Les nombres complexes d'un point de vue algébrique

Introduction :

Dans ce cours, nous allons introduire les nombres complexes qui constituent un nouvel ensemble de nombres. Cet ensemble a été introduit au XVI^{e} siècle pour résoudre des équations du troisième degré. Les nombres complexes interviennent aujourd'hui dans de nombreux domaines scientifiques.

Ce cours a pour but de définir ce nouvel ensemble de nombres et certaines propriétés liées à l'écriture algébrique des nombres complexes. Nous découvrirons notamment comment résoudre des équations simples dans ce nouvel ensemble.

1 L'ensemble des nombres complexes

a. Définitions et propriétés

Commençons par définir ce nouvel ensemble que constituent les **nombres complexes**.

Définition

Ensemble des nombres complexes :

On admet qu'il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels, autrement dit : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition qui prolonge celle de $\mathbb{R}$, avec les mêmes propriétés ;

- $\mathbb{C}$ est muni d'une multiplication qui prolonge celle de $\mathbb{R}$, avec les mêmes propriétés ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$;
- Pour tout élément z de $\mathbb{C}$, il existe un unique couple de réels $(a\ ;\ b)$ tel que $z = a + \mathrm{i}b$.

Donnons quelques premiers exemples, très simples.

Exemple

- $4 + 2\mathrm{i}$ est un nombre complexe, avec $a = 4$ et $b = 2$.
- $5\mathrm{i}$ est un nombre complexe, avec $a = 0$ et $b = 5$.
- Les nombres -2, 0, 7, $\sqrt{2}$ sont des nombres réels, mais, comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, ce sont aussi des nombres complexes !

Dans ce cours, nous nous intéressons plus particulièrement à la **forme algébrique** des nombres complexes.

Définition

Forme algébrique d'un nombre complexe :

L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b deux nombres réels, est appelée forme algébrique de z.

→ a est appelé partie réelle de z, notée $\mathfrak{Re}(z) = a$;

→ b est appelé partie imaginaire de z , notée $\mathfrak{Im}(z) = b$.

Faisons ici une remarque importante.

À retenir

Les parties réelle et imaginaire d'un complexe sont des nombres réels.
Par exemple, la partie imaginaire de $z = 6 - 3\mathrm{i}$ est $\mathfrak{Im}(z) = -3$: il faut

tenir compte du signe et ne pas y inclure le i.

Les parties réelle ou imaginaire d'un complexe peuvent être nulles.
Par exemple, le complexe $z = 2\mathrm{i}$ a pour partie réelle $\mathfrak{Re}(z) = 0$ et pour partie imaginaire $\mathfrak{Im}(z) = 2$.

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b deux nombres réels.

- Si $\mathfrak{Im}(z) = 0$, alors z est un nombre réel.
- Si $\mathfrak{Re}(z) = 0$, alors z est un imaginaire pur.

Remarquons que le complexe $z = 0$ est l'unique complexe qui est à la fois réel (car $\mathfrak{Im}(z) = 0$) et imaginaire pur (car $\mathfrak{Re}(z) = 0$).

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes tel que $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$, avec a, b, a' et b' des nombres réels.
Alors $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Attention

Il est impossible de comparer deux nombres complexes, en effet $z < z'$ n'a pas de sens.

À retenir

- L'égalité entre deux nombres complexes implique que leurs parties réelles sont égales et que leurs parties imaginaires sont aussi égales.
- Un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelles et imaginaires sont nulles.

Exemple

Soit $z = 3\mathrm{i} - 4$ et $z' = 3\mathrm{i}$.
Alors z et z' sont deux nombres complexes différents, car leurs parties réelles sont différentes.

→ En effet, $\mathfrak{Re}(z) = -4$ et $\mathfrak{Re}(z') = 0$.

On remarque aussi que z' est un imaginaire pur puisque sa partie réelle est nulle.

b. Opérations dans $\mathbb{C}$

Nous l'avons dit dans la définition initiale, $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles dans $\mathbb{R}$.

→ Nous en tirons donc les propriétés suivantes.

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes tel que $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$, avec a, b, a' et b' des nombres réels.
Nous avons alors :

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + a') + \mathrm{i}(b + b') \\ zz' &= (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b) \end{aligned}$$

Démonstration

Les règles de calcul sur l'addition et la multiplication étant les mêmes que pour l'ensemble des réels, nous avons :

$$\begin{aligned}
z+z' &= (a+\mathrm{i}b)+(a'+\mathrm{i}b') \\
&= a+\mathrm{i}b+a'+\mathrm{i}b' \\
&= (a+a')+\mathrm{i}(b+b')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
zz' &= (a+\mathrm{i}b)\times(a'+\mathrm{i}b') \\
&= aa'+a\mathrm{i}b'+\mathrm{i}ba'+\mathrm{i}^2bb' \\
&= aa'+\mathrm{i}(ab'+a'b)-bb' \quad \text{[car } \mathrm{i}^2=-1\text{]} \\
&= (aa'-bb')+\mathrm{i}(ab'+a'b)
\end{aligned}$$

Comme pour les nombres réels, nous pouvons définir l'**opposé** d'un nombre complexe et l'**inverse** d'un nombre complexe non nul.

Définition

Opposé d'un nombre complexe :

Pour tout nombre complexe z, il existe un unique complexe z' tel que $z+z'=0$.

→ z' est appelé opposé de z, on le note $z'=-z$.

Propriété

Si $z=a+\mathrm{i}b$, avec a et b des réels, alors :

$$\begin{aligned}
-z &= -a+\mathrm{i}(-b) \\
&= -a-\mathrm{i}b
\end{aligned}$$

Démonstration

Posons $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$, avec a, b, a' et b' des réels. Alors :

$$z+z'=0 \Leftrightarrow (a+a')+\mathrm{i}(b+b')=0$$

Les parties réelle et imaginaire de $z+z'$ doivent être nulles, donc : $a+a'=0$ et $b+b'=0$.

→ Soit : $a'=-a$ et $b'=-b$.

Définition

Inverse d'un complexe :

Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique complexe z' tel que $zz'=1$.

→ z' est appelé inverse de z, on le note $z'=\frac{1}{z}$.

Propriété

Si $z=a+\mathrm{i}b$, avec a et b des réels, alors :

$$\frac{1}{z}=\frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$$

Démonstration

Posons $z=a+\mathrm{i}b$, avec a, b des réels non tous les deux nuls. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}&=\frac{1}{a+\mathrm{i}b}\\&=\frac{a-\mathrm{i}b}{(a+\mathrm{i}b)\times(a-\mathrm{i}b)}\\&=\frac{a-\mathrm{i}b}{a^2-(\mathrm{i}b)^2}\\&\text{[les identités remarquables sont valables dans }\mathbb{C}]\\&=\frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}\ [\text{car }\mathrm{i}^2=-1]\end{aligned}$$

> → Nous avons ici multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de ce dernier. Nous découvrirons plus loin combien cette « technique » est utile.

Nous allons prendre quelques exemples d'opération.

Exemple

> Posons $z_1 = 4 + 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 3 - 5\mathrm{i}$.
>
> → Nous avons alors :
>
> $$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (4+3) + \mathrm{i}(2-5) \\ &= 7 - 3\mathrm{i} \end{aligned}$$
>
> $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \big(4 \times 3 - 2 \times (-5)\big) + \mathrm{i}\big(4 \times (-5) + 2 \times 3\big) \\ &= 22 - 14\mathrm{i} \end{aligned}$$
>
> $$-z_1 = -4 - 2\mathrm{i}$$
>
> $$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} &= \frac{4 - 2\mathrm{i}}{4^2 + 2^2} \\ &= \frac{4 - 2\mathrm{i}}{20} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{10}\mathrm{i} \end{aligned}$$
>
> → Là aussi, nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué de ce dernier. Nous découvrirons plus loin combien cette « technique » est utile.

Donnons maintenant quelques propriétés qui vont utiliser les définitions ci-dessus.

Propriété

z et z' sont deux nombres complexes tel que $z = a + ib$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$, avec a, b, a' et b' des réels.
Nous avons alors :

$$z - z' = (a - a') + \mathrm{i}(b - b')$$

Si de plus z' est non nul, alors :

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$$

Les sommes et soustractions de complexes se calculent simplement avec les complexes sous forme algébrique.
Les produits et quotients de complexes demandent plus de vigilance dans les calculs, en utilisant les propriétés de la distributivité.

→ Dans ces cas, nous verrons que la forme algébrique n'est pas la plus efficace, les cours suivants présenteront d'autres formes d'écriture des complexes, qui y sont plus adaptés.

2 | Conjugué d'un nombre complexe

Nous allons dans cette partie introduire un nombre complexe que l'on appelle le **conjugué**. Il est particulièrement utilisé en géométrie.

a. Définition

Avant de découvrir les propriétés, utiles, du conjugué, commençons par définir simplement cette notion.

Définition

Conjugué de z :

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$, avec a et b deux réels.
Alors le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Illustrons par des exemples simples cette définition.

Exemple

- $z_1 = 4 + 2\text{i}$ a pour conjugué $\overline{z_1} = 4 - 2\text{i}$.
- $z_2 = -3\text{i} + 2$ a pour conjugué $\overline{z_2} = 3\text{i} + 2$.
- $z_3 = -5 + 6\text{i}$ a pour conjugué $\overline{z_3} = -5 - 6\text{i}$.

b. Propriétés

Considérons un nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b deux nombres réels.

1. Si z est un réel, alors $b = 0$ et $z = a$.

→ $\bar{z} = a = z$.

2. Si z est un imaginaire pur, alors $a = 0$ et $z = ib$.

→ $\bar{z} = -ib = -z$.

Nous avons ainsi le théorème suivant.

Théorème

Soit z un nombre complexe :

- z est un réel si et seulement si $z = \bar{z}$;
- z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

Nous avons aussi les propriétés suivantes.

Propriété

Pour tout nombre complexe z, on a :

$$\begin{aligned} z+\bar{z} &= 2\,\mathfrak{Re}(z) \\ z-\bar{z} &= 2\mathrm{i}\,\mathfrak{Im}(z) \\ \bar{\bar{z}} &= z \end{aligned}$$

Démonstration

En effet , posons $z = a + ib$, avec a et b des réels.

- Nous avons alors :

$$\begin{aligned} z+\bar{z} &= a+ib+a-ib \\ &= 2a \\ &= 2\,\mathfrak{Re}(z) \end{aligned}$$

- Nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} z-\bar{z} &= a+ib-(a-ib) \\ &= a+ib-a+ib \\ &= 2ib \\ &= 2\mathrm{i}\,\mathfrak{Im}(z) \end{aligned}$$

- Et enfin :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{z}} &= \overline{a-ib} \\ &= a+ib \\ &= z \end{aligned}$$

Continuons à donner les propriétés du conjugué d'un nombre complexe. Là encore, nous en donnerons les démonstrations ensuite.

Propriété

1. Pour tous nombres complexes z et z', on a :

$$\overline{-z} = -\bar{z}$$
$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$$
$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$$

2. Pour tout entier naturel n :

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

3. Si de plus $z \neq 0$:

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$
$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\bar{z}}$$

Démonstration

En effet, posons $z = a + \text{i}b$, avec a et b des réels, et $z' = a' + \text{i}b'$, avec a' et b' des réels.

1. Commençons par démontrer les trois premières formules :

$$\begin{aligned}\overline{-z} &= \overline{-(a+\mathrm{i}b)}\\ &= \overline{-a-\mathrm{i}b}\\ &= -a+\mathrm{i}b\\ &= -(a-\mathrm{i}b)\\ &= -\bar{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{z+z'} &= \overline{(a+\mathrm{i}b)+(a'+\mathrm{i}b')}\\ &= \overline{a+a'+\mathrm{i}(b+b')}\\ &= a+a'-\mathrm{i}(b+b')\\ &= a-\mathrm{i}b+a'-\mathrm{i}b'\\ &= \bar{z}+\overline{z'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'une part : } \overline{z\times z'} &= \overline{aa'-bb'+\mathrm{i}(ab'+a'b)}\\ &\quad\text{[en utilisant la propriété du produit]}\\ &= aa'-bb'-\mathrm{i}(ab'+a'b)\\ \text{D'autre part : } \bar{z}\times\overline{z'} &= (\overline{a+\mathrm{i}b})\times(\overline{a'+\mathrm{i}b'})\\ &= (a-\mathrm{i}b)\times(a'-\mathrm{i}b')\\ &= aa'-a\mathrm{i}b'-\mathrm{i}ba'+\mathrm{i}^2bb'\\ &= aa'-bb'-\mathrm{i}(ab'+a'b)\\ \text{Donc : } \overline{z\times z'} &= \bar{z}\times\overline{z'}\end{aligned}$$

2. Démontrons par **récurrence** la propriété P_n suivante : « Pour tout entier naturel n, $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$ ».

Initialisation :

Pour $n=0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\overline{z^0} &= \overline{(a+\mathrm{i}b)^0}\\ &= 1\\ \text{et : } (\bar{z})^0 &= (a-\mathrm{i}b)^0\\ &= 1\\ \text{Donc : } \overline{z^0} &= (\bar{z})^0\end{aligned}$$

→ P_0 est vraie.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un rang k (entier naturel) tel que P_k est vraie :

→ $\overline{z^k} = (\bar{z})^k$.

Montrons que cela implique que P_{k+1} est aussi vraie.

→ C'est-à-dire : $\overline{z^{k+1}} = (\bar{z})^{k+1}$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \overline{z^{k+1}} &= \overline{z^k \times z} \\ &= \overline{z^k} \times \bar{z} \\ &= (\bar{z})^k \times \bar{z} \text{ [par hypothèse de récurrence]} \\ &= (\bar{z})^{k+1} \end{aligned}$$

→ Si P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie.

Conclusion :

Nous avons montré que la propriété était vraie au rang 0, et nous avons démontré qu'elle était héréditaire à partir de $n = 0$.

→ La propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

3. Supposons de plus que $z \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} z \times \frac{1}{z} &= 1 \\ \text{Donc : } \overline{z \times \frac{1}{z}} &= \bar{1} \\ &= 1 \\ \text{et : } \overline{z \times \frac{1}{z}} &= \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ est l'inverse de $\bar{z}$.

→ Nous avons donc :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

→ De même, toujours en supposant $z \neq 0$:

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} &= \overline{z' \times \frac{1}{z}} \\ &= \overline{z'} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \\ &= \overline{z'} \times \frac{1}{\overline{z}} \\ &= \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}\end{aligned}$$

L'utilisation du conjugué d'un complexe est fréquente lors de la manipulation des nombres complexes.

→ On remarquera notamment que le produit $z\overline{z}$ est toujours un nombre réel positif (ou nul).

À retenir

En effet, en posant $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b des nombres réels :

$$\begin{aligned}z\overline{z} &= (a + \mathrm{i}b) \times (a - \mathrm{i}b) \\ &= a^2 - (\mathrm{i}b)^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Astuce

Cette propriété est bien utile lorsque l'on a un complexe écrit sous la forme de quotient de complexes ; nous nous en sommes déjà servis plusieurs fois.

Ainsi, pour en déduire sa forme algébrique, il faut pouvoir séparer la partie réelle et la partie imaginaire, et, pour cela, il faut que le dénominateur soit un nombre réel, une solution rapide et efficace consiste à multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.
Nous allons continuer à en avoir des exemples dans la partie suivante.

3 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Dans cette partie, nous allons apprendre, au travers d'exemples, à résoudre des premières équations, simples, dans $\mathbb{C}$.

a. Résolution d'équations du premier degré comprenant uniquement z dans $\mathbb{C}$

À retenir

- Pour résoudre une équation du premier degré ne comportant que z, il faut comme dans le cas d'équations dans $\mathbb{R}$, isoler z.
- Pour avoir la forme algébrique de z, si on obtient un quotient de complexes, il faut multiplier ce quotient au numérateur et au dénominateur par le conjugué du dénominateur afin d'isoler la partie réelle et la partie imaginaire.

Exemple

1 Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $3z - 4 = 2\text{i} + 3$

$$\begin{aligned} 3z - 4 = 2\text{i} + 3 &\Leftrightarrow 3z = 2\text{i} + 3 + 4 \\ &\Leftrightarrow 3z = 2\text{i} + 7 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2\text{i} + 7}{3} \\ & = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}\text{i} \end{aligned}$$

→ La solution dans $\mathbb{C}$ est :

$$z=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\text{i}$$

Exemple

2 Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4z+\text{i}=\text{i}z-3$:

$$\begin{aligned}4z+\text{i}=\text{i}z-3 &\Leftrightarrow 4z-\text{i}z=-\text{i}-3\\ &\Leftrightarrow z(4-\text{i})=-3-\text{i}\\ &\Leftrightarrow z=\frac{-3-\text{i}}{4-\text{i}}\end{aligned}$$

Pour exprimer z sous forme algébrique, on multiplie le quotient de droite au numérateur et au dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned}z&=\frac{(-3-\text{i})\times(4+\text{i})}{(4-\text{i})\times(4+\text{i})}\\ &=\frac{-12-3\text{i}-4\text{i}-\text{i}^2}{4^2-\text{i}^2}\\ &=\frac{-12-3\text{i}-4\text{i}+1}{16+1}\\ &=\frac{-11-7\text{i}}{17}\\ &=-\frac{11}{17}-\frac{7}{17}\text{i}\end{aligned}$$

→ La solution dans $\mathbb{C}$ est :

$$z=-\frac{11}{17}-\frac{7}{17}\text{i}$$

Exemple

3 Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\frac{4z}{2\text{i}-z}=2+\text{i}$$

$$\begin{aligned}\frac{4z}{2\mathrm{i}-z}=2+\mathrm{i} &\Leftrightarrow 4z=(2+\mathrm{i})(2\mathrm{i}-z)\\ &\Leftrightarrow 4z=4\mathrm{i}-2z-2-\mathrm{i}z\\ &\Leftrightarrow 4z+2z+\mathrm{i}z=4\mathrm{i}-2\\ &\Leftrightarrow z(6+\mathrm{i})=4\mathrm{i}-2\\ &\Leftrightarrow z=\frac{-2+4\mathrm{i}}{6+\mathrm{i}}\end{aligned}$$

Ici aussi, nous allons utiliser le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned}z&=\frac{(-2+4\mathrm{i})\times(6-\mathrm{i})}{(6+\mathrm{i})\times(6-\mathrm{i})}\\ &=\frac{-12+2\mathrm{i}+24\mathrm{i}+4}{6^2-\mathrm{i}^2}\\ &=\frac{-8+26\mathrm{i}}{37}\\ &=-\frac{8}{37}+\frac{26}{37}\mathrm{i}\end{aligned}$$

→ La solution dans $\mathbb{C}$ est :

$$z=-\frac{8}{37}+\frac{26}{37}\mathrm{i}$$

b. Résolution d'équations avec $\bar{z}$ dans $\mathbb{C}$

À retenir

- Pour résoudre une équation du premier degré comportant z et $\bar{z}$, il faut remplacer z et $\bar{z}$ par $a+ib$ et $a-ib$, avec a et b des réels.
- On séparera dans l'expression obtenue les parties réelles et les parties imaginaires afin de déterminer les valeurs possibles pour a et b.

Exemple

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z-4\bar{z}=7-\mathrm{i}$.

Posons $z = a + ib$, avec a et b des réels.
Donc $\bar{z} = a - ib$ et l'équation devient :

$$\begin{aligned} a + ib - 4(a - ib) = 7 - \mathrm{i} &\Leftrightarrow a + ib - 4a + 4ib = 7 - \mathrm{i} \\ &\Leftrightarrow -3a + 5ib = 7 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales.
Nous avons ainsi :

$$\begin{cases} -3a = 7 \\ 5b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{7}{3} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

→ L'unique solution est :

$$z = -\frac{7}{3} - \frac{1}{5}\mathrm{i}$$

Exemple

2 Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $3z = \mathrm{i}\bar{z} + 5\mathrm{i} - 1$.

Posons $z = a + ib$, avec a et b des réels.
Donc $\bar{z} = a - ib$ et l'équation devient :

$$\begin{aligned} 3(a + \mathrm{i}b) = \mathrm{i}(a - \mathrm{i}b) + 5\mathrm{i} - 1 &\Leftrightarrow 3a + 3\mathrm{i}b = \mathrm{i}a + b + 5\mathrm{i} - 1 \\ &\Leftrightarrow 3a + 3\mathrm{i}b = (b - 1) + \mathrm{i}(a + 5) \end{aligned}$$

Isolons les parties réelles et imaginaires de part et d'autre de l'égalité, et nous obtenons un système de 2 équations à 2 inconnues à résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3a = b - 1 \\ 3b = a + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a + 1 \\ 3b = a + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a + 1 \\ 3(3a + 1) = a + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a + 1 \\ 9a + 3 = a + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a + 1 \\ 9a - a = 5 - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a + 1 \\ 8a = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a + 1 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

→ La solution dans $\mathbb{C}$ est :

$$z = \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\mathrm{i}$$

4 | Le binôme de Newton

Dans cette partie, nous allons nous servir de notions découvertes dans le cours de spécialité : « Factorielle, k-uplet, permutation et combinaison ».

Théorème

Soit z et z' deux nombres complexes.
On a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}(z+z')^n &= \binom{n}{0} z^n + \binom{n}{1} z^{n-1}z' + \ldots + \binom{n}{n-1} zz'^{\,n-1} + \binom{n}{n} z'^{\,n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} z'^{\,k}\end{aligned}$$

Où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ sont les coefficients binomiaux.

Démonstration

Soit z et z' deux nombres complexes.
Démontrons par **récurrence** la propriété P_n suivante.

Pour tout entier naturel n :

$$(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} z'^{\,k}$$

1. **Initialisation :**

$$(z+z')^0 = 1$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} z^{0-k} z'^{\,k} &= \binom{0}{0} z^0 z'^{\,0} \\ &= 1 \ [\text{car } \binom{0}{0} = 1]\end{aligned}$$

→ P_0 est vraie.

2. **Hérédité :**

Supposons qu'il existe un rang m (entier naturel) tel que P_m est vraie :

$$\begin{aligned}(z+z')^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} z^{m-k} z'^{\,k} \\ &= \binom{m}{0} z^m + \binom{m}{1} z^{m-1}z' + \ldots + \binom{m}{m-1} zz'^{\,m-1} + \binom{m}{m} z'\end{aligned}$$

Montrons que cela implique que P_{m+1} est aussi vraie, c'est-à-dire :

$$(z+z')^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} z^{(m+1)-k} {z'}^{k}$$

Nous avons, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}(z+z')^{m+1} &= (z+z') \times (z+z')^m \\ &= (z+z') \times \left(\binom{m}{0} z^m + \binom{m}{1} z^{m-1} z' + \dots \right. \\ &\qquad \left. + \binom{m}{m-1} z {z'}^{m-1} + \binom{m}{m} {z'}^{m}\right)\end{aligned}$$

Nous allons maintenant développer, en mettant certains termes en couleur pour mieux nous y retrouver à l'étape suivante :

$$\begin{aligned}(z+z')^{m+1} = \binom{m}{0} z^{m+1} &+ \binom{m}{1} z^m z' + \dots \\ &+ \binom{m}{m-1} z^2 {z'}^{m-1} + \binom{m}{m} z {z'}^{m} \\ &+ \binom{m}{0} z^m z' + \binom{m}{1} z^{m-1} {z'}^{2} + \dots \\ &+ \binom{m}{m-1} z {z'}^{m} + \binom{m}{m} {z'}^{m+1}\end{aligned}$$

Nous savons que $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$ et nous factorisons les termes 2 à 2 (par exemple, les termes en vert, puis les termes en bleu), pour obtenir :

$$\begin{aligned}(z+z')^{m+1} = z^{m+1} &+ \left(\binom{m}{1} + \binom{m}{0}\right) z^m z' + \dots \\ &+ \left(\binom{m}{m} + \binom{m}{m-1}\right) z {z'}^{m} + {z'}^{m+1}\end{aligned}$$

Là aussi, nous savons que $\binom{m+1}{0} = \binom{m+1}{m+1} = 1$ et nous utilisons en outre la formule de Pascal pour les sommes de coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}(z+z')^{m+1} &= \binom{m+1}{0} z^{m+1} + \binom{m+1}{1} z^m z' + \ldots \\ &\quad + \binom{m+1}{m} z z'^{\,m} + \binom{m+1}{m+1} z'^{\,m+1} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} z^{(m+1)-k} z'^{\,k}\end{aligned}$$

→ Si P_m est vraie, alors P_{m+1} est vraie.

Conclusion :

Nous avons montré que la propriété était vraie au rang 0, et nous avons démontré qu'elle était héréditaire à partir de $n = 0$.

→ La propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

À retenir

En pratique, la formule du binôme de Newton permet de développer ou de factoriser des complexes, cela va notamment intervenir pour résoudre des équations de degré supérieur à 2 ou pour étudier certains polynômes de complexes (à voir dans les cours suivants).

Pour retrouver les coefficients binomiaux, nous utilisons le triangle de Pascal, que nous avons découvert en spécialité et que nous redonnons ici, pour rappel, jusqu'à $n = 9$:

$k \rightarrow$ $n \downarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						

4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Exemple

On cherche la forme algébrique de $(1+\mathrm{i})^4$:

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\times 1^{4-k}\times \mathrm{i}^k \\ &= \binom{4}{0}\times 1^4+\binom{4}{1}\times 1^3\times \mathrm{i}+\binom{4}{2}\times 1^2\times \mathrm{i}^2 \\ &\qquad +\binom{4}{3}\times 1^1\times \mathrm{i}^3+\binom{4}{4}\times \mathrm{i}^4 \\ &= 1\times 1+4\times 1\times \mathrm{i}+6\times 1\times \mathrm{i}^2 \\ &\qquad +4\times 1\times \mathrm{i}\times \mathrm{i}^2+1\times \mathrm{i}^2\times \mathrm{i}^2 \\ &= 1+4\mathrm{i}-6-4\mathrm{i}+1 \\ &= -4\end{aligned}$$

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons introduit l’ensemble des nombres complexes et présenté l’écriture algébrique des complexes ainsi que certaines de leurs propriétés.
Les règles de calcul associés aux complexes ont aussi été présentées, ainsi que leur utilisation dans des équations simples.
La notion de complexe conjuguée a également été définie.

Les prochains cours sur les complexes permettront d'élargir leur utilisation pour résoudre des équations plus difficiles et de voir leurs applications en géométrie.