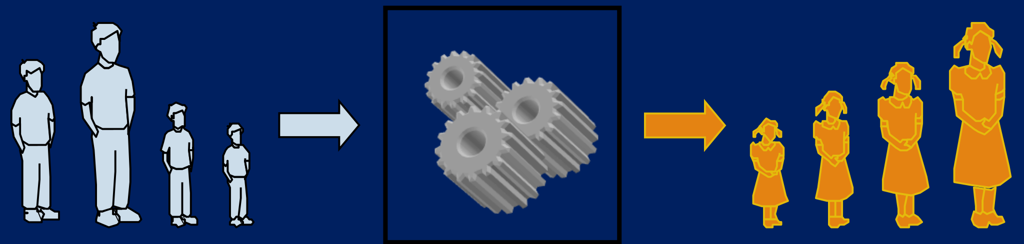
DESIGN & ANALYSIS OF ALGORITHM (BCSC0012)

Chapter 14: Branch & Bound

Traveling Salesman Problem



Prof. Anand Singh Jalal

Department of Computer Engineering & Applications

Branch-and-Bound

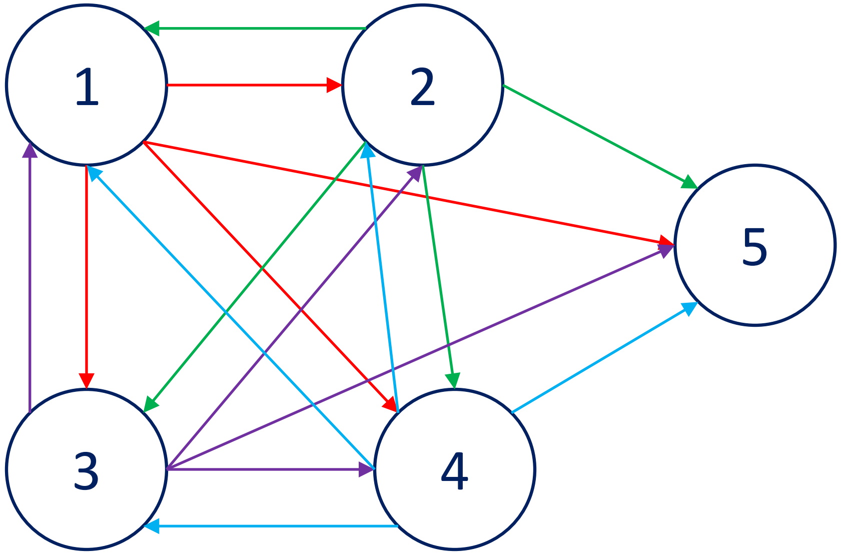
Branch and bound is an algorithm design paradigm which is generally used for solving combinatorial optimization problems.

These problems are typically exponential in terms of time complexity and may require exploring all possible permutations in worst case.

The Branch and Bound Algorithm technique solves these problems relatively quickly.

Branch-and-bound refers to all state space search methods in which all children of the £-node are generated before any other live node can become the £-node.

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	20	30	10	11
2	15	∞	16	4	2
3	3	5	∞	2	4
4	19	6	18	∞	3
5	16	4	7	16	∞

Traveling Salesman Problem

	1	2	3	4	5
1	∞	20	30	10	11
2	15	∞	16	4	2
3	3	5	∞	2	4
4	19	6	18	∞	3
5	16	4	7	16	∞

Row-wise Min.

	1	2	3	4	5	
1	∞	20	30	10	11	10
2	15	∞	16	4	2	2
3	3	5	∞	2	4	2
4	19	6	18	∞	3	3
5	16	4	7	16	∞	4
						=21

Subtract

	1	2	3	4	5
1	∞	10	20	0	1
2	13	∞	14	2	0
3	1	3	∞	0	2
4	16	3	15	∞	0
5	12	0	3	12	∞
	1	0	3	0	0	=4

Col.-wise Min.

Subtract

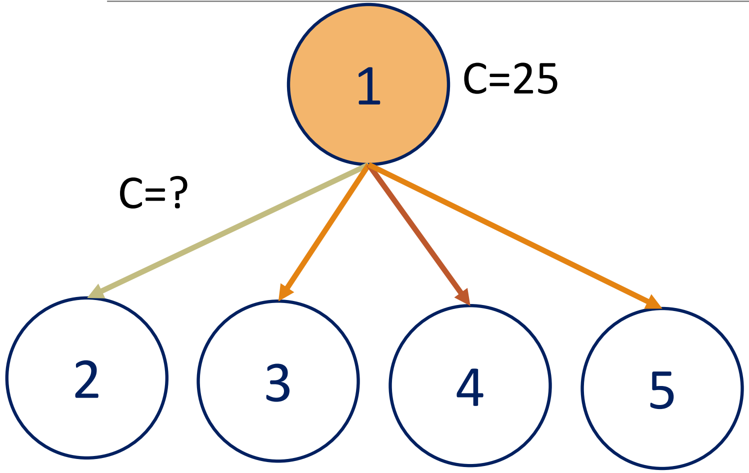
	1	2	3	4	5
1	∞	10	17	0	1
2	12	∞	11	2	0
3	0	3	∞	0	2
4	15	3	12	∞	0
5	11	0	0	12	∞

Reduced Cost Matrix

Reduced Cost= Row-wise cost + Column wise cost

C = 21+4=25

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	10	17	0	1
2	12	∞	11	2	0
3	0	3	∞	0	2
4	15	3	12	∞	0
5	11	0	0	12	∞

1 to 2 →

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	∞	∞	11	2	0	0
3	0	∞	∞	0	2	0
4	15	∞	12	∞	0	0
5	11	∞	0	12	∞	0

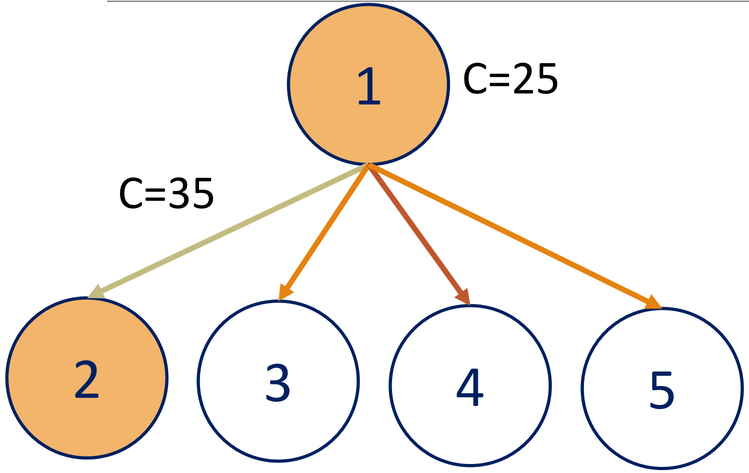
=0

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	11	2	0
3	0	∞	∞	0	2
4	15	∞	12	∞	0
5	11	∞	0	12	∞
	0	0	0	0	0

=0

Cost(1,2)= c(1,2)+C+C’
= 10+25+0
= 35

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	10	17	0	1
2	12	∞	11	2	0
3	0	3	∞	0	2
4	15	3	12	∞	0
5	11	0	0	12	∞

1 to 2

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	∞	∞	11	2	0	0
3	0	∞	∞	0	2	0
4	15	∞	12	∞	0	0
5	11	∞	0	12	∞	0

=0

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	11	2	0
3	0	∞	∞	0	2
4	15	∞	12	∞	0
5	11	∞	0	12	∞
	0	0	0	0	0

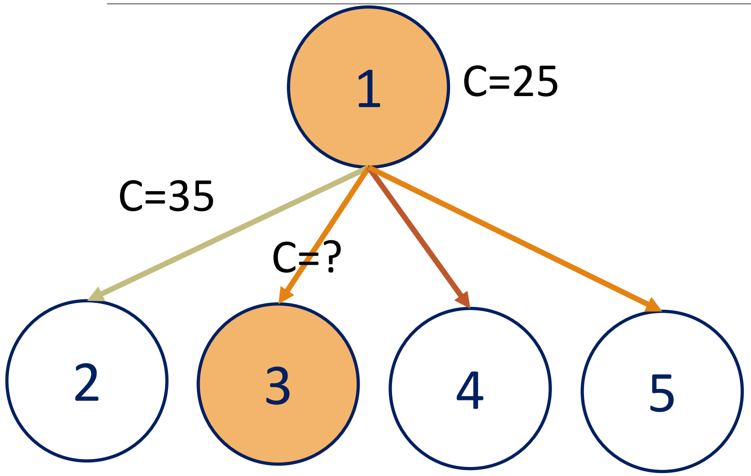
=0

Cost(1,2)= c(1,2)+C+C'

= 10+25+0

= 35

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	10	17	0	1
2	12	∞	11	2	0
3	0	3	∞	0	2
4	15	3	12	∞	0
5	11	0	0	12	∞

1 to 3 →

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	12	∞	∞	2	0	0
3	∞	3	∞	0	2	0
4	15	3	∞	∞	0	0
5	11	0	∞	12	∞	0

=0

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	12	∞	∞	2	0
3	∞	3	∞	0	2
4	15	3	∞	∞	0
5	11	0	∞	12	∞
	11	0	0	0	0

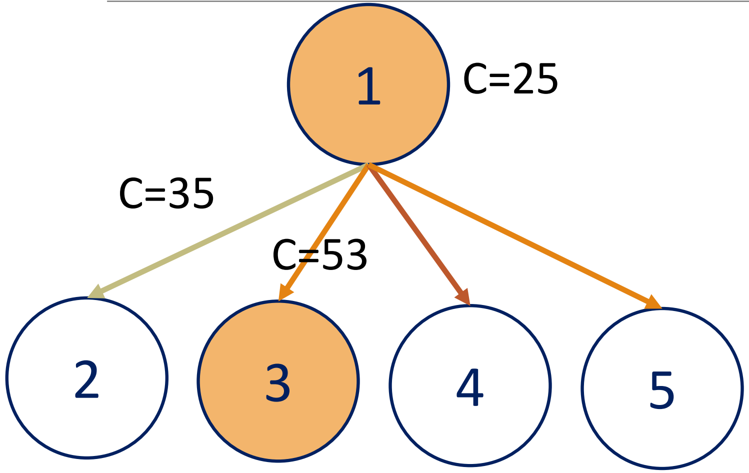
=11

Cost(1,3)= c(1,3)+C+C’

= 17+25+11

= 53

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	10	17	0	1
2	12	∞	11	2	0
3	0	3	∞	0	2
4	15	3	12	∞	0
5	11	0	0	12	∞

1 to 3

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	12	∞	∞	2	0	0
3	∞	3	∞	0	2	0
4	15	3	∞	∞	0	0
5	11	0	∞	12	∞	0

=0

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	1	∞	∞	2	0
3	∞	3	∞	0	2
4	4	3	∞	∞	0
5	0	0	∞	12	∞
	11	0	0	0	0

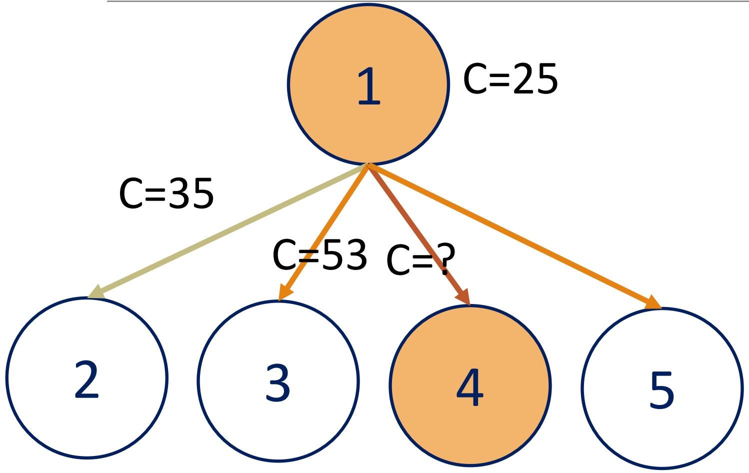
=11

Cost(1,3)= c(1,3)+C+C’

= 17+25+11

= 53

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	10	17	0	1
2	12	∞	11	2	0
3	0	3	∞	0	2
4	15	3	12	∞	0
5	11	0	0	12	∞

1 to 4

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	12	∞	11	∞	0	0
3	0	3	∞	∞	2	0
4	∞	3	12	∞	0	0
5	11	0	0	∞	∞	0

=0

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	12	∞	11	∞	0
3	0	3	∞	∞	2
4	∞	3	12	∞	0
5	11	0	0	∞	∞
	0	0	0	0	0

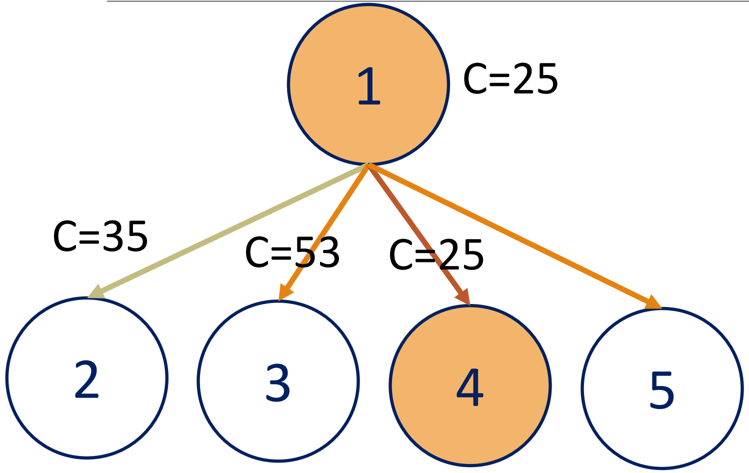
=0

Cost(1,4)= c(1,4)+C+C'

= 0+25+0

= 25

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	10	17	0	1
2	12	∞	11	2	0
3	0	3	∞	0	2
4	15	3	12	∞	0
5	11	0	0	12	∞

1 to 4

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	12	∞	11	∞	0	0
3	0	3	∞	∞	2	0
4	∞	3	12	∞	0	0
5	11	0	0	∞	∞	0

=0

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	12	∞	11	∞	0
3	0	3	∞	∞	2
4	∞	3	12	∞	0
5	11	0	0	∞	∞
	0	0	0	0	0

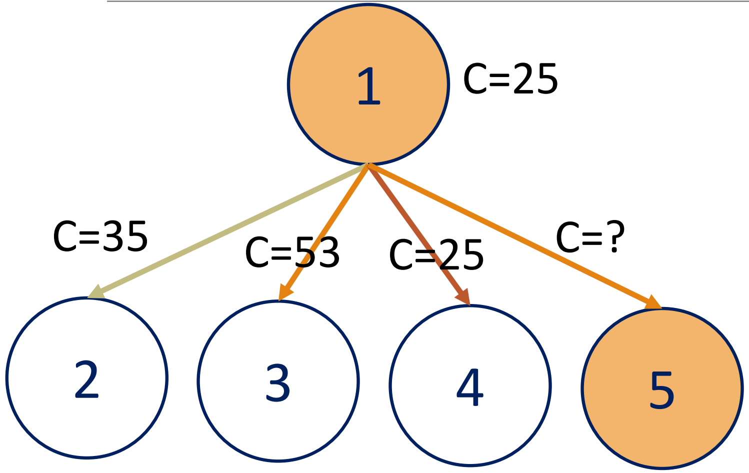
=0

Cost(1,4)= c(1,4)+C+C’

= 0+25+0

= 25

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	10	17	0	1
2	12	∞	11	2	0
3	0	3	∞	0	2
4	15	3	12	∞	0
5	11	0	0	12	∞

1 to 5

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	12	∞	11	2	∞	2
3	0	3	∞	0	∞	0
4	15	3	12	∞	∞	3
5	∞	0	0	12	∞	0

=5

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	10	∞	9	0	∞
3	0	3	∞	0	∞
4	12	0	9	∞	∞
5	∞	0	0	12	∞
	0	0	0	0	0

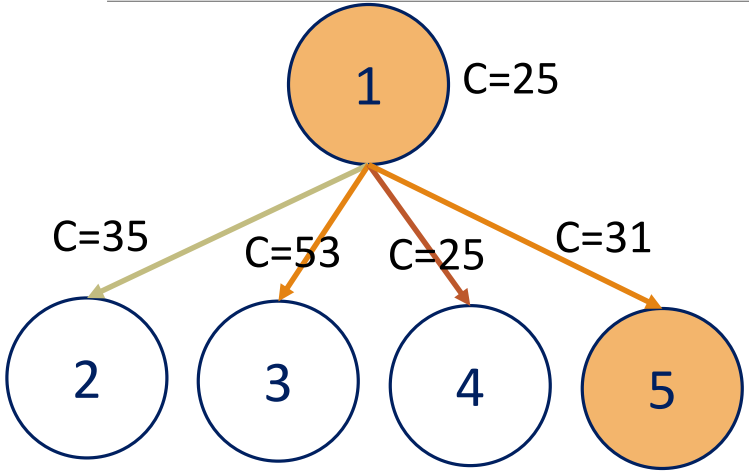
=0

Cost(1,5)= c(1,5)+C+C’

= 1+25+5

= 31

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	10	17	0	1
2	12	∞	11	2	0
3	0	3	∞	0	2
4	15	3	12	∞	0
5	11	0	0	12	∞

1 to 5

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	12	∞	11	2	∞	2
3	0	3	∞	0	∞	0
4	15	3	12	∞	∞	3
5	∞	0	0	12	∞	0

=5

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	10	∞	9	0	∞
3	0	3	∞	0	∞
4	12	0	9	∞	∞
5	∞	0	0	12	∞
	0	0	0	0	0

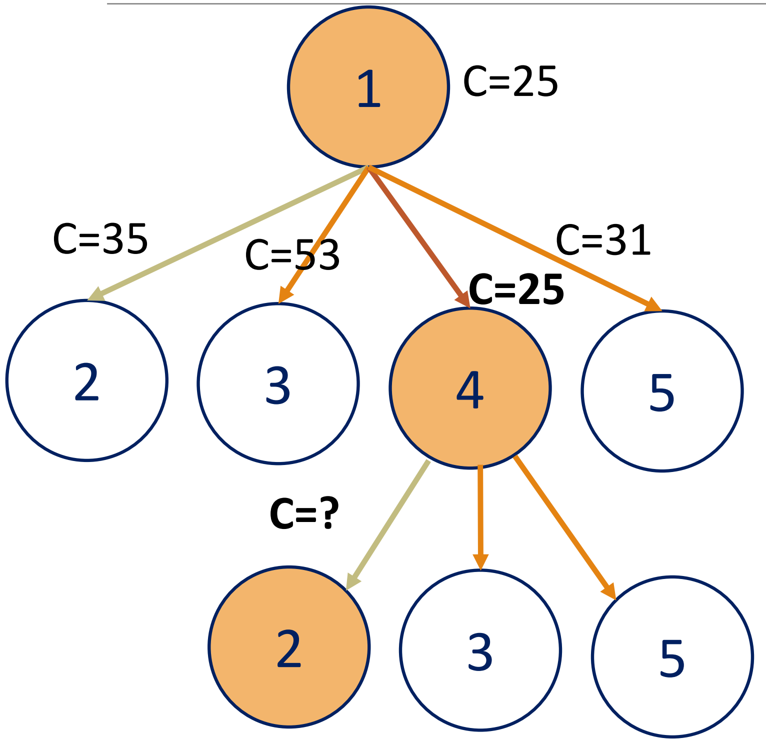
=0

Cost(1,5)= c(1,5)+C+C'

= 1+25+5

= 31

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	12	∞	11	∞	0
3	0	3	∞	∞	2
4	∞	3	12	∞	0
5	11	0	0	∞	∞

1,4-2

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	∞	∞	11	∞	0	0
3	0	∞	∞	∞	2	0
4	∞	∞	∞	∞	∞	0
5	11	∞	0	∞	∞	0

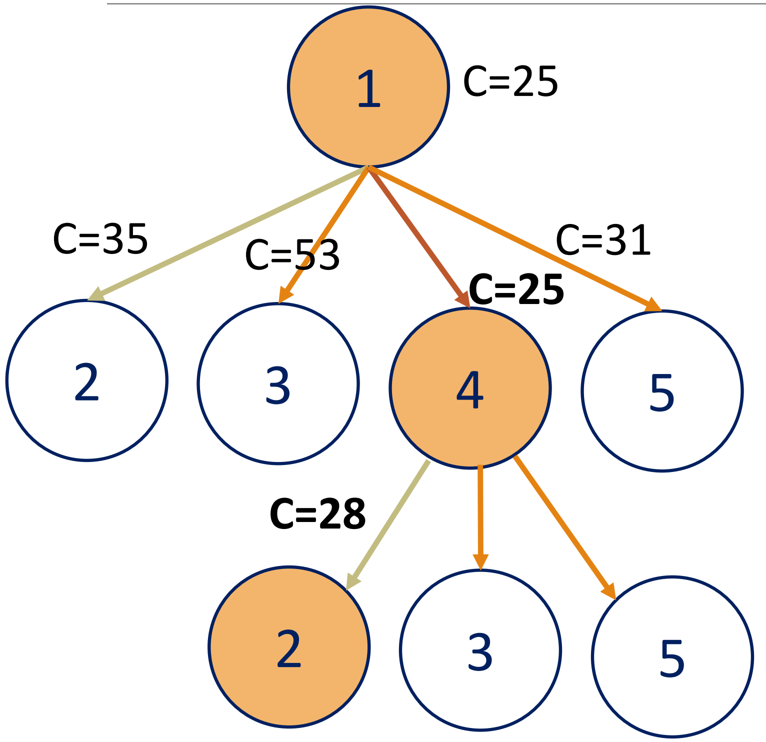
=0

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	11	∞	0
3	0	∞	∞	∞	2
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	11	∞	0	∞	∞
	0	0	0	0	0

=0

Cost(4,2)= c(4,2)+C+C'
= 3+25+0
= 28

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	12	∞	11	∞	0
3	0	3	∞	∞	2
4	∞	3	12	∞	0
5	11	0	0	∞	∞

1,4-2 →

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	∞	∞	11	∞	0	0
3	0	∞	∞	∞	2	0
4	∞	∞	∞	∞	∞	0
5	11	∞	0	∞	∞	0

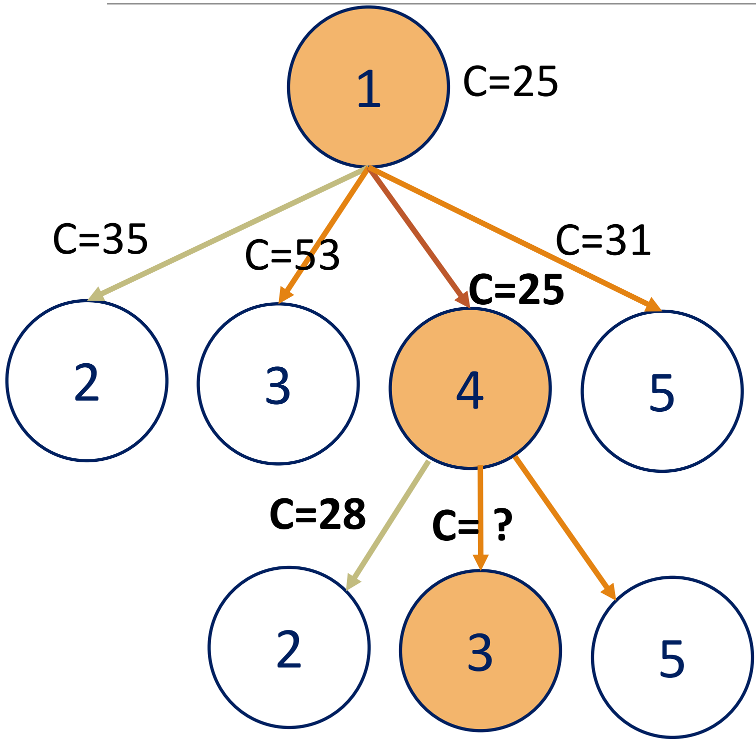
=0

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	11	∞	0
3	0	∞	∞	∞	2
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	11	∞	0	∞	∞
	0	0	0	0	0

=0

Cost(4,2)= c(4,2)+C+C'
= 3+25+0
= 28

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	12	∞	11	∞	0
3	0	3	∞	∞	2
4	∞	3	12	∞	0
5	11	0	0	∞	∞

1,4-3 →

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	12	∞	∞	∞	0	0
3	∞	3	∞	∞	2	2
4	∞	∞	∞	∞	∞	0
5	11	0	∞	∞	∞	0

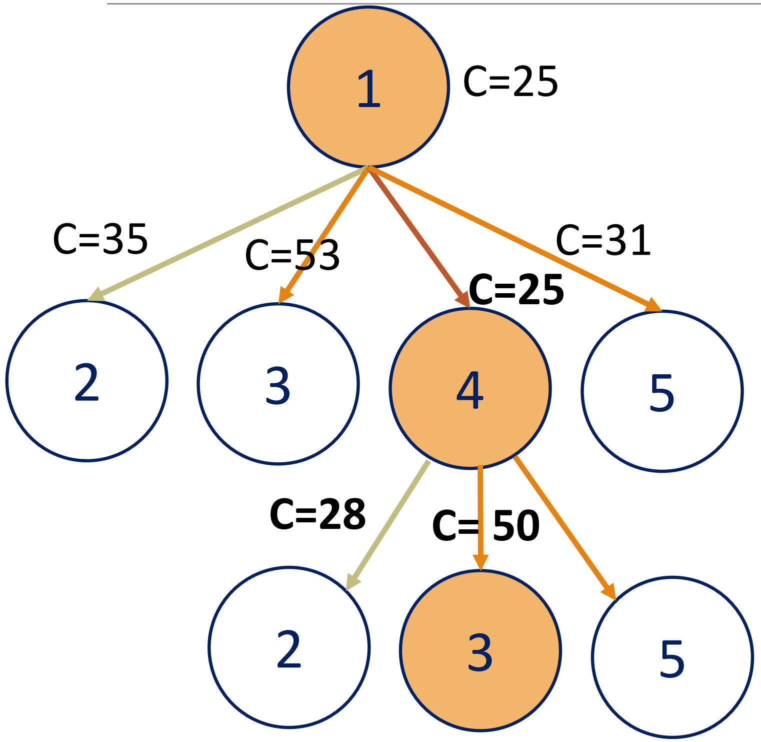
=2

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	12	∞	∞	∞	0
3	∞	1	∞	∞	0
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	11	0	∞	∞	∞
	11	0	0	0	0

=0

Cost(4,3)= c(4,3)+C+C'
= 12+25+13
= 50

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	12	∞	11	∞	0
3	0	3	∞	∞	2
4	∞	3	12	∞	0
5	11	0	0	∞	∞

1,4-3 →

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	12	∞	∞	∞	0	0
3	∞	3	∞	∞	2	2
4	∞	∞	∞	∞	∞	0
5	11	0	∞	∞	∞	0

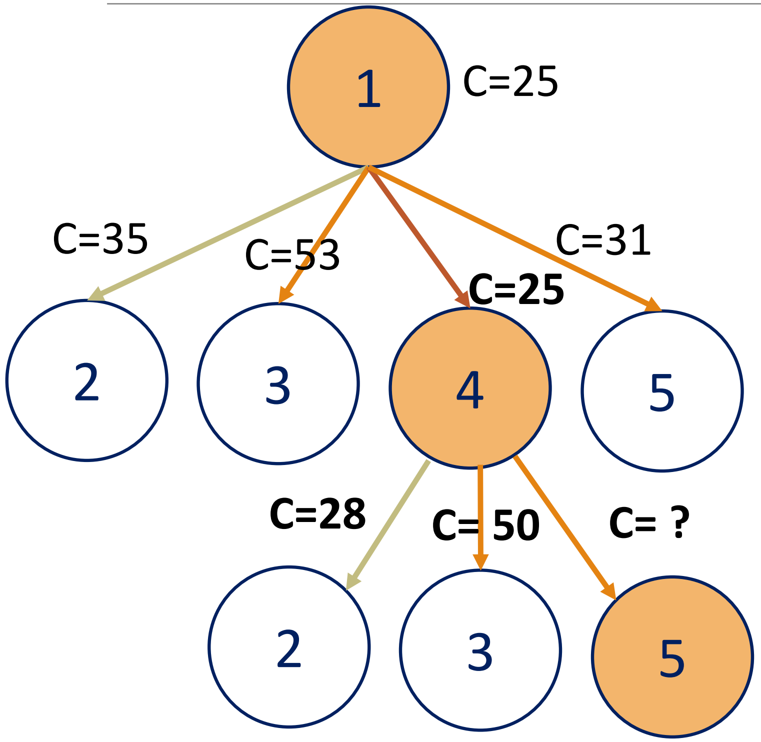
=2

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	1	∞	∞	∞	0
3	∞	1	∞	∞	0
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	0	0	∞	∞	∞
	11	0	0	0	0

=0

Cost(4,3)= c(4,3)+C+C'
= 12+25+13
= 50

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	12	∞	11	∞	0
3	0	3	∞	∞	2
4	∞	3	12	∞	0
5	11	0	0	∞	∞

1,4-5 →

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	12	∞	11	∞	∞	11
3	0	3	∞	∞	∞	0
4	∞	∞	∞	∞	∞	0
5	∞	0	0	∞	∞	0

=11

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	1	∞	0	∞	∞
3	0	3	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	∞	0	0	∞	∞
	0	0	0	0	0

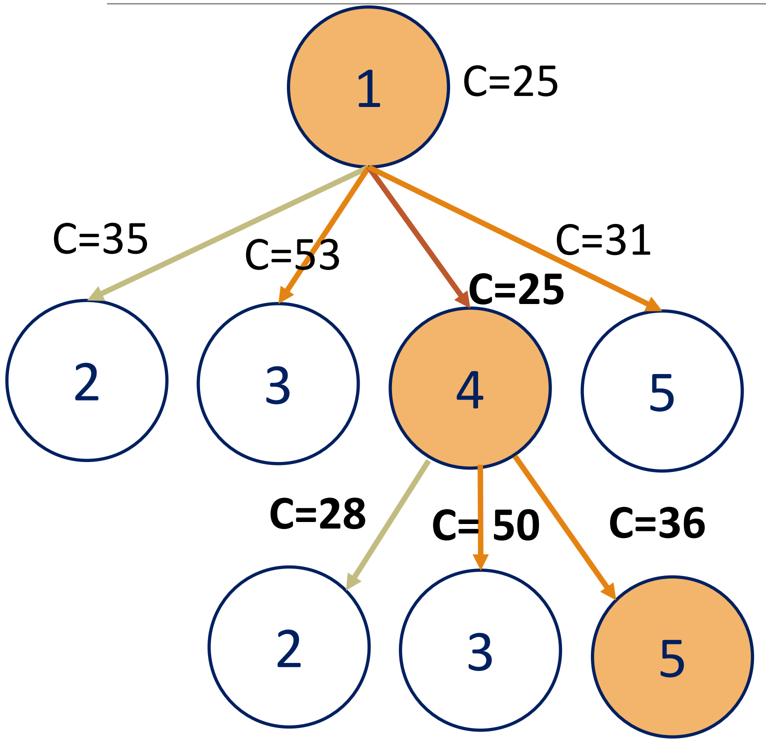
=0

Cost(4,5)= c(4,5)+C+C'

= 0+25+11

= 36

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	12	∞	11	∞	0
3	0	3	∞	∞	2
4	∞	3	12	∞	0
5	11	0	0	∞	∞

1,4-5

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	12	∞	11	∞	∞	11
3	0	3	∞	∞	∞	0
4	∞	∞	∞	∞	∞	0
5	∞	0	0	∞	∞	0

=11

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	1	∞	0	∞	∞
3	0	3	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	∞	0	0	∞	∞
	0	0	0	0	0

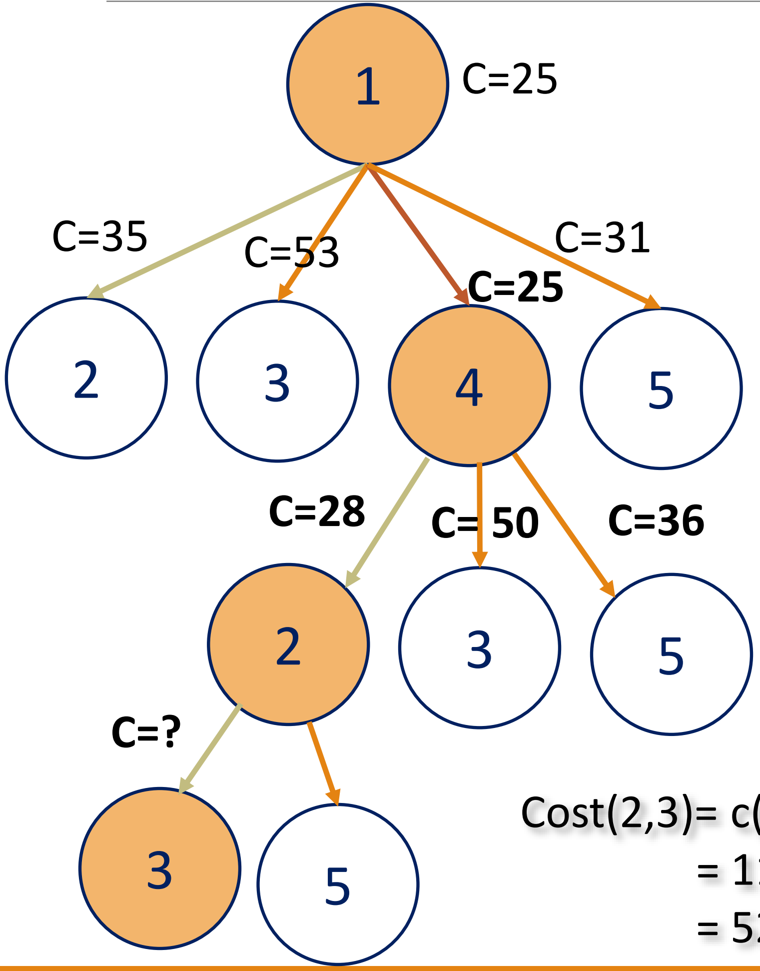
=0

Cost(4,5)= c(4,5)+C+C'

= 0+25+11

= 36

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	11	∞	0
3	0	∞	∞	∞	2
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	11	∞	0	∞	∞

1-4-2-3

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	∞	∞	∞	∞	∞	0
3	∞	∞	∞	∞	2	2
4	∞	∞	∞	∞	∞	0
5	11	∞	∞	∞	∞	11

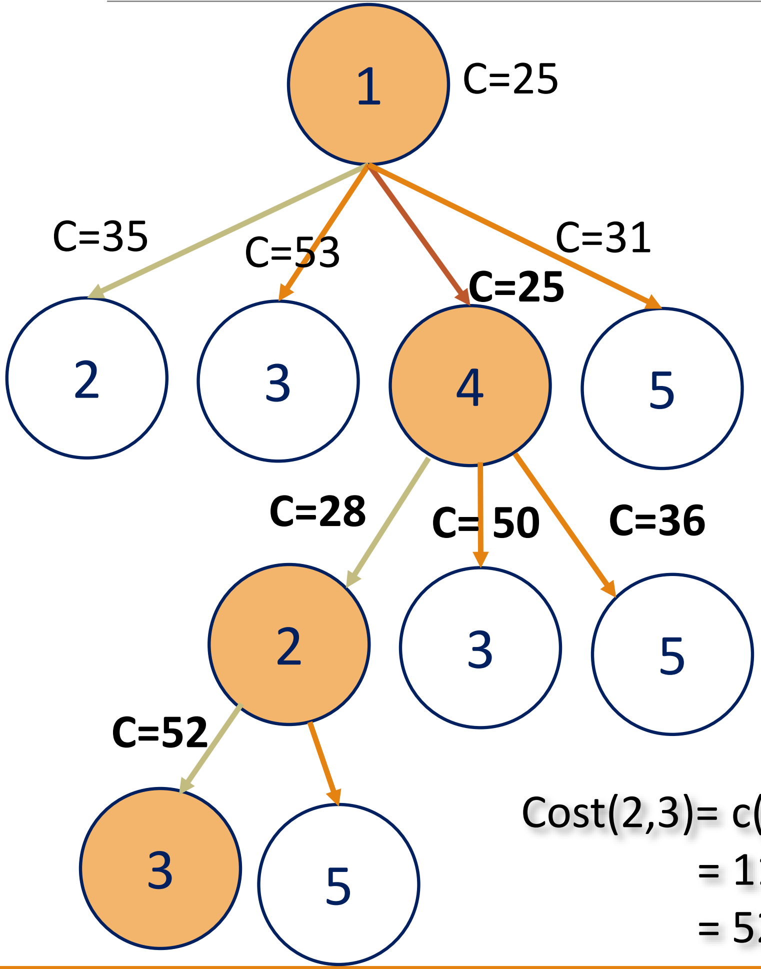
=13

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	0
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	0	∞	∞	∞	∞
	0	0	0	0	0

=0

Cost(2,3)= c(2,3)+C+C’
= 11+28+13
= 52

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	11	∞	0
3	0	∞	∞	∞	2
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	11	∞	0	∞	∞

1-4-2-3

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	∞	∞	∞	∞	∞	0
3	∞	∞	∞	∞	2	2
4	∞	∞	∞	∞	∞	0
5	11	∞	∞	∞	∞	11

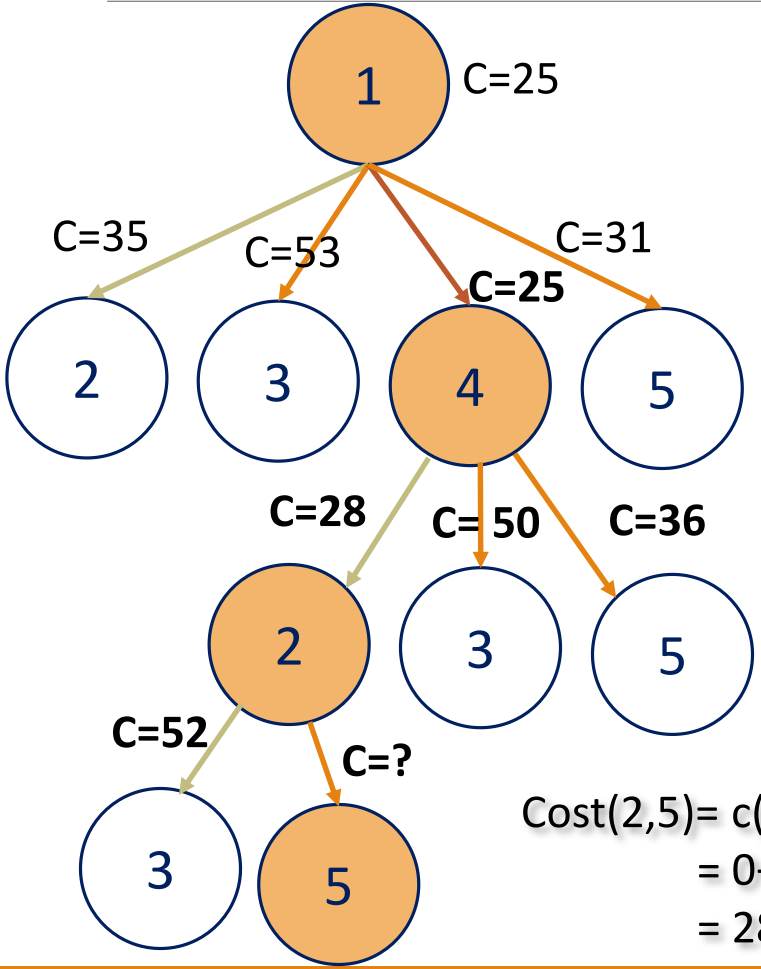
=13

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	0
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	0	∞	∞	∞	∞
	0	0	0	0	0

=0

Cost(2,3)= c(2,3)+C+C’
= 11+28+13
= 52

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	11	∞	0
3	0	∞	∞	∞	2
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	11	∞	0	∞	∞

1-4-2-5

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	∞	∞	∞	∞	∞	0
3	0	∞	∞	∞	∞	0
4	∞	∞	∞	∞	∞	0
5	∞	∞	0	∞	∞	0

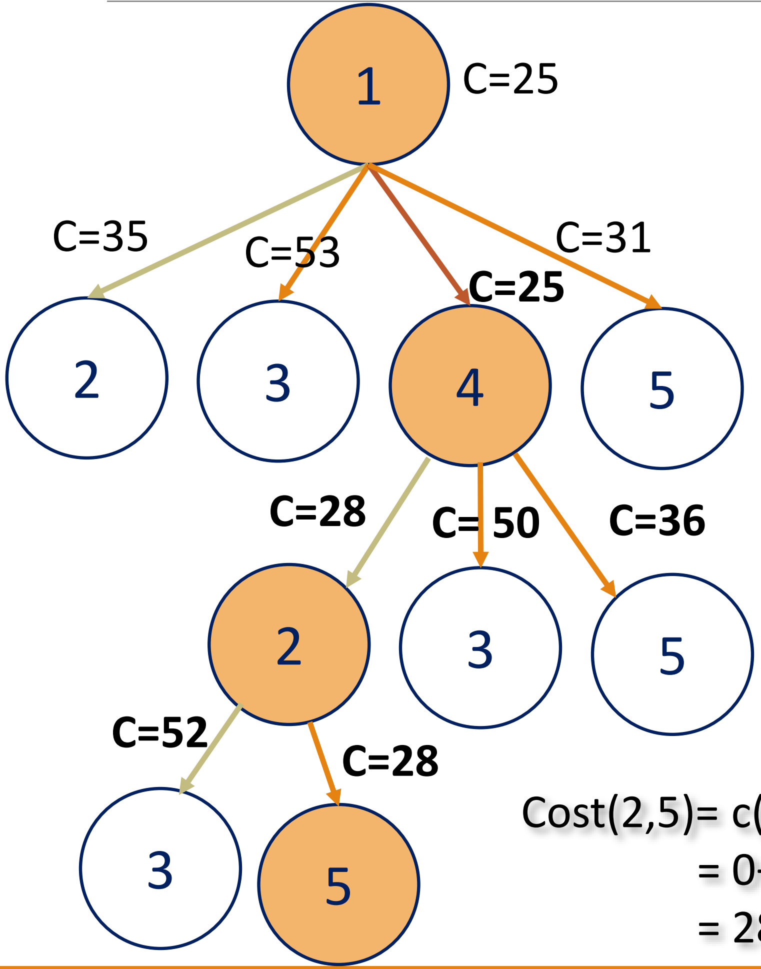
=0

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	0
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	0	∞	∞	∞	∞
	0	0	0	0	0

=0

Cost(2,5)= c(2,5)+C+C'
= 0+28+0
= 28

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	11	∞	0
3	0	∞	∞	∞	2
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	11	∞	0	∞	∞

1-4-2-5 →

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	∞	∞	∞	∞	∞	0
3	0	∞	∞	∞	∞	0
4	∞	∞	∞	∞	∞	0
5	∞	∞	0	∞	∞	0

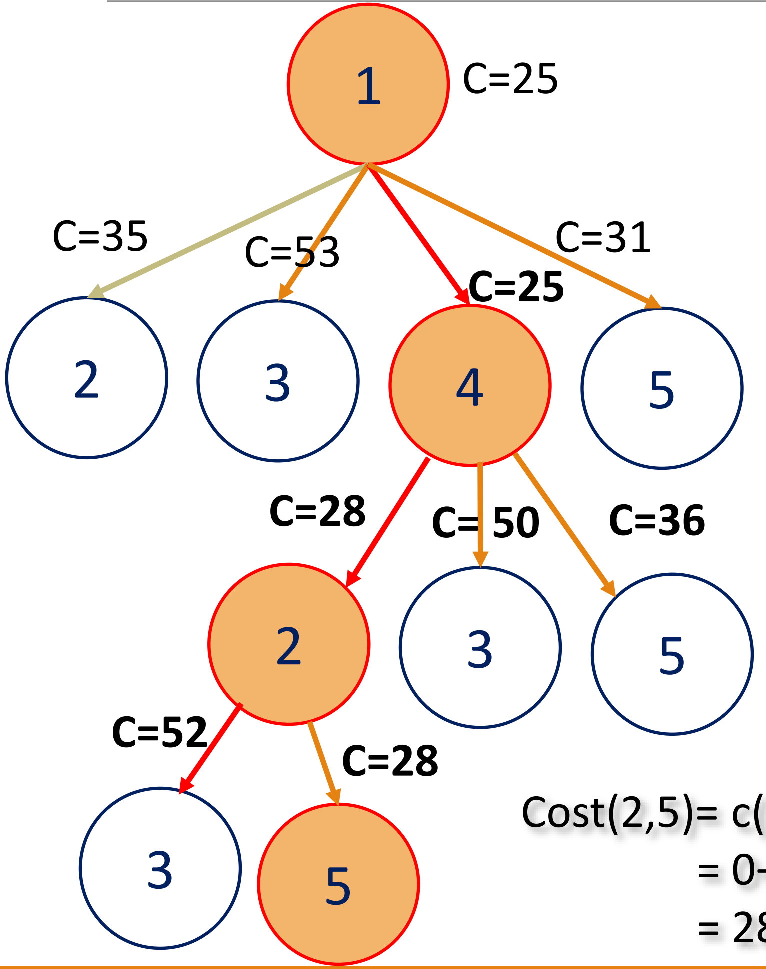
=0

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	0
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	0	∞	∞	∞	∞
	0	0	0	0	0

=0

Cost(2,5)= c(2,5)+C+C'
= 0+28+0
= 28

Traveling Salesman Problem



	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	11	∞	0
3	0	∞	∞	∞	2
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	11	∞	0	∞	∞

1-4-2-5 →

	1	2	3	4	5	
1	∞	∞	∞	∞	∞	0
2	∞	∞	∞	∞	∞	0
3	0	∞	∞	∞	∞	0
4	∞	∞	∞	∞	∞	0
5	∞	∞	0	∞	∞	0

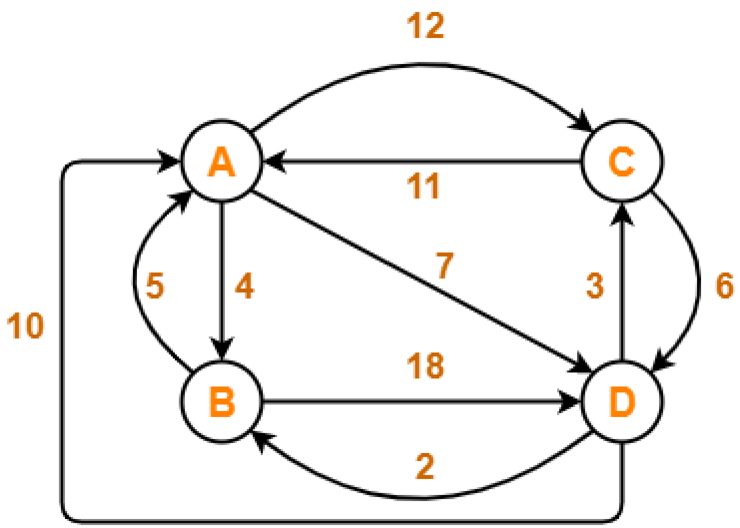
=0

	1	2	3	4	5
1	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	0
4	∞	∞	∞	∞	∞
5	0	∞	∞	∞	∞
	0	0	0	0	0

=0

Cost(2,5)= c(2,5)+C+C’
= 0+28+0
= 28

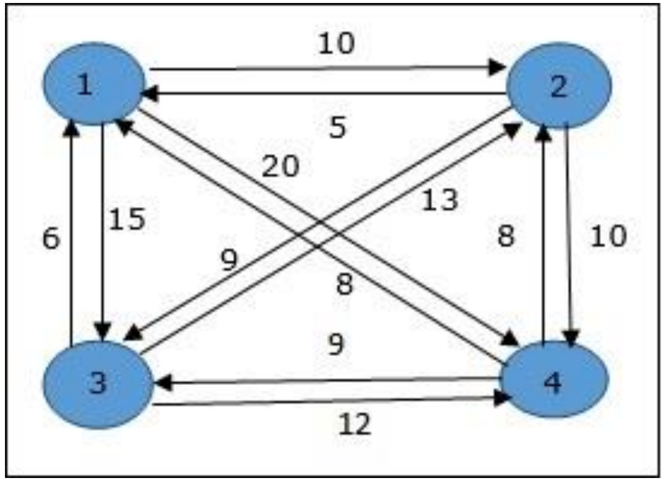
Traveling Salesman Problem: Question



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 4 & 12 & 7 \\ 5 & \infty & \infty & 18 \\ 11 & \infty & \infty & 6 \\ 10 & 2 & 3 & \infty \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Optimal path is: **A** → **C** → **D** → **B** → **A**
- Cost of Optimal path = **25 units**

Traveling Salesman Problem: Question



Any Questions ?

Dr. Anand Singh Jalal
Professor
Email: asjalal@gla.ac.in