Positions relatives de droites et de plans de l'espace

Introduction :

Dans le cours « Vecteurs, droites et plans de l'espace », nous avons étudié comment caractériser droites et plans de l'espace $\mathcal{E}$ par des vecteurs, et comment prouver l'appartenance d'un point à l'un d'entre eux.
Nous allons, dans ce chapitre, apprendre comment peuvent se positionner droites et plans entre eux : peuvent-ils être sécants et, dans ce cas, quelle est leur intersection ? peuvent-ils être parallèles ? ou dans une autre configuration ? On parle ainsi de position relative de droites et de plans.

Dans une première partie, nous verrons quelles peuvent être les positions relatives d'une droite et d'un plan ; ensuite, nous étudierons les positions relatives de deux droites de l'espace ; enfin, nous verrons dans la troisième partie les positions relatives de deux plans de l'espace.

→ Dans tout le cours, nous nous placerons là encore dans l'espace noté $\mathcal{E}$.

1 Position relative d'une droite et d'un plan

a. Règles d'incidence

À retenir

On admet les résultats suivants, qui sont des postulats de la géométrie en trois dimensions.

- Comme en géométrie plane, par deux points distincts A et B de l'espace passe une seule droite, que l'on peut noter (AB).

- Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan (P), alors tous les points de (AB) appartiennent également à (P).

→ On dit que (AB) est **contenue ou incluse** dans (P).

→ On peut dire aussi que (P) contient (AB), et on note $(AB) \subset (P)$.

Rappelons également des notions du chapitre précédent, qui vont nous servir à établir des propriétés.

Rappel

- Une droite est caractérisée par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul, appelé **vecteur directeur**.

→ Si (d) passe par A et que $\vec{u}$ est un vecteur directeur, on pourra noter : $(d) = (A\ ;\ \vec{u})$.

- Un plan (P) est déterminé de manière unique par trois points **non alignés**, ou bien par deux droites sécantes, qui sont alors incluses dans (P).
- Ce plan peut aussi être caractérisé par un point A lui appartenant et un couple de vecteurs **non nuls et non colinéaires** $(\vec{u},\ \vec{v})$, qui ont des représentants dans (P).

→ $(\vec{u},\ \vec{v})$ s'appelle une **base** de (P).

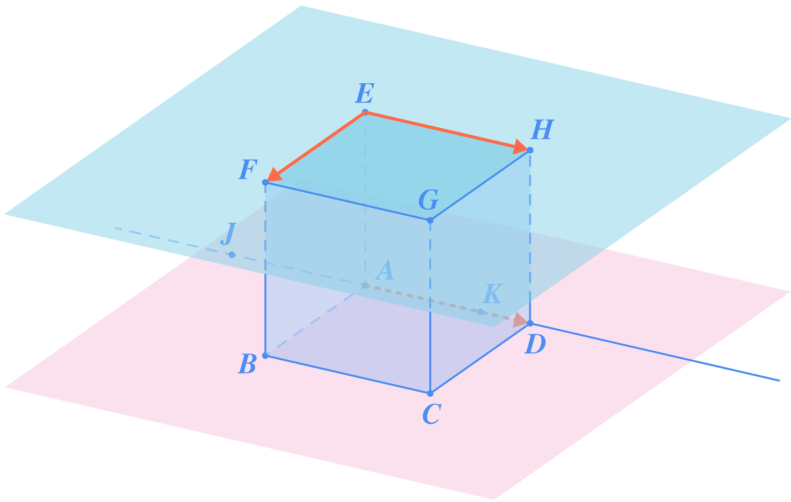
→ $(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ s'appelle un **repère** de (P).

Nous pouvons illustrer ces règles d'incidence dans un cube.

Remarque :
Il faut bien distinguer dans ce cours la face du cube $EFGH$ et le plan (EFG) qui contient cette face.

Exemple

Soit le cube $ABCDEFGH$.



Le plan (EFG) et le plan (GHF) sont confondus : tous les deux contiennent les trois points E, F et G qui ne sont pas alignés.

→ On peut choisir comme repère de ce plan $\left(E\ ;\ \overrightarrow{EF},\ \overrightarrow{EH}\right)$.

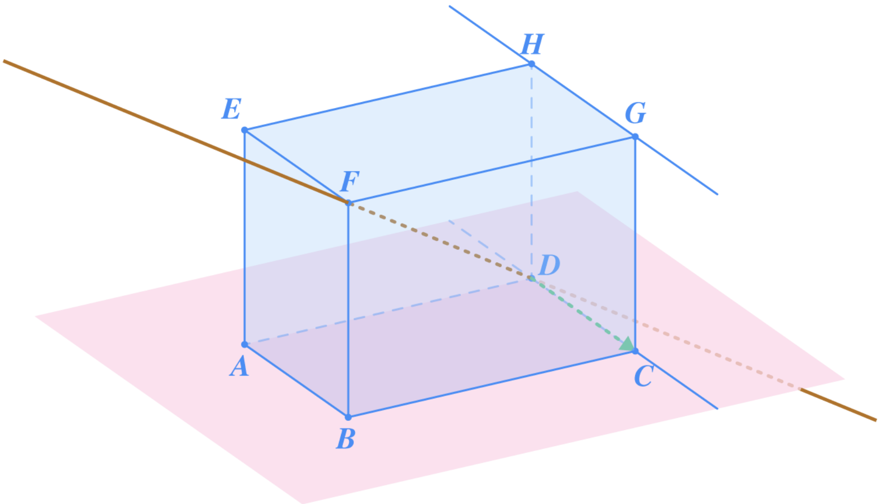
$(AD) \subset (ABC)$ puisque A et D appartiennent au plan (ABC).
Les points J et K, alignés avec A et D, appartiennent donc à ce plan.

→ $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur directeur de (AD).

Nous avons pris l'exemple d'une droite incluse dans un plan. Nous allons maintenant étudier l'ensemble des positions relatives possibles d'une droite et d'un plan de $\mathcal{E}$.

b. Position relative d'une droite et d'un plan

Prenons l'exemple du pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous.



Observons les positions relatives de quelques droites et plans qui sont représentés.

- (DC) est incluse dans le plan (ADC).
- (HG) n'a pas de point commun avec le plan (ADC).

→ On dira que (HG) est **strictement parallèle** au plan (ADC).

- Nous remarquons que (HG) est parallèle à (DC) : elles ont un même vecteur directeur $\overrightarrow{DC}$.

Nous observons une autre configuration possible :

- (DF) n'est pas incluse dans le plan (ADC). En effet, $F \notin (ADC)$.
- D appartient à la fois à (DF) et (ADC). On peut montrer que c'est le seul : par l'absurde, s'il y avait un autre point commun à (DF) et (ADC), alors toute la droite serait incluse dans le plan, ce qui n'est pas le cas.

À partir de cet exemple, nous admettons qu'il ne peut y avoir que deux configurations possibles dans l'espace pour une droite et un plan.

Propriété

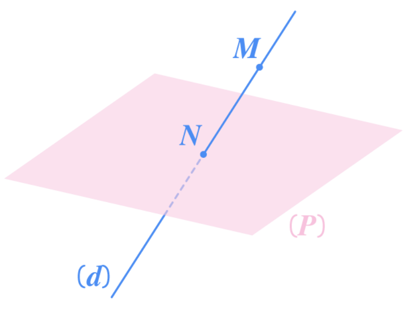
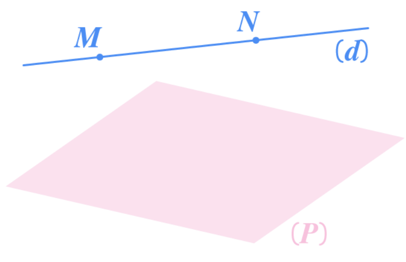
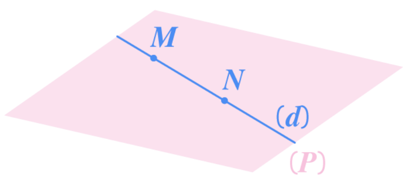
Une droite (d) et un plan (P) de $\mathcal{E}$ sont dans une des configurations suivantes.

- (d) et (P) sont **sécants** : ils ont alors un seul point d'intersection.
- (d) et (P) ne sont pas sécants : on dit que la droite et le plan sont **parallèles**.

→ On note : $(d) \parallel (P)$.

→ Il y a alors deux cas possibles :

  - ils sont strictement parallèles : ils n'ont aucun point d'intersection ;
  - la droite (d) est contenue dans le plan (P) : il y a alors une infinité de points d'intersection, ce sont tous les points de la droite (d).

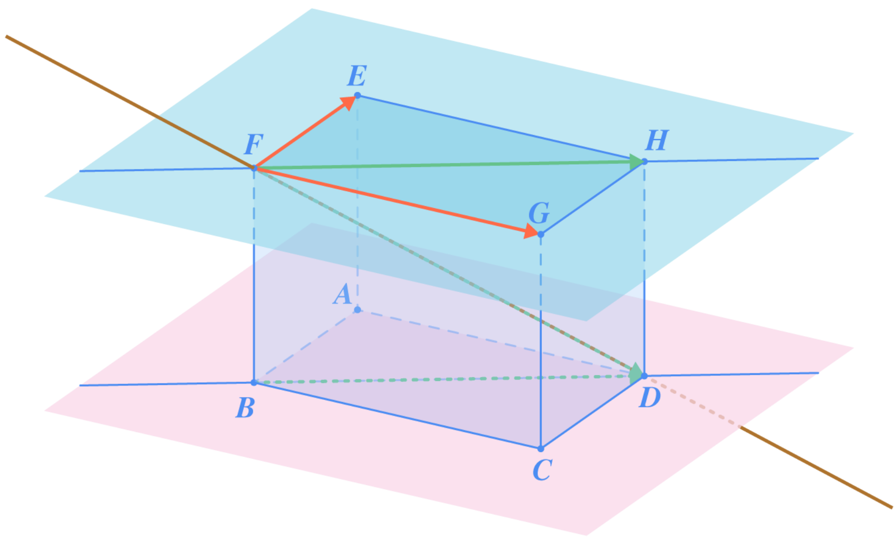
Droite et plan sécants	**Droite et plan parallèles**	
Intersection : un seul point	Droite et plan strictement parallèles : aucun point d'intersection	Droite contenue dans le plan : l'intersection est la droite (d)
 $(d) \cap (P) = \{N\}$	 $(d) \cap (P) = \varnothing$	 $(d) \cap (P) = (d)$

Nous allons maintenant montrer comment on peut caractériser le parallélisme entre une droite et un plan de $\mathcal{E}$ à l'aide des vecteurs.

c. Caractérisation vectorielle du parallélisme entre un plan et une droite

Reprenons le pavé droit $ABCDEFGH$.

On munit le plan (EFG) du repère $\left(F\ ;\ \overrightarrow{FG},\ \overrightarrow{FE}\right)$ d'une part ; $\overrightarrow{FD}$ est un vecteur directeur de (FD) d'autre part.



1 (FD) et (EFG) sont sécants en F et $D \notin (EFG)$.

→ $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FD}$ ne sont pas coplanaires.

2 Observons à présent (FH), qui est contenue dans le plan (EFG).

$\overrightarrow{FH}$ est une combinaison linéaire de la base de vecteurs de (EFG).

→ Plus précisément :

$$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FE}$$

3 Observons enfin (BD), qui est strictement parallèle à (EFG).

Elle admet $\overrightarrow{BD}$ comme vecteur directeur. Or :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\\ &= \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FE}\end{aligned}$$

→ Ainsi, $\overrightarrow{BD}$ est aussi une combinaison linéaire de la base $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE})$ de (EFG).

Nous pouvons généraliser ces observations avec la propriété suivante.

Propriété

Dans $\mathcal{E}$:

- (d) est une droite définie par un point A lui appartenant et un vecteur directeur $\vec{w}$;
- (P) est un plan caractérisé par un point B et une base de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

$(d) = (A\ ;\ \vec{w})$ et $(P) = (B\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

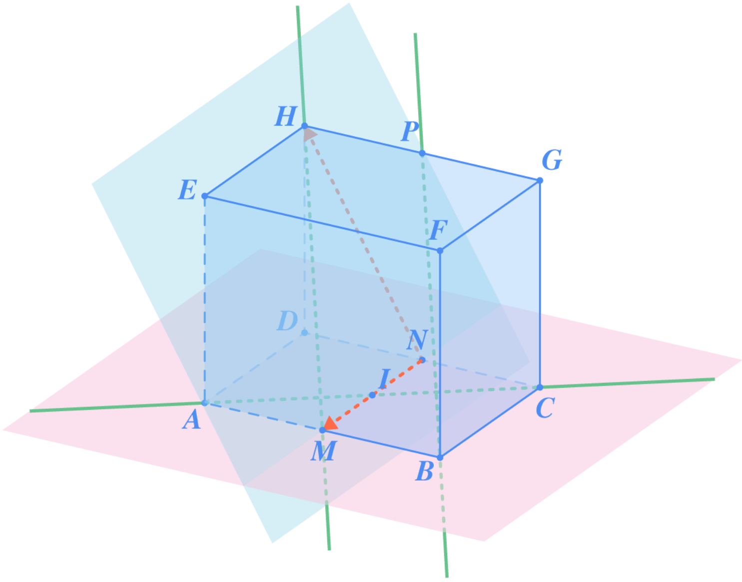
→ Autrement dit :

$(d) = (A\ ;\ \vec{w})$ et $(P) = (B\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$ sont parallèles si et seulement si $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, c'est-à-dire que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Nous allons utiliser cette propriété ainsi que nos connaissances sur la position relative de plans et de droites dans l'exemple ci-dessous.

Exemple

Dans le pavé droit $ABCDEFGH$, M est le milieu de $[AB]$, N est le milieu de $[CD]$ et P est le milieu de $[GH]$.



→ Nous cherchons les positions relatives du plan (MNH) avec (AC), puis avec (BP).

Le plan (MNH) est muni du repère $\left(N\ ;\ \overrightarrow{NM},\ \overrightarrow{NH}\right)$.

Astuce

Pour trouver le point d'intersection d'une droite et d'un plan sécants, on cherche le point d'intersection de cette droite avec une droite du plan.

→ Comme il ne peut y avoir qu'un point d'intersection entre une droite et un plan sécants, c'est nécessairement celui-ci.

Exemple

1 Commençons par étudier les positions relatives de (AC) et (MNH).

Dans le plan (ABC), les points M et N sont inclus dans ce plan et (AC) coupe (MN) en I. Donc $I \in (AC)$ et $I \in (MNH)$.

→ Comme (AC) n'est pas contenue dans le plan (MNH) puisque A (ou C) n'appartient pas à ce plan, on en déduit que (AC) et (MNH) sont **sécants** en I.

2 Étudions maintenant la position relative de (BP) et (MNH) en utilisant les vecteurs.

On décompose $\overrightarrow{BP}$ en utilisant la relation de Chasles et les vecteurs de la base choisie pour (MNH). On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NH} + \overrightarrow{HP} \\ &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{HP} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NH} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NH} \\ &\text{(car } M \text{ est le milieu de } [AB] \text{ et } P \text{ celui de } [HG]) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{HG}\right) + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NH} \\ &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NH} \\ &\text{(car } \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{HG} \text{ et donc } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{HG} = \vec{0}) \\ &= -\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NH} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{BP}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de la base de (MNH), donc (BP) est parallèle au plan (MNH).

→ Comme B n'appartient pas à (MNH), (BP) et (MNH) sont strictement parallèles.

Nous remarquons également :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NH} \\ &= \overrightarrow{MH} \end{aligned}$$

Cela signifie que (BP) et (MH) sont deux droites de même vecteur directeur.

→ (BP) est donc parallèle à (MH), qui se trouve dans le plan (MNH).

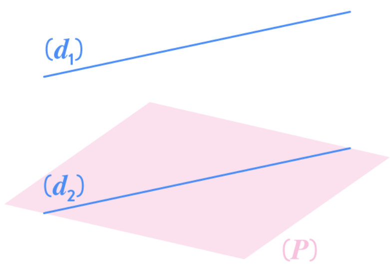
Servons-nous de cet exemple pour aller un peu plus loin dans le raisonnement. Nous avons vu que :
$(D) = (A\ ;\ \vec{w})$ et $(P) = (B\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

En plaçant dans le plan (P) un point K tel que $\vec{w} = \overrightarrow{BK}$, on obtient une droite (BK) de même vecteur directeur $\vec{w}$ que (d) et contenue dans le plan (P).

→ Nous pouvons de manière intuitive admettre la propriété qui suit.

Propriété

> Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite incluse dans ce plan.

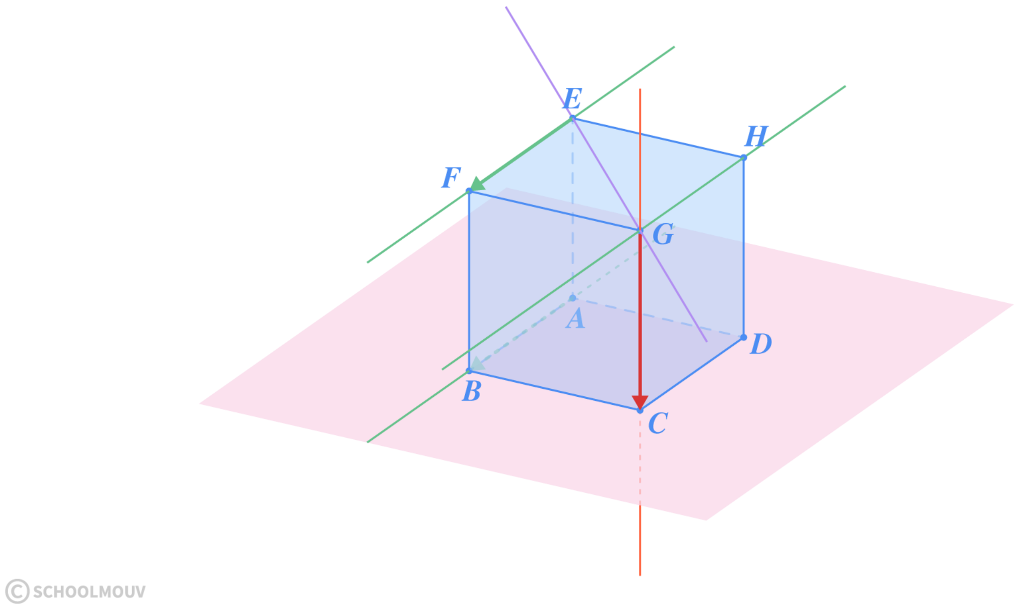


2 | Position relative de deux droites de l'espace

Nous allons maintenant étudier les positions relatives possibles de deux droites $\mathcal{E}$.

a. Droites coplanaires, droites non coplanaires

Pour comprendre les positions relatives possibles de deux droites, observons certaines droites dans le cube $ABCDEFGH$:



1 Plaçons-nous dans le plan (ABF) : les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

Elles ont en effet un même vecteur directeur : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.

2 Nous observons maintenant le plan (EFG) : (EF) et (GH) sont aussi dirigées par le même vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc elles sont parallèles.

Dans ce plan, (EF) et (EG) sont sécantes en E.

→ En effet, si nous nous plaçons dans un plan donné, nous retrouverons les mêmes configurations qu'en géométrie plane : les droites sont soit sécantes, soit parallèles.

3 Observons maintenant la position relative des droites (EF) et (GC) : elles ne sont pas sécantes.

Pour autant, elles ne sont pas parallèles, en effet, la première admet $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur, la seconde $\overrightarrow{GC}$, et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Montrons qu'il n'existe pas de plan qui les contienne toutes les deux.
Les points E, F et G caractérisent le seul plan (EFG).
Supposons par l'absurde que (GC) et (EF) sont contenues dans un

même plan. Comme (EF) et G appartiennent à (EFG), ce plan serait nécessairement le plan (EFG). Or C n'est pas dans ce plan.

→ Ces deux droites ne sont pas contenues dans le même plan, on les appelle des droites **non coplanaires**.

Nous posons donc les deux définitions suivantes.

Définition

Droites coplanaires :

Dire que deux droites distinctes (d) et (d') sont coplanaires signifie qu'il existe un plan de $\mathcal{E}$ qui les contient toutes les deux.

Remarque :
Ce plan est unique : en effet, nous pouvons choisir trois points non alignés sur ces deux droites.

À retenir

Si deux droites sont coplanaires, alors toutes les propriétés vues jusqu'ici en géométrie plane s'appliquent dans le plan qui les contient.
En particulier, dans un plan, il n'y a que deux positions possibles pour deux droites : elles sont parallèles ou sécantes.

Définition

Droites non coplanaires :

Dire que deux droites (d) et (d') sont non coplanaires signifie qu'il n'existe aucun plan qui les contienne toutes les deux.

b. Position relative de deux droites de l'espace $\mathcal{E}$

À partir de l'observation et des définitions ci-dessus, nous admettons la propriété suivante.

Propriété

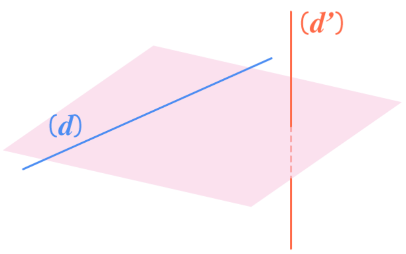
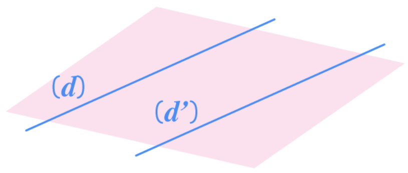
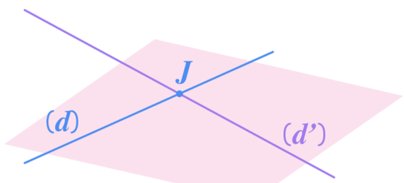
Deux droites **distinctes** (d) et (d') de l'espace sont dans une des configurations suivantes.

- Elles sont **coplanaires**. Dans ce cas, elles peuvent être :
  - sécantes : il y a un seul point d'intersection ;
  - strictement parallèles : il n'y a pas de point d'intersection.

→ On note comme dans le plan $(d) \parallel (d')$.

- Elles ne sont pas coplanaires ; on dit aussi qu'elles sont **non coplanaires**.

→ Dans ce cas, il n'y a pas de point d'intersection.

Droites non coplanaires	**Droites coplanaires**	
Aucun point d'intersection	Droites strictement parallèles : aucun point d'intersection	Droites sécantes : un seul point d'intersection : J
 $(d) \cap (d') = \varnothing$	 $(d) \cap (d') = \varnothing$	 $(d) \cap (d') = \{J\}$

Attention

Quand deux droites ne sont pas sécantes, cela ne signifie pas qu'elles sont parallèles. Elles peuvent être non coplanaires.

À retenir

→ Pour déterminer si deux droites sont non coplanaires :

1. on repère deux points distincts sur chacune des deux droites ;
2. trois de ces points forment un plan que l'on peut identifier ;
3. on prouve que le quatrième point n'appartient pas à ce plan.

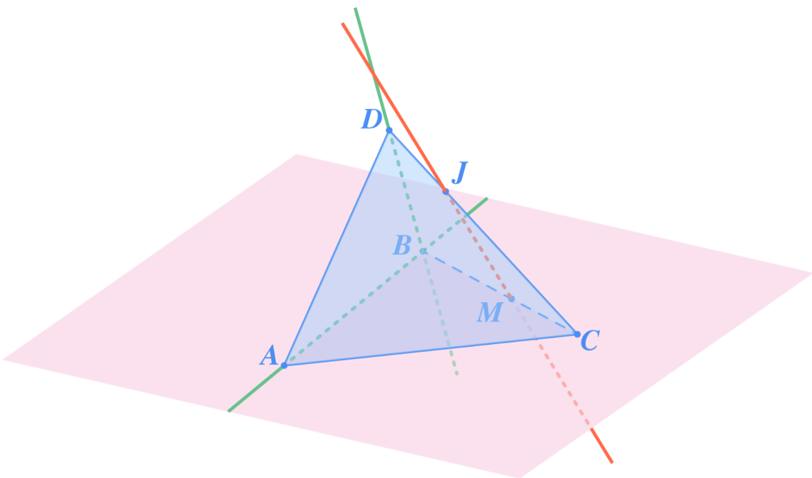
→ Pour prouver que deux droites sont coplanaires, on peut démontrer qu'elles sont sécantes, ou qu'elles sont parallèles.

Nous allons illustrer une partie de ces méthodes dans l'exemple ci-dessous.

Exemple

On considère le tétraèdre $ABCD$.

- $M \in [BC]$, distinct de B et de C.
- $J \in [DC]$, distinct de D et de C.



→ Nous cherchons les positions relatives des droites (MJ) et (AB), d'une part, et de (MJ) et (DB), d'autre part.

1. **Commençons par étudier la position relative de (MJ) et (AB).**

Les points A, B et M sont distincts et ne sont pas alignés ; ils déterminent un plan unique, qui est le plan (ABC).

→ Le point J n'est pas dans ce plan, donc (MJ) n'est pas coplanaire à (AB).

2 **Étudions maintenant la position relative de (MJ) et (DB).**

$M \in [BC]$ et $J \in [DC]$, donc (MJ) est contenue dans le plan (BDC).
(DB) est aussi contenue dans (BDC).

→ Les deux droites sont coplanaires, donc elles peuvent être sécantes ou parallèles suivant la position de M et de J.

Pour prouver que deux droites sont parallèles, nous utiliserons plus aisément les vecteurs. Le paragraphe suivant va nous montrer comment.

c. Caractérisation vectorielle des droites parallèles

Nous venons de voir que deux droites parallèles sont nécessairement contenues dans le même plan.
On peut en déduire que, dans $\mathcal{E}$, la caractérisation de deux droites parallèles est la même que dans le plan.

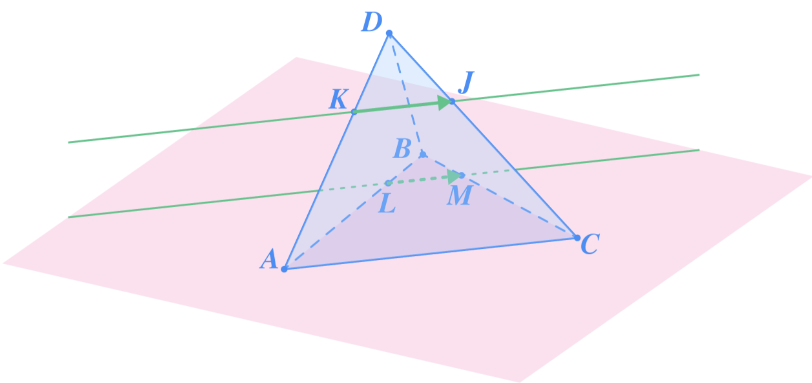
Propriété

On considère deux droites $(d) = (A \ ; \ \vec{u})$ et $(d') = (B \ ; \ \vec{v})$.

→ (d) et (d') sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Pour illustrer ces propriétés, reprenons le tétraèdre du paragraphe précédent.

Exemple



Nous y avons précisément placé les points M, J, K et L tels que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{DJ} &= \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AK} &= \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AL} &= \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

→ Nous cherchons la position relative de (LM) et (KJ).

Commençons par étudier la position relative des droites (LM) et (KJ). Utilisons les égalités vectorielles de l'énoncé. Nous avons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{LB}+\overrightarrow{BM}\ \text{[par la relation de Chasles]} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{BC}\ \left[\text{car } \overrightarrow{AL}=\tfrac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB}\right] \\ &= \frac{1}{4}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
D'autre part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KJ} &= \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DJ} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont également colinéaires.

Ainsi, $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont deux vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{AC}$, ils sont donc colinéaires.

- → En appliquant la propriété ci-dessus, on en déduit que (LM) et (KJ) sont parallèles, et donc qu'elles sont coplanaires.
- → Pour conclure, nous ajoutons que (KJ) et (LM) sont toutes deux parallèles à (AC).

Comme dans le plan, on a ainsi la propriété suivante.

Propriété

Si deux droites sont parallèles à une troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Attention

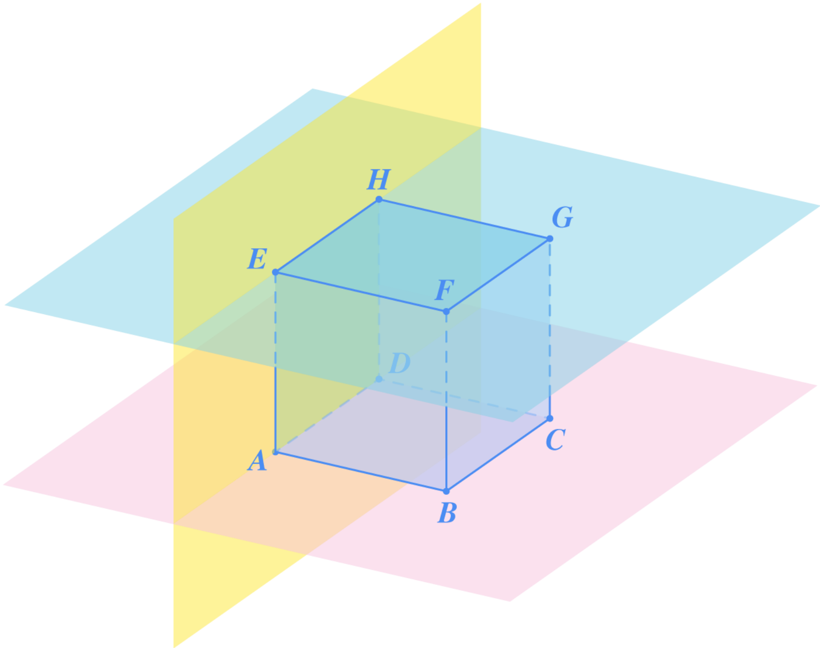
Si trois droites sont parallèles entre elles, cela ne signifie pas qu'elles sont toutes les trois coplanaires.
Si nous reprenons l'exemple ci-dessus, (KJ), (LM) et (AC) sont parallèles, mais elles ne sont pas toutes les trois coplanaires.

Nous avons donc étudié les configurations possibles pour deux droites de l'espace. Voyons à présent ce qu'il en est des positions relatives de plans dans l'espace.

3 | Position relative de deux plans de $\mathcal{E}$

a. Position relative de deux plans

Observons les configurations de quelques plans dans le cube ci-dessous :



- Les plans (ABC) et (ADC) sont **confondus**.

→ C'est le même plan déterminé par les droites sécantes (AB) et (AD).

- Les plans (ABC) et (EFH) n'ont pas de point commun.

→ On dit qu'ils sont **strictement parallèles**.

- Les plans (EFH) et (EHD) ne sont pas confondus, mais ils ont au moins deux points communs : E et H.

→ Puisque E et H sont inclus dans chacun de ces plans, (EH) est contenue dans les deux plans.

Nous pouvons nous demander s'il y a d'autres points d'intersection hors la droite (EH).
Par l'absurde, s'il existe un point K commun à (EFH) et $(EHD$ et qui

n'est pas sur (EH), alors les points K, E et H sont trois points non alignés et forment un unique plan.

→ Cela contredit le fait qu'ils appartiennent tous trois à deux plans **non confondus** (EFH) et (EHD).

De cette observation, nous admettons la propriété suivante : elle énumère les positions relatives possibles entre deux plans.

Propriété

Deux plans (P) et (P') de l'espace sont dans une des configurations suivantes.

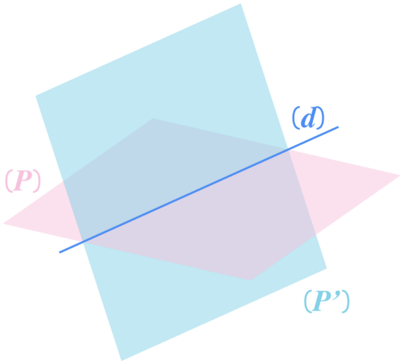
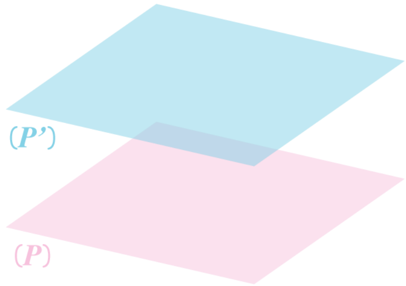
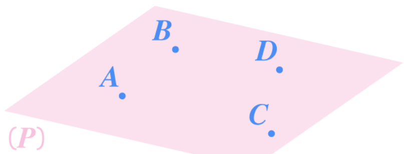
- Ils sont **parallèles**. Dans ce cas, ils peuvent être :
  - strictement parallèles, et il n'y a pas d'intersection entre ces deux plans.
  - ou confondus.

→ On note : $(P) \parallel (P')$.

- Ils sont **sécants**.

→ Dans ce cas, leur intersection est une droite.

Plans sécants	**Plans parallèles**	
Leur intersection est une droite	Plans strictement parallèles : aucun point d'intersection	Plans confondus

		
$(P) \cap (P') = (d)$	$(P) \cap (P') = \varnothing$	$(P) = (ABC) = (BCD)$

À retenir

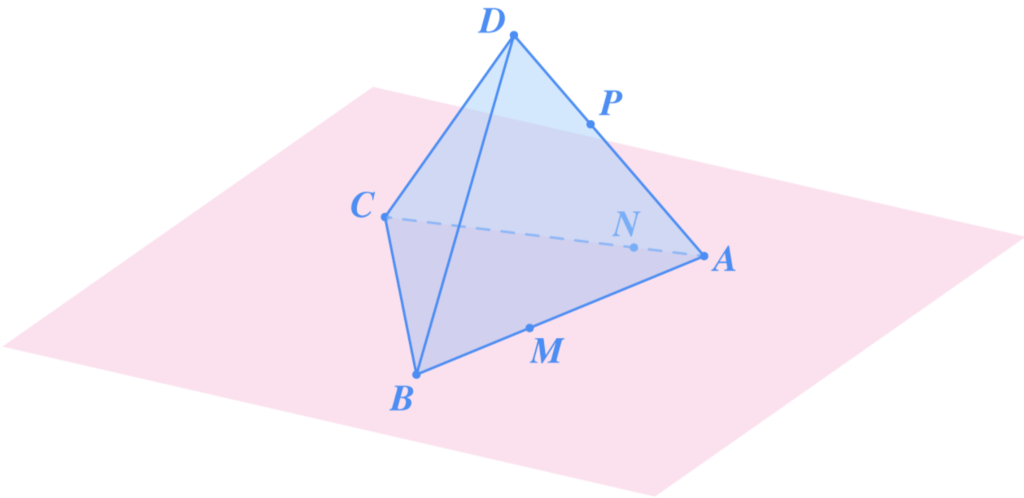
Pour montrer que deux plans distincts sont sécants, on trouve au moins un point d'intersection.

→ Si on en trouve deux, la droite d'intersection est alors la droite qui passe par ces deux points.

Nous allons utiliser cette méthode dans l'exemple ci-dessous.

Exemple

Dans un tétraèdre $ABCD$, M, N et P sont trois points, placés respectivement sur $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.



Nous cherchons l'intersection du plan (MNP) avec le plan (BCD).
Les deux plans ne sont pas confondus car, par exemple, le point M n'appartient pas au plan (BCD).

→ Nous allons donc chercher deux points qui appartiennent à ces deux plans.

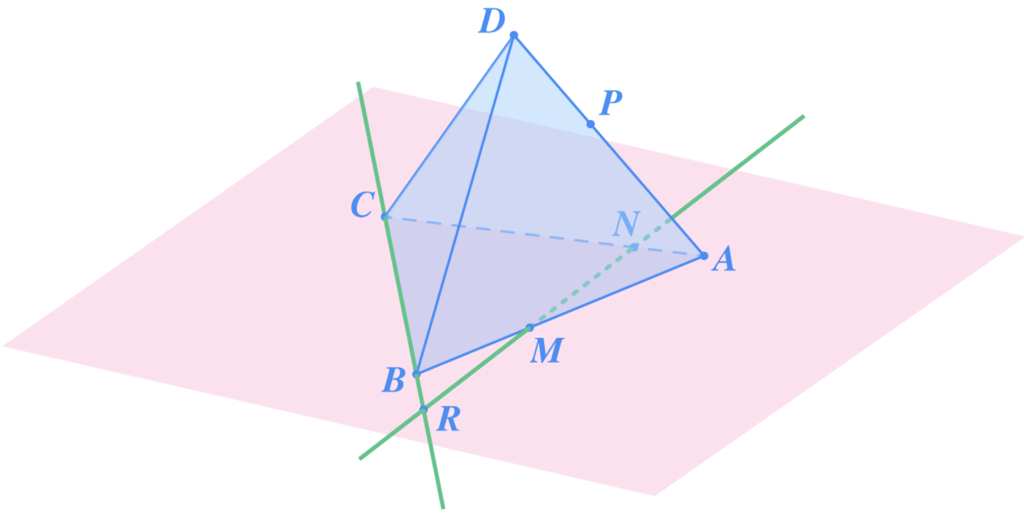
1 **Traçons la droite (MN).**

(MN) et (BC) sont coplanaires, elles sont contenues dans le plan (ABC).

→ Elles sont donc parallèles ou sécantes.

Supposons qu'elles sont sécantes ; on appelle R leur point d'intersection.
$R \in (MN)$, donc $R \in (MNP)$; de même, $R \in (BC)$, donc $R \in (BCD)$.

→ Ainsi, R appartient à l'intersection de (MNP) et (BCD).

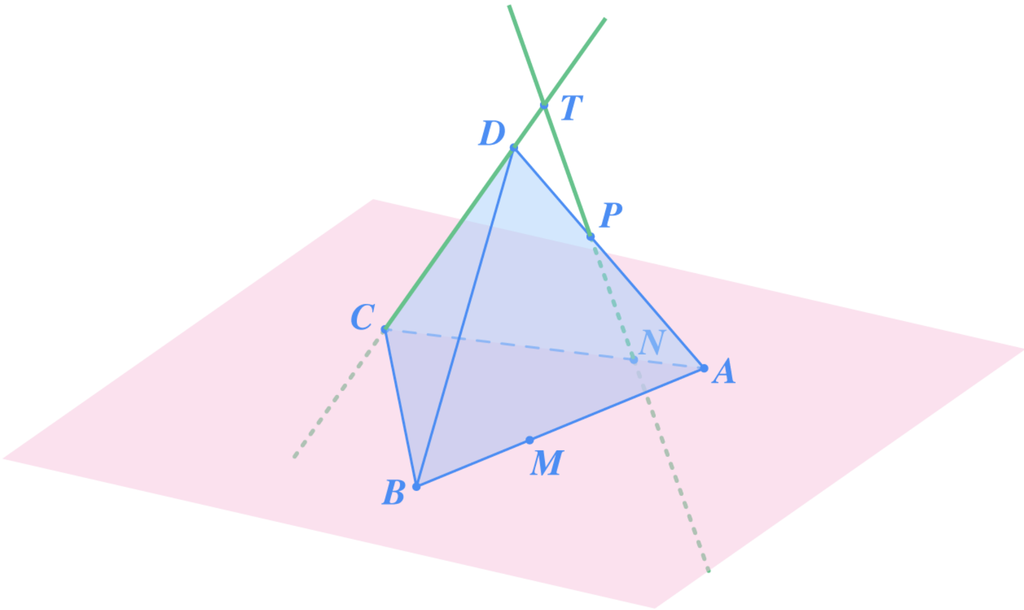


2 **Traçons maintenant la droite (NP).**

(NP) et (CD) sont coplanaires, elles sont contenues dans (ACD).

→ Elles sont donc parallèles ou sécantes.

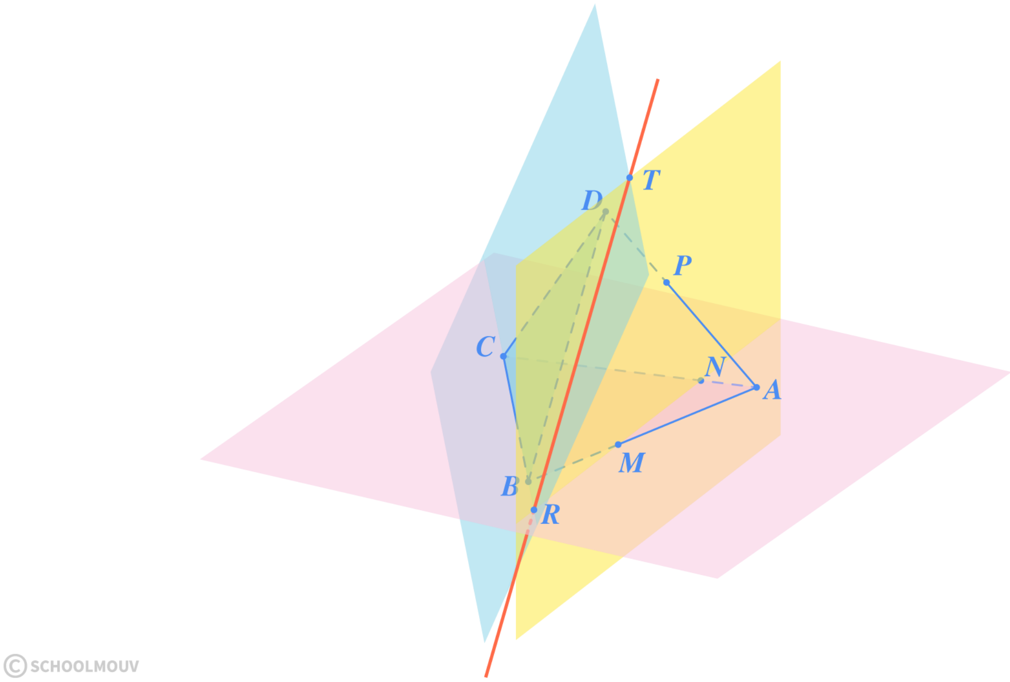
Supposons là aussi qu'elles sont sécantes, en un point T.
$T \in (NP)$, donc $T \in (MNP)$; de même, $T \in (CD)$, donc $T \in (BCD)$.



Nous pouvons conclure : nous avons trouvé deux points distincts T et R à l'intersection des plans (MNP) et (BCD).

→ Les deux plans sont donc sécants et :

$$(MNP) \cap (BCD) = (TR)$$



Dans cet exemple, nous avons fait l'hypothèse que les points M, N et P n'occupaient pas de position particulière sur les arêtes de $ABCD$.
Si, maintenant, $(NP) \parallel (CD)$ et $(MN) \parallel (BC)$, alors nous avons une autre configuration possible.

→ Nous allons utiliser les vecteurs pour prouver que les plans (MNP) et (BCD) sont parallèles.

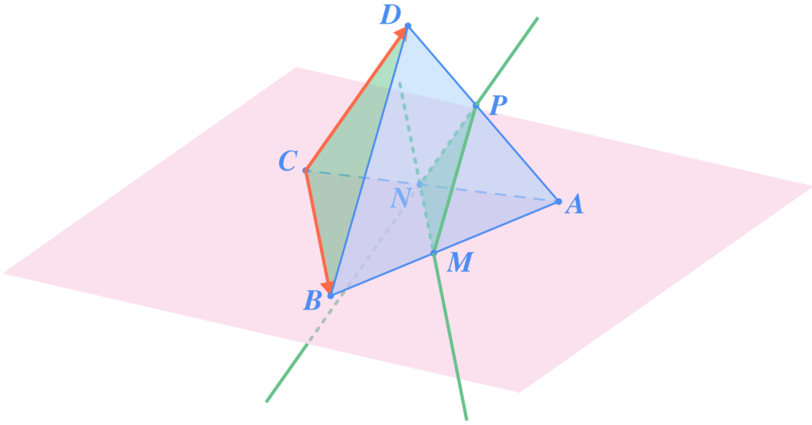
b. Caractérisation vectorielle du parallélisme de deux plans

Repartons de l'exemple précédent, en précisant davantage les emplacements des points M, N et P.

Exemple

Dans le tétraèdre $ABCD$, nous avons cette fois :

$$\begin{cases} M \in [AB] \\ N \in [AC] \\ (MN) \parallel (BC) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P \in [AD] \\ (NP) \parallel (CD) \end{cases}$$



On munit le plan (BCD) du repère $\left(C\ ;\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CD}\right)$.

- Dans le plan (ABC), (NM) est parallèle à (BC), donc $\overrightarrow{NM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CB}$.
- Dans le plan (ADC), (PN) est parallèle à (DC), donc $\overrightarrow{NP}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD}$.

→ $\overrightarrow{NM}$ est une combinaison linéaire de $\left(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CD}\right)$, donc $(NM) \parallel (BDC)$, comme nous l'avons établi au deuxième paragraphe de ce cours.

→ De façon analogue, $\overrightarrow{NP}$ est une combinaison linéaire de $\left(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CD}\right)$, donc $(NP) \parallel (BDC)$.

Le plan (MNP) contient deux droites sécantes toutes deux parallèles au plan (BCD).
Les vecteurs $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{NP}$, qui forment une base de (MNP), sont respectivement colinéaires à $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
Donc $\left(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CD}\right)$ forme une autre base de (MNP).

→ Dans ce cas, les deux plans sont parallèles.

Nous appliquons ici la propriété suivante qui est admise.

Propriété

Si (P') contient deux droites sécantes qui sont parallèles à un plan (P), alors (P') et (P) sont parallèles.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires, et A et B deux points de $\mathcal{E}$.
Le plan $(A\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$ et le plan $(B\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$ sont parallèles.

Définition

Direction d'un plan :

Soit un plan (P) de base $(\vec{u},\ \vec{v})$.
Cette base est appelée direction du plan (P).

Nous pouvons alors formuler la propriété précédente d'une autre manière.

Propriété

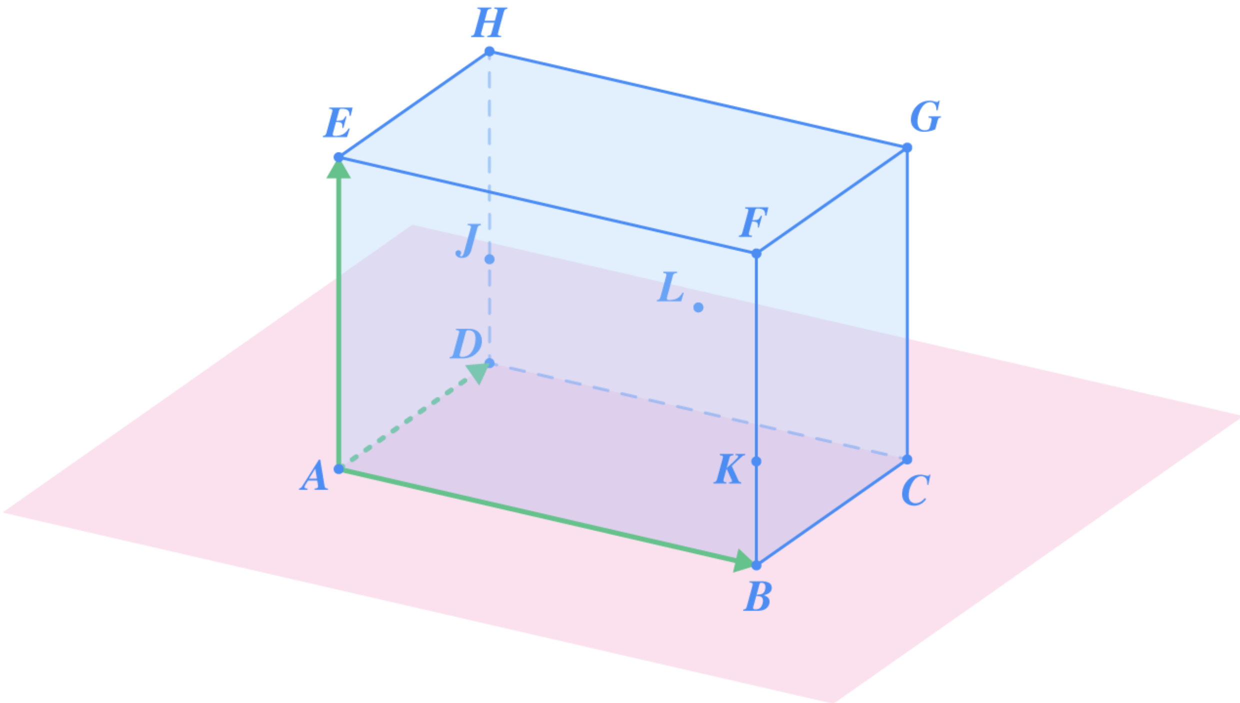
Deux plans qui ont la même direction sont parallèles.

Ou encore :
$P = (A\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$ et $P' = (B\ ;\ \overrightarrow{u'},\ \overrightarrow{v'})$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont tous les deux des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

Prenons un exemple supplémentaire pour illustrer cette propriété.

Exemple

Soit le pavé droit $ABCDEFGH$.



Le plan (ABC) est muni du repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right)$, et $\mathcal{E}$ du repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

Nous avons placé les points J, K et L de coordonnées :

$$J\left(0\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{3}\right) \quad K\left(1\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{3}\right) \quad L\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{3}\right)$$

1. Exprimons les coordonnées de $\overrightarrow{JK}$:

$$\begin{pmatrix} x_K - x_J \\ y_K - y_J \\ z_k - z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Donc $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

2. De manière analogue, calculons les coordonnées de $\overrightarrow{LJ}$:

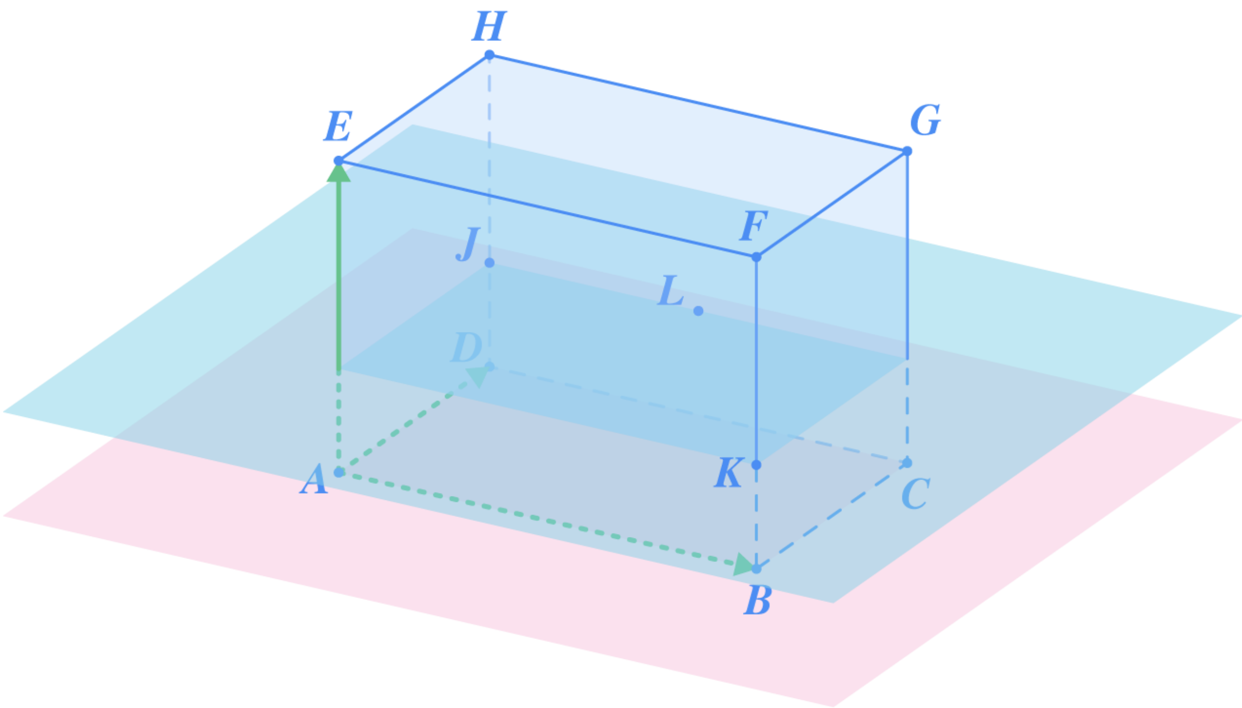
$$\begin{pmatrix} x_J - x_L \\ y_J - y_L \\ z_J - z_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Donc $\overrightarrow{LJ} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$.

c. Ainsi, $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{LJ}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

→ On en déduit que le plan (KJL) est parallèle à (ABC).



Conclusion :

Dans ce cours, nous nous sommes intéressés à la position relative des droites et des plans. Déterminer la nature et intersection de deux droites, de deux plans ou d'une droite et d'un plan nécessite de connaître les configurations possibles.
Et les vecteurs sont des outils supplémentaires pour prouver le parallélisme dans les trois cas.

L'ensemble des propriétés vues ici permet de mieux se représenter les objets géométriques et de développer sa vision de l'espace.
Nous poursuivrons ce travail en ajoutant de nouveaux outils dans le chapitre suivant.