Le point de vue géométrique des nombres complexes

Introduction :

Dans ce cours, nous allons faire le lien entre les nombres complexes et la géométrie. Nous allons notamment étendre nos connaissances de ce nouvel ensemble avec la forme trigonométrique d'un nombre complexe.
Ce deuxième cours va ainsi définir des nouveaux outils associés aux nombres complexes et certaines propriétés liées à l'écriture trigonométrique des nombres complexes.

→ Dans tout ce cours, nous considérerons le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, que l'on appellera **plan complexe**.

1 Nombres complexes et représentation dans un repère

a. Image d'un nombre complexe

Définition

Image d'un nombre complexe dans le plan complexe :

Considérons un nombre complexe z dont l'écriture algébrique est $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b des nombres réels.

- Alors l'image de ce nombre complexe z dans le plan complexe défini ci-dessus est le point M de coordonnées $(a\ ;\ b)$.
- Et à z est associé tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées :

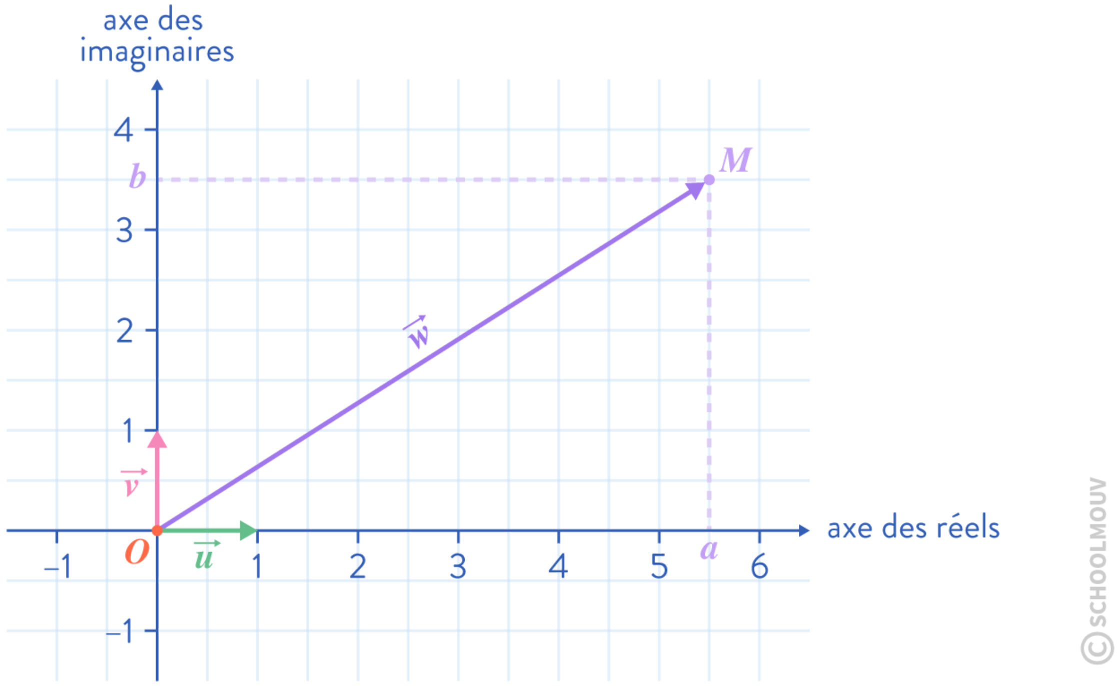
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Faisons une remarque importante.

À retenir

- Les nombres réels étant des nombres complexes ayant une partie imaginaire nulle ($b = 0$), leurs images sont donc sur l'axe des abscisses $(O\ ;\ \vec{u})$, appelé **axe des réels**.
- De même, les imaginaires purs ayant leurs parties réelles nulles, leurs images sont donc sur l'axe des ordonnées $(O\ ;\ \vec{v})$, appelé **axe des imaginaires**.

➜ Le complexe nul $z = 0$ a pour image l'origine du repère.



Prenons quelques exemples pour bien comprendre cette première définition.

Exemple

Soit M_1 l'image du réel $z_1 = -5$, M_2 l'image de l'imaginaire pur $z_2 = 4\text{i}$ et M_3 l'image du complexe $z_3 = 3 - 2\text{i}$. Dans le plan complexe :

- M_1 a pour coordonnées $(-5\ ;\ 0)$;
- M_2 a pour coordonnées $(0\ ;\ 4)$;
- M_3 a pour coordonnées $(3\ ;\ -2)$.

En outre, $\overrightarrow{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ est le vecteur image de z_3.

b. Affixe d'un point, d'un vecteur

Définition

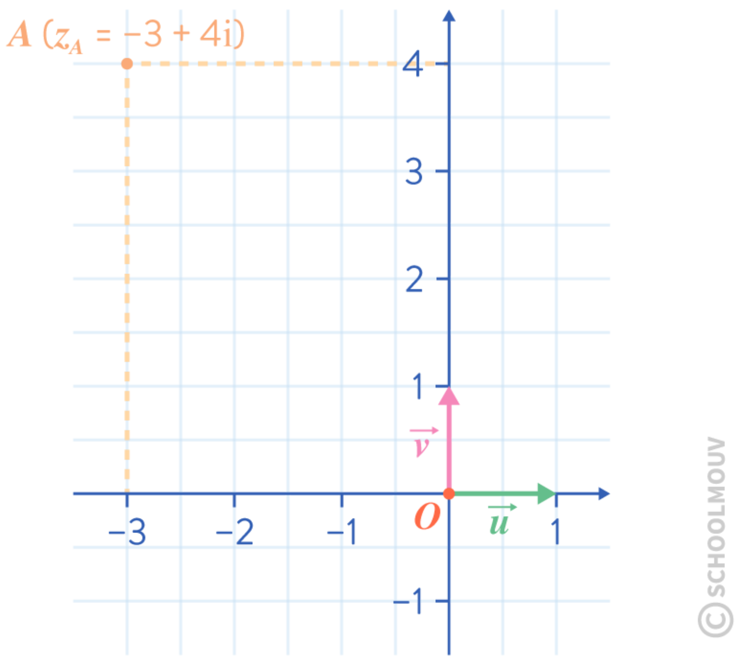
Affixe d'un point :

À tout point du plan complexe M de coordonnées $(a\ ;\ b)$, avec a et b des réels, est associé un unique nombre complexe z_M, dont l'écriture algébrique est $z_M = a + \text{i}b$.

→ z_M est alors appelé affixe du point M.

Exemple

Dans le plan complexe, le point $A\,(-3\ ;\ 4)$ a pour affixe le nombre complexe $z_A = -3 + 4\text{i}$.

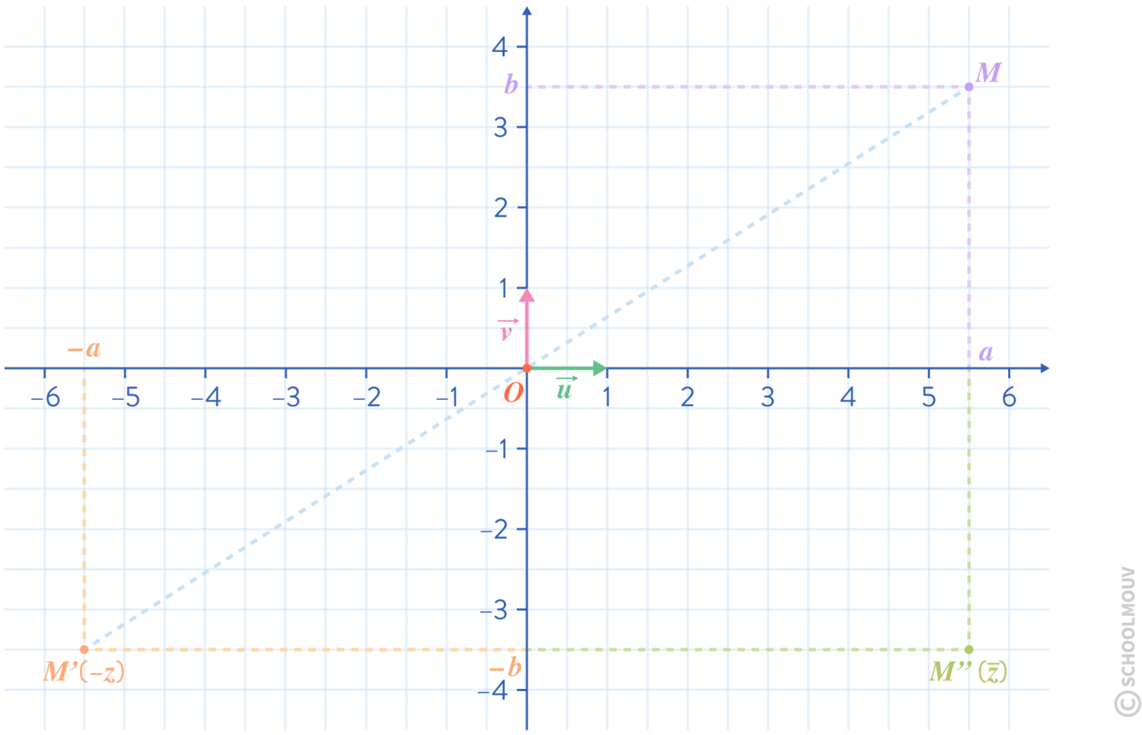


Sauf cas particuliers, z, $-z$ et $\bar{z}$ sont associés à 3 points différents du plan, mais qui restent liés entre eux (dans un repère orthonormé), et nous avons les propriétés suivantes.

Propriété

- Le point M étant associé à l'affixe z, alors le point M' associé à l'affixe $-z$ est l'image de M par symétrie centrale de centre O, puisque les abscisse et ordonnée de M' sont les opposés respectivement des abscisse et ordonnée de M.
- De même, si le point M'' a pour affixe $\bar{z}$, alors M'' est l'image de M par symétrie axiale selon l'axe des réels (axe des abscisses), puisque les deux affixes ont la même partie réelle

et des parties imaginaires opposées.



Sur le même principe, on peut associer l'affixe d'un vecteur en utilisant ses coordonnées.

Définition

Affixe d'un vecteur :

À tout vecteur $\overrightarrow{w}$ du plan complexe de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, avec a et b des réels, est associé un unique nombre complexe $z_{\overrightarrow{w}}$ dont l'écriture algébrique est $z_{\overrightarrow{w}} = a + \mathrm{i}b$.

➜ $z_{\overrightarrow{w}}$ est alors appelé affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$.

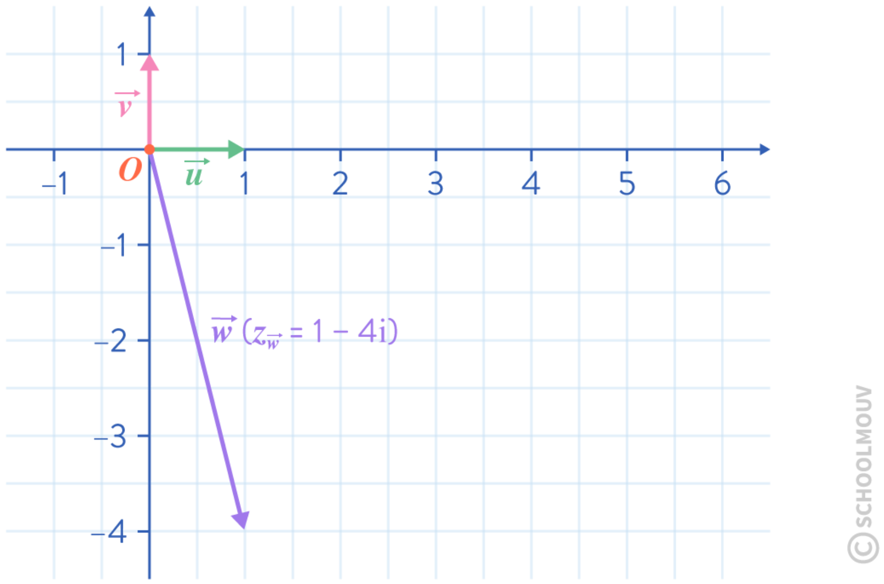
Avant d'approfondir, précisons les notations que nous utilisons.

1. La notation z_M pour l'affixe associé au point M et la notation $z_{\overrightarrow{w}}$ pour l'affixe associé au vecteur $\overrightarrow{w}$ ne sont pas des notations imposées, mais souvent rencontrées, notamment si on a plusieurs points ou vecteurs définis dans le plan complexe.
2. Nous trouvons aussi la notation $M(z)$ et $\overrightarrow{w}(z)$, dont nous nous servirons aussi dans ce cours.

Exemple

Dans le plan complexe, le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ a pour affixe le nombre complexe $z_{\overrightarrow{w}} = 1 - 4\text{i}$.

➜ Nous pouvons noter : $\overrightarrow{w}(z_{\overrightarrow{w}} = 1 - 4\text{i})$.



Les relations utilisées dans un repère du plan sont aussi valables dans le plan complexe, ainsi avons-nous les propriétés suivantes.

Propriété

Soit A et B deux points du plan complexe avec respectivement z_A et z_B les affixes associées aux deux points.
Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ deux vecteurs du plan complexe avec respectivement $z_{\overrightarrow{w}}$ et $z_{\overrightarrow{w'}}$ les affixes associées aux deux vecteurs.
On a alors :

1. A et B sont confondus si et seulement si $z_A = z_B$;
2. le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe :
$$\frac{z_A + z_B}{2}$$
3. le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe :
$$z_B - z_A$$
4. le vecteur $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe :
$$z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$$

5. le vecteur $k\overrightarrow{w}$ (avec k réel) a pour affixe :

$$k\, z_{\overrightarrow{w}}$$

Nous allons démontrer les formules 2 et 3 (les autres se démontrent de manière analogue, avec les coordonnées).

Démonstration

2. Posons $A\,(x_A\ ;\ y_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B)$.

Donc les affixes de ces points sont : $z_A = x_A + \mathrm{i}y_A$ et $z_B = x_B + \mathrm{i}y_B$.

Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Il est associé à l'affixe :

$$\begin{aligned} \frac{x_A + x_B}{2} + \mathrm{i}\frac{y_A + y_B}{2} &= \frac{(x_A + \mathrm{i}y_A) + (x_B + \mathrm{i}y_B)}{2} \\ &= \frac{z_A + z_B}{2} \end{aligned}$$

3. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Il a donc a pour affixe :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= (x_B - x_A) + \mathrm{i}(y_B - y_A) \\ &= (x_B + \mathrm{i}y_B) - (x_A + \mathrm{i}y_A) \\ &= z_B - z_A \end{aligned}$$

Exemple

Considérons, par exemple, le cas où A et B sont deux points respectivement associés à $z_A = 3\mathrm{i} - 2$ et $z_B = 1 + 5\mathrm{i}$.

- $\overrightarrow{AB}$ est associé à :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= 1 + 5\mathrm{i} - (3\mathrm{i} - 2) \\ &= 1 + 2 + \mathrm{i}(5 - 3) \\ &= 3 + 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

- et le milieu de $[AB]$ a pour affixe :

$$\begin{aligned} \frac{z_A + z_B}{2} &= \frac{3\mathrm{i} - 2 + 1 + 5\mathrm{i}}{2} \\ &= \frac{(-2 + 1) + \mathrm{i}(3 + 5)}{2} \\ &= \frac{-1 + 8\mathrm{i}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + 4\mathrm{i} \end{aligned}$$

2 Module et argument d'un nombre complexe

a. Module d'un nombre complexe

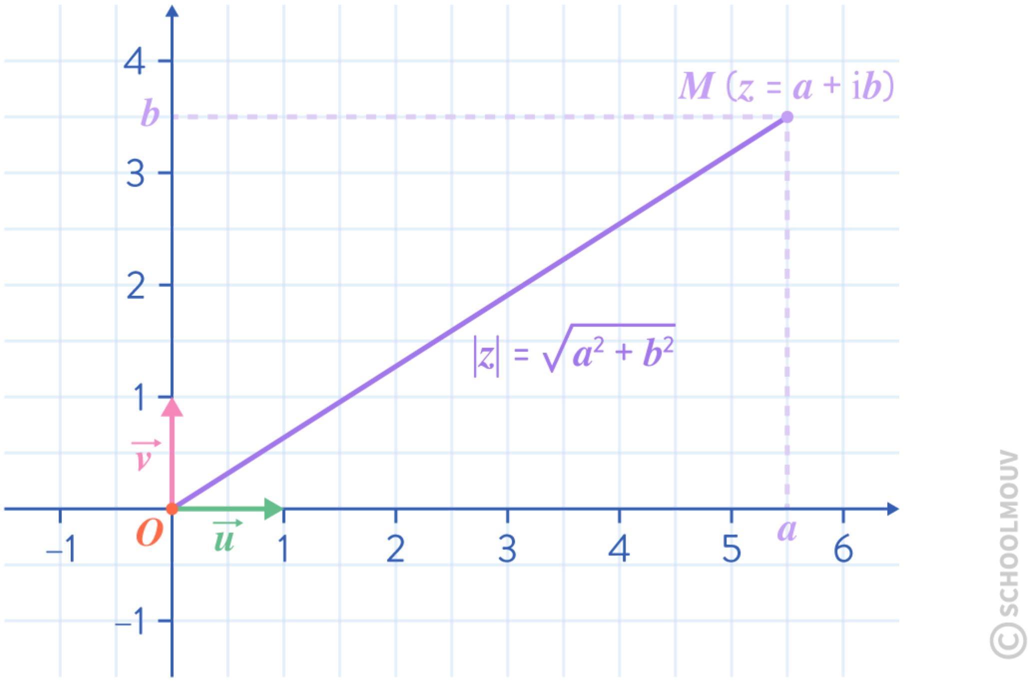
Considérant toujours le plan complexe muni d'un repère orthonormé, la notion de distance est particulièrement intéressante et utile pour en déduire des propriétés géométriques.
Il faut donc savoir faire le lien entre les nombres complexes et la notion de distance en introduisant le module dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé.

Définition

Module d'un nombre complexe :

Soit un point M du plan d'affixe z, alors la distance OM, avec O l'origine du repère, est aussi appelée module de z et notée : $|z| = OM$.
Si, de plus, l'écriture algébrique de z est $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels, alors :

$$\begin{aligned} |z| &= OM \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$



Exemple

Dans le plan complexe, avec A associé à $z_A = -2 + 5\mathrm{i}$, on a alors le module de z_A :

$$\begin{aligned} |z_A| &= \sqrt{(-2)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{4 + 25} \\ &= \sqrt{29} \\ \text{Et donc : } OA &= |z_A| \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

On remarque ainsi un certain nombre de propriétés listées ci-dessous (non démontrées ici, mais facilement démontrables).

Propriété

z, $-z$ et $\bar{z}$ ont même module :

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|$$

En effet, si M est associé à l'affixe z, M' associé à $-z$ et, enfin, M'' associé à $\bar{z}$, on a bien pour raison de symétrie :

$$OM = OM' = OM''$$

On peut généraliser la notion de module d'un nombre complexe à la longueur d'un segment.

Propriété

Si $z_{\overrightarrow{AB}}$ est associé au vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors le module de $z_{\overrightarrow{AB}}$, aussi noté $|z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|$ correspond à la longueur AB.

➜ On a donc notamment $AB = BA$ et $|z_B - z_A| = |z_A - z_B|$.

À retenir

Les modules, donc les distances dans le plan complexe, permettent ainsi de démontrer des égalités de longueur et des propriétés de certaines figures (triangle isocèle, triangle équilatéral, parallélogramme…).
Il faut parfois raisonner sur le module de l'affixe d'un point, et parfois sur le module de l'affixe d'un vecteur, en fonction des longueurs qui nous intéressent.

Nous verrons dans un cours prochain, de manière approfondie, comment utiliser les nombres complexes en géométrie.
Nous allons tout de même en donner un premier exemple très simple.

Exemple

A, B et C sont trois points du plan complexe, d'affixes respectives :

$$\begin{aligned} z_A &= 3 + \mathrm{i} \\ z_B &= 5 + 4\mathrm{i} \\ z_C &= 6 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

➜ Montrons que le triangle ABC est isocèle en A.

Soit $z_{\overrightarrow{AB}}$ l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ et $z_{\overrightarrow{AC}}$ l'affixe de $\overrightarrow{AC}$.

Nous avons, avec la propriété que nous venons de voir :

$$\begin{aligned} AB &= |z_{\overrightarrow{AB}}| \\ &= |z_B - z_A| \\ &= |5 + 4\mathrm{i} - (3 + \mathrm{i})| \\ &= |2 + 3\mathrm{i}| \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= |z_{\overrightarrow{AC}}| \\ &= |z_C - z_A| \\ &= |6 - \mathrm{i} - (3 + \mathrm{i})| \\ &= |3 - 2\mathrm{i}| \\ &= \sqrt{3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{13} \\ &= AB \end{aligned}$$

➜ ABC est isocèle en A.

Nous allons maintenant utiliser une égalité découverte dans le cours précédent pour en découvrir une autre, importante.

Soit un complexe z tel que l'écriture algébrique de z est $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b des réels.
Nous avons vu dans le cours précédent que :

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Or le module de z est défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nous en déduisons ainsi la propriété suivante.

Propriété

Soit un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels. Nous avons :

$$z\bar{z} = |z|^2$$

Le module correspondant à une distance dans le plan complexe, il est toujours positif ou nul. Donc, connaissant son carré, il suffit de faire :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Exemple

Soit le nombre complexe $z = 5 + 2\text{i}$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= 5^2 + 2^2 \\ &= 29 \end{aligned}$$

Nous en déduisons le module de z :

$$|z| = \sqrt{29}$$

Donnons maintenant quelques propriétés opératoires sur les modules.

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier naturel, alors :

$$\begin{aligned} |z \times z'| &= |z| \times |z'| \\ |z^n| &= |z|^n \end{aligned}$$

Si de plus z est non nul alors :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{z}\right| &= \frac{1}{|z|} \\ \left|\frac{z'}{z}\right| &= \frac{|z'|}{|z|} \end{aligned}$$

Démonstration

1. **Démontrons que le module d'un produit est égal au produit des modules.**

Nous savons que le produit d'un complexe et de son conjugué est égal au carré de son module.

→ Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} |z \times z'|^2 &= (z \times z') \times (\overline{z \times z'}) \\ &= z \times z' \times \bar{z} \times \overline{z'} \\ &\text{[car le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués]} \\ &= (z \times \bar{z}) \times (z' \times \overline{z'}) \\ &= |z|^2 \times |z'|^2 \end{aligned}$$

Passons maintenant à la racine carrée :

$$\sqrt{|z \times z'|^2} = \sqrt{|z|^2} \times \sqrt{|z'|^2}$$

Les modules étant par définition positifs, nous concluons que :

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

2 **Démontrons maintenant que le module d'une puissance est égale à la puissance du module.**

Nous allons le faire en utilisant un raisonnement par récurrence.

Soit z un nombre complexe.

➜ Montrons que, pour tout entier naturel n, la proposition P_n suivante est vraie : « $|z^n| = |z|^n$ ».

Initialisation :

Pour $n = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} |z^0| &= |1| \\ &= 1 \\ \text{et : } |z|^0 &= 1 \\ \text{Donc : } |z^0| &= |z|^0 \end{aligned}$$

➜ P_0 est vraie.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel quelconque k tel que P_k soit vraie.

➜ $|z^k| = |z|^k$.

Montrons que, alors, P_{k+1} est aussi vraie.

➜ C'est-à-dire : $|z^{k+1}| = |z|^{k+1}$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} |z^{k+1}| &= |z^k \times z| \\ &= |z^k| \times |z| \text{[nous l'avons démontré au point 1]} \\ &= |z|^k \times |z| \text{[par hypothèse de récurrence]} \\ &= |z|^{k+1} \end{aligned}$$

➜ Si P_k est vraie, alors P_{k+1} est aussi vraie.

Conclusion :

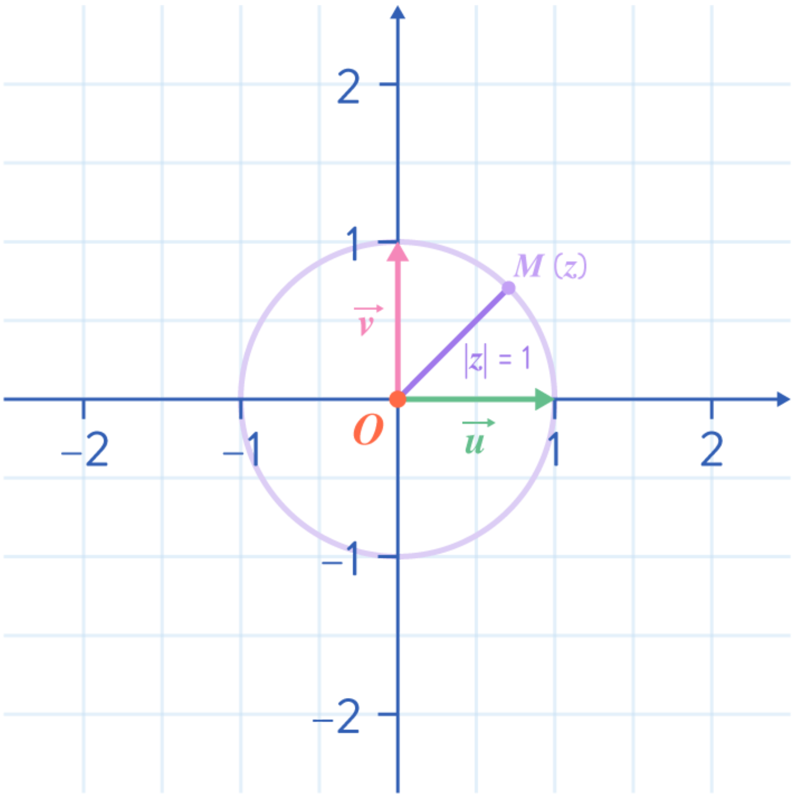
Nous avons montré que la proposition est vraie pour $n = 0$, et nous avons démontré qu'elle est héréditaire à partir de $n = 0$.

➜ La proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n.

b. Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Considérons un point $M(z)$ tel que $|z| = 1$.
Cela signifie que dans le repère orthonormé du plan complexe, la distance OM est telle que $OM = 1$.

➜ M est donc situé sur le cercle de centre O et de rayon 1.



Définition

Ensemble $\mathbb{U}$ et cercle trigonométrique :

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.
L'ensemble des points qui leur sont associés dans le plan complexe forme un cercle de centre O et de rayon 1, appelé cercle trigonométrique.

Nous pouvons donner une première propriété, qui découle directement de la définition.

Propriété

Considérons $z = a + ib$, avec a et b réels, un nombre complexe appartenant à $\mathbb{U}$.

On a alors :

$$a^2 + b^2 = 1$$

Nous pouvons aussi donner les propriétés de stabilité de $\mathbb{U}$, que nous démontrerons ensuite.

Propriété

$\mathbb{U}$ est stable par produit et par passage à l'inverse.

Cela veut dire que, si z et z' sont des nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$, alors leur produit et leurs inverses appartiennent aussi à $\mathbb{U}$.

Les démonstrations sont faciles, nous allons les faire rapidement.

Démonstration

Soit z et z' deux nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$.

$$\begin{aligned} |zz'| &= |z| \times |z'| \\ &\text{[car le module d'un produit est égal au produit des modules]} \\ &= 1 \times 1 \text{ [car } z \text{ et } z' \text{ appartiennent à } \mathbb{U}] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Le module de zz' est égal à 1, donc zz' appartient à $\mathbb{U}$.

→ $\mathbb{U}$ est stable par produit.

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{z}\right| &= \frac{1}{|z|} \\ &\text{[car le module d'un inverse est l'inverse du module]} \\ &= \frac{1}{1} \text{ [car } z \text{ appartient à } \mathbb{U}] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Le module de $\frac{1}{z}$ est égal à 1, donc $\frac{1}{z}$ appartient à $\mathbb{U}$.

→ $\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse.

Dans un prochain cours, consacré à l'utilisation des nombres complexes en géométrie et que nous avons déjà mentionné, nous verrons comment définir des ensembles au moyen d'autres conditions sur le module. Nous travaillerons aussi sur de nouveaux ensembles, notés $\mathbb{U}_n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

C. Argument d'un nombre complexe

Pour repérer un point dans un plan muni d'un repère, on peut bien sûr utiliser les coordonnées cartésiennes, avec l'abscisse et l'ordonnée, mais il est aussi possible d'utiliser d'autres systèmes de coordonnées, comme le système de coordonnées polaires.
Dans ce système, on utilise le même repère d'axe $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, mais on définit la position d'un point M par sa distance à l'origine, la distance OM, et par une mesure de l'angle orienté formé entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$, que l'on note $(\vec{u},\ \overrightarrow{OM})$.

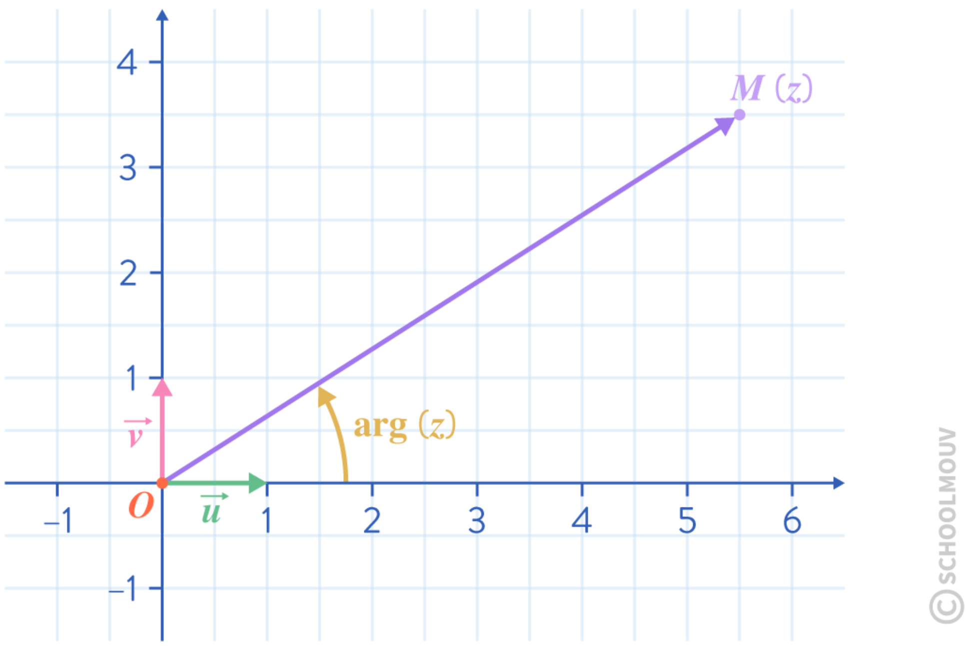
Dans le plan complexe, le point M étant associé à l'affixe z, la distance OM correspond, comme nous venons de le voir, au **module** de z.
On associe de la même manière l'angle orienté $(\vec{u},\ \overrightarrow{OM})$ avec un **argument** de z.

Définition

Argument d'un nombre complexe :

Soit un point M d'affixe z non nulle situé dans le plan complexe associé au repère $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, alors une mesure en radian de l'angle $(\vec{u},\ \overrightarrow{OM})$ est un argument de z.

➜ On le note $\arg(z)$.



À retenir

Si l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ a pour mesure (en radian) la valeur θ, alors tous les angles $\theta + k \times 2\pi$, avec k un entier relatif, sont des mesures possibles de cet angle.

➜ Par conséquent, il existe une infinité d'arguments possibles au complexe z associé à M, et on utilise souvent la notation suivante pour définir l'ensemble des valeurs possibles :

$$\arg(z) = \theta\,[2\pi]$$

On dit : « θ **modulo** 2π ».

On remarquera aussi que les angles (modulo 2π) de 0 rad, $\frac{\pi}{2}$, π, $-\frac{\pi}{2}$, positionnent le point M sur les axes du repère, donc correspondent à des réels ou à des imaginaires purs.

Attention

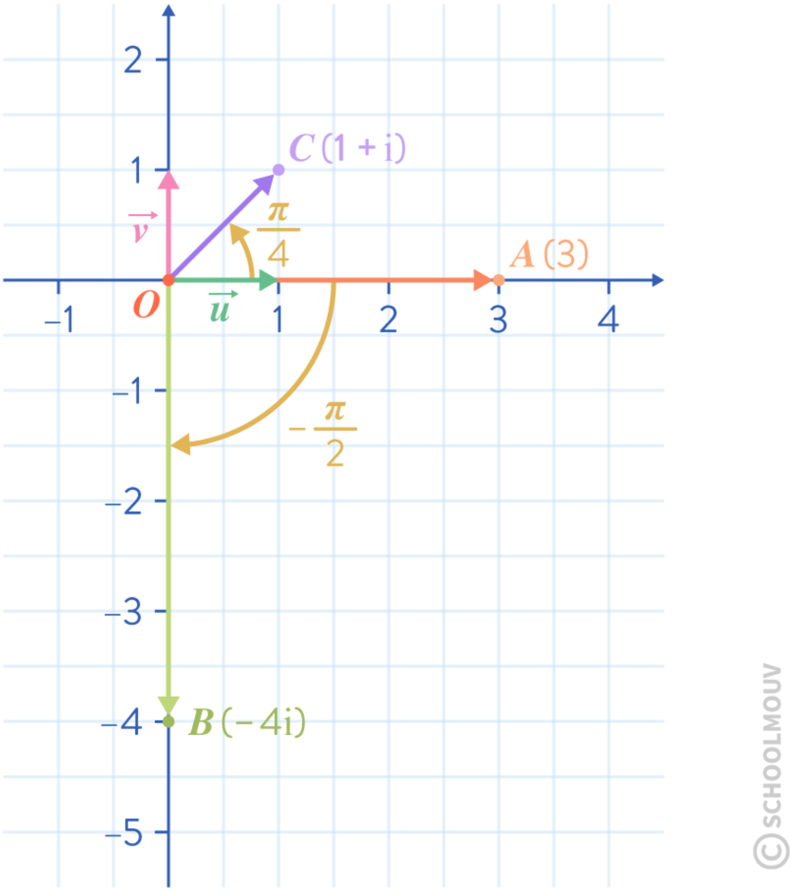
il est impossible de définir l'angle $(\vec{u}, \vec{0})$.

➜ 0 n'a pas d'argument.

Exemple

Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = -4\mathrm{i}$ et $z_C = 1 + \mathrm{i}$.
On a alors, en utilisant la figure ci-dessous :

$$\begin{aligned} \arg(z_A) &= 0\,[2\pi] \\ \arg(z_B) &= -\frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ \arg(z_C) &= \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{aligned}$$



Nous allons ci-dessous lister quelques premières propriétés de l'argument d'un nombre complexe. Elles sont à connaître, mais facilement retrouvables en utilisant la représentation dans le plan complexe.

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul. Alors :

- z est un nombre réel positif si et seulement si :

$$\arg(z) = 0\,[2\pi]$$

- z est un nombre réel négatif si et seulement si :

$$\arg(z) = \pi\,[2\pi]$$

- z est un nombre imaginaire pur avec sa partie imaginaire positive si et seulement si :

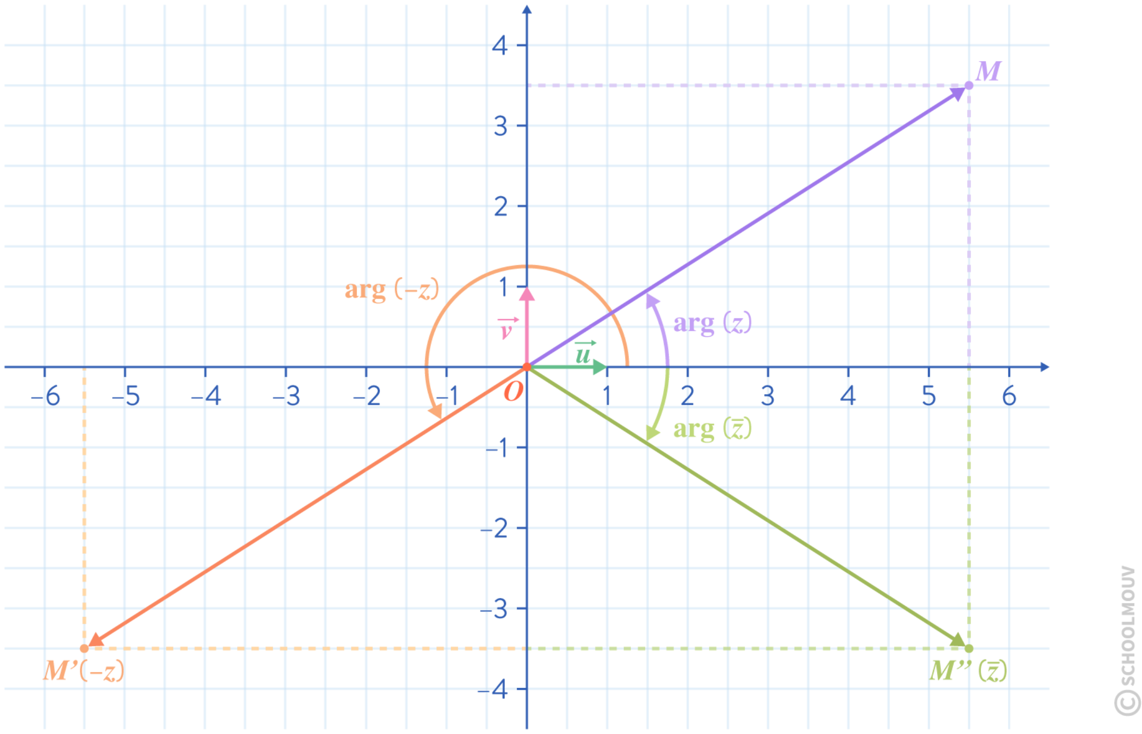
$$\arg(z) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

- z est un nombre imaginaire pur avec sa partie imaginaire négative si et seulement si :

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

- De même, pour raison de symétrie :

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$$
$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$$



Comme nous l'avons fait pour le module, donnons maintenant les propriétés opératoires sur les arguments, que nous admettons.

Propriété

Soit z et $z^{'}$ deux nombres complexes non nuls et n un entier naturel, alors :

$$\arg(zz^{'}) = \arg(z) + \arg(z^{'})$$
$$\arg(z^n) = n\ \arg(z)$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$
$$\arg\left(\frac{z}{z^{'}}\right) = \arg(z) - \arg(z^{'})$$

À part dans des cas bien particuliers (réels ou imaginaires purs notamment), on ne peut pas directement déterminer un argument de z, mais on peut faire le lien avec la trigonométrie.

À retenir

Soit z un nombre complexe non nul dont la forme algébrique est $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b des nombres réels, alors, considérant le repère orthonormal $(0\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, et H le projeté orhogonal de M sur l'axe des réels, le triangle OHM est rectangle en H et l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ a pour mesure θ.

→ En appliquant la définition du cosinus et du sinus de θ, on a :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{OH}{OM} \\ &= \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) &= \frac{HM}{OM} \\ &= \frac{b}{|z|} \end{aligned}$$

Et un argument de z est $\arg(z) = \theta$ modulo 2π.

3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

a. Définition

Nous avons vu qu'un nombre complexe z non nul admet une forme algébrique du type $z = a + ib$.
Nous avons aussi vu qu'un nombre complexe admet un module $|z|$ et un argument $\arg(z)$ modulo 2π, qui suffisent à définir totalement un nombre complexe z non nul.

→ On peut donc associer ces deux paramètres à une autre écriture d'un complexe z, que l'on appelle l'écriture trigonométrique.

Définition

Écriture trigonométrique d'un nombre complexe :

Tout nombre complexe z non nul admet une écriture trigonométrique tel que :

$$z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$$

Avec $r = |z|$ le module de z, et $\theta = \arg(z)$ un argument de z (modulo 2π).

Cette écriture définit de **manière unique** le nombre complexe z, c'est-à-dire que deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument (modulo 2π).

Exemple

Soit A un point du plan complexe, associé à l'affixe z_A tel que $OA = |z| = 3$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \arg(z) = \frac{\pi}{3}$.

Alors l'écriture trigonométrique de z est :

$$z = 3 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

De plus, sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on peut en déduire l'écriture algébrique de M :

$$\begin{aligned} z_M &= 3 \times \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \mathfrak{Re}(z) &= \frac{3}{2} \\ \text{et : } \mathfrak{Im}(z) &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

b. Propriétés

Nous venons de voir que la forme trigonométrique d'un nombre complexe était définie par son module et un argument.

Le tableau suivant reprend ainsi et associe les propriétés opératoires que nous avons vues sur les modules et les arguments.

À retenir

z et z' sont deux nombres complexes non nuls, n un entier naturel.

Opposé	$\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$	$\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
Conjugué	$\lvert \bar{z} \rvert = \lvert z \rvert$	$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
Produit	$\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$	$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
Puissance	$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$	$\arg(z^n) = n\ \arg(z)$
Inverse	$\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z \rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
Quotient	$\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons introduit l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe z non nul en définissant le module et un argument de z.
Quelques propriétés des modules et arguments ont été présentées mais le point important de cette notation est le lien avec la représentation du point M d'affixe z_M dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé.
L'écriture trigonométrique et les modules et arguments sont en effet particulièrement utiles pour étudier les propriétés des points et des vecteurs dans le plan.