un ensemble. On note cette liste (ou  $k$ -uplet) entre parenthèses.

EXEMPLE

Soit  $A$  le point de coordonnées  $(2; 4)$  dans le plan muni d'un repère. Les coordonnées du point  $A$  forment une liste à deux éléments. On dit aussi 2-uplet ou couple.

DÉFINITION

## Réunion des ensembles

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $E_1, E_2, \dots, E_n$  des ensembles.

On appelle **réunion des ensembles**  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , notée  $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ , l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à au moins l'un des ensembles  $E_1, E_2, \dots, E_n$ .

### EXEMPLE

Dans un lycée, on note  $U$  l'ensemble des élèves inscrits à l'UNSS et  $T$  celui des élèves de terminale. La réunion  $U \cup T$  est l'ensemble des élèves du lycée appartenant à au moins un des deux groupes  $U$  et  $T$ .

Cet ensemble est donc constitué des élèves inscrits à l'UNSS, quelle que soit leur classe, auxquels on ajoute les élèves de terminale non inscrits à l'UNSS.

### EXEMPLE

On considère les ensembles suivants :

- $A$  : ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 et multiples de 2
- $B$  : ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 et multiples de 3
- $C$  : ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 et multiples de 5

Alors, on a :

$$A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$$

$$B = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18\}$$

$$C = \{0; 5; 10; 15; 20\}$$

La réunion des trois ensembles  $A$ ,  $B$  et  $C$  est :

$$A \cup B \cup C = \{0; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20\}$$

### DÉFINITION

## Intersection de deux ensembles

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. On appelle **intersection des deux ensembles**  $A$  et  $B$ , notée  $A \cap B$ , l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent aux deux ensembles  $A$  et  $B$ .

### EXEMPLE

On considère les ensembles suivants :

- $A$  : ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 et multiples de 2
- $B$  : ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 et multiples de 3

Alors, on a :

$$A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$$

$$B = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18\}$$

L'intersection des ensembles  $A$  et  $B$  est :

$$A \cap B = \{0; 6; 12; 18\}$$

#### DÉFINITION

### Produit cartésien de deux ensembles

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. **Le produit cartésien des deux ensembles**  $A$  et  $B$ , noté  $A \times B$ , est l'ensemble des couples (listes de 2 éléments) dont le premier élément est un élément de  $A$  et le deuxième élément un élément de  $B$ .

#### EXEMPLE

Le produit cartésien de l'ensemble  $\mathbb{R}$  avec lui-même, noté  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , est l'ensemble des couples de deux réels. Il s'agit donc de l'ensemble des coordonnées des points du plan muni d'un repère.



#### REMARQUE

Soit un entier naturel non nul  $n$  et  $E_1, E_2, \dots, E_n$  des ensembles.

Le produit cartésien de ces  $n$  ensembles, noté  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ , est l'ensemble des  $n$ -uplets dont le premier élément appartient à  $E_1$ , le deuxième à  $E_2$ , etc.

#### EXEMPLE

On considère un jeu de 32 cartes constitués des quatre « couleurs » classiques (pique, cœur, carreau, trèfle).

On note  $P$  l'ensemble des piques,  $C_1$  l'ensemble des cœurs,  $C_2$  l'ensemble des carreaux et  $T$  l'ensemble des trèfles.

Le produit cartésien  $P \times C_1 \times C_2 \times T$  est l'ensemble des 4-uplets (ou quadruplets) dont :

- le premier élément est un pique ;
- le deuxième élément est un cœur ;
- le troisième élément est un carreau ;
- le quatrième élément est un trèfle.

#### PROPRIÉTÉ

Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble.

On note  $\mathcal{A}^k$  l'ensemble des  $k$ -uplets d'éléments de l'ensemble  $\mathcal{A}$ .

## II

## Le dénombrement

Que ce soit avec des ensembles de nombres, d'objets concrets ou d'objets plus abstraits, on cherche souvent à connaître le nombre d'éléments d'un ensemble (le cardinal), et les possibilités de découpage de cet ensemble en sous-parties.

## A Le cardinal d'un ensemble

Lorsque l'on travaille avec des ensembles ayant un nombre fini d'éléments, on est souvent amené à compter des éléments. On appelle **cardinal d'un ensemble** le nombre d'éléments de cet ensemble.

### DÉFINITION

#### Cardinal d'un ensemble fini

On appelle **cardinal d'un ensemble** ayant un nombre **fini** d'éléments, le nombre d'éléments de cet ensemble.

#### EXEMPLE

L'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 est l'ensemble :

$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$

Il compte 21 éléments. Son cardinal est donc 21.

### PROPRIÉTÉ

Soient  $E$  un ensemble fini et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$  disjointes.

Le cardinal de la réunion de  $A$  et de  $B$  est la somme des cardinaux des parties  $A$  et  $B$ .

#### EXEMPLE

Soit  $E$  l'ensemble des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à 50.

Soit  $A$  le sous-ensemble de  $E$  des multiples de 7 et  $B$  le sous-ensemble de  $E$  des multiples de 11.

On a :

- $A = \{7; 14; 21; 28; 35; 42; 49\}$
- $B = \{11; 22; 33; 44\}$

$A$  est de cardinal 7.

$B$  est de cardinal 4.

Comme  $A$  et  $B$  sont disjoints, le cardinal de  $A \cup B$  est :

$$7 + 4 = 11$$



#### REMARQUE

On parle du principe additif du cardinal pour la réunion de deux ensembles disjoints.



REMARQUE

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles non disjoints.

Si on note  $\text{card}(E)$  le cardinal d'un ensemble  $E$ , alors :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

### PROPRIÉTÉ

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis de cardinaux respectifs  $n$  et  $p$ . Alors le cardinal du produit cartésien  $E \times F$  est :

$$\text{card}(E \times F) = n \times p$$

### EXEMPLE

Soit  $E = [[0; 9]]$  l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et 9 et soit  $F = [[0; 19]]$  l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et 19.

- Le cardinal de  $E$  est 10.
- Le cardinal de  $F$  est 20.

L'ensemble  $E \times F$  est constitué des couples d'entiers dont le premier est compris entre 0 et 9 et le deuxième entre 0 et 19.

Le cardinal de  $E \times F$  est donc :

$$10 \times 20 = 200$$

### PROPRIÉTÉ

Soient  $p$  un entier naturel non nul et  $E_1, E_2, \dots, E_p$   $p$  ensembles de cardinaux respectifs  $n_1, n_2, \dots, n_p$ . Alors le cardinal du produit cartésien  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$  est :

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$$

### EXEMPLE

Soit  $E = [[1; 10]]$  l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 10.

L'ensemble  $E^3 = E \times E \times E$  est l'ensemble des triplets d'entiers appartenant chacun à  $E$ .

Le cardinal de  $E$  est 10.

Le cardinal de  $E^3$  est donc :

$$10^3 = 1\,000$$

## **B** Le nombre de k-uplets et de sous parties

Lorsque l'on travaille avec des ensembles ayant un nombre fini d'éléments, on peut dénombrer les éléments, les listes d'éléments et les sous-parties.

### PROPRIÉTÉ

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Soit  $k$  un entier naturel non nul. L'ensemble des  $k$ -uplets (ou  $k$ -listes) d'éléments de  $E$ , avec répétitions possibles, a pour cardinal :

$$n^k$$

#### EXEMPLE

On considère l'ensemble  $E = \{A; B; C; D; E\}$ .

Les « mots » de trois lettres (avec répétitions possibles) appartenant à l'ensemble  $E$ , ayant un sens ou non, sont les triplets d'éléments de  $E$ . Leur nombre est donc :

$$5^3 = 125$$

#### EXEMPLE

Soit  $E = \{0; 1\}$ .

Les entiers naturels que l'on peut écrire en binaire sur un octet (huit bits) sont les octuplets, avec répétitions possibles, constitués d'éléments de l'ensemble  $E$ . Leur nombre est donc :

$$2^8 = 256$$

On peut donc écrire les entiers entre 0 et 255 en binaire sur un octet.

### DÉFINITION

#### Factorielle

Soit  $n$  un entier naturel. On appelle **factorielle**  $n$ , notée  $n!$ , le nombre défini par :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1 \text{ si } n > 0 \end{cases}$$

#### EXEMPLE

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

### PROPRIÉTÉ

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Soit  $k$  un entier naturel compris entre 1 et  $n$ .

L'ensemble des  $k$ -uplets (ou  $k$ -listes) d'éléments de  $E$  obtenus sans répétition a pour cardinal :

$$\frac{n!}{(n - k)!} = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$$

#### EXEMPLE

Soit  $E$  l'ensemble des entiers compris entre 1 et 100. L'ensemble des triplets d'éléments de  $E$  pris sans répétition est de cardinal :

$$\frac{100!}{97!} = 100 \times 99 \times 98 = 970\,200$$

#### DÉFINITION

### Permutation

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . On appelle **permutation** de l'ensemble  $E$  tout  $n$ -uplet d'éléments de  $E$  ne comportant pas de répétition.

#### EXEMPLE

Soit  $E$  l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 10.

$(1; 3; 5; 7; 9; 2; 4; 6; 8; 10)$  est une permutation de l'ensemble  $E$ .

#### PROPRIÉTÉ

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Le nombre de permutations de l'ensemble  $E$  est :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$$

#### EXEMPLE

Soit  $E$  l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 10. Le nombre de permutations de l'ensemble  $E$  est :

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 1$$

Soit 3 628 800.

#### PROPRIÉTÉ

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Soit  $k$  un entier naturel non nul compris entre 0 et  $n$ . Le nombre de sous-ensembles de  $E$  à  $k$  éléments est :

$$\frac{n!}{k!(n - k)!} = \frac{n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - k + 1)}{k \times (k - 1) \times \dots \times 1}$$

#### EXEMPLE

Soit  $E$  l'ensemble des élèves d'une classe de terminale en comptant 30.

Le nombre de binômes différents possibles est :

$$\frac{30!}{2!(30 - 2)!} = \frac{30!}{2!28!}$$

Soit :

$$\frac{30 \times 29 \times \dots \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 28 \times 27 \times \dots \times 2 \times 1}$$

Soit après simplification partielle :

$$\frac{30 \times 29}{2 \times 1} = 15 \times 29 = 435$$

#### PROPRIÉTÉ

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Le nombre de parties de  $E$ , c'est-à-dire le nombre de sous-ensembles de  $E$ , de l'ensemble vide à  $E$  tout entier, est :

$$2^n$$

#### EXEMPLE

Soit  $E = [1; 3]$  l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 3.

Le nombre de sous-ensembles de  $E$  est :

$$2^3 = 8$$

Les sous-ensembles de  $E$  sont les suivants :

$\emptyset$

$\{1\}$

$\{2\}$

$\{3\}$

$\{1; 2\}$

$\{1; 3\}$

$\{2; 3\}$

$\{1; 2; 3\}$

### III Les coefficients binomiaux

En probabilité, lorsqu'on cherche à dénombrer des issues vérifiant un certain critère lors d'une succession d'épreuves identiques de Bernoulli, des nombres aux propriétés très particulières apparaissent, les coefficients binomiaux. On les retrouve également dans le développement de certaines expressions algébriques. Ces deux domaines a priori éloignés utilisent le même type de dénombrement.

#### DÉFINITION

##### Combinaison

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. Soit  $k$  un entier naturel compris entre 0 et  $n$ . **Une combinaison** de  $k$  éléments de  $E$  est une partie de  $E$  comportant  $k$  éléments.

#### EXEMPLE



Soit  $E$  l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 100.

$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$  est une combinaison de  $E$  à 10 éléments.

#### DÉFINITION

### Coefficient binomial

Soient  $n$  un entier naturel,  $E$  un ensemble de cardinal  $n$  et  $k$  un entier naturel inférieur ou égal à  $n$ . On appelle **coefficient binomial** le nombre lu «  $k$  parmi  $n$  », noté  $\binom{n}{k}$ , donnant le nombre de sous-ensembles de  $E$  ayant  $k$  éléments.

#### EXEMPLE

Soit  $E$  l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 5.

$\binom{5}{2}$  est le nombre de sous-ensembles de  $E$  comptant 2 éléments.

Les sous-ensembles possibles sont :

$\{1; 2\}$

$\{1; 3\}$

$\{1; 4\}$

$\{1; 5\}$

$\{2; 3\}$

$\{2; 4\}$

$\{2; 5\}$

$\{3; 4\}$

$\{3; 5\}$

$\{4; 5\}$

On a donc :

$$\binom{5}{2} = 10$$



#### REMARQUE

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Dans une succession de  $n$  épreuves de Bernoulli, le nombre d'issues comptant  $k$  succès est :

$$\binom{n}{k}$$

#### PROPRIÉTÉ

Soient  $n$  un entier naturel et  $k$  un entier naturel inférieur ou égal à  $n$ . Le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  peut se calculer de la façon suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

#### EXEMPLE

$$\begin{aligned}\binom{5}{0} &= \frac{5!}{0!5!} = 1 \\ \binom{5}{1} &= \frac{5!}{1!4!} = \frac{5}{1} = 5 \\ \binom{5}{2} &= \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \\ \binom{5}{3} &= \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \\ \binom{5}{4} &= \frac{5!}{4!1!} = \frac{5}{1} = 5 \\ \binom{5}{5} &= \frac{5!}{5!0!} = 1\end{aligned}$$

#### PROPRIÉTÉ

Soient  $n$  un entier naturel et  $k$  un entier naturel inférieur ou égal à  $n$ . Alors on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

#### EXEMPLE

$$\begin{aligned}\binom{5}{2} &= 10 \\ \binom{5}{3} &= 10\end{aligned}$$

On a bien :

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$$

#### PROPRIÉTÉ

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $k$  un entier naturel inférieur ou égal à  $n - 1$ . Alors on a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1



#### DÉMONSTRATION

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $k$  un entier naturel inférieur ou égal à  $n - 1$ . Alors on a :

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{(k+1) \times n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k) \times n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{(k+1+n-k) \times n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{(n+1) \times n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{(n+1) \times n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \binom{n+1}{k+1}
 \end{aligned}$$

#### DÉMONSTRATION

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $k$  un entier naturel inférieur ou égal à  $n - 1$ . Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n + 1$ . Alors on a :

$\binom{n+1}{k+1}$  est le nombre de parties de  $E$  à  $k + 1$  éléments.

Il y a  $n + 1$  parties à  $n$  éléments dans  $E$ .

On considère une telle partie de  $E$  que l'on note  $A$ .

Pour choisir  $k + 1$  éléments dans  $E$ , on a deux possibilités :

- On choisit  $k$  éléments dans  $A$  puis on prend l'élément de  $E$  qui n'est pas dans  $A$ .
- On choisit les  $k + 1$  éléments dans  $A$ .

Pour dénombrer les parties de  $E$  à  $k + 1$  éléments, il suffit donc d'ajouter le nombre de parties de  $A$  à  $k$  éléments avec le nombre de parties de  $A$  à  $k + 1$  éléments.

Le nombre de parties de  $A$  comptant  $k$  éléments est  $\binom{n}{k}$ .

Le nombre de parties de  $A$  comptant  $k + 1$  éléments est  $\binom{n}{k+1}$ .

On obtient donc bien :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

#### EXEMPLE

$$\binom{9}{2} = 36$$

$$\binom{9}{3} = 84$$

$$\binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 36 + 84 = 120$$

$$\text{Or } \binom{10}{3} = 120$$

On a bien :

$$\binom{9}{2} + \binom{9}{3} = \binom{10}{3}$$

#### PROPRIÉTÉ

Soit  $n$  un entier naturel. Alors on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

#### DÉMONSTRATION

Soit  $n$  un entier naturel, soient  $k$  un entier naturel inférieur ou égal à  $n$  et  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ .

$\binom{n}{k}$  est le nombre de parties à  $k$  éléments de  $E$ .

Par conséquent :

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$  est la somme des nombres de parties à 0 élément, puis 1 élément, ..., jusqu'à  $n$  éléments.

C'est donc le nombre total de partie de  $E$  .

On obtient bien :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

**EXEMPLE**

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 = 32$$