Fonction ln (logarithme népérien) : continuité, limites et dérivabilité

Introduction :

Dans ce cours, nous allons effectuer une étude complète de la fonction logarithme népérien.
Dans un premier temps, nous étudierons la fonction $x \mapsto \ln(x)$, puis les fonctions de la forme $\ln(u)$, avec u une fonction.
À chaque fois, nous nous appuierons sur des exemples de fonctions, pour lesquelles nous mènerons une étude complète.

1 Étude de la fonction $x \mapsto \ln(x)$

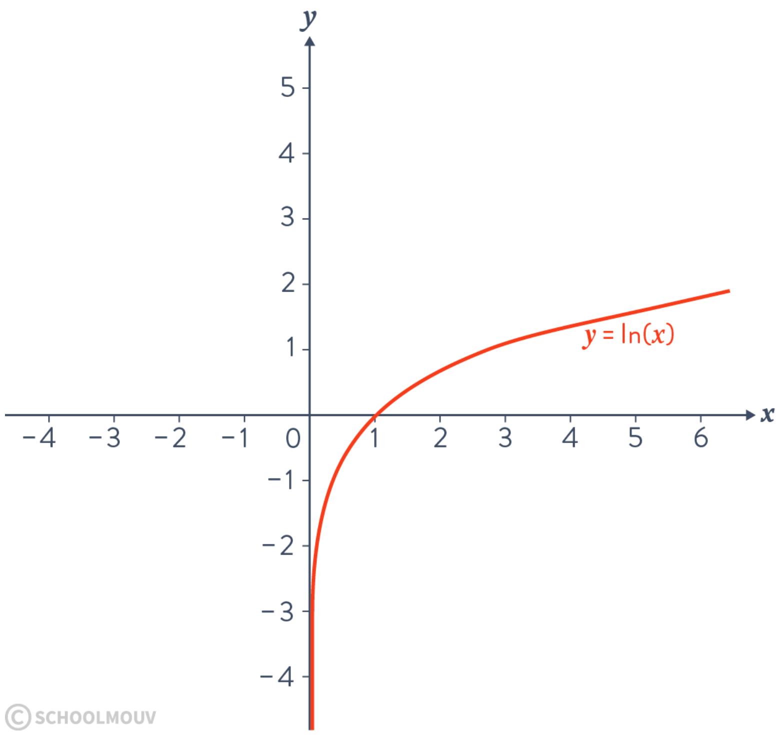
a. Continuité, dérivabilité et sens de dérivation

Pour toute fonction, il est indispensable de connaître ses domaines de définition et de dérivabilité.

Propriété

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

→ Sa dérivée est $x \mapsto \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.



Démonstration

Démontrons que, pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

D'après les compléments sur la dérivation que nous avons vus dans un cours précédent, pour une fonction $u : I \to J$ et une fonction $f : J \to \mathbb{R}$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, si u est dérivable sur I et que f est dérivable sur J, alors :

- la fonction $x \mapsto f\big(u(x)\big) = (f \circ u)(x)$ est dérivable sur I ;
- elle a pour dérivée la fonction $x \mapsto (f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'\big(u(x)\big)$.

→ On peut noter : $(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$.

1. On admet que la fonction logarithme népérien, qui est définie et continue sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, est aussi dérivable sur cet intervalle.
2. Nous posons :
   - $u = \ln$, qui est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$,
   - $f = \exp$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, la fonction $(f \circ u)$ est dérivable et :

$$
\begin{aligned}
(f \circ u)'(x) &= u'(x) \times f'\big(u(x)\big) \\
&= \ln'(x) \times \exp'\big(\ln(x)\big) \\
&= \ln'(x) \times \exp\big(\ln(x)\big) \\
&\text{[car } \exp' = \exp\text{]} \\
&= \ln'(x) \times x \\
&\text{[car } \exp\big(\ln(x)\big) = x \text{ sur cet intervalle]}
\end{aligned}
$$

4. Mais on a aussi, pour tout $x \in]0 \ ; +\infty[$:

$$
\begin{aligned}
(f \circ u)(x) &= \exp\big(\ln(x)\big) \\
&= x \\
\text{Donc : } (f \circ u)'(x) &= 1
\end{aligned}
$$

→ On en déduit, pour tout $x \in]0 \ ; +\infty[$:

$$
\begin{aligned}
(f \circ u)'(x) = \ln'(x) \times x &= 1 \\
\text{Puis : } \ln'(x) &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

C. En résumé, pour tout $x \in]0 \ ; +\infty[$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Nous remarquons que, pour tout $x \in]0 \ ; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$, et donc que $\ln'(x) > 0$.

→ La fonction $\ln$ est effectivement strictement croissante sur $]0 \ ; +\infty[$.

b. Limites

Maintenant que nous connaissons les variations de la fonction logarithme népérien, nous allons nous intéresser aux limites aux bornes de l'ensemble de définition de cette fonction.

Propriété

1. **Limites aux bornes de la fonction $\ln$**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

2. **Limites par croissances comparées :**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

→ Ces limites se généralisent pour tout entier naturel n non nul.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^n\ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

Astuce

Pour mémoriser ces propriétés, on peut dire que x **l'« emporte » sur** $\ln(x)$ **au voisinage de** $+\infty$ **et au voisinage de** 0.

Démonstration

Démontrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$.

1. Montrons tout d'abord que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Soit A un réel strictement positif fixé.
Dire que $\ln(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ signifie que l'on peut rendre $\ln(x)$ aussi grand que l'on veut à condition de prendre x suffisamment grand.

→ On cherche donc une valeur $B > 0$ telle que $x > B \Rightarrow \ln(x) > A$.

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^{*+}$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \ln(x) > A &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(x)} > \mathrm{e}^{A} \\ &\Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{A} \end{aligned}$$

→ En posant $B = \mathrm{e}^{A}$, on a bien $\ln(x) > A$.

Pour toutes les valeurs $A > 0$, il existe une valeur $B > 0$ à partir de laquelle $\ln(x)$ est supérieure à A.

→ Par définition, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

2. Montrons ensuite que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ à l'aide d'un changement de variable.

Pour tout réel $x > 0$, on pose $X = \frac{1}{x}$.

→ On a donc : $x = \frac{1}{X}$.

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $X = \frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) &= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} -\ln(X) \ \left[\text{car } \ln\left(\tfrac{1}{X}\right) = -\ln(X)\right] \\ &= -\lim_{x \to +\infty} \ln(X) \\ &= -\infty \ \left[\text{car } \lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty\right] \end{aligned}$$

C. Finalement, nous obtenons :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$

c. Étude complète

Exemple

> Étudions la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - 2x$.

1 Calcul de la dérivée

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Soit $x \in]0\ ;\ +\infty[$.
L'expression $x\ln(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec :

- $u(x) = x$;
- $v(x) = \ln(x)$.

→ On connaît donc sa dérivée avec la formule :

$$(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$$

Ainsi, nous calculons la dérivée de la fonction $x \mapsto x\ln(x)$:

$$\begin{aligned} \big(x \mapsto x\ln(x)\big)'(x) &= 1 \times \ln(x) + \frac{1}{x} \times x \\ &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

→ Nous en déduisons la dérivée de f, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x) + 1 - 2 \\ &= \ln(x) - 1 \end{aligned}$$

2 Étude des variations de la fonction

Commençons par chercher les valeurs pour lesquelles f' s'annule.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(x)} = \mathrm{e}^1 \\ &\text{[car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &\text{et } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}] \\ &\Leftrightarrow x = \mathrm{e} \ [\text{car } \mathrm{e}^{\ln(x)} = x] \end{aligned}$$

→ f' s'annule en $x = \mathrm{e}$.

Étudions maintenant le signe de la dérivée.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln(x) - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) > 1 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(x)} > \mathrm{e}^1 \\ &\Leftrightarrow x > \mathrm{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\Leftrightarrow \ln(x) - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) < 1 \\ &\Leftrightarrow x < \mathrm{e} \end{aligned}$$

- f' est strictement positive sur $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.

→ f est strictement croissante sur $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.

- f' est strictement négative sur $]0\ ;\ \mathrm{e}[$.

→ f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ \mathrm{e}[$.

3 Calcul de la valeur de f en $x = \mathrm{e}$ et des limites aux bornes de l'ensemble de définition

→ Nous commençons par calculer $f(\mathrm{e})$.

$$\begin{aligned} f(\mathrm{e}) &= \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - 2\mathrm{e} \\ &= \boxed{-\mathrm{e}} \ [\text{car } \ln(\mathrm{e}) = 1] \end{aligned}$$

→ Nous calculons maintenant la limite en 0, évidemment par valeurs supérieures.

$$\text{Nous avons : } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0 \text{ [comme nous l'avons vu plus haut]}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -2x = 0$$

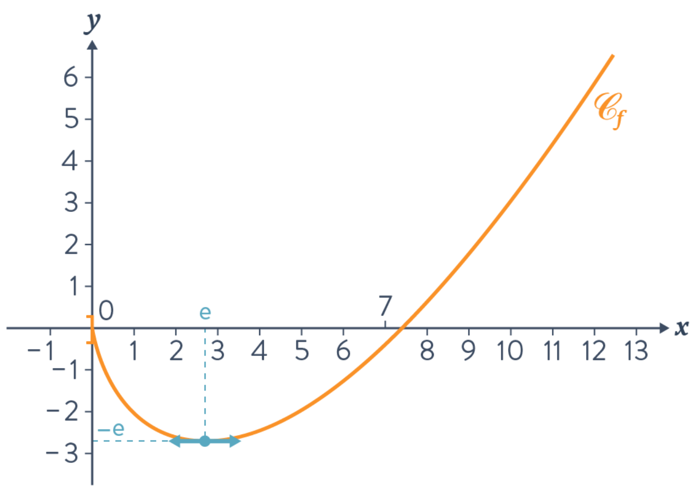
$$\begin{aligned} \text{Alors : } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(x) + \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -2x \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

→ Enfin, nous calculons la limite en $+\infty$.

Nous remarquons rapidement qu'il s'agit d'une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$. Pour lever cette indétermination, nous allons factoriser par x.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} x\big(\ln(x) - 2\big) \\ &= \boxed{+\infty} \text{ [car } \lim_{x \to +\infty} \ln(x) - 2 = +\infty\text{]} \end{aligned}$$

4 **Nous pouvons finalement établir le tableau de variations de f et tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.**



x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
variations de f	‖ 0	↘	−e	↗	$+\infty$

2 | Étude des fonctions de la forme $\ln(u)$

a. Définition et dérivabilité de $\ln(u)$

Dans cette partie, on appelle u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

À retenir

$\ln(u)$ n'est définie que lorsque u est strictement positive.

Exemple

La fonction $x \mapsto \ln(2x+6)$ n'est définie que lorsque $2x+6>0$, c'est-à-dire lorsque $x>-3$.

→ Le domaine de définition est donc : $I =]-3\ ;\ +\infty[$.

Propriété

La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est :

$$\big(\ln(u)\big)' = \frac{u'}{u}$$

Cette formule se déduit de la formule de dérivation d'une composée :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)$$

→ En posant $v(x) = \ln(x)$, on obtient le résultat.

b. Exemple d'étude complète

Exemple

Étudions la fonction $f\ :\ x \mapsto \ln(2x+6)$ sur $I =]-3\ ;\ +\infty[$.

Nous allons suivre la même démarche que dans la partie précédente.

1 Calcul de la dérivée

La fonction f est dérivable sur l'intervalle I et, pour tout $x \in I$, on a, en posant $u(x) = 2x + 6$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{2x+6} \text{ [car } f = \ln(u) \text{ et } f' = \tfrac{u'}{u}\text{]} \\ &= \frac{1}{x+3} \end{aligned}$$

2 Étude des variations de la fonction

f' ne s'annule par sur I.
Nous nous intéressons maintenant à son signe.

Nous voyons que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} x + 3 > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{x+3} > 0 \\ &\Leftrightarrow f'(x) > 0 \end{aligned}$$

f' est strictement positive sur $I =]-3\ ;\ +\infty[$.

→ f est donc strictement croissante sur I.

3 Calcul des limites aux bornes de l'ensemble de définition

→ Nous calculons la limite de f en -3, par valeurs supérieures.

$$\begin{aligned} \text{Nous avons : } &\lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} 2x + 6 = 0^+ \\ \text{Or : } &\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \\ \text{Donc : } &\lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \ln(2x+6) \\ &= \boxed{-\infty} \text{ [par limite d'une composée]} \end{aligned}$$

→ Puis nous calculons la limite de f en $+\infty$.

$$\text{Nous avons : } \lim_{x \to +\infty} 2x + 6 = +\infty$$

$$\text{Or : } \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \ln(2x + 6) \\ &= \boxed{+\infty} \text{ [par limite d'une composée]} \end{aligned}$$

4 **Nous pouvons finalement établir le tableau de variations de f.**

x	-3		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
variations de f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion :

Les deux derniers cours nous ont permis de découvrir une nouvelle fonction, le logarithme népérien, qui est la fonction réciproque de la fonction exponentielle, que nous avions découverte en première. Nous en connaissons ainsi les propriétés algébriques et analytiques.