Modèles démographiques : comprendre l'évolution quantitative des populations

Introduction :

Dans le cours précédent, « Origine et évolution de la biodiversité », nous avons notamment découvert comment estimer une population, en prenant l'exemple du nombre de batraciens dans un étang.
Or, si estimer une population est indispensable, il est tout aussi important, si ce n'est plus, d'ensuite étudier l'évolution de cette population, c'est-à-dire de savoir si, au fil du temps, son effectif diminuera, restera constant ou augmentera.
Par exemple, prévoir que la population d'une espèce va décroître jusqu'à disparaître peut permettre de prendre les dispositions nécessaires à sa sauvegarde avant qu'il ne soit trop tard.
Ou, à l'inverse, il peut être important de se rendre compte qu'une espèce croîtra tant qu'elle finira par mettre en danger son écosystème.

Ainsi, dans ce cours, nous allons découvrir comment modéliser mathématiquement l'évolution des effectifs d'une population, grâce à des suites numériques particulières : les suites arithmétiques pour le modèle linéaire et les suites géométriques pour le modèle exponentiel.
Cela nous permettra d'étudier le raisonnement de Malthus et d'en comprendre les limites.
Enfin, à travers un exemple concret, celui de l'évolution de la population japonaise, nous verrons comment appliquer le modèle exponentiel.

1 Modèle linéaire et suites arithmétiques

Nous allons commencer par le modèle le plus simple et, pour cela, nous allons nous servir de l'exemple des batraciens du cours précédent.

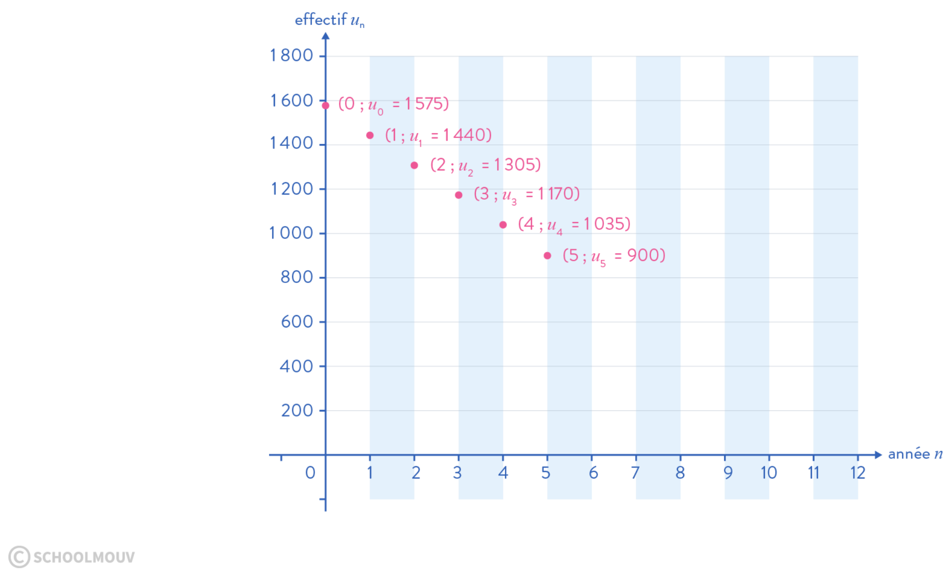
a. Modèle théorique

Nous avions estimé à $1\,575$ le nombre de batraciens dans l'étang. Nous prenons donc cet effectif pour référence (c'est l'année 0).
De plus, en considérant le nombre théorique de décès et de naissances par an, nous supposons que la population diminue chaque année de 135 individus.

→ Nous obtenons ainsi le tableau d'effectifs suivant :

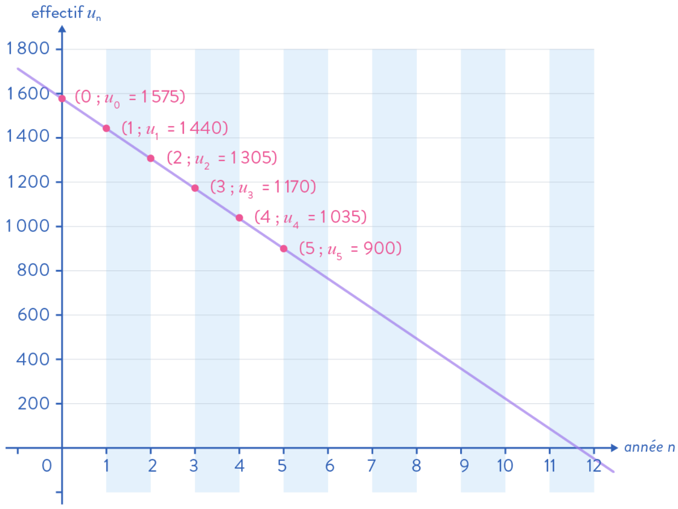
Année n	Effectif u_n
0	$1\,575$
1	$1\,440$
2	$1\,305$
3	$1\,170$
4	$1\,035$
5	900

→ Représentons maintenant graphiquement le nuage de points, en portant le rang de l'année n en abscisse et l'effectif u_n en ordonnée :



Nous voyons que tous les points sont alignés.

→ Ils appartiennent donc à une même droite :



© SCHOOLMOUV

Sous les hypothèses de notre exemple, la décroissance de la population des batraciens est dite **linéaire** (elle « suit » une droite).

Définition

Modèle linéaire :

Une grandeur discrète u varie de manière linéaire en fonction d'un palier entier n si sa variation absolue $u_{n+1} - u_n$ est constante.
Dans ce cas, les points $\big(n \ ; \ u(n)\big)$ sont alignés et situés sur une droite.

Reprenons notre exemple et déterminons l'équation réduite de la droite, qui sera de la forme $y = ax + b$, comme nous avons appris à le faire en classe de seconde.

1. Nous savons que, par exemple, elle passe par $(1 \ ; \ 1\,440)$ et $(3 \ ; \ 1\,170)$.

→ Nous en déduisons son coefficient directeur a :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1\,170 - 1\,440}{3 - 1} \\ &= \frac{-270}{2} \\ &= -135 \end{aligned}$$

Nous remarquons qu'il est égal à la **variation absolue**, c'est-à-dire à la différence d'effectif d'une année à l'autre.

2. Nous savons aussi qu'elle passe par $(0\ ;\ 1\,575)$.

→ Nous en déduisons :

$$b = 1\,575$$

b est ainsi égal à u_0, c'est-à-dire à la valeur de l'**effectif de référence**, à l'année 0.

3. Nous pouvons donc donner l'équation réduite de la droite à laquelle appartiennent tous les points :

$$y = -135x + 1\,575$$

C. Dans notre cas, u associe donc à la variable entière n l'effectif de la population de l'année n.

→ Cette fonction est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = -135n + 1\,575$$

Attention

> Si le palier qui nous intéresse ici est l'année, nous pouvons également choisir n'importe quel autre palier (décennie, quart de siècle, siècle, etc.), dans la mesure où ce choix est pertinent dans l'étude concernée.

b. Suites arithmétiques

Dans notre modèle linéaire précédent, nous avons dit que la variation absolue de l'effectif des batraciens est constante et égale à -135.
Autrement dit, si nous considérons deux années consécutives quelconques n et $(n+1)$, et leurs effectifs respectifs u_n et u_{n+1}, nous avons logiquement :

$$u_{n+1} - u_n = -135 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n - 135$$

→ Nous définissons ainsi une **suite arithmétique**.

Définition

Suite arithmétique :

Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

→ Le réel r est appelé raison de la suite (u_n).

Considérons le premier terme u_0 de la suite (u_n).
Nous pouvons représenter l'évolution de la manière suivante, jusqu'à n :

$$u_0 \overbrace{\xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \ldots \xrightarrow{+r} u_{n-1} \xrightarrow{+r}}^{n \text{ fois}} u_n$$

Pour passer d'un terme au suivant, nous ajoutons toujours le même nombre : la raison r.
En particulier, pour passer de u_0 à u_n, nous ajoutons n fois r à u_0 et obtenons u_n.

→ Nous en déduisons la propriété suivante.

Propriété

On considère une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr$$

→ u_n est appelé **terme général** de la suite et cette expression, qui donne la valeur de u_n en fonction de n, est appelée **formule explicite**.

Exemple

Reprenons l'exemple des batraciens, la suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1\,575$ et de raison $r = -135$. Son terme général est :

$$u_n = 1\,575 - 135n$$

→ Nous retrouvons, bien sûr, la définition de la fonction vue dans le premier paragraphe.

Calculons maintenant u_8 :

$$\begin{aligned} u_8 &= u_0 + 8r \\ &= 1\,575 - 8 \times 135 \\ &= 495 \end{aligned}$$

Approfondissons encore un peu notre étude de l'évolution de la population des batraciens. La raison de la suite arithmétique qui la modélise est strictement négative.

→ La suite est strictement décroissante.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r = 0$, (u_n) est constante et vaut u_0.
- Si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante et tendra vers $+\infty$.
- Si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante et tendra vers $-\infty$.

Comme nous nous intéressons à des effectifs, ceux-ci ne peuvent pas être négatifs.
En revanche, ce qui nous intéresse lorsque la suite est décroissante, c'est de savoir à quel rang n u_n s'annulera, car cela correspond tout simplement à l'extinction de l'espèce étudiée.

→ Pour cela, nous pouvons résoudre l'équation $u_n = 0$.

Exemple

Pour les batraciens, cela donne :

$$\begin{aligned} u_n = 0 &\Leftrightarrow 1\,575 - 135n = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{1\,575}{135} \approx 12 \end{aligned}$$

Si rien n'est fait, 12 ans après le début de l'étude, les batraciens auront disparu de l'étang.

Astuce

Remarquons que nous pouvons lire cette information directement sur la représentation graphique que nous avons donnée dans le premier paragraphe.

→ Il s'agit simplement du point où la droite coupe l'axe des abscisses.

À retenir

À un modèle linéaire, nous pouvons associer une suite (u_n) dite arithmétique, dont le terme général est donné par la formule :

$$u_n = u_0 + nr$$

[où r est la raison de la suite, égale à la variation absolue,
et où u_0 est le premier terme]

c. Modélisation réelle

Dans la pratique, les observations expérimentales ne correspondent jamais précisément aux prévisions théoriques.

À retenir

Cependant, lorsque la variation absolue d'une population entre 2 paliers est presque constante et peut donc être assimilée à une valeur r, nous pouvons modéliser son évolution par un modèle linéaire et par une suite arithmétique.

→ Plus précisément, nous pouvons ajuster le nuage de points qui représente l'évolution de la population par une droite, en effectuant une **régression linéaire**.

Nous allons donc donner la méthode pour effectuer cette régression linéaire, en l'appliquant sur l'exemple de la population de batraciens au moyen d'un tableur (nous pouvons aussi nous servir d'une calculatrice).

Définition

Régression linéaire :

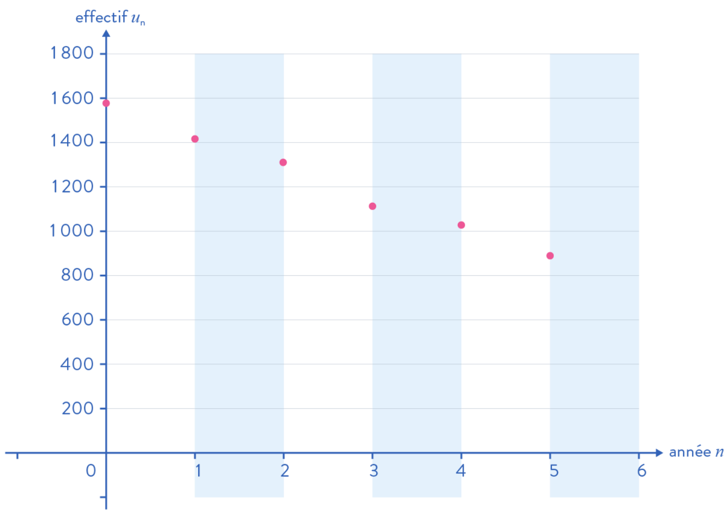
Effectuer une régression linéaire revient à déterminer la droite la plus ajustée aux données de l'étude.
Il existe plusieurs méthodes ; dans ce cours, nous nous intéressons à la droite dite des moindres carrés, utilisée par les tableurs ou les calculatrices.

→ Cette droite minimise les carrés des écarts entre les valeurs théoriques et les valeurs observées.

Reprenons donc notre exemple de la population de batraciens. Mais, cette fois, nous avons les relevés expérimentaux suivants, obtenus grâce aux techniques vues dans le cours précédent :

Année n	Effectif u_n
0	$1\,575$
1	$1\,425$
2	$1\,320$
3	$1\,135$
4	$1\,020$
5	890

1. Nous commençons par représenter le nuage de points, au moyen d'un tableur :



© SCHOOLMOUV

Astuce

> Sur la feuille d'un tableur :
>
> - entrer dans une colonne les années et dans une autre colonne les effectifs observés ;
> - sélectionner les cellules concernées ;

- insérer le graphique « Nuages de points » :
  - avec Calc d'OpenOffice : Insertion / Diagramme / XY (dispersion) / Points seuls,
  - avec Excel : Insérer / Graphique / XY (nuage de points).

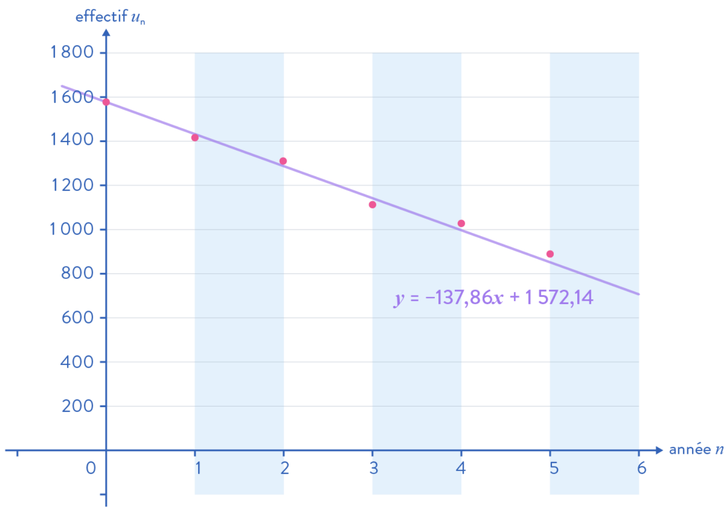
2 Nous effectuons ensuite la régression linéaire.

Astuce

Sur la feuille du tableur, une fois le graphique réalisé :

- avec Calc d'OpenOffice, le diagramme étant sélectionné (double-clic dessus, si nécessaire) : Insertion / Courbe de tendance / Linéaire, et cocher : Afficher l'équation ;
- avec Excel : Clic droit sur un point du graphique / Ajouter une courbe de tendance / Linéaire, et cocher : Afficher l'équation sur le graphique.

→ Nous obtenons ainsi un graphe du type :



© SCHOOLMOUV

C Nous en déduisons les paramètres du modèle linéaire.

Le tableur nous donne donc l'équation de la droite de régression linéaire correspondant à nos données (nous arrondissons à l'entier le plus proche), qui nous indique la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique (u_n) associée :

$$\underbrace{y}_{u_n} = \underbrace{-138}_{r}x + \underbrace{1\,572}_{u_0}$$

→ Nous pouvons en déduire le terme général de la suite arithmétique, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_n &= nr + u_0 \\ &= -138n + 1\,572 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant estimer la population pour chaque année n.
Par exemple, calculons u_8 avec ce modèle :

$$\begin{aligned} u_8 &= -138 \times 8 + 1\,572 \\ &= 468 \end{aligned}$$

→ Ainsi, nous estimons l'effectif de batraciens après huit ans proche de 468 individus.

Attention

> Par définition, le modèle linéaire ne convient plus dès lors que la variation absolue de la population change significativement d'un palier à l'autre.
> Ainsi, la plupart du temps, il est utilisé pour modéliser l'évolution de ressources, plutôt que celle de populations.

Nous allons donc découvrir un nouveau modèle, dit exponentiel, plus utilisé dès qu'il s'agit de populations animales ou humaines et sur lequel repose celui de Malthus.

2 | Modèle exponentiel et suites géométriques

Dans le modèle linéaire, la variation absolue, c'est-à-dire le nombre d'individus en plus ou en moins, est constante, ou presque constante, et ne dépend donc pas de l'effectif. Et c'est là sa principale limite pour étudier des populations animales ou humaines.
En effet, plus la population sera nombreuse, plus les nombres de naissances et de décès, par exemple, seront élevés.

a. Rappels et définition du modèle

Nous allons donc cette fois considérer que la variation absolue n'est plus constante, mais **proportionnelle** à l'effectif courant.

→ Cela signifie que le **taux d'évolution** (ou de variation) sera **constant** d'une année à l'autre.

Rappel

On appelle **taux d'évolution**, ou taux de variation, entre une valeur initiale V_{i} non nulle et une valeur finale V_{f} le nombre :

$$t = \frac{V_{\text{f}} - V_{\text{i}}}{V_{\text{i}}}$$

Ce taux peut être positif – augmentation – ou négatif – diminution –, il peut aussi bien sûr être nul – aucune évolution. Enfin, il peut être supérieur à 1 – valeur initiale plus que doublée.

On lui associe un **coefficient multiplicateur**, égal à $1+t$.

→ Ce coefficient permet de trouver V_{f} en multipliant V_{i} par sa valeur :

$$V_{\text{f}} = (1+t) \times V_{\text{i}}$$

Nous pouvons maintenant définir ce nouveau modèle, dit **exponentiel**.

Définition

Modèle exponentiel :

Une grandeur discrète u varie de manière exponentielle en fonction d'un palier entier n si sa variation absolue $u_{n+1} - u_n$ est proportionnelle à sa valeur courante u_n.
Dans ce cas, sa variation relative (ou taux d'évolution) est constante.

À retenir

Dans la pratique, si le taux d'évolution est presque constant et que nous pouvons donc le considérer comme constant, nous utiliserons le modèle exponentiel.

En outre, de la même façon que nous avons associé à un modèle linéaire une suite arithmétique, nous allons associer à un modèle exponentiel une **suite géométrique**, que nous allons maintenant définir.

b. Suites géométriques

Nous allons étudier une population dont les **taux de natalité** t_{e} et de **mortalité** t_{d} sont considérés comme constants d'une année à l'autre (nous négligeons le taux de migration).

Définition

Taux de natalité :

« Le taux de natalité est le rapport du nombre de naissances vivantes de l'année à la population totale moyenne de l'année » (définition de l'Insee).

Définition

Taux de mortalité :

« Le taux (brut) de mortalité est le rapport du nombre de décès de l'année à la population totale moyenne de l'année » (définition de l'Insee).

Nous allons en outre considérer que, à aucun moment, l'effectif de la population ne s'annule.

Et nous nous intéressons à l'évolution de la population entre 2 années consécutives quelconques, n et $(n+1)$, d'effectifs respectifs u_n et u_{n+1}.

→ Nous avons donc :

$$\underbrace{u_{n+1}}_{\text{Effectif à } n+1} = \underbrace{u_n}_{\text{Effectif à } n} + \underbrace{t_{\text{e}} \times u_n}_{\text{Naissances durant } n} - \underbrace{t_{\text{d}} \times u_n}_{\text{Décès durant } n}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n \times (1 + t_{\text{e}} - t_{\text{d}}) \\ &= u_n \times (1+t) \\ &\footnotesize{\text{[avec } t = t_{\text{e}} - t_{\text{d}} \text{, le taux annuel d'évolution]}} \end{aligned}$$

Nous reconnaissons en $(1+t)$ le coefficient multiplicateur, que nous notons q (qui est aussi constant), pour obtenir finalement :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

→ Nous venons de donner l'expression d'une **suite géométrique**.

Définition

Suite géométrique :

Une suite (u_n) est géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

→ Le réel q est appelé raison de la suite (u_n).

Considérons une suite géométrique (u_n), de premier terme u_0.
Comme pour les suites arithmétiques, nous pouvons représenter l'évolution entre u_0 et u_n :

$$u_0 \overbrace{\xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} \ldots \xrightarrow{\times q} u_{n-1} \xrightarrow{\times q}}^{n \text{ fois}} u_n$$

Pour passer d'un terme au suivant, nous multiplions toujours par le même nombre : la raison q.

→ Nous en déduisons la propriété suivante.

Propriété

On considère une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

→ u_n est appelé **terme général** de la suite et cette expression, qui donne la valeur de u_n en fonction de n, est appelée **formule explicite**.

Comme nous nous intéressons ici à l'évolution de population, nous nous en tiendrons à des suites de raison et de premier terme strictement positifs. Nous pouvons alors déterminer le sens de variation d'une suite géométrique grâce à sa raison.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$.

- Si $q = 1$ (i.e. $t = 0$), (u_n) est constante.
- Si $q > 1$ (i.e. $t > 0$), (u_n) est strictement croissante et tendra vers $+\infty$.
- Si $0 < q < 1$ (i.e. $t < 0$), (u_n) est strictement décroissante et tendra vers 0.

À retenir

Pour une suite strictement croissante, donc pour $q > 1$, on parle de **croissance exponentielle**, c'est-à-dire que la variation absolue entre deux termes de la suite « grandira » de plus en plus vite et donc que la croissance sera de plus en plus forte.

Astuce

Explicitons concrètement le lien entre la raison $q > 0$ de la suite, le taux d'évolution t et les taux de natalité t_{e} et de mortalité t_{d}.

1. Si $q = 1$, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 1+t=1 &\Leftrightarrow t=0 \ \text{[car } q=1+t\text{]} \\ &\Leftrightarrow t_{\text{e}}-t_{\text{d}}=0 \ \text{[car } t=t_{\text{e}}-t_{\text{d}}\text{]} \\ &\Leftrightarrow t_{\text{e}}=t_{\text{d}} \end{aligned}$$

Le taux de natalité est égal au taux de mortalité, le nombre de naissances à chaque palier est donc égal au nombre de décès.

→ L'effectif de la population restera constant, égal à l'effectif initial.

2. De la même façon, si $q > 1$, nous avons alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 1+t>1 &\Leftrightarrow t>0 \\ &\Leftrightarrow t_{\text{e}}-t_{\text{d}}>0 \\ &\Leftrightarrow t_{\text{e}}>t_{\text{d}} \end{aligned}$$

Le taux de natalité est supérieur au taux de mortalité, le nombre de naissances à chaque palier est donc supérieur au nombre de décès.

→ L'effectif de la population augmentera de plus en plus vite.

3. Enfin, si $q < 1$, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 1+t<1 &\Leftrightarrow t<0 \\ &\Leftrightarrow t_{\text{e}}-t_{\text{d}}<0 \\ &\Leftrightarrow t_{\text{e}}<t_{\text{d}} \end{aligned}$$

Le taux de natalité est inférieur au taux de mortalité, le nombre de naissances à chaque palier est donc inférieur au nombre de décès.

→ L'effectif de la population diminuera et tendra vers 0.

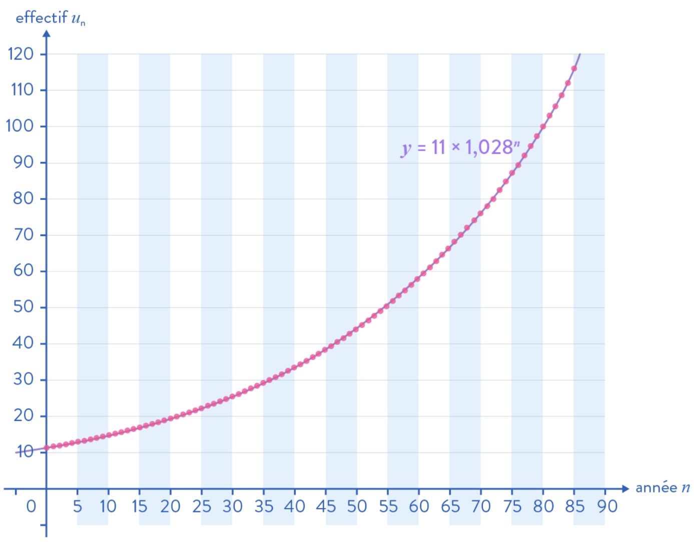
c. Représentation graphique

Considérons l'évolution annuelle d'une population modélisée par la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 11$ et de raison $q = 1,028$ (soit un taux d'évolution $t = q - 1 = 0,028 = 2,8\,\%$), dont nous pouvons donner le terme général :

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 \times q^n \\ &= 11 \times 1,028^n \end{aligned}$$

→ Les points correspondant aux termes de la suite appartiennent donc tous à la courbe représentative de la fonction :

$$x \mapsto 11 \times 1,028^x$$



© SCHOOLMOUV

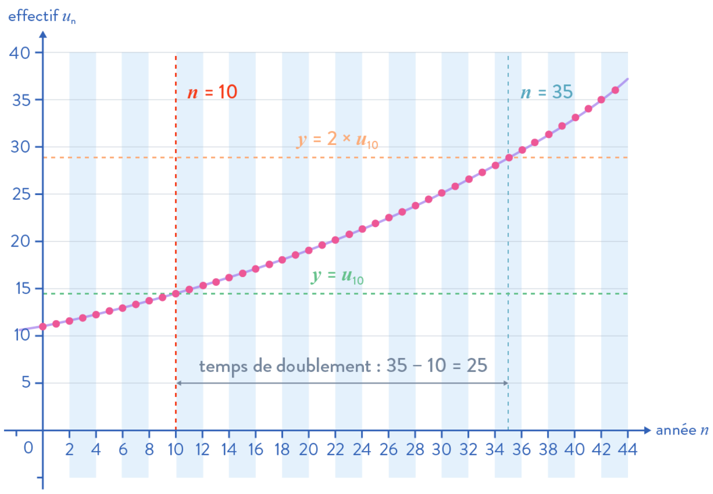
Nous remarquons que la fonction représentée croît effectivement de plus en plus vite.

Astuce

> Pour l'évolution annuelle d'une population modélisée par une telle suite, nous pouvons déterminer graphiquement le temps de doublement de la population considérée :

- nous choisissons un point, par exemple celui représentant la population à l'année 10 ;
- nous traçons la droite horizontale d'équation $y = u_{10} = 14,5$;
- nous traçons ensuite la droite horizontale d'équation $y = 14,5 \times 2 = 29$;
- nous repérons le point d'intersection de cette droite avec la courbe ;
- l'abscisse de ce point nous donnera l'année à laquelle la population de l'année 10 aura doublé : ici, à $n = 35$;
- nous calculons la différence pour déterminer le temps de doublement : $35 - 10 = 25$.

Remarquons que nous trouvons des résultats équivalents quel que soit le point initial choisi.



→ Un taux d'évolution de $2,8\,\%$ peut sembler faible ; pourtant, avec un tel taux, il faudra seulement 25 ans pour que la population double.

Allons un peu plus loin, pour ceux qui suivent la spécialité « Mathématiques », qui connaissent la fonction exponentielle, éponyme du modèle, et qui découvrent cette année la fonction logarithme népérien.
Une suite géométrique (u_n), de raison q et de premier terme u_0, est définie par son terme général, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Nous nous sommes placés dans l'hypothèse où q est strictement positif, donc q^n est aussi strictement positif pour tout entier naturel n.

→ Nous pouvons donc écrire, en utilisant notamment les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien :

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 \times \mathrm{e}^{\ln(q^n)} \\ &\quad \text{[car } \exp \text{ et } \ln \text{ sont des fonctions réciproques]} \\ &= u_0 \times \mathrm{e}^{\ln(q) \times n} \\ &\quad [\text{avec } \ln(q) \text{ un réel, et } \ln(q) < 0 \text{ si } 0 < q < 1,\ \ln(q) > 0 \text{ si } q > 1] \end{aligned}$$

Nous avons donc fait apparaître la fonction exponentielle, d'où le nom donné au modèle *exponentiel* et la qualification de croissance *exponentielle*.

→ Nous pouvons aussi confirmer les limites données plus haut (avec $u_0 > 0$), connaissant les limites de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} \text{Si } 0 < q < 1 :\ & \lim_{n \to +\infty} u_0 \times \mathrm{e}^{\ln(q) \times n} = 0 \\ \text{Si } q > 1 :\ & \lim_{n \to +\infty} u_0 \times \mathrm{e}^{\ln(q) \times n} = +\infty \end{aligned}$$

3 | Modèle de Malthus et modèle exponentiel

Thomas Malthus, économiste britannique des XVIII$^{\text{e}}$ et XIX$^{\text{e}}$ siècles, publie en 1798 son *Essai sur le principe de population*, qui rencontre un vif succès, tout en déclenchant nombre de polémiques. Il fut le premier à appliquer le modèle exponentiel à l'étude de populations.

En nous fondant sur une citation de son ouvrage, nous allons voir comment, à partir d'un modèle exponentiel appliqué à l'évolution de la population britannique et en se servant également d'un modèle linéaire pour les ressources, il a travaillé sur le rapport entre l'évolution d'une population et ses moyens de subsistance.

→ Ainsi, en 1798, Malthus écrivait :

Citation

> « Comptons pour 11 millions la population de la Grande-Bretagne et supposons que le produit actuel de son sol suffit pour la maintenir.
> « Au bout de 25 ans, la population sera de 22 millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir.
> « Après une deuxième période de 25 ans, la population sera portée à 44 millions, mais les moyens de subsistance ne pourront plus nourrir que 33 millions d'habitants.
> « Dans la période suivante, la population – arrivée à 88 millions – ne trouvera des moyens de subsistance que pour la moitié de ce nombre. »

a. Modélisation mathématique

1 Selon le propos de Malthus, la **population britannique** double tous les 25 ans.

Considérons donc la suite (u_n) qui modélise la population en millions d'habitants par paliers de 25 ans.
Nous avons donc : $u_0 = 11$, $u_1 = 22$, $u_2 = 44$, $u_3 = 88$, etc.

→ Pour passer d'un terme de la suite au suivant, on multiplie par 2, donc nous reconnaissons les termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 11$; pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_{n+1} = 2u_n$$

Il s'agit donc d'un modèle exponentiel et nous pouvons donner le terme général de (u_n), pour tout entier naturel n :

$$u_n = 11 \times 2^n$$

Utilisons cette formule pour calculer, par exemple, la population prévue par ce modèle après 125 ans, soit 5×25 ans :

$$\begin{aligned} u_5 &= 11 \times 2^5 \\ &= 352 \text{ millions} \end{aligned}$$

Astuce

> Dans la partie précédente, nous avons vu qu'un temps de doublement de la population de 25 ans correspond à un taux annuel d'évolution d'environ $2,8\,\%$.

2. Intéressons-nous maintenant au propos de Malthus sur l'évolution des **moyens de subsistance**.

Pour cela, considérons la suite (v_n) qui modélise l'évolution de ces moyens de subsistance et assimilons-les au nombre de personnes (en millions) qu'ils peuvent satisfaire.
Nous obtenons ainsi, d'après le raisonnement donné : $v_0 = 11$, $v_1 = 22$, $v_2 = 33$, $v_3 = 44$.

→ Pour passer d'un terme de la suite au suivant, on ajoute 11, donc nous reconnaissons les termes d'une suite arithmétique de raison 11 et de premier terme $v_0 = 11$; pour tout entier naturel n, nous avons :

$$v_{n+1} = v_n + 11$$

Il s'agit donc d'un modèle linéaire et nous pouvons là aussi donner le terme général de la suite, pour tout entier naturel n :

$$v_n = 11 + 11n$$

Utilisons cette formule pour calculer le nombre de personnes qui peuvent être satisfaites selon ce modèle après 125 ans, soit 5×25 ans :

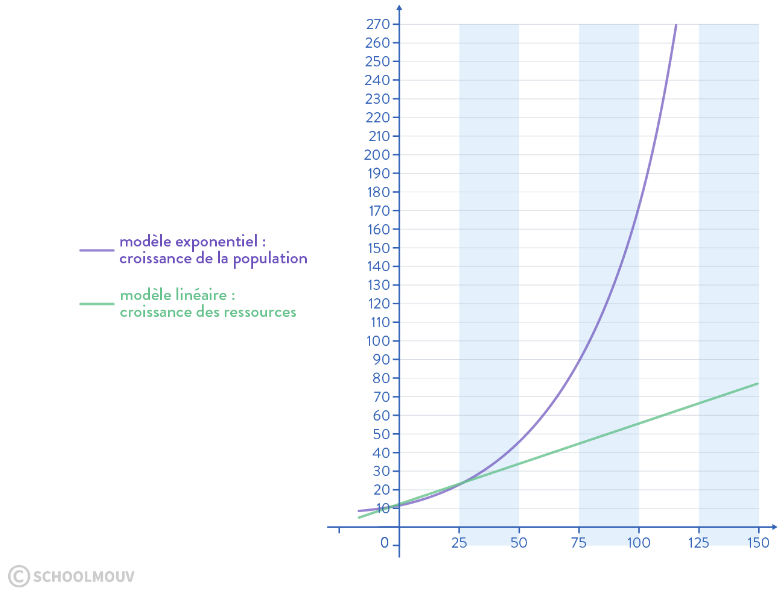
$$\begin{aligned} v_5 &= 11 + 11 \times 5 \\ &= 66 \text{ millions} \end{aligned}$$

b. Interprétation

Nous avons calculé $u_5 = 352$ et $v_5 = 66$.

→ Cela veut dire que, selon le modèle de Malthus, au bout de 125 ans, la Grande-Bretagne aura une population de 352 millions de personnes quand les ressources disponibles ne permettront la subsistance que de 66 millions d'individus…

Pour rendre encore plus évident ce déséquilibre, représentons sur un même graphe les deux modèles :



À retenir

Pour remédier à ce déséquilibre, Thomas Malthus propose d'agir sur la production de ressources et, de manière plus polémique, de réduire significativement la croissance démographique.
Ainsi son nom sera-t-il utilisé pour nommer, en 1849, une doctrine tirée de ses travaux qui préconise un contrôle strict des naissances : le **malthusianisme**. Cette doctrine a notamment inspiré la politique chinoise de l'enfant unique, mise en œuvre jusqu'en 2015.

Toutefois, si le modèle de Malthus peut s'avérer efficace sur des périodes courtes, il s'avère inutile sur des périodes plus longues, justement à cause des diverses limitations que peut connaître une croissance démographique.
En 1838, un mathématicien belge, Pierre-François Verhulst propose un modèle, lui aussi limité, où l'effectif d'une population tend à se stabiliser vers une valeur maximale.

> Aujourd'hui, des modèles beaucoup plus élaborés existent. Mis à jour très régulièrement, ils prennent en compte les évolutions des ressources – nourriture, eau, énergie… –, les conditions climatiques, les politiques nationales et internationales, etc.
>
> → Ainsi, à ce jour, l'ONU prévoit une population d'environ dix milliards de personnes en 2050.

Pour mieux comprendre la nécessité de modèles plus élaborés, il suffit de songer à la dépendance qui existe entre les effectifs d'une espèce et les effectifs de l'espèce prédatrice : la population de la première dépendra de celle de la seconde, et inversement. Il est donc impossible d'étudier la population d'une espèce indépendamment de l'autre.

→ Et si on considère que la proie peut être prédatrice d'une autre espèce et le prédateur proie d'encore une autre, alors nous pouvons imaginer la complexité des interdépendances entre espèces.

4 | Une application : la population du Japon

Dans la dernière partie de ce cours, nous allons appliquer les définitions et propriétés que nous avons découvertes, ou redécouvertes, à un cas concret : l'évolution de la population du Japon, entre les années 1950 et 2010.
Cela nous permettra de voir à la fois l'efficacité du modèle exponentiel sur des temps courts et ses limites sur des périodes plus longues.

Nous disposons des recensements suivants de la population japonaise, de 1950 à 2010, par paliers de 5 ans.

Année	Effectif (en millions)
1950	$83,6$
1955	$87,9$
1960	$92,5$

1965	$98,8$
1970	$104,7$
1975	$111,9$
1980	$116,8$
1985	$120,8$
1990	$123,5$
1995	$125,6$
2000	$126,9$
2005	$127,4$
2010	$128,6$

a. Modélisation : années 1950-1965

1 **Commençons par identifier le modèle le plus adapté.**

Pour cela :

- nous étudions les années 1950-1965 ;
- nous considérons que 1950 marque le début de notre étude,

→ il s'agit de l'année zéro, soit $n = 0$;

- à partir de là, nous nous intéressons à l'évolution annuelle,

→ l'année 1965 correspondra donc à $1950 + 15$, soit $n = 15$;

- nous calculons la variation absolue et le taux d'évolution par paliers de 5 ans, au moyen d'un tableur.

Nous obtenons ainsi le tableau suivant :

Année	n	Effectif	Variation absolue	Taux d'évolution
1950	0	$83,6$		
1955	5	$87,9$	$4,3$	$0,05144$
1960	10	$92,5$	$4,6$	$0,05233$
1965	15	$98,8$	$6,3$	$0,06811$

Nous remarquons que la variation absolue varie significativement.
En revanche, s'il y a des petits écarts pour le taux d'évolution, le considérer comme constant semble une approximation acceptable.

→ Nous choisissons le modèle exponentiel.

2 **Déterminons les paramètres du modèle exponentiel.**

Considérons la suite (u_n) qui modélise l'évolution de la population. Elle est donc géométrique, de premier terme $u_0 = 83,6$ (soit la population en 1950, année zéro de notre étude) et de raison q, inconnue.

→ Nous allons déterminer cette dernière en utilisant la formule explicite que nous avons donnée pour une suite géométrique. Pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

En effet, nous connaissons la population en 1965, 15 ans après le début de l'étude : $u_{15} = 98,8$. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} u_{15} = u_0 \times q^{15} \Leftrightarrow q^{15} &= \frac{u_{15}}{u_0} \\ \Leftrightarrow q &= \left(\frac{u_{15}}{u_0}\right)^{\frac{1}{15}} \end{aligned}$$

En nous servant de la calculatrice, nous trouvons :

$$\begin{aligned} q &= \left(\frac{98,8}{83,6}\right)^{\frac{1}{15}} \\ &\approx 1,0112 \end{aligned}$$

Nous choisissons donc de modéliser l'évolution de la population par une suite géométrique, de premier terme $u_0 = 83,6$ et de raison $q = 1,0112$ (qui correspond à un taux d'évolution annuel de $1,12\,\%$).

→ Nous avons ainsi, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 83,6 \times 1,0112^n$$

3. **Vérifions que ces paramètres sont cohérents.**

Calculons la population en 1955 et 1960 prévue par ce modèle :

$$\begin{aligned} u_5 &= 83,6 \times 1,0112^5 \\ &\approx 88,4 \\ u_{10} &= 83,6 \times 1,0112^{10} \\ &\approx 93,4 \end{aligned}$$

Si nous comparons ces résultats aux recensements réels (respectivement $87,9$ et $92,5$), nous constatons que les écarts restent raisonnables.

→ Nous décidons de retenir ce modèle.

b. Efficacité du modèle : années 1966-1980

Nous allons maintenant appliquer ce modèle pour estimer les effectifs de la population de 1966 à 1980, arrondis à 10^{-1} près :

Année	n	Effectif u_n		Année	n	Effectif u_n
1966	16	$99,9$		1974	24	$109,2$

1967	17	101	1975	25	$110,4$
1968	18	$102,2$	1976	26	$111,7$
1969	19	$103,3$	1977	27	$112,9$
1970	20	$104,5$	1978	28	$114,2$
1971	21	$105,6$	1979	29	$115,6$
1972	22	$106,8$	1980	30	$116,8$
1973	23	108			

Si nous comparons les valeurs réelles pour les années 1970 ($104,7$), 1975 ($111,9$) et 1980 ($116,8$), et les valeurs prévues par le modèle, nous remarquons la fidélité et l'efficacité du modèle.

→ Il prévoit même avec une précision remarquable la population réelle en 1980.

c. Limites du modèle : années 1981-2010

Continuons à nous servir du modèle pour estimer la population japonaise en 1985 :

$$u_{35} \approx 123,5$$

→ Nous voyons tout de suite que le modèle rencontre maintenant sa limite : la population prévue pour 1985 ne sera en réalité atteinte qu'en 1990, soit 5 ans plus tard.

Ce que nous confirment les termes suivants de la suite (u_n) :

$$u_{40} \approx 130,5 \text{ [valeur réelle : } 123,5]$$
$$u_{45} \approx 138,0 \text{ [valeur réelle : } 125,6]$$
$$u_{50} \approx 145,9 \text{ [valeur réelle : } 126,9]$$
$$u_{55} \approx 154,3 \text{ [valeur réelle : } 127,4]$$
$$u_{60} \approx 163,1 \text{ [valeur réelle : } 128,6]$$

Au fil du temps, l'écart entre le modèle et les données réelles ne cesse de grandir.

→ Nous venons d'illustrer l'efficacité du modèle exponentiel sur une période courte, mais ses limites à long terme.

d. Méthodologie

Pour conclure ce cours, donnons une méthodologie à appliquer lors de la modélisation d'une évolution de population.

À retenir

1. On identifie le modèle le plus adapté.
2. On détermine ses paramètres.
3. On calcule les résultats donnés par le modèle choisi, on vérifie qu'ils sont cohérents avec les observations.
   → S'il y a des écarts que l'on ne peut négliger, on l'ajuste, ou on restreint son domaine de validité.
4. On effectue des prévisions grâce au modèle.
5. On vérifie, au fil des nouvelles données réelles reçues, la validité du modèle.
   → Dès qu'un écart significatif est constaté, on ajuste le modèle, voire on le reprend complètement.

Conclusion :

Nous avons découvert dans ce cours deux méthodes, assez simples, pour modéliser l'évolution d'une population :

- le modèle linéaire, avec les suites arithmétiques, à utiliser plutôt pour des ressources que pour des populations ;
- le modèle exponentiel, avec les suites géométriques, pertinent pour étudier sur un temps court l'évolution d'une population, mais limité à long terme.

Comme toujours en statistique, il convient de garder toujours à l'esprit les limites des modèles utilisés, pour ne pas donner des interprétations erronées et pour éviter de tirer des conclusions injustifiées, voire injustes. Nous avons également vu que, dans un monde aux ressources finies, toute croissance infinie est inconcevable. Afin de prévoir précisément l'évolution d'une population, il faut ainsi prendre en compte de multiples paramètres : économiques, politiques, climatiques, sociologiques, etc. L'on comprend alors tous les enjeux transversaux que recèle l'étude des dynamiques démographiques.