BAB IV
FUNGSI

A. Pendahuluan

Salah satu konsep dalam matematika yang paling penting adalah konsep fungsi. Dengan konsep fungsi, para matematikawan maupun para ahli di bidang yang lain dengan jelas dapat mengetahui apakah suatu struktur identik dengan struktur yang lain. Dan hampir semua cabang matematika menggunakan konsep fungsi dalam pengembangannya.

Fungsi linear dan fungsi kuadrat merupakan salah satu fungsi yang banyak digunakan dalam kehidupan. Banyak masalah sehari-hari menjadi lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan konsep fungsi linear dan fungsi kuadrat.

Diharapkan mahasiswa dapat menerapkan konsep fungsi baik fungsi linear maupun fungsi kuadrat dalam berbagai permasalahan sehari-hari dan berbagai bidang pengembangan ilmu yang lain

B. Pengertian Fungsi

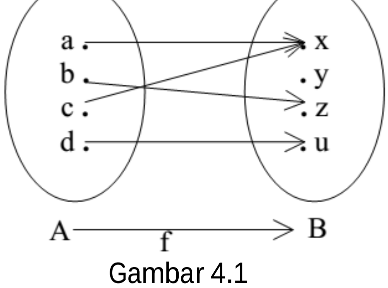
Definisi

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal, dengan elemen pada B.

Apabila f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu $y \in B$ dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh f dan peta ini dinyatakan dengan notasi $f(x)$, dan biasa ditulis dengan $f : x \to f(x)$, sedangkan x biasa disebut prapeta dari $f(x)$.

Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi f , sedangkan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) sedangkan himpunan dari semua peta di B dinamakan daerah hasil (range) dari fungsi f tersebut.

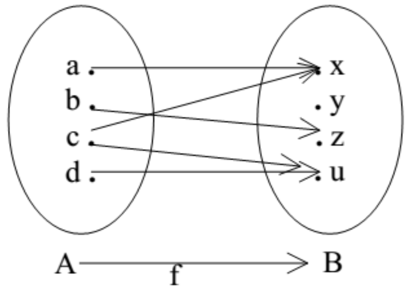
Contoh 4.1



Gambar 4.1

Diagram sebagaimana pada Gambar 1 di atas adalah fungsi karena pertama, terdapat relasi (yang melibatkan dua himpunan yakni *A* dan *B*) dan kedua, pemasangan setiap elemen *A* adalah secara tunggal.

Contoh 4.2



Gambar 4.2

Diagram 4.2 bukan merupakan fungsi karena ada elemen *A* yang dipasangkan tidak secara tunggal dengan elemen pada *B*.

C. Sifat Fungsi

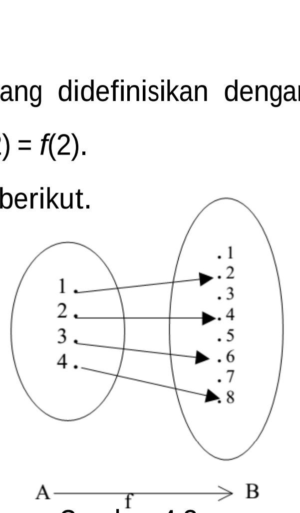
Dengan memperhatikan bagaimana elemen-elemen pada masing-masing himpunan *A* dan *B* yang direlasikan dalam suatu fungsi, maka kita mengenal tiga sifat fungsi yakni sebagai berikut :

1. Injektif (Satu-satu)

Misalkan fungsi *f* menyatakan *A* ke *B* maka fungsi *f* disebut suatu fungsi satu-satu (injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di *A* akan dipetakan pada dua elemen yang berbeda di *B*. Selanjutnya secara singkat dapat dikatakan bahwa $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi injektif apabila $a \neq a'$ berakibat $f(a) \neq f(a')$ atau ekuivalen, jika $f(a) = f(a')$ maka akibatnya $a = a'$.

Contoh 4.3

1. Fungsi *f* pada *R* yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2$ bukan suatu fungsi satu-satu sebab $f(-2) = f(2)$.
2. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.3

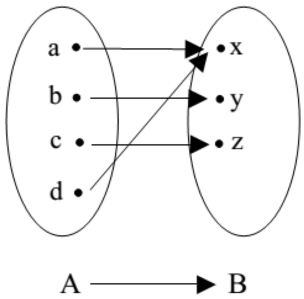
Adapun fungsi pada A = {bilangan asli} yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x$ adalah fungsi satu-satu, sebab kelipatan dua dari setiap dua bilangan yang berlainan adalah berlainan pula.

2. Surjektif (Onto)

Misalkan f adalah suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil $f(A)$ dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B, atau $f(A) \subset B$. Apabila $f(A) = B$, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A maka kita katakan f adalah suatu fungsi surjektif atau "*f* memetakan *A* Onto *B*".

Contoh 4.4

1. Fungsi $f : R \rightarrow R$ yang didefinisikan dengan rumus $f(x) = x^2$ bukan fungsi yang onto karena himpunan bilangan negatif tidak dimuat oleh hasil fungsi tersebut.
2. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.4

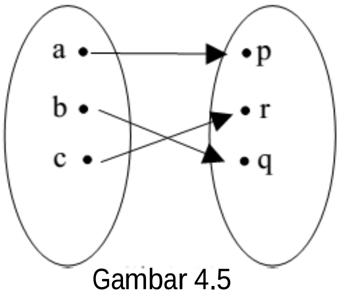
Misal $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{x, y, z\}$ dan fungsi $f : A \rightarrow B$ yang didefinisikan dengan diagram panah adalah suatu fungsi yang surjektif karena daerah hasil f adalah sama dengan kodomain dari f (himpunan B).

3. Bijektif (Korespondensi Satu-satu)

Suatu pemetaan $f : A \rightarrow B$ sedemikian rupa sehingga f merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan "*f* adalah fungsi yang bijektif" atau " *A* dan *B* berada dalam korespondensi satu-satu".

Contoh 4.5

1. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.5

Relasi dari himpunan *A* = {*a, b, c*} ke himpunan B = {*p, q, r*} yang didefinisikan sebagai diagram di samping adalah suatu fungsi yang bijektif.

2. Fungsi *f* yang memasangkan setiap negara di dunia dengan ibu kota negara-negara di dunia adalah fungsi korespondensi satu-satu (fungsi bijektif), karena tidak ada satu kotapun yang menjadi ibu kota dua negara yang berlainan.

D. Jenis Fungsi

Jika suatu fungsi *f* mempunyai daerah asal dan daerah kawan yang sama, misalnya *D*, maka sering dikatakan fungsi *f* pada *D*. Jika daerah asal dari fungsi tidak dinyatakan maka yang dimaksud adalah himpunan semua bilangan real (*R*). Untuk fungsi-fungsi pada *R* kita kenal beberapa fungsi antara lain sebagai berikut.

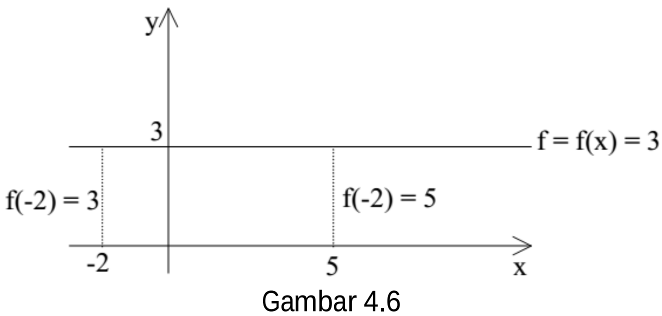
1. Fungsi Konstan

Definisi

$f : x \rightarrow C$ dengan *C* konstan disebut fungsi konstan (tetap). Fungsi *f* memetakan setiap bilangan real dengan *C*.

Contoh 4.6

Fungsi $f : x \rightarrow 3$



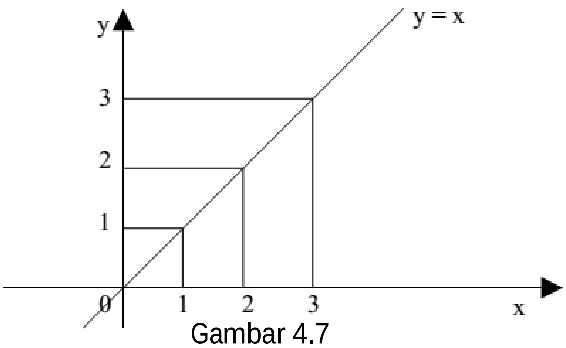
Gambar 4.6

$f(-2) = 3$, $f(0) = 3$, $f(5) = 3$.

2. **Fungsi Identitas**

Definisi

Fungsi $R \rightarrow R$ yang didefinisikan sebagai $f : x \rightarrow x$ disebut fungsi identitas.



Gambar 4.7

$f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$

3. **Fungsi Linear**

Definisi

Fungsi pada bilangan real yang didefinisikan $f(x) = ax + b$, a dan b konstan dengan $a \neq 0$ disebut fungsi linear.

Grafik fungsi linier berupa garis lurus. Untuk menggambar grafik fungsi linier bisa dilakukan dengan dua cara yaitu dengan membuat tabel dan dengan menentukan titik potong dengan sumbu-*x* dan sumbu-*y*.

Contoh 4.7

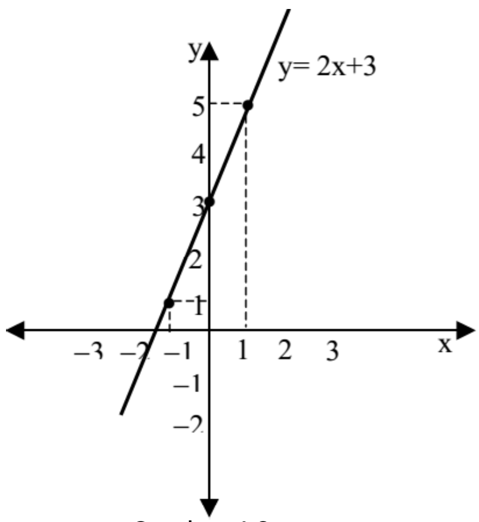
Gambarlah grafik fungsi $y = 2x + 3$

Penyelesaian :

Dengan membuat tabel :

$y = 2x + 3$

x	-1	0	1
y	1	3	5



Gambar 4.8

Dari tabel diperoleh titik-titik berupa pasangan koordinat, kita gambar titik tersebut dalam bidang Cartesius kemudian dihubungkan, sehingga tampak membentuk garis lurus.

Dengan menentukan titik-titik potong dengan sumbu-*x* dan sumbu-*y*

$y = 2x + 3$

Titik potong grafik dengan sumbu-*x* :

$y = 0 \rightarrow 0 = 2x + 3$

$-2x = 3$

$$x = -\frac{3}{2}$$

sehingga titik potong grafik dengan sumbu *x* adalah $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

Titik potong grafik dengan sumbu-*y* :

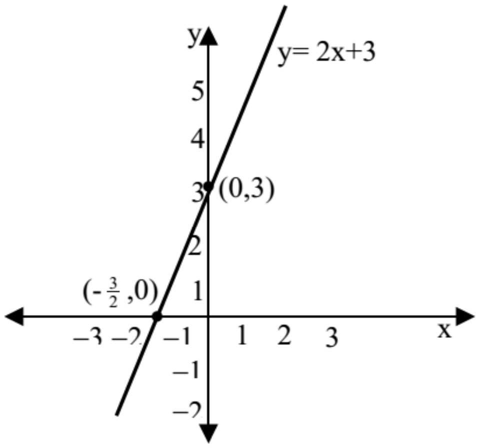
$x = 0 \rightarrow y = 2x + 3$

$y = 2.0 + 3$

$y = 0 + 3$

$y = 3$

sehingga titik potong grafik dengan sumbu-*y* adalah (0,3) Kedua titik potong tersebut digambar dalam bidang Cartesius kemudian dihubungkan sehingga tampak membentuk garis lurus.



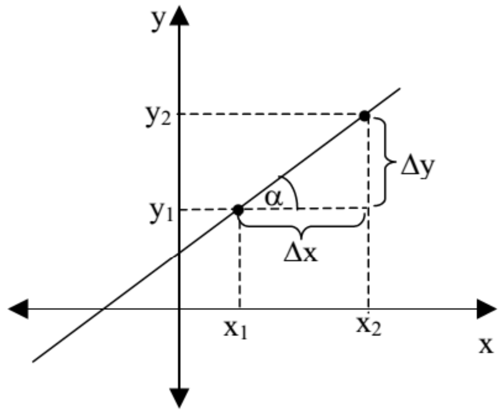
Gambar 4.9

Beberapa hal penting dalam Fungsi Linear

a. Gradien

Gradien atau koefisien arah (m) adalah konstanta yang menunjukkan tingkat kemiringan suatu garis.

Perhatikan gambar berikut ini :



Gambar 4.10

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

Persamaan garis $y = mx + c$, dengan m, $c \in R$, c adalah konstanta, dengan m melambangkan gradien / koefisien arah garis lurus. Pada gambar di atas, misalkan α adalah sudut antara garis horisontal (sejajar sumbu x) dan grafik fungsi linier dengan arah putaran berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam, maka gradien dapat pula didefinisikan sebagai

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha}$$

Catatan :

1) Jika $m = 0$ maka grafik sejajar dengan sumbu-x dan ini sering disebut sebagai fungsi konstan.
2) Jika $m > 0$ maka grafik miring ke kanan ($0° < \alpha < 90°$)
3) Jika $m < 0$ maka grafik miring ke kiri ($90° < \alpha < 180°$)

b. Menentukan Persamaan Garis melalui Satu Titik dan gradien *m*

Misalkan garis $y = mx + c$ melalui titik P (x_1, y_1), setelah nilai koordinat titik P disubstitusikan ke persamaan garis tersebut diperoleh:

$$y = mx + c$$

$$y_1 = mx_1 + c$$

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

Jadi persamaan garis melalui titik P (x_1, y_1), dan bergradien m adalah

$$\boxed{y - y_1 = m\ (x - x_1)}$$

c. Menentukan Persamaan Garis melalui Dua Titik

Persamaan garis melalui dua titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2) dapat dicari dengan langkah sebagai berikut :

Persamaan garis melalui titik A (x_1, y_1) dengan memisalkan gradiennya m adalah

$$y - y_1 = m\ (x - x_1) \text{ .... (i)}$$

karena garis ini juga melalui titik B (x_2, y_2), maka $y_2 - y_1 = m\ (x_2 - x_1)$, sehingga diperoleh gradiennya

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ....(ii)}$$

persamaan (ii) disubstitusikan ke persamaan (i) diperoleh

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Jadi persamaan garis melalui dua titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2) adalah

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

d. Menentukan Titik Potong antara Dua Garis

Misalkan dua garis g_1 dan g_2 saling berpotongan di titik P (x, y) maka nilai x dan y harus memenuhi kedua persamaan garis tersebut. Titik potong dua garis dapat dicari dengan metode substitusi, eliminasi, atau membuat sketsa grafiknya.

e. Hubungan Gradien dari Dua Garis

1) Garis g_1 yang bergradien m_1 dikatakan sejajar dengan garis g_2 yang bergradien m_2 jika memenuhi $m_1 = m_2$.
2) Garis g_1 yang bergradien m_1 dikatakan tegak lurus dengan garis g_2 yang bergradien m_2 jika memenuhi $m_1 \cdot m_2 = -1$.

4. Fungsi Kuadrat

Definisi

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $y = ax^2 + bx + c$ dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola maka sering juga disebut fungsi parabola. Jika $a > 0$, parabola terbuka ke atas sehingga mempunyai titik balik minimum, dan jika $a < 0$ parabola terbuka ke bawah sehingga mempunyai titik balik maksimum.

Langkah-langkah dalam menggambar grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$

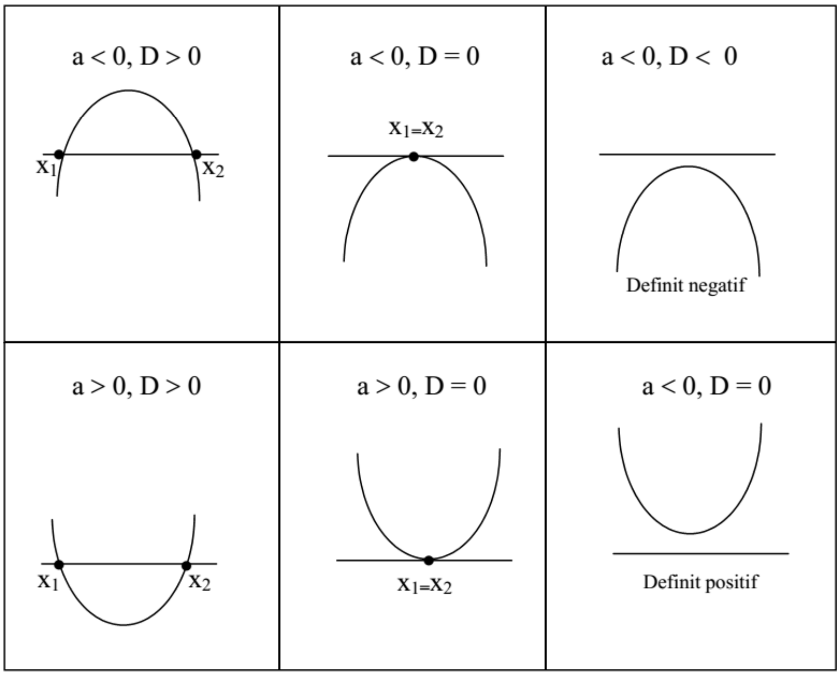
a. Tentukan pembuat nol fungsi → $y = 0$ atau $f(x) = 0$

   Pembuat nol fungsi dari persamaan kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ diperoleh jika $ax^2 + bx + c = 0$. Sehingga diperoleh nilai x yang memenuhi $ax^2 + bx + c = 0$. Nilai ini tidak lain adalah absis titik potong dengan sumbu-x, sedangkan untuk menentukan titik potong dengan sumbu-y, dapat dilakukan dengan mensubstitusikan nilai x tadi pada persamaan kuadrat semula.

b. Tentukan sumbu simetri $x = -\dfrac{b}{2a}$

c. Tentukan titik puncak $P\ (x, y)$ dengan $x = -\dfrac{b}{2a}$ dan $y = -\dfrac{D}{4a}$, dengan nilai $D = b^2 - 4ac$.

   Jika ditinjau dari nilai a dan D maka sketsa grafik parabola sebagai berikut :



Catatan :

Persamaan Kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dicari akar-akarnya dengan:

1) Pemfaktoran
2) Melengkapi bentuk kuadrat sempurna
3) Rumus *abc* : $x_{1.2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Contoh 4.8

Gambarlah sketsa grafik fungsi $y = x^2 - 6x + 5$

Penyelesaian :

a. Menentukan pembuat nol fungsi, dengan pemfaktoran diperoleh

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x - 1)(x - 5) = 0$

$x = 1$ atau $x = 5$

b. Menentukan sumbu simetri $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2(1)} = 3$

c. Menentukan titik puncak $P(x, y)$

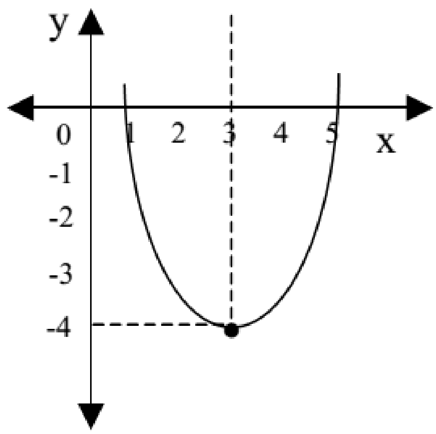
Karena nilai x sudah diperoleh maka tinggal mencari nilai y dengan substitusi $x = 3$ pada fungsi semula

$y = 3^2 - 6(3) + 5$

$= 9 - 18 + 8$

$= -4$

Jadi puncak parabola adalah titik (3, –4) sehingga sketsa grafiknya seperti pada gambar di bawah ini.



E. Rangkuman

1. Pengertian fungsi

   Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal, dengan elemen pada B.

2. Sifat-sifat Fungsi

   a. Injektif (Satu-satu)

   $f : A \to B$ adalah fungsi injektif apabila $a \neq a'$ berakibat $f(a) \neq f(a')$ atau ekuivalen, jika $f(a) = f(a')$ maka akibatnya $a = a'$.

   b. Surjektif (Onto)

   f adalah suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil $f(A)$ dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B, atau $f(A) \subset B$. Apabila $f(A) = B$, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A maka kita katakan f adalah suatu fungsi surjektif atau "f memetakan A Onto B"

   c. Bijektif (Korespondensi satu-satu)

   $f : A \to B$ sedemikian rupa sehingga f merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan "f adalah fungsi yang bijektif" atau " A dan B berada dalam korespondensi satu-satu"

3. Jenis Fungsi

   a. Fungsi Konstan

   Fungsi $f : x \to C$ dengan C konstan disebut fungsi konstan (tetap). Fungsi f memetakan setiap bilangan real dengan C.

   b. Fungsi Identitas

   Fungsi $R \to R$ yang didefinisikan sebagai $f : x \to x$ disebut fungsi identitas.

   c. Fungsi Linear

   Fungsi pada bilangan real yang didefinisikan $f(x) = ax + b$, a dan b konstan dengan $a \neq 0$ disebut fungsi linear.

   d. Fungsi Kuadrat

   Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $y = ax^2 + bx + c$ dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola maka sering juga disebut fungsi parabola. Jika $a > 0$, parabola terbuka ke atas sehingga mempunyai titik balik minimum, dan jika $a < 0$ parabola terbuka ke bawah sehingga mempunyai titik balik maksimum.

4. Beberapa hal penting dalam fungsi linear
   a. Gradien

      Gradien atau koefisien arah (m) adalah konstanta yang menunjukkan tingkat kemiringan suatu garis.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

   b. Menentukan Persamaan Garis melalui Satu Titik dan gradien m

      Persamaan garis melalui titik P (x_1, y_1), dan bergradien m adalah

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

   c. Menentukan Persamaan Garis melalui Dua Titik

      Persamaan garis melalui dua titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2) adalah

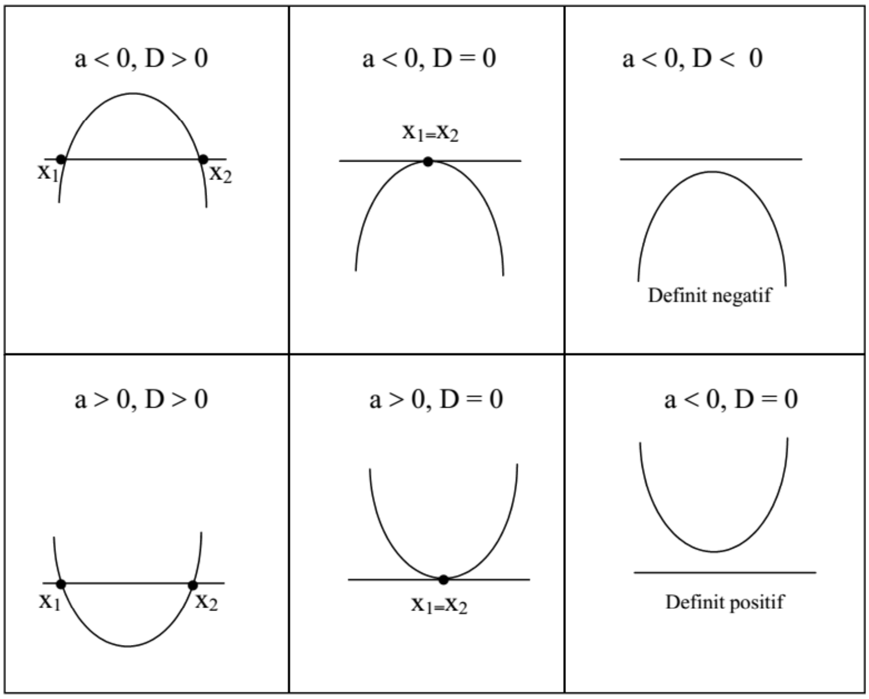
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

   d. Menentukan Titik Potong antara Dua Garis

      Misalkan dua garis g_1 dan g_2 saling berpotongan di titik P (x, y) maka nilai x dan y harus memenuhi kedua persamaan garis tersebut. Titik potong dua garis dapat dicari dengan metode substitusi, eliminasi, atau membuat sketsa grafiknya

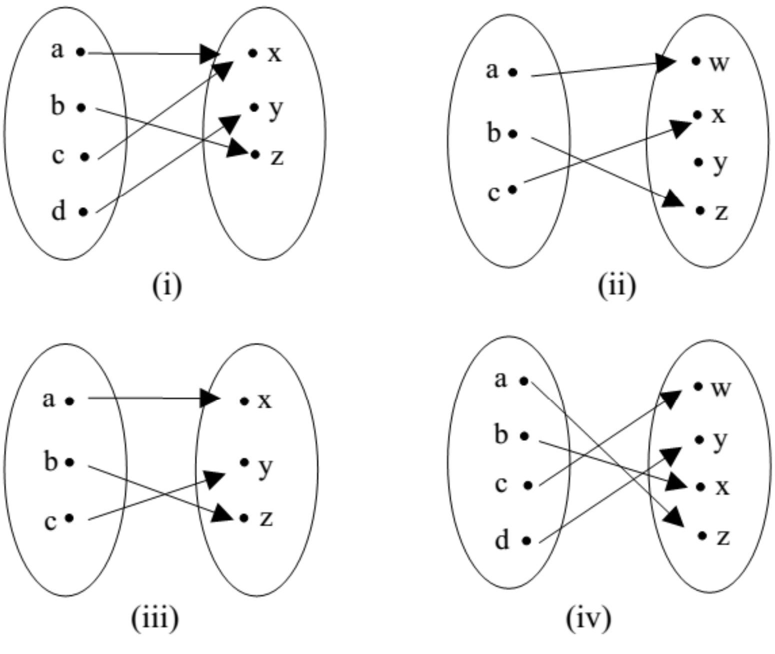
   e. Hubungan Gradien dari Dua Garis
      1) Garis g_1 yang bergradien m_1 dikatakan sejajar dengan garis g_2 yang bergradien m_2 jika memenuhi $m_1 = m_2$.
      2) Garis g_1 yang bergradien m_1 dikatakan tegak lurus dengan garis g_2 yang bergradien m_2 jika memenuhi $m_1 \cdot m_2 = -1$
5. Langkah-langkah dalam menggambar grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$
   a. Tentukan pembuat nol fungsi → $y = 0$ atau $f(x) = 0$
   b. Tentukan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$

c. Tentukan titik puncak *P* (*x*, *y*) dengan $x = -\dfrac{b}{2a}$ dan $y = -\dfrac{D}{4a}$, dengan nilai $D = b^2 - 4ac$



F. Latihan

1. Diantara fungsi-fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif, serta bijektif? Berilah penjelasannya!



2. Suatu fungsi $f : R \rightarrow R$ ditentukan oleh $f(x) = x^2 - 2$
   a. Tentukan $f(-1)$, $f(a)$, dan $f(1)$.
   b. Tentukan a jika $f(a) = 23$
   c. Anggota manakah dari daerah asal yang mempunyai peta 34 ?
3. Manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif, atau bijektif dari fungsi dengan domain {1, 2, 3, 4}, yang didefinisikan sebagai berikut?
   a. R = {(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
   b. R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1); jika kodomainnya {1, 2, 3}
   c. R = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4}
   d. R = {(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 4); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4, 5, 6}
4. Tentukan persamaan garis yang melalui :
   a. titik M(1, 2) dan N(-1, 6)
   b. titik (-2, 3) dan membentuk sudut 45° terhadap sumbu x positif
5. Diketahui gradien garis *g* adalah – ½ . Jika garis tersebut melalui titik A (2, 3) dan B(k, 6), tentukan nilai k !
6. Tentukan persamaan garis *l* yang melalui *R* (3, 1) dan tegak lurus garis *AB* dimana titik *A* (2, 3) dan *B* (6, 5) !