Fonctions cosinus et sinus

Introduction :

En première, nous avons découvert les fonctions trigonométriques : cosinus et sinus.
Nous allons, dans ce cours, les approfondir, forts de tout ce que nous avons appris dans les cours précédents sur l'étude d'une fonction.

Dans un premier temps, nous effectuerons donc quelques rapides rappels, puis nous étudierons dans le détail les fonctions sinus et cosinus. Enfin, nous donnerons des limites usuelles de ces fonctions et nous montrerons comment résoudre des équations et inéquations trigonométriques.

1 Rappels

Reprenons, pour commencer, la **définition** du cosinus et du sinus d'un nombre réel.

Définition

Cosinus et sinus d'un nombre réel :

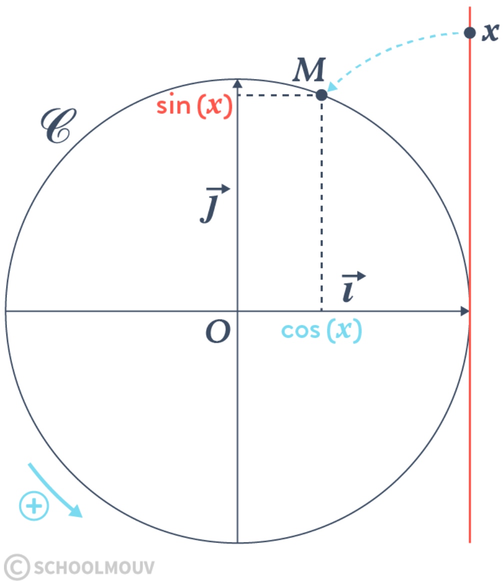
Soit M le point du cercle trigonométrique associé à un réel x.

- Le cosinus du réel x, noté $\cos{(x)}$ (ou $\cos{x}$), est l'abscisse du point M dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\, \vec{\jmath})$.
- Le sinus du réel x, noté $\sin{(x)}$ (ou $\sin{x}$), est l'ordonnée du point M dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\, \vec{\jmath})$.

→ À chaque réel x, on peut associer une unique valeur du cosinus et du sinus.

Exemple

Le point M a pour coordonnées $M\big(\cos(x)\ ;\ \sin(x)\big)$.



Redonnons maintenant quelques **valeurs particulières** des cosinus et sinus.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Les cosinus et sinus respectent les **propriétés** suivantes.

Propriété

Pour tout nombre réel x :

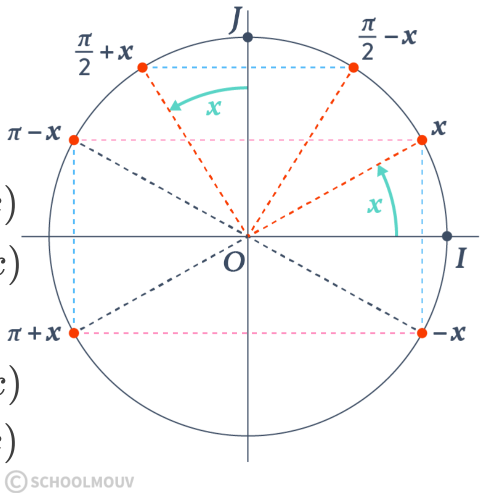
→ $-1 \leq \cos(x) \leq 1$;

→ $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;

→ $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Enfin, les cosinus et sinus d'**angles associés** respectent certaines égalités, qu'il faut connaître ou pouvoir retrouver à partir du cercle trigonométrique.

$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

2 | Étude de la fonction cosinus

Dans cette partie, nous allons étudier la fonction cosinus, ses variations et tracer sa courbe représentative, comme nous l'avions fait en première. Mais, cette fois, nous partirons de la fonction dérivée de la fonction cosinus.

Rappel

La fonction qui, à tout réel x, associe le cosinus de x est appelée **fonction cosinus**.

→ La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

a. Dérivabilité de la fonction cosinus

Propriété

1. La fonction cosinus est **continue** sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction cosinus est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

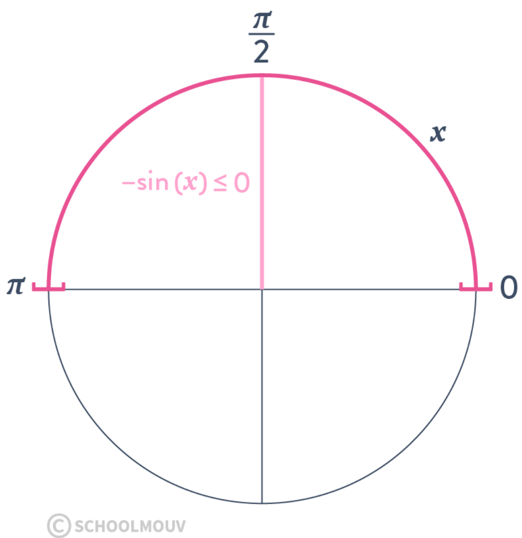
$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

Maintenant que nous connaissons la dérivée de la fonction cosinus, nous pouvons en réaliser l'étude.

b. Étude sur l'intervalle $[0\ ;\pi]$

Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, on sait que $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Observons le cercle trigonométrique :



Nous voyons :

1. $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$

→ Nous en déduisons :

$$\cos'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \pi \end{cases}$$

2. $\sin(x) > 0$, pour tout $x \in]0\ ;\ \pi[$

→ Nous en déduisons, pour tout $x \in]0\ ;\ \pi[$:

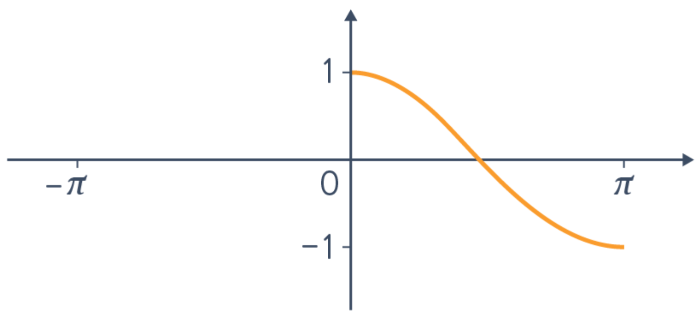
$$\begin{aligned} \sin(x) > 0 &\Leftrightarrow -\sin(x) < 0 \\ &\Leftrightarrow \cos'(x) < 0 \end{aligned}$$

C En conclusion, sur $[0\ ;\ \pi]$, la fonction cosinus :

- admet un maximum en $x = 0$, égal à $\cos(0) = 1$,
- est strictement décroissante sur $]0\ ;\ \pi[$,
- admet un minimum en $x = \pi$, égal à $\cos(\pi) = -1$.

→ Nous pouvons maintenant tracer le tableau de variations de la fonction cosinus, ainsi que sa courbe représentative sur $[0\ ;\ \pi]$.

x	0		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	$-$	0
$\cos(x)$	1	↘	-1



c. Étude sur l'intervalle $\mathbb{R}$ grâce à la parité et à la périodicité

1 Parité de la fonction cosinus

L'ensemble de définition de la fonction cosinus est $\mathbb{R}$, qui est bien un ensemble symétrique par rapport à 0.

Avec f la fonction cosinus, on a pour tout nombre réel x :

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$$

→ La fonction cosinus est **paire**.

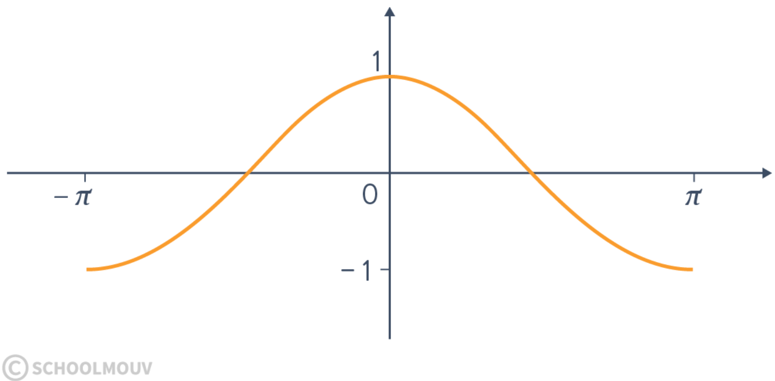
Rappel

- Une fonction f est paire si $f(-x) = f(x)$, pour tout $x \in D_f$ tel que $-x \in D_f$.
- Une fonction f est impaire si $f(-x) = -f(x)$, pour tout $x \in D_f$ tel que $-x \in D_f$.

Propriété

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

À l'aide de cette propriété, nous pouvons prolonger sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ la courbe tracée précédemment sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.



2 Périodicité de la fonction cosinus

Nous savons que, pour tout nombre réel x :

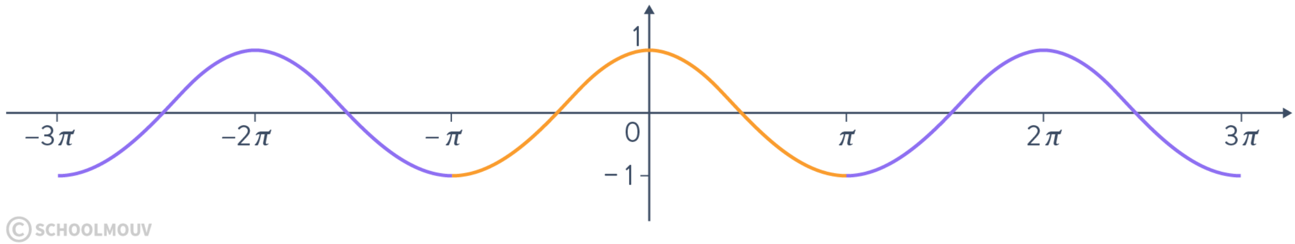
$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x) = f(x)$$

→ La fonction cosinus est **périodique de période 2π**.

Propriété

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction cosinus est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

À l'aide de cette propriété, nous pouvons prolonger sur $\mathbb{R}$ la courbe tracée précédemment sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.



Rappel

> La courbe représentative de la fonction cosinus est appelée **sinusoïde**.

3 | Étude de la fonction sinus

Étudions maintenant la fonction sinus.

Rappel

> La fonction qui, à tout réel x, associe le sinus de x est appelée **fonction sinus**.
>
> → La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

a. Dérivabilité de la fonction sinus

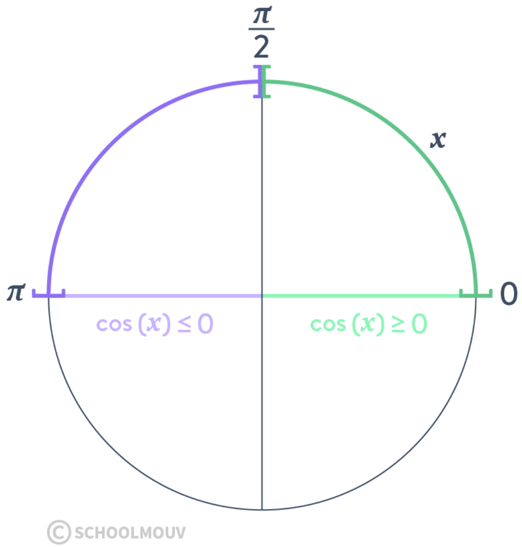
Propriété

1. La fonction sinus est **continue** sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction sinus est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

b. Étude sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$

Observons le cercle trigonométrique :



Nous voyons :

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

→ Nous en déduisons :

$$\sin'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

2. $\cos(x) > 0$, pour tout $x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$

→ Nous en déduisons, pour tout $x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\cos(x) > 0 \Leftrightarrow \sin'(x) > 0$$

3. $\cos(x) < 0$, pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$

→ Nous en déduisons, pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$:

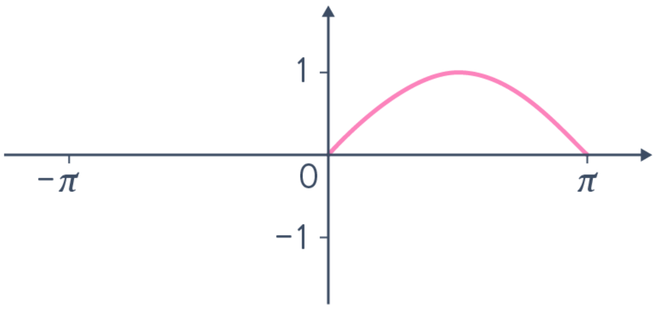
$$\cos(x) < 0 \Leftrightarrow \sin'(x) < 0$$

C. En conclusion, la fonction sinus :

- est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$,
- admet un maximum en $x = \frac{\pi}{2}$, égal à $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,
- est strictement décroissante sur l'intervalle $]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi]$.

→ Nous pouvons maintenant tracer le tableau de variations de la fonction sinus, ainsi que sa courbe représentative sur $[0\ ;\ \pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$		+	0	−	
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0



c. Étude sur l'intervalle $\mathbb{R}$ grâce à la parité et à la périodicité

1 Parité de la fonction sinus

L'ensemble de définition de la fonction sinus est $\mathbb{R}$, qui est bien un ensemble symétrique par rapport à 0.

Avec f la fonction sinus, on a pour tout nombre réel x :

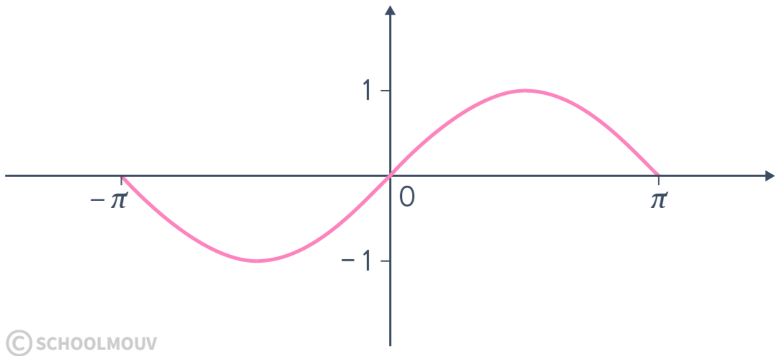
$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$$

→ La fonction sinus est **impaire**.

Propriété

> La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

À l'aide de cette propriété, nous pouvons prolonger sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ la courbe tracée précédemment sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.



2 Périodicité de la fonction sinus

Nous savons que, pour tout nombre réel x :

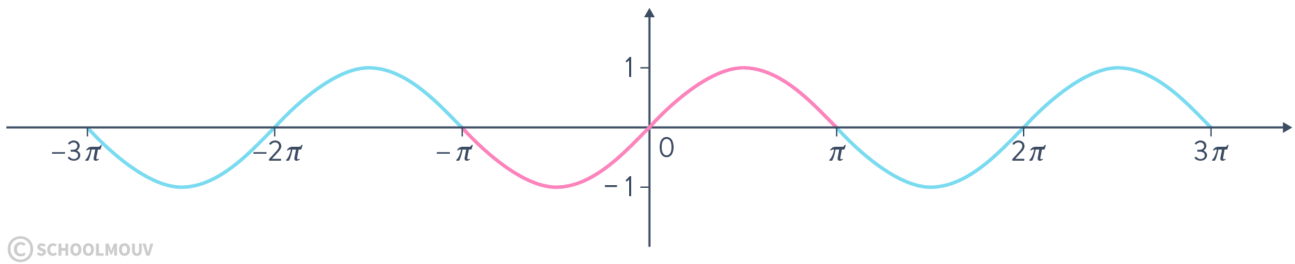
$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin(x)=f(x)$$

→ Donc la fonction sinus est **périodique de période 2π**.

Propriété

> La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

À l'aide de cette propriété, nous pouvons prolonger sur $\mathbb{R}$ la courbe tracée précédemment sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.



Rappel

> La courbe représentative de la fonction sinus est également appelée **sinusoïde**.

4 | Limites particulières, équations et inéquations trigonométriques

a. Limites

Grâce aux études de la partie précédente, nous voyons que les valeurs de cosinus et sinus varient entre -1 et 1.

À retenir

Ainsi, les fonctions cosinus et sinus n'ont **pas de limite en l'infini**.

Nous pouvons néanmoins définir deux limites particulières :

→ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$;

→ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} = 0$.

Ces derniers résultats sont à connaître, mais nous pouvons les retrouver grâce à la définition du nombre dérivé.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(0 + x) - \sin(0)}{x} \\ &= \sin'(0) \\ &= \cos(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

→ Il s'agit du coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction sinus au point d'abscisse 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(0 + x) - \cos(0)}{x} \\ &= \cos'(0) \\ &= -\sin(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

→ Il s'agit du coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction cosinus au point d'abscisse 0.

b. Composée de fonctions

Nous allons donner les dérivées pour les fonctions composées avec une fonction trigonométrique.

Propriété

Soit a et b deux réels.
Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax+b)$ et $g(x) = \sin(ax+b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x :

- $f'(x) = -a\sin(ax+b)$;
- $g'(x) = a\cos(ax+b)$.

Plus généralement, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, les fonctions définies par $f(x) = \cos\big(u(x)\big)$ et $g(x) = \sin\big(u(x)\big)$ sont dérivables sur I et on a :

- $f'(x) = -u'(x)\sin\big(u(x)\big)$;
- $g'(x) = u'(x)\cos\big(u(x)\big)$.

Exemple

1. La fonction f définie par $f(x) = \cos(4x-2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = -4\sin(4x-2)$$

2. La fonction g définie par $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

c. Équations et inéquations trigonométriques

Dans cette dernière partie, nous allons découvrir, à travers des exemples, comment nous pouvons résoudre des **équations** et des **inéquations** où les fonctions trigonométriques entrent en jeu.

1 Exemple d'équation trigonométrique

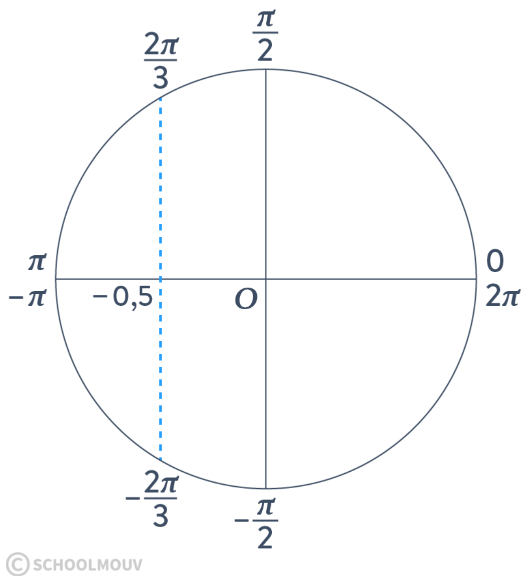
Exemple

> Nous allons résoudre l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Il est possible d'utiliser la représentation graphique de la fonction cosinus. Il suffit de relever, dans l'intervalle qui nous intéresse, les points dont l'ordonnée est égale à $-\frac{1}{2}$.

→ Leurs abscisses sont les solutions de l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.

Il est toutefois plus facile d'utiliser le **cercle trigonométrique**.



Dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, on peut lire les solutions :

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$\rightarrow$ $S=\left\{-\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right\}$

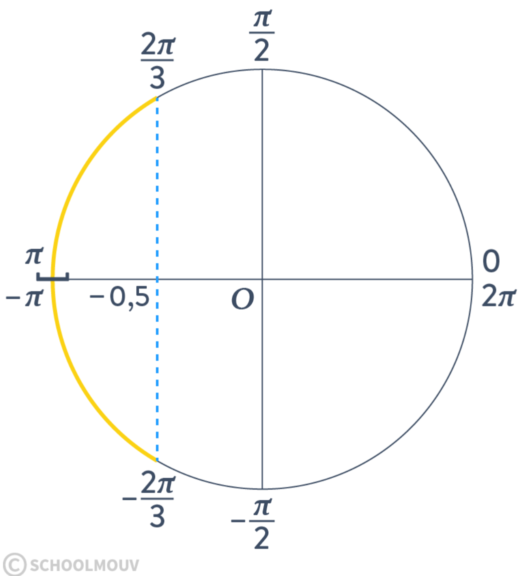
Remarque :
On procède de manière analogue, en utilisant le cercle trigonométrique, pour résoudre par exemple l'équation $\sin(x)=-\frac{1}{2}$.

b. Exemple d'inéquation trigonométrique

Exemple

> Nous allons résoudre l'inéquation $\cos(x)\leq-\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Utilisons, là aussi, le cercle trigonométrique.



Les solutions se lisent, dans l'ordre croissant :

- d'une part, l'intervalle $\left]-\pi\ ;\ -\frac{2\pi}{3}\right]$, où $-\pi$ est exclus car l'étude est limitée à l'intervalle $]-\pi\ ;\pi]$;
- d'autre part, l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$.

$\rightarrow$ $S=\left]-\pi\ ;\ -\dfrac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$

Remarque :
On procède de manière analogue pour résoudre une inéquation avec la

fonction sinus.

> Conclusion :
>
> Dans ce cours, nous avons étudié les fonctions cosinus et sinus – importantes notamment en physique-chimie pour décrire des ondes –, mais cette fois grâce à leurs dérivées, que nous avons découvertes.
> Puis, grâce au cercle trigonométrique, nous avons vu comment résoudre des équations et des inéquations trigonométriques.