Tarea 3 Parte Computacional

Entrega: 30 de Junio de 2025 a las 23:59, a través de Canvas.

En esta tarea se implementan métodos numéricos para resolver el modelo de limpieza de imágenes por variación total (TV). Primero recordamos el modelo de dualidad de Fenchel: $(\mathbf{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{E}})$, $(\mathbf{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{F}})$ son espacios Euclidianos de dimensión finita, y se busca resolver

$$(P) \quad \min\{F(x) = [f(x) + g(x)] : \ x \in \mathbf{E}\},$$

donde hacemos los siguientes supuestos:

(A.I) $g \in \Gamma_0(\mathbf{E})$ con int dom$(g) \neq \emptyset$.

(A.II) $f \in \mathcal{F}^1_{\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}}}(L_1)$.

(A.III) El siguiente problema puede resolverse eficientemente de manera exacta (o con muy alta precisión):

$$(P_{\eta,z}) = \min_{x \in \mathbf{E}} \{\langle z, x \rangle_{\mathbf{E}} + \frac{1}{\eta}\|x\|^2_{\mathbf{E}} + g(x)\}.$$

Definimos el siguiente operador $T : \mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}$:

$$T_\eta(y) = \arg\min_{x \in \mathbf{E}} \Big\{ f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle_{\mathbf{E}} + \frac{1}{2\eta_t}\|x - y\|^2_{\mathbf{E}} + g(x) \Big\}.$$

Cuando esté claro del contexto, omitimos la dependencia en η, es decir, $T := T_\eta$. Este operador está bien definido por la fuerte convexidad de la norma Euclidiana.

Se puede demostrar que la iteración

$$x^{t+1} = T_{\eta_t}(x^t),$$

satisface

$$F(x^T) - F(x^*) \leq \frac{\|x^* - x^0\|^2_{\mathbf{E}}}{2\sum_{t=0}^{T-1} \eta_t}. \tag{1}$$

Motivados por esta garantía, se propone el siguiente algoritmo.

Algoritmo 1 Método de optimización compuesta con backtracking

Input: $x^0 \in \mathbf{E}$, $T \in \mathbb{N}$
$\eta_{-1} = 1$
for $t = 0, \dots, T-1$ **do**
    $\eta_t \leftarrow \eta_{t-1}$
    $b \leftarrow 0$
    while $b = 0$ **do**
        if $f(T_{\eta_t}(x^t)) \leq f(x^t) + \langle \nabla f(x^t), T_{\eta_t}(x^t) - x^t \rangle_{\mathbf{E}} + \frac{1}{2\eta_t} \| T_{\eta_t}(x^t) - x^t \|_{\mathbf{E}}^2$ **then**
            $b \leftarrow 1$
            $x^{t+1} = T_{\eta_t}(x^t)$
        else
            $\eta_t \leftarrow \eta_t / 2$
        end if
    end while
end for
Return: x^T

Pregunta 1. (a) Implemente el algoritmo (1). Para implementar el operador T_η puede usar la rutina de operador proximal para la variación total isotrópica de esta librería `https://pythonhosted.org/prox_tv/`.

(b) Muestre los resultados obtenidos en los 6 datasets provistos. Para esto reporte el error en $\|\cdot\|_2$ de la imagen reconstruida c/r a la imagen original, además de las 3 imágenes (original, más ruido, y reconstruída).

Algoritmo 2 Método de optimización compuesta acelerada con backtracking

Input: $\eta_0 = 1$, $A_0 = 0$, $x^0 \in \mathcal{X}$, $y^0 = z^0 = x^0$, $T \in \mathbb{N}$
for $t = 0, \ldots, T-1$ **do**
    $\eta_{t+1} \leftarrow \eta_t$
    $b \leftarrow 0$
    while $b = 0$ **do**
        Determinar α_{t+1} a través de la ecc.: $\alpha_{t+1}^2 = \eta_{t+1}[A_t + \alpha_{t+1}]$
        $A_{t+1} = A_t + \alpha_{t+1}$
        $\tau_t = \alpha_{t+1}/A_{t+1}$
        $x^{t+1} = \tau_t z^t + (1-\tau_t) y^t$
        $y^{t+1} = T_{\eta_{t+1}}(x^{t+1})$
        if $f(y^{t+1}) \leq f(x^{t+1}) + \langle \nabla f(x^{t+1}), y^{t+1} - x^{t+1} \rangle + \frac{1}{2\eta_{t+1}} \|y^{t+1} - x^{t+1}\|_{\mathbf{E}}^2$ **then**
            $b \leftarrow 1$
            $z^{t+1} = z^t - \alpha_{t+1} \nabla f(x^{t+1})$
        else
            $\eta_{t+1} \leftarrow \eta_{t+1}/2$
        end if
    end while
end for
return y^T

Pregunta 2. Se propone una versión acelerada del método compuesto.

(a) Implemente el algoritmo 2 y aplíquelo a las mismas instancias de la pregunta anterior.

(c) Compare, a través de gráficos, el error en $\|\cdot\|_2$ de ambos algoritmos con respecto a las imágenes sin ruido. Para hacer las comparaciones, fije el número de iteraciones como $T = 1000$ para todos sus algoritmos.