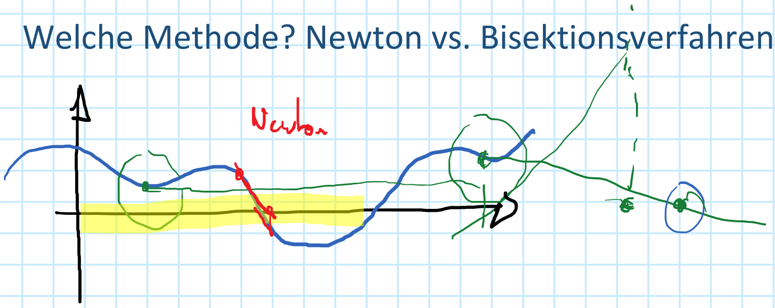
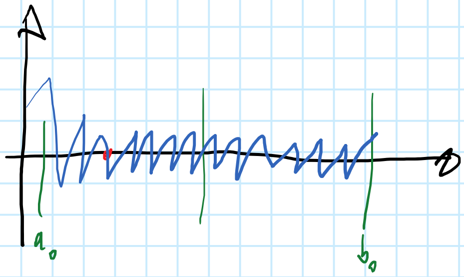
15 Fragestunde

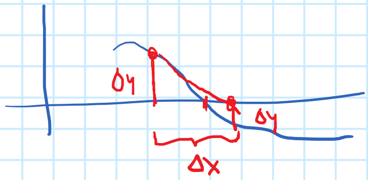
Freitag, 2. Juni 2023 13:04

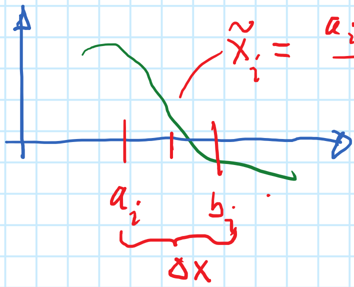
Welche Methode? Newton vs. Bisektionsverfahren





- Für das Newton-Verfahren braucht man die Ableitung f'(x).
- Viele lokale Minima und Maxima => Risiko für schlechte Konvergenz des Newton-Verfahrens gross
- Viele Nullstellen sind für beide Methoden schwierig.
- Newton konvergier schneller als Bisektion.
- Newton kann nicht gut mit beschränkten Definitionsbereichen umgehen.
- Bisektion gibt bessere Kontrolle darüber, wo nach Nullstellen gesucht wird.
- Fehlerabschätzung ist klarer/genauer bei der Bisektion:



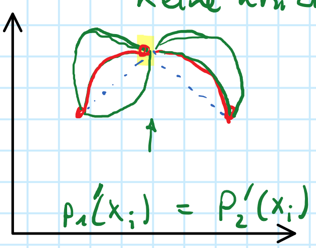


$\tilde{x}_i = \frac{a_i + b_i}{2}$, $\Delta x = \frac{b_i - a_i}{2}$

Welche Interpolationsmethode wählen?

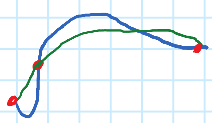
- Anwendung v.a. für grafische Darstellung
- Unsinnige Funktionswerte dürfen nicht vorkommen (z.B. negativ)
- Cubic Spline hat eine differenzierbare ("schöne") 1. Ableitung
- Cubic Splines können lokal zu grosse Krümmung haben, dann wenn die Stützstelle (x_i) ungleichmässig verteilt sind.
- Beim Auffüllen von fehlenden Messwerten ist die lineare Interpolation die sicherste Methode.

keine Knicks



Spline

cubic spline

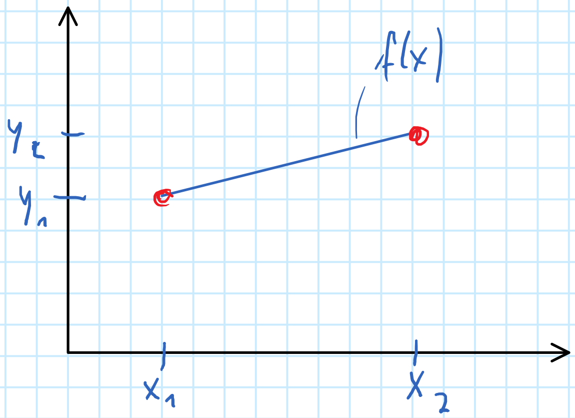


$P_1'(x_i) = P_2'(x_i)$ 1. Abl.

$P_1''(x_i) = P_2''(x_i)$ 2. Abl.

1. Abl. keine Knick

Warum kommt Ableitung bei der Interpolation vor?



Gegeben: $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ (Stützstellen)
Gesucht: $f(x) = mx + b$ mit $y_i = f(x_i)$

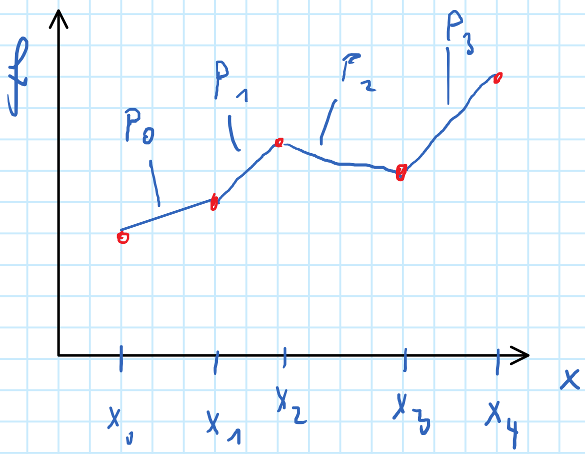
Punkt-Steigungs-Form:

$$f(x) = m(x - x_i) + y_i$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

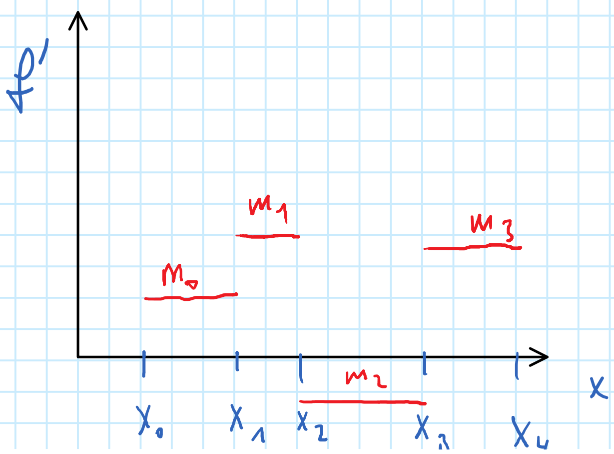
Ableitung: $f'(x) = m$

Linear-Spline (sequenzielles Aneinanderhängen von linearen Funktionen)



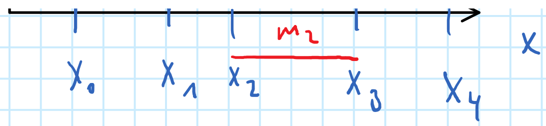
$$P_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \cdot (x - x_j) + y_j$$

$$f(x) = \begin{cases} P_j(x), & x_j \leq x < x_{j+1} \\ \text{u.d.} & \text{sonst.} \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} m_j, & x_j \leq x < x_{j+1} \\ \text{u.d.} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$m_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j}$$



x
x0
x1
x2
m2
x3
x4