Les modèles démographiques

Cours

Sommaire

RÉSUMÉ

La dynamique des populations est une branche des mathématiques et de la biologie qui permet de prédire l'effectif futur d'une population. Les modèles démographiques peuvent utiliser les suites numériques. Le modèle linéaire décrit l'effectif d'une population en utilisant une suite arithmétique. Le modèle exponentiel est plus adapté. Il décrit l'effectif d'une population en utilisant une suite géométrique. Il permet de prédire le temps de doublement d'une population. Le modèle historique de Malthus repose sur les taux de natalité et de mortalité. Il présente des limites en situation réelle.

I La dynamique des populations

La dynamique des populations étudie l'évolution du nombre d'individus au cours du temps. Prédire l'effectif futur d'une population aide à évaluer les ressources dont elle aura besoin. Les modèles

démographiques nécessitent de connaître la variation absolue et le taux de variation de l'effectif sur un intervalle de temps. On peut alors utiliser les suites numériques pour représenter les valeurs de l'effectif.

A Prédire l'effectif futur d'une population

Pour ajuster les ressources disponibles, il est essentiel de pouvoir estimer la vitesse de croissance et de prédire l'effectif futur d'une population. On peut représenter graphiquement les données du passé par un nuage de points.

La vitesse de croissance d'une population dépend de ses taux de natalité et de mortalité.

DÉFINITION

Taux de natalité

Le taux de natalité est le rapport entre le nombre de naissances vivantes de l'année et la population totale moyenne de l'année.

EXEMPLE

La population du Brésil, en 2015, était de 204 millions de personnes. Il y a eu 29,316 millions de naissances et 1,242 million de décès.

$$\text{Taux de natalité} = \frac{29{,}316}{204} = 14{,}3\ \%$$

Le taux de natalité de la population du Brésil est de 14,3 %.

DÉFINITION

Taux de mortalité

Le taux de mortalité est le rapport entre le nombre de décès de l'année et la population totale moyenne de l'année.

EXEMPLE

La population du Brésil, en 2015, était de 204 millions de personnes. Il y a eu 29,316 millions de naissances et 1,242 million de décès.

$$\text{Taux de mortalité} = \frac{1{,}242}{204} = 0{,}61\ \%$$

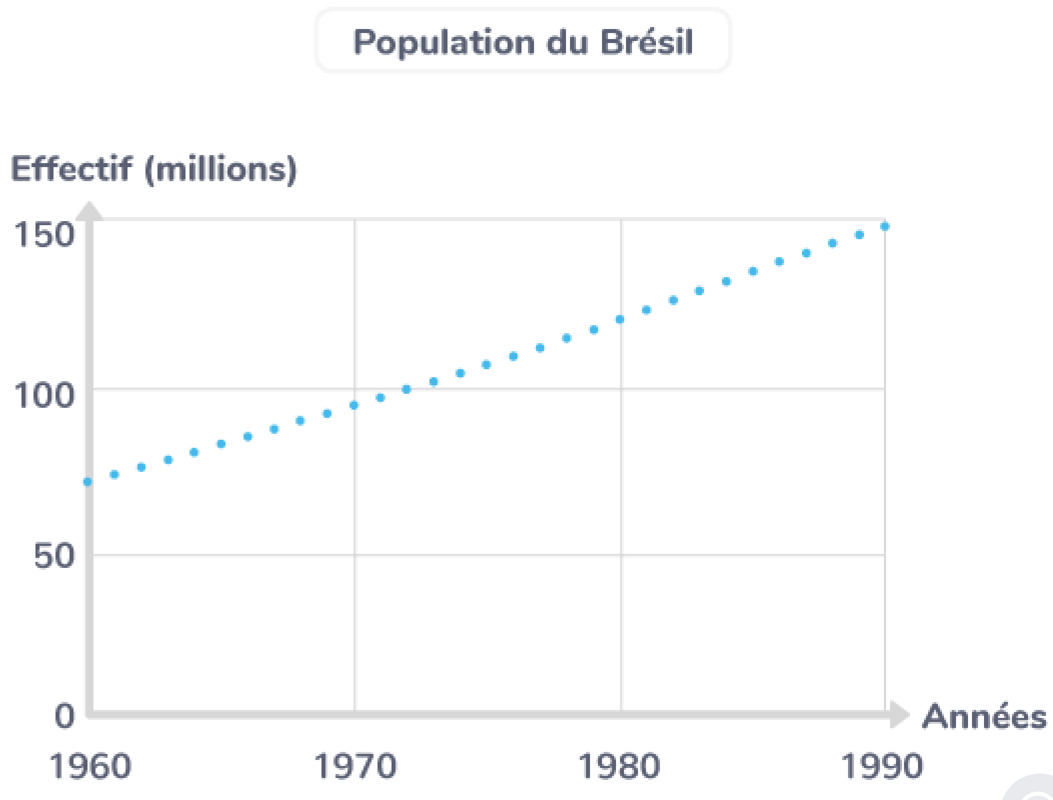
Le taux de mortalité de la population du Brésil est de 0,61 %.

Le taux de natalité du Brésil est supérieur à son taux de mortalité, sa population est donc en hausse en 2015.

L'effectif d'une population est représenté graphiquement par un nuage de points.

EXEMPLE

L'effectif de la population du Brésil est représentée par le nuage de points suivant :



Population du Brésil

DÉFINITION

Taux d'accroissement naturel

Le taux d'accroissement naturel d'une population est la différence entre le le taux de natalité et le taux de mortalité sur un territoire au cours d'une période.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent du Brésil, en 2015, le taux de natalité était de 14,3 % et le taux de mortalité de 6,1 %. Le taux d'accroissement naturel est de : $14{,}3 - 6{,}1 = 8{,}2\ \%$.

B La variation absolue et le taux de variation

L'évolution de l'effectif d'une population sur un intervalle de temps peut être exprimée en variation absolue et en taux de variation.

Une grandeur peut évoluer au cours d'un intervalle de temps. Pour mesurer cette variation, on calcule soit la différence, soit le rapport. On peut ainsi quantifier l'augmentation ou la diminution de cette valeur en variation absolue ou en taux de variation.

DÉFINITION

Variation absolue

La variation absolue d'une population dont l'effectif évolue par palier sur une période de l'effectif M_1 à l'effectif M_2 est la différence $M_2 - M_1$.

EXEMPLE

La population du Brésil est passée de 95 millions de personnes en 1970 à 120 millions en 1980. La variation absolue se calcule de la façon suivante : $120 - 95 = 25 \text{ millions}$.

La variation absolue du Brésil est donc de 25 millions de personnes.

DÉFINITION

Taux de variation

Le taux de variation d'une population dont l'effectif évolue par palier sur une période de l'effectif M_1 à l'effectif M_2 est le rapport $\dfrac{M_2 - M_1}{M_1}$.

EXEMPLE

En reprenant les chiffres du Brésil en 1970 et en 1980, le taux de variation est de :

$$\frac{(120 - 95)}{95} = 26 \ \%$$

REMARQUE

La variation absolue exprime un nombre de personnes, tandis que le taux de variation est un pourcentage.

C Les suites numériques

Les suites numériques u , de terme général $u(n)$, sont des outils qui permettent de représenter les effectifs d'une population.

Une suite numérique u est une succession de termes $u(n)$ où n est un entier naturel.

DÉFINITION

Suite numérique

Une suite numérique est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ou sur une partie de l'ensemble). L'image de l'entier n par la suite u est notée $u(n)$. On dit que $u(n)$ est le terme de rang n (ou d'indice n) de la suite.

EXEMPLE

On considère la suite u définie de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = 2n$$

Dans ce cas :

- Le terme d'indice 1 est $u(1) = 2$.
- Le terme d'indice 2 est $u(2) = 4$.

PROPRIÉTÉ

Une suite numérique u permet de modéliser une variable discrète telle que l'effectif d'une population au temps n.

REMARQUE

La variation absolue d'une suite entre la période n et $n+1$ est égale à $u(n+1)-u(n)$.
Le taux de variation d'une suite entre la période n et $n+1$ est égal à $\dfrac{u(n+1)-u(n)}{u(n)}$.

II L'utilisation des modèles démographiques

L'utilisation des modèles démographiques permet de faire des prédictions. Lorsque la variation absolue de l'effectif d'une population est constante, on peut utiliser un modèle linéaire. Lorsque le taux de variation est constant, on peut utiliser un modèle exponentiel. Le modèle de Malthus est un modèle exponentiel qui intègre les taux de natalité et de mortalité.

A La variation absolue constante

Quand la variation absolue d'un effectif $u(n+1)-u(n)$ est constante, on dit que u est une suite arithmétique. La raison de cette suite arithmétique est estimée par le modèle linéaire établi à partir d'un nuage de points.

1. La suite arithmétique

Si la variation absolue $u(n+1)-u(n)$ d'une suite u est constante pour tout n, alors u est une suite arithmétique.

DÉFINITION

Suite arithmétique

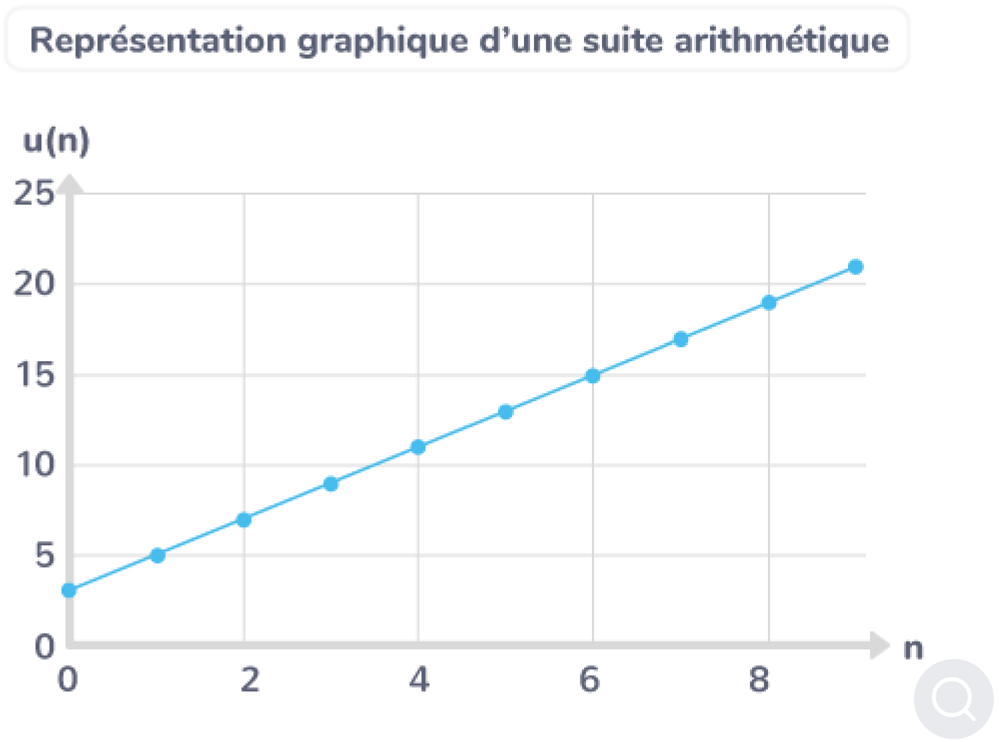
Une suite arithmétique u est une suite de nombres pour laquelle la différence entre deux termes consécutifs est toujours constante. On appelle cette variation absolue la raison de la suite, notée r. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u(n+1)-u(n)=r$$

EXEMPLE

Soit u la suite définie telle que :
$u(0)=3$
$u(n+1)=u(n)+2$

La suite u est une suite arithmétique et les points $(n, u(n))$ sont sur une droite.



Représentation graphique d'une suite arithmétique

2. Le modèle linéaire

Dans le cas d'une suite u arithmétique, on peut ajuster le nuage de points qui la représente graphiquement par une droite. Cet ajustement est appelé modèle linéaire.

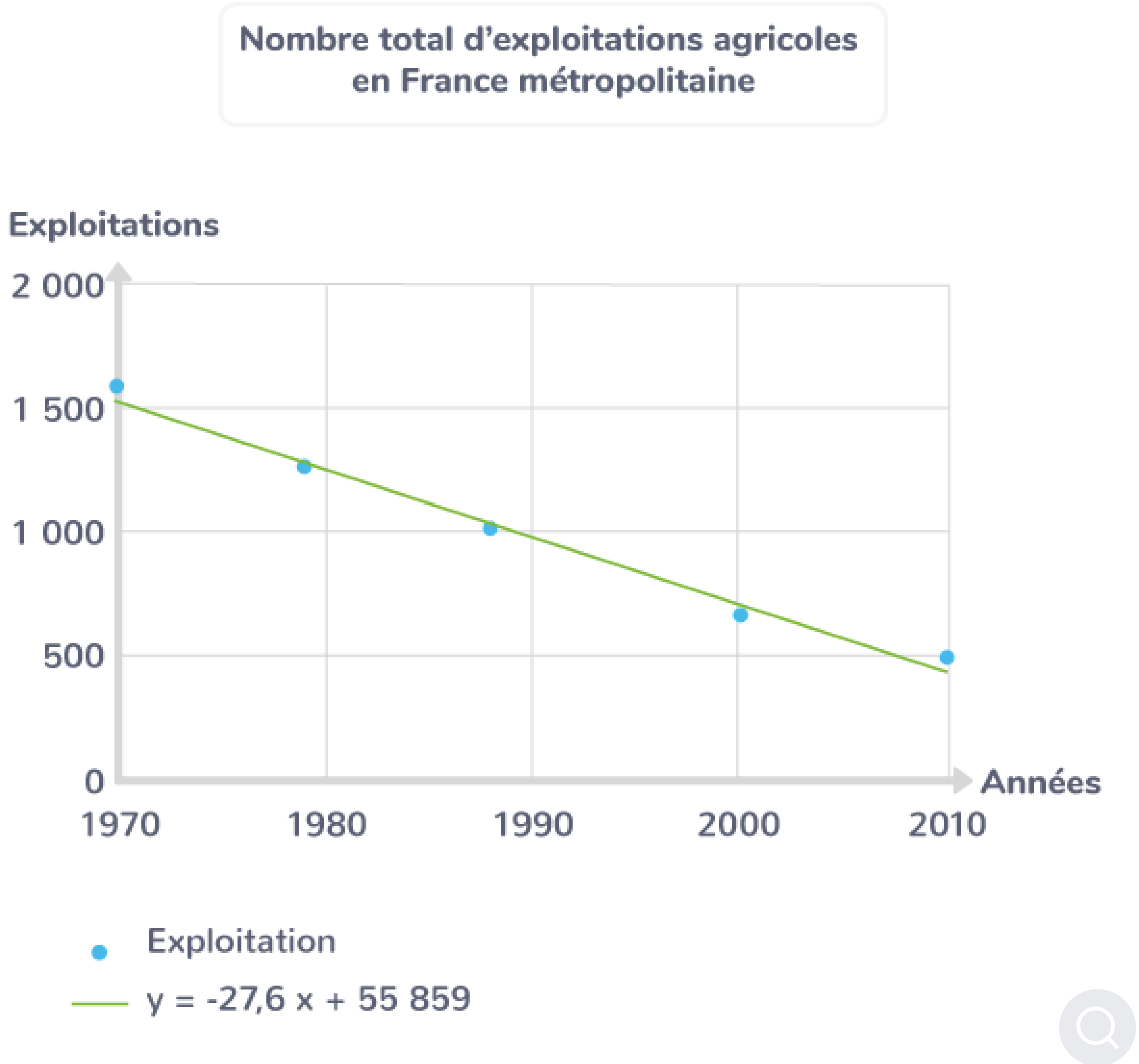
Si la variation absolue d'un effectif de population est presque constant d'un instant à l'autre, on peut ajuster le nuage des points qui la représente par une droite, qu'on appelle modèle linéaire. Ce modèle est obtenu à l'aide d'un tableur.

REMARQUE

Ce modèle n'est pas adapté si la variation absolue subit de forts changements d'un instant à l'autre. Notamment, il n'est pas utilisé pour évaluer l'effectif de la population mondiale. En revanche, il peut être utilisé pour prédire des ressources alimentaires dont la variation absolue est presque constante d'une année à l'autre.

EXEMPLE

Le nuage de points du nombre d'exploitations en France métropolitaine depuis 1970 peut être ajusté par un modèle linéaire.



Nombre total d'exploitations agricoles en France métropolitaine

Le modèle linéaire ajusté sur le nuage de points du nombre d'exploitations agricoles en France métropolitaine (droite verte) approche au mieux les données réelles (points bleus).

B Le taux de variation constant

Quand le taux de variation d'un effectif $\dfrac{u(n+1)}{u(n)}$ est constant, on dit que u est une suite géométrique.

La raison de cette suite géométrique est estimée par le modèle exponentiel établi à partir d'un nuage de points.

1. La suite géométrique

Si le taux de variation $\dfrac{u(n+1)}{u(n)}$ d'une suite u est constant pour tout n, alors u est une suite géométrique.

DÉFINITION

Suite géométrique

Une suite géométrique u est une suite de nombres pour laquelle le rapport entre deux termes consécutifs est toujours constant. On considère qu'aucun terme n'est égal à 0. Le taux de variation constant entre n et

$n+1$ $\frac{u(n+1)}{u(n)}$ est appelé raison de la suite, noté habituellement q .

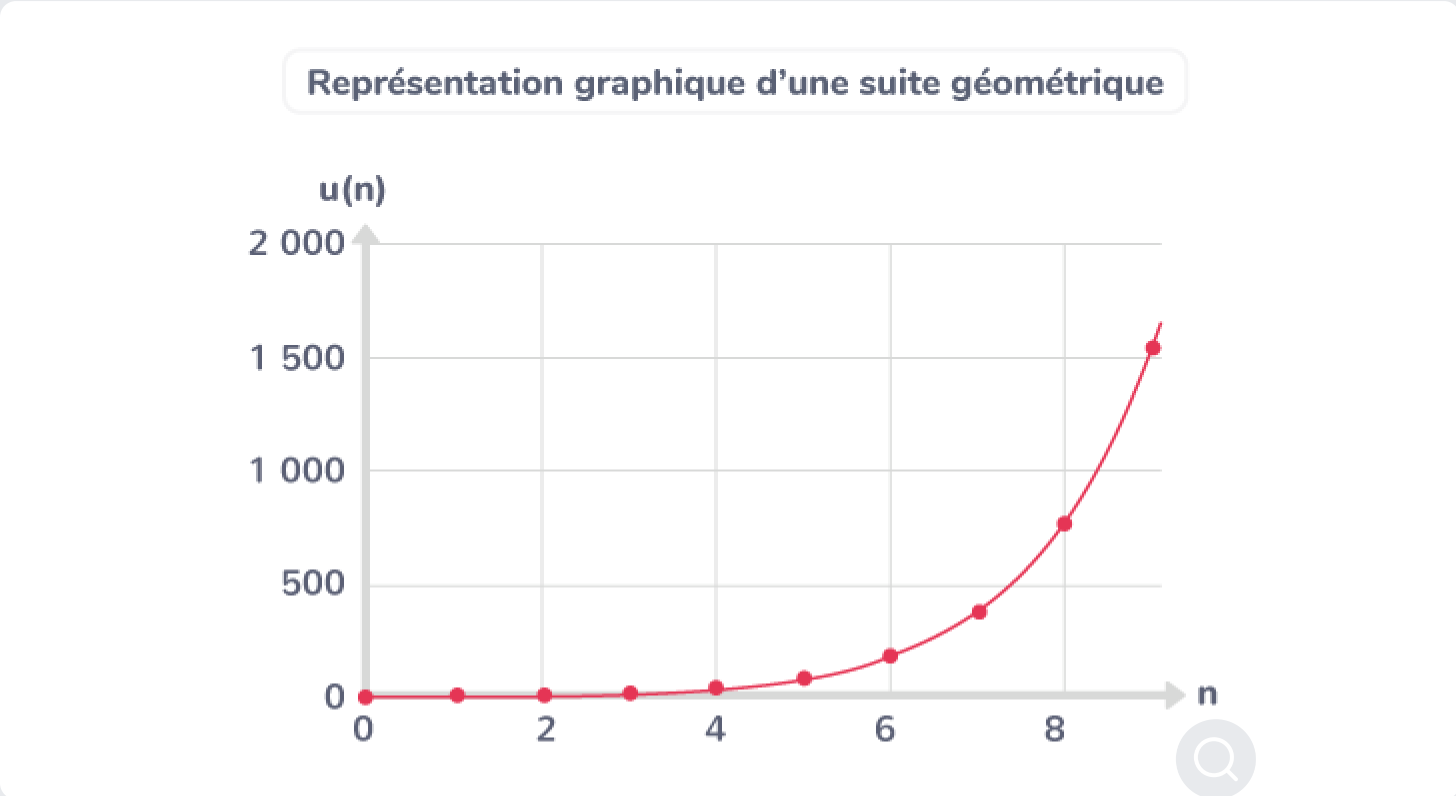
EXEMPLE

Soit u la suite définie telle que :

$u(0)=3$

$u(n+1)=2\times u(n)$

La suite u est une suite géométrique et les points $(n, u(n))$ sont sur une courbe exponentielle.



REMARQUE

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre.

THÉORÈME

Terme général d'une suite géométrique

Le terme général d'une suite géométrique u , de premier terme $u(0)$ et de raison q est égal à :

$u(n)=u(0)\times q^n$

EXEMPLE

L'effectif de population subsaharienne est modélisé par une suite géométrique de raison $q=1{,}02705$. En 2010, cette population était de 868 millions de personnes. On note donc $u(0)=868$.

On peut estimer la population en 2050, c'est-à-dire le 2050 - 2010 = 40^{e} terme de la suite :

$u(40)=u(0)\times q^{40}$

$u(40) = 868 \times 1{,}02705^{40}$
$u(40) = 2\ 524$

Si le modèle est correct, la population subsaharienne sera d'environ 2,5 milliards de personnes en 2050.

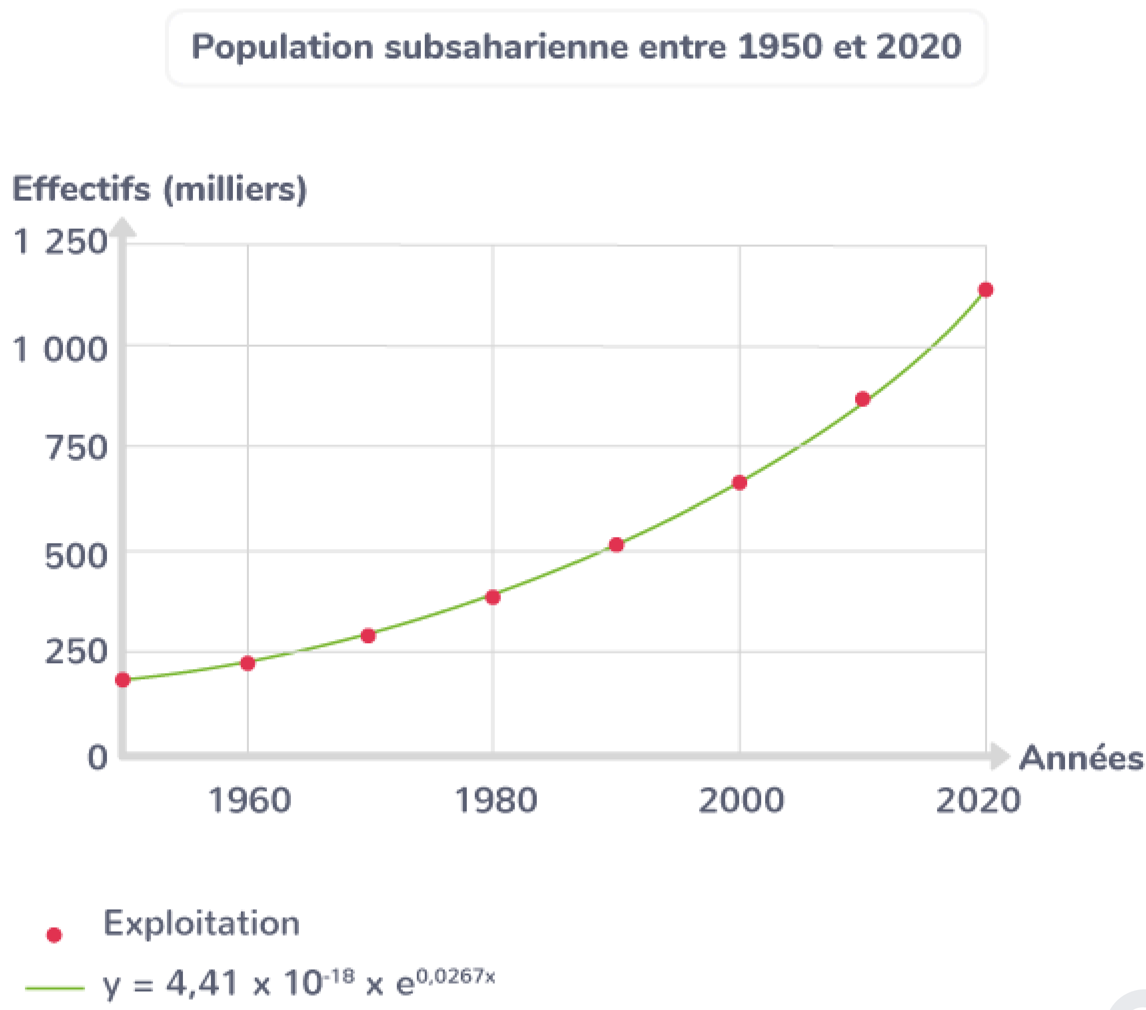
2. Le modèle exponentiel

Dans le cas d'une suite u géométrique, on peut ajuster le nuage de points qui la représente graphiquement par une courbe exponentielle. Cet ajustement est appelé modèle exponentiel.

Si le taux de variation d'un effectif de population est presque constant d'un instant à l'autre, on peut ajuster le nuage des points qui le représente par un modèle exponentiel.

EXEMPLE

Le nuage de points de la population subsaharienne entre 1950 et 2020 peut être ajusté par un modèle exponentiel.



Population subsaharienne entre 1950 et 2020

Le modèle exponentiel, ajusté sur le nuage de points de la population subsaharienne entre 1950 et 2020 (courbe verte), se confond presque exactement avec les données démographiques (points rouges).

3. Le temps de doublement de la population

Dans le cas du modèle exponentiel, on peut calculer le temps de doublement d'une population.

DÉFINITION

Le temps de doublement d'une population

Le temps de doublement d'une population est l'unique réel τ s'il existe tel que :

$$u(n+\tau) = 2 \times u(n)$$

PROPRIÉTÉ

Le temps de doublement τ d'une suite géométrique u et de raison q est égal à :

$$\tau = \frac{ln(2)}{ln(q)}$$

EXEMPLE

L'effectif de population du Brésil est modélisé par une suite géométrique de raison 1,024. On peut calculer le temps de doublement de cette population, c'est-à-dire trouver τ tel pour tout n,

$u(n+\tau) = 2u(n)$. Or, $u(n) = u(0)1{,}024^n$ pour tout n. Donc :

$$u(n+\tau) = u(0) \times 1{,}024^{n+\tau}$$
$$u(n+\tau) = u(0) \times 1{,}024^{n} \times 1{,}024^{\tau}$$
$$u(n+\tau) = u(n) \times 1{,}024^{\tau}$$

On cherche donc τ tel que :

$$1{,}024^{\tau} = 2$$

On applique la fonction $\ln$ des deux côtés de l'équation. En utilisant la propriété du cours $\ln(a^b) = b\ln(a)$, on a :

$$\ln(1{,}024^{\tau}) = \ln(2)$$
$$\Leftrightarrow \tau \times \ln(1{,}024) = ln(2)$$
$$\Leftrightarrow \tau = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}024)}$$
$$\Leftrightarrow \tau = 29$$

Dans ce modèle, la population du Brésil double tous les 29 ans.

III Le modèle de Malthus

À la fin du XVIII^e siècle, l'économiste britannique Malthus s'inquiète du risque de surpopulation. Sa démarche conduit à un modèle démographique exponentiel à partir des taux de natalité et de mortalité. Le modèle de Malthus exprime des conditions de convergence de la population, mais présente des limites en situation réelle.

A La démarche de Malthus

La démarche de Malthus repose sur la prévision d'un déséquilibre entre la croissance démographique et la production de denrées alimentaires.

Le modèle mathématique qu'il établit suppose que le taux de variation de l'effectif est directement proportionnel à l'effectif.

DÉFINITION

Modèle de Malthus

Le modèle de Malthus prévoit l'évolution d'un effectif de population en fonction des taux de natalité a et mortalité b considérés constants. Le taux de variation de l'effectif $u(n+1)$ à l'instant $n+1$ est proportionnel à l'effectif à l'instant n :

$$\frac{u(n+1)}{u(n)} = a \times u(n) - b \times u(n)$$

B Les conditions de convergence de la population

D'après les conditions de convergence de la population, si le taux de mortalité est supérieur au taux de natalité, alors l'effectif décroît vers 0. Si le taux de mortalité est inférieur au taux de natalité, l'effectif croît vers l'infini.

Malthus remarque que la croissance géométrique de la population (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 millions de personnes avec un doublement tous les 25 ans) est infiniment plus rapide que celle des ressources alimentaires qu'elle produit.

PROPRIÉTÉ

- Le modèle de Malthus converge vers 0 si le taux de natalité est plus faible que le taux de mortalité, c'est-à-dire si le taux d'accroissement naturel est inférieur à 0.
- Le modèle de Malthus diverge vers $+\infty$ si le taux de natalité est plus élevé que le taux de mortalité, c'est-à-dire si le taux d'accroissement naturel est supérieur à 0.

C Les limites du modèle en situation réelle

Les prédictions du modèle de Malthus sont correctes sur un temps court. Elles présentent des limites en situation réelle, c'est-à-dire sur un temps long.

La limite principale de ce modèle est que la croissance y est illimitée. En effet, si le taux d'accroissement naturel est supérieur à 0, alors l'effectif de la population tend vers l'infini, ce qui est impossible. La Terre ne dispose que d'une capacité alimentaire limitée. Malthus craint que ce déséquilibre ne se régule naturellement par des guerres ou des épidémies, sinon par la famine.

Un second obstacle est de considérer les taux de natalité et de mortalité constants au cours du temps. Si cette hypothèse simplifie la résolution des équations, c'est loin d'être la réalité. Depuis le XVIII^{e} siècle, ces taux sont en effet en baisse en Europe.