BAB V
MATRIKS

A. Pendahuluan

Matriks dalam matematika digunakan untuk menyatakan bilangan-bilangan ke dalam jajaran empat persegipanjang, terbentuknya suatu matriks dapat diperoleh melalui suatu sistem persamaan linier, demikian pula sebaliknya bahwa suatu sistem persamaan linier dapat diperoleh melalui suatu matriks. Dalam kehidupan sehari-hari penggunaan matriks dapat mempermudah penyajian suatu data dari tabel sekaligus operasi-operasi bilangan yang terkandung di dalamnya. Oleh karena itu, pemahaman mengenai matriks ini sangat penting untuk diperoleh.

Melalui bab ini, mahasiswa diharapkan memahami pengertian matriks, jenis-jenis matriks, operasi dan sifat-sifat matriks, determinan, dan invers, serta dapat menggunakannya dalam pemecahan masalah.

B. Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam bentuk baris dan kolom yang membentuk suatu persegipanjang. Penulisan susunan tersebut dibatasi oleh kurung siku atau kurung biasa. Bilangan-bilangan dalam matriks bisa berupa bilangan *real* ataupun bilangan kompleks. Namun dalam buku ini pembahasan matriks hanya dibatasi pada bilangan real, lihat contoh 5.1.

Contoh 5.1

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1,5 & 0 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$$

Suatu matriks ditentukan oleh banyak baris (misal *m* baris) dan kolom (misal *n* kolom), sehingga suatu matriks yang terdiri dari *m* x *n* unsur (biasa disebut ordo *mxn*). Notasi matriks menggunakan huruf kapital, sementara notasi untuk menyatakan unsur-unsurnya menggunakan huruf kecil. Seperti contoh 5.2.

Contoh 5.2

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

Matriks *A* di atas terdiri dari 3 baris dan 2 kolom yang memiliki 6 unsur, sedangkan matriks *B* terdiri dari 1 baris dan 3 kolom.

Jika *A* adalah suatu matriks, maka simbol untuk menyatakan unsur-unsur pada baris *i* dan unsur-unsur pada kolom *j* adalah a_{ij}. Sehingga matriks *A* pada contoh 5.2 dapat ditulis dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Jadi bentuk umum suatu matriks A yang memiliki unsur-unsur pada baris ke *i* dan unsur-unsur pada kolom *j* adalah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } A_{mxn} = (a_{ij})$$

Keterangan:

A	: Matriks *A*
A_{mxn}	: Matriks *A* berordo mxn
a_{12}	: Unsur matriks *A* pada baris 1 kolom 2
a_{mn}	: Unsur matriks *A* pada baris *m* kolom *n*
(a_{ij})	: Matriks A yang memiliki *i* baris dan *j* kolom dengan i = 1, 2, 3, …., m dan j = 1, 2, 3, …., n

C. Jenis-Jenis Matriks

Pada dasarnya jenis suatu matriks tergantung dari ordo dan unsur-unsurnya, berikut dijelaskan beberapa jenis-jenis matriks.

1. Matriks baris adalah matriks yang hanya terdiri dari satu baris, matriks ini disebut juga vektor baris, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri dari satu kolom, matriks ini disebut juga vektor kolom, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. Matriks nol adalah matriks yang memiliki unsur nol semua, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Matriks negatif adalah matriks yang semua unsurnya dikalikan dengan bilangan -1 atau semua unsurenya merupakan bilangan negatif.

5. Matriks bujur sangkar adalah matriks yang memiliki ordo mxm atau memiliki banyak baris dan kolom yang sama, matriks ini disebut juga matriks persegi, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang memiliki semua unsur bilangan di atas dan di bawah diagonal ialah 0, matriks ini disimbolkan dengan huruf D, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

7. Matriks skalar adalah matriks diagonal yang memiliki unsur bilangan yang sama pada diagonalnya, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8. Matriks identitas adalah matriks skalar yang setiap unsur bilangan pada diagonalnya ialah 1, matriks ini disebut juga matriks satuan, misal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Suatu matriks apabila dikalikan dengan matriks satuan maka akan kembali pada dirinya sendiri, misal *A.I=I.A=A*

9. Matriks transpose adalah matriks yang diperoleh dengan menukarkan letak unsur-unsur pada baris menjadi letak unsur-unsur pada kolom, demikian pula sebaliknya. Simbol untuk menyatakan matriks transpose dari matriks *A* adalah A^T misal:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & -8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 2 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Matriks simetris adalah matriks bujur sangkar yang memiliki sifat bahwa transposenya sama dengan matriks semula, misal

$$A = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Matriks singular adalah matriks bujur sangkar yang memiliki determinan 0 dan tidak memiliki invers. Sebaliknya apabila matriks bujur sangkar memiliki determinan $\neq 0$ dan memiliki invers, maka disebut matriks non-singular.

D. Operasi dan Sifat-sifat Matriks

Sebelum membahas mengenai operasi dan sifat-sifat matriks, akan lebih baik dipahami terlebih dahulu tentang pengertian dari kesamaan matriks bahwa dua matriks dikatakan sama jika kedua matriks tersebut memiliki ukuran yang sama dan unsur-unsur yang bersesuaian pada kedua matriks tersebut sama. Perhatikan contoh 5.3 berikut.

Contoh 5.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 7 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Pada contoh 5.3 matriks A = B karena A dan B memiliki ukuran yang sama dan unsur-unsur yang bersesuaian pun sama. A $\neq C$ karena meski A dan C memiliki ukuran yang sama, namun ada unsur bersesuaian yang tidak sama yakni 7 dan 9. A $\neq D$ karena tidak memiliki ukuran yang sama.

Operasi-operasi pada matriks menyebabkan kekhasan atau sifat-sifat pada matriks yang dijelaskan sebagai berikut.

1. Penjumlahan matriks

Jika *A* dan *B* adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka *A* + *B* merupakan matriks yang diperoleh dengan menambahkan unsur-unsur yang bersesuaian pada *A* dan *B*. Dalam hal ini artinya jika dua matriks atau lebih memiliki ukuran yang berbeda, maka matriks-matriks tersebut tidak dapat dijumlahkan.

Contoh 5.4

Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Namun *A* + *C* atau *B* + *C* tidak dapat ditentukan.

Sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan matriks adalah

a. *A* + *B* = *B* + *A* (sifat komutatif)

b. *A* + (*B* + *C*) = (*A* + *B*) + *C* (sifat asosiatif)

c. *A* + 0 = 0 + *A* = *A* (memiliki matriks identitas yakni matriks 0)

2. Pengurangan matriks

Syarat operasi pengurangan sama dengan operasi penjumlahan yakni ukuran matriks yang dioperasikan harus sama. Jika *A* dan *B* adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka *A* - *B* merupakan matriks yang diperoleh dengan mengurangkan unsur-unsur yang bersesuaian pada *A* dengan *B*.

Contoh 5.5

Pada contoh 5.5 ini, kita gunakan matriks-matriks pada contoh 5.4

Sehingga

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Namun *A* - *C* atau *B* - *C* tidak dapat ditentukan.

Berbeda dengan sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan matriks, pada pengurangan matriks tidak berlaku sifat komutatif dan sifat asosiatif.

3. Perkalian skalar dengan matriks

Jika *c* adalah suatu skalar dan *A* adalah suatu matriks *A*, maka hasil kali *cA* adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan *c* pada setiap unsur *A*.

Contoh 5.6

Perhatikan matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$3A = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 3 & -21 \\ 18 & 15 \end{bmatrix} \quad (-1)A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 7 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

Secara intuitif, pada contoh di atas dapat diperoleh informasi bahwa jika A adalah sebarang matriks maka –A menyatakan (-1)A. Serta, jika *A* dan *B* adalah dua matriks yang ukurannya sama, maka *A* – *B* didefinisikan sebagai *A* + (-*B*) = *A* + (-1)*B*.

Sehingga sifat-sifat yang berlaku pada perkalian skalar dengan matriks adalah

a. (-1)*A* = -*A*

b. *A* + (-*B*) = *A* + (-1)*B*

c. *A* + (-*A*) = *A* – *A* = 0

d. $cA = Ac$ (sifat komutatif)

e. $c(A+B) = cA + cB$ (sifat distributif)

f. $c(A-B) = cA - cB$

g. $(c+d)A = cA + dA$

h. $(cd)A = c(dA)$ (sifat asosiatif)

4. Perkalian matriks dengan matriks

Jika *A* adalah matriks berordo mxn dan *B* adalah matriks berordo nxr, Hasil kali *A* dan *B* adalah suatu matriks (misal *C*) yang memiliki ordo mxr. Setiap elemen dari *C* (misal c_{ij}) diperoleh dari jumlah hasil kali unsur-unsur baris ke-*i* dari *A* dengan unsur-unsur kolom ke-*j* dari *B*.

Dari penjelasan tersebut diketahui bahwa syarat dua matriks dapat dikalikan adalah banyak kolom matriks pertama harus sama dengan banyak baris pada matriks kedua, sehingga hasil perkalian tersebut memiliki ordo baru yakni banyak baris matriks pertama kali banyak kolom matriks kedua.

Contoh 5.7

Perhatikan matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Karena A adalah matriks berordo 2x3 dan B adalah matriks berordo 3 x 3, maka hasil perkalian A dan B adalah matriks berordo 2x3 (misal *AB*=*C*). Untuk mendapatkan unsur-unsur C (c_{ij}), berikut perhitungannya

$c_{11} = (1.2) + (0.4) + (-1.-1) = 3$

$c_{12} = (1.0) + (0.1) + (-1.2) = -2$

$c_{13} = (1.3) + (0.0) + (-1.5) = -2$

$c_{21} = (3.2) + (2.4) + (4.-1) = 10$

$c_{22} = (3.0) + (2.1) + (4.2) = 10$

$c_{23} = (3.3) + (2.0) + (4.5) = 29$

sehingga

$A.B = C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 10 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

Hasil kali A dan B di atas menghasilkan C, sekarang yang menjadi pertanyaan adalah apakah hasil kali B dan A menghasilkan C? dengan kata lain apakah perkalian matriks dengan matriks bersifat komutatif?. Perhatikan bahwa B dan A tidak dapat dikalikan karena banyak kolom dari B tidak sama dengan banyak baris dari A. Sehingga perkalian matriks dengan matriks tidak bersifat komutatif atau $A.B \neq B.A$.

Sifat-sifat yang berlaku pada perkalian matriks dengan matriks adalah sebagai berikut

a. $A(BC) = (AB)C$ (sifat asosiatif)
b. $A(B + C) = AB + AC$ (sifat distributif)
c. $(B + C)A = BA + CA$
d. $A(B - C) = AB - AC$
e. $(B - C)A = BA - CA$
f. $AI = IA = A$ (memiliki matriks identitas)

5. Perpangkatan matriks

Perpangkatan matriks A^n dengan n>1, n ∈ bilangan asli hanya dapat dilakukan jika A adalah matriks bujur sangkar dan unsur-unsur hasil perpangkatan matriks bukan merupakan perpangkatan dari unsur-unsur A. Dengan demikian jika A matriks bujur sangkar maka berlaku $A^2 = A.A$; $A^3=A^2.A$ dan seterusnya.

Contoh 5.8

Diberikan A adalah matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa unsur-unsur yang bersesuaian pada A^2 bukan hasil kuadrat dari unsur-unsur pada A.

E. Determinan

Suatu matriks yang memiliki determinan hanyalah matriks bujur sangkar, determinan dapat didefinisikan sebagai jumlah semua hasil kali elementer. Yang dimaksud dengan hasil kali elementer adalah setiap hasil kali n unsur dari matriks tersebut.

Misal matriks A merupakan matriks bujur sangkar, biasanya fungsi determinan disimbolkan dengan det, jumlah semua hasil kali elementer dari A disimbolkan det (A) atau sering juga disimbolkan $|A|$, sementara jumlah det (A) merupakan determinan A.

Jika A adalah matriks dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Maka determinan A dengan menggunakan hasil kali elementer adalah

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Contoh 5.9

Diberikan A adalah matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\det(A) = 3.7 - 1.5$$

Jika A adalah matriks dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Maka determinan A dengan menggunakan hasil kali elementer adalah

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{matrix}$$

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Cara menentukan determinan matriks ordo 3x3 di atas sering kali disebut dengan metode **sarrus**, metode ini hanya dapat digunakan untuk matriks berordo 3x3. Cara kerja metode ini adalah menempatkan dua kolom pertama dari determinan awal, lalu menjumlahkan hasil kali unsur pada tiap diagonal dari kiri atas ke kanan bawah yang dikurangi dengan jumlah hasil kali unsur pada tiap diagonal dari kiri bawah ke kanan atas.

Contoh 5.10

Diberikan A adalah matriks, tentukan det (A) menggunakan metode sarrus

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{matrix}$$

$$\det(A) = (0 + 12 + 4) - (-12 + (-36) + 0) = 64$$

Determinan matriks berordo 4x4 atau lebih dapat dihitung melalui ekspansi kofaktor, sebetulnya cara ini dapat digunakan untuk mencari determinan pada semua matriks bujur sangkar yang memiliki berordo berapapun termasuk ordo 2x2 dan 3x3. Namun secara umum, cara seperti pada contoh 5.9 dan contoh 5.10 sebelumnya banyak dipandang lebih mudah dan efektif untuk digunakan.

Sebelum menggunakan ekspansi kofaktor, kita harus memahami terlebih dahulu minor dan kofaktor suatu matriks. Minor unsur a_{ij} yang dinotasikan dengan M_{ij} adalah determinan sub matriks setelah menghilangkan baris ke *i* dan kolom *j* dari *A*. Sementara itu kofaktor unsur a_{ij} adalah bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ yang dinotasikan dengan C_{ij}.

Contoh 5.11

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Minor unsur a_{12} adalah

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Sedangkan kofaktor a_{12} adalah

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = 6$$

Perhatikan bahwa setiap kali mencari C_{ij}, maka selalu mencari M_{ij} dan yang membedakan nilanya adalah tanda $+$ atau tanda $-$. Hal ini dikarenakan pangkat *i* dan j dari perpangkatan $(-1)^{i+j}$, oleh karena itu apabila dibuat suatu pola pangkat bilangan ganjil atau genap sebagai tanda untuk mengisi unsur-unsur pada matriks. Maka dapat dibuat pola sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

Mencari deteminan dengan menggunakan ekspansi kofaktor dilakukan dengan cara menambahkan setiap hasil kali dari unsur-unsur suatu baris dengan kofaktor-kofaktornya. Misal A adalah matriks yang berukuran mxm serta $1 \le i \le m$ dan $1 \le j \le m$, maka berlaku

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{im}C_{im}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris *i*)

dan

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{mj}C_{mj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom *j*)

Contoh 5.12

Dengan menggunakan *A* pada contoh 5.11, hitunglah det(*A*).

Misal det (*A*) dicari dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom 3.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-16) - 3(-16)$$

$$= 64$$

Perhatikan bahwa nilai det (*A*) ini sama dengan nilai det (*A*) pada contoh 5.10. Manakah penyelesaian yang lebih mudah dan sederhana? Tentu hal ini diserahkan pada pembaca untuk memilihnya sebagai suatu strategi. Menurut anda mengapa pada contoh di atas menggunakan ekspansi kofaktor pada kolom ke 3? Bukan pada kolom yang lain atau suatu baris?. Andaikan kolom yang dipilih bukan ke-3, maka perhitungannya akan sedikit lebih lama. Memang strategi dalam memilih ekspansi "kolom atau baris" atau "urutan kolom atau urutan baris" adalah dengan cara memilih kolom atau baris yang memiliki bilangan nol paling banyak.

F. Invers Matriks

Invers matriks dari *A* adalah matriks *B* sehingga *AB* = *BA* = *I*, hal ini berlaku jika A adalah matriks bujur sangkar dan A dapat dibalik (*invertible*). Notasi untuk menyatakan invers matriks A adalah A^{-1}. Sementara untuk mencari A^{-1} dapat menggunakan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(adj(A)),\ \det(A) \neq 0$$

Keterangan:

$adj(A)$ = adjoin matriks A

$adj(A)$ diperoleh dari mentranspose matriks kofaktor (matriks yang terbentuk melalui kofaktor-kofaktor yang bersesuaian)

Contoh 5.13

Apabila A adalah matriks berordo 2x2 dan $ad - bc \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Bagaimanakah A^{-1} yang terbentuk.

Sebelum mencari A^{-1} kita cari terlebuh dahulu $\det(A)$ dan $adj(A)$

$\det(A) = ad - bc$

$C_{11} = d$, $C_{12} = -c$, $C_{21} = -b$, $C_{22} = a$, sehingga matriks kofaktor $C = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

Jadi $adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Maka $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Hasil akhir di atas dapat menjadi sebuah rumus praktis yang digunakan untuk mendapatkan invers suatu matriks yang berordo 2x2.

Contoh 5.14

Dengan menggunakan *A* pada contoh 5.11, berapakah A^{-1}

Sebelumnya telah diperoleh bahwa $\det(A) = 64$

Dengan menggunakan rumus $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ diperoleh

$$C_{11} = 12 \quad C_{12} = 6 \quad C_{13} = -16$$
$$C_{21} = 4 \quad C_{22} = 2 \quad C_{23} = 16$$
$$C_{31} = 12 \quad C_{32} = -10 \quad C_{33} = 16$$

Sehingga matriks kofaktor

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$A^{-1} = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

G. Rangkuman

1. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam bentuk baris dan kolom yang membentuk suatu persegipanjang.
2. Matriks yang terdiri dari *m* x *n* unsur (biasa disebut ordo *m*x*n*) dengan menyatakan banyak baris dan n menyatakan banyak kolom.
3. Jika *A* adalah suatu matriks yang memiliki unsur-unsur pada baris ke *i* dan unsur-unsur pada baris *j*, maka bentuk umum matriks *A* dituliskan dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{atau } A_{mxn} = (a_{ij})$$

   Keterangan:

A	: Matriks *A*
A_{mxn}	: Matriks *A* berordo mxn
a_{12}	: Unsur matriks *A* pada baris 1 kolom 2
a_{mn}	: Unsur matriks *A* pada baris *m* kolom *n*
(a_{ij})	: Matriks A yang memiliki *i* baris dan *j* kolom

   dengan i = 1, 2, 3, …., m dan j = 1, 2, 3, …., n

4. Jenis-jenis matriks diantaranya adalah matriks baris, matriks kolom, matriks nol, matriks negatif, matriks bujur sangkar, matriks diagonal, matriks skalar, matriks identitas, matriks transpose, matriks simetris, dan matriks singular.
5. Dua matriks dikatakan sama jika kedua matriks tersebut memiliki ukuran yang sama dan unsur-unsur yang bersesuaian pada kedua matriks tersebut sama.
6. Operasi Penjumlahan Matriks

   Jika *A* dan *B* adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka *A* + *B* merupakan matriks yang diperoleh dengan menambahkan unsur-unsur yang bersesuaian pada *A* dan *B*.
7. Sifat-sifat yang berlaku pada penjumlahan matriks adalah
   a. *A* + *B* = *B* + *A* (sifat komutatif)
   b. *A* + (*B* + *C*) = (*A* + *B*) + *C* (sifat asosiatif)
   c. *A* + 0 = 0 + *A* = *A* (memiliki matriks identitas yakni matriks 0)

8. Operasi Pengurangan Matriks

   Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka A - B merupakan matriks yang diperoleh dengan mengurangkan unsur-unsur yang bersesuaian pada A dengan B.
9. Pada operasi pengurangan tidak berlaku sifat komutatif dan sifat asosiatif.
10. Perkalian skalar dengan matriks

    Jika *c* adalah suatu skalar dan *A* adalah suatu matriks *A*, maka hasil kali *cA* adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan *c* pada setiap unsur *A*.
11. Sifat-sifat yang berlaku pada perkalian skalar dengan matriks adalah
    a. $(-1)A = -A$
    b. $A + (-B) = A + (-1)B$
    c. $A + (-A) = A - A = 0$
    d. $cA = Ac$ (sifat komutatif)
    e. $c(A + B) = cA + cB$ (sifat distributif)
    f. $c(A - B) = cA - cB$
    g. $(c + d)A = cA + dA$
    h. $(cd)A = c(dA)$ (sifat asosiatif)
12. Perkalian matriks dengan matriks

    Jika *A* adalah matriks berordo mxn dan *B* adalah matriks berordo nxr, Hasil kali *A* dan *B* adalah suatu matriks (misal *C*) yang memiliki ordo mxr. Setiap elemen dari *C* (misal c_{ij}) diperoleh dari jumlah hasil kali unsur-unsur baris ke-*i* dari *A* dengan unsur-unsur kolom ke-*j* dari *B*.
13. Sifat-sifat yang berlaku pada perkalian matriks dengan matriks adalah
    a. $A(BC) = (AB)C$ (sifat asosiatif)
    b. $A(B + C) = AB + AC$ (sifat distributif)
    c. $(B + C)A = BA + CA$
    d. $A(B - C) = AB - AC$
    e. $(B - C)A = BA - CA$
    f. $AI = IA = A$ (memiliki matriks identitas)
14. Perpangkatan matriks

    Jika A matriks bujur sangkar maka berlaku $A^2 = A.A$; $A^3=A^2.A$ dan seterusnya
15. Misal matriks *A* merupakan matriks bujur sangkar, biasanya fungsi determinan disimbolkan dengan det, jumlah semua hasil kali elementer dari *A* disimbolkan

det (A) atau sering juga disimbolkan $|A|$, sementara jumlah det (A) merupakan determinan A.

16. Determinan matriks A berordo 2x2, dengan menggunakan hasil kali elementer adalah $\det(A) = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

17. Determinan matriks A berordo 3x3, dengan menggunakan hasil kali elementer (metode sarrus) adalah

$$\det(A) = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{matrix}$$

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

18. Minor unsur a_{ij} yang dinotasikan dengan M_{ij} adalah determinan sub matriks setelah menghilangkan baris ke *i* dan kolom *j* dari *A*. Sementara itu kofaktor unsur a_{ij} adalah bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ yang dinotasikan dengan C_{ij}.

19. Misal A adalah matriks yang berukuran mxm serta $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq m$, maka berlaku

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{im}C_{im}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris *i*)

dan

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{mj}C_{mj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom *j*)

20. Invers matriks dari *A* adalah matriks *B* sehingga *AB* = *BA* = *I*, hal ini berlaku jika A adalah matriks bujur sangkar dan A dapat dibalik (*invertible*). Notasi untuk menyatakan invers matriks A adalah A^{-1}. Sementara untuk mencari A^{-1} dapat menggunakan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(adj(A)), \det(A) \neq 0$$

Keterangan:

$adj(A)$ = adjoin matriks A

$adj(A)$ diperoleh dari mentranspose matriks kofaktor (matriks yang terbentuk melalui kofaktor-kofaktor yang bersesuaian)

H. Latihan

1. Diberikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Hitunglah

   a. AD c. $F + E$ e. $-4B$ g. $B^T - A^2$

   b. BE d. $E - F$ f. $2D + C^2$ h. $(BE)F$

2. Dengan menggunakan skalar $s = 2$ dan matriks-matriks pada nomor 1, tunjukkan hubungan-hubungan berikut

   a. $(kD)^t = kD^t$ d. $(CD)^t = D^tC^t$

   b. $(E + F)^t = E^t + F^t$ e. $(A^t)^t = A^2$

3. Apabila a_{ij} merupakan unsur pada baris i kolom j dari matriks A, tentukan di baris dan kolom mana a_{ij} akan muncul pada matriks A^t?

4. Dengan menggunakan matriks-matriks pada nomor 1, carilah

   a. $\det(C) - \det(D)$

   b. $\det(E) + \det(F)$

5. Dengan menggunakan matriks-matriks pada nomor 1, buktikan bahwa hubungan-hubungan $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$ dan $(EF)^{-1} = F^{-1}E^{-1}$ adalah berikut benar?. Apakah hubungan tersebut berlaku secara umum untuk sebarang dua matriks yang berukuran sama?. Jelaskan pendapat anda.

6. Misal A adalah matriks yang dapat dibalik dan invers dari $7A$ adalah

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

   Tentukan, matriks A

7. Melalui ekspansi kofaktor, hitunglah determinan dari matriks-matriks berikut

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 9 & -4 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Identifikasilah matriks dari

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$