

## Pregunta 1

Tenemos que  $H_1 := H$  y  $H_2 := H$  son espacios de Hilbert y que  $a : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal acotada. Así, cumple las hipótesis generales del Teorema de Lax-Milgram Generalizado. Ahora veamos que cumple las otras dos de la segunda parte de la equivalencia.

1. Primera hipótesis: Si  $v = 0$  entonces

$$\sup_{u \in H, u \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|u\|_H} = \sup_{u \in H, u \neq 0} \frac{0}{\|u\|_H} = 0 \geq 0 = \alpha \|v\|_H$$

Donde  $\alpha$  es la constante de elipsidad, se cumple trivialmente.

Si  $v \neq 0$  arbitrario, por ser  $a$  elíptica se tiene que para la constante de elipsidad  $\alpha$  se cumple que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2$$

Como  $v \neq 0$  entonces  $\|v\|_H \neq 0$  y así resulta que

$$\frac{a(v, v)}{\|v\|_H} \geq \alpha \|v\|_H$$

Pero  $v \in H, v \neq 0$ , así que tomando supremo sobre  $u \in H, u \neq 0$ , al ser  $v$  un caso particular se tiene que

$$\sup_{u \in H, u \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|u\|_H} \geq \frac{a(v, v)}{\|v\|_H} \geq \alpha \|v\|_H$$

Al ser  $v$  arbitrario, y considerando que ya lo demostramos para el caso  $v = 0$ , se concluye que

$$\sup_{u \in H, u \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|u\|_H} \geq \alpha \|v\|_H \quad \forall v \in H$$

Demostrando así la primera hipótesis

2. Segunda hipótesis: Sea  $u \in H, u \neq 0$  arbitrario, entonces dada la constante de elipsidad  $\alpha$  tenemos que

$$\sup_{v \in H} a(u, v) \geq a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H > 0$$

Donde la última desigualdad es estricta puesto que por ser elíptica  $\alpha > 0$  y como  $u \neq 0$  se tiene que  $\|u\|_H > 0$ . Así, como  $u$  era arbitrario

$$\sup_{v \in H} a(u, v) > 0 \quad \forall u \in H, u \neq 0$$

Demostrando así la segunda hipótesis

Y entonces concluimos que también satisfacen las hipótesis del Lema Generalizado de Lax-Milgram, tal como queríamos demostrar.

## Pregunta 2

Comencemos por multiplicar la primera ecuación por  $v \in H_0^1(\Omega)$  e integrar sobre  $\Omega$ , de lo que resulta que

$$-\mu \int_{\Omega} \Delta u v \, dx + \int_{\Omega} \nabla p v \, dx = 0$$

Integrando por partes el primer término

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx$$

Donde la igualdad se tiene puesto que  $v = 0$  en  $\partial\Omega$ . Integrando por partes el segundo término resulta que

$$\int_{\Omega} \nabla p v \, dx = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx + \int_{\partial\Omega} p(v \cdot n) \, dx = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx$$

Puesto que como  $v \in H_0^1(\Omega)$  se tiene que  $v \cdot n = 0$  en  $\partial\Omega$ . Y entonces la primera ecuación resulta en

$$\mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) \, dx = 0$$

Ahora, multiplicando la segunda ecuación por  $q \in L_0^2(\Omega)$  e integrando sobre  $\Omega$  y multiplicando por  $-1$  resulta que

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) q \, dx = 0$$

Consideremos las formas bilineales

$$a(u, v) = \mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) \, dx = 0, \quad b(u, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) q \, dx$$

Y consideremos las formas lineales

$$F(v) = 0, \quad G(q) = 0$$

Entonces, de lo encontrado antes resulta que el problema es de la forma encontrar  $(u, p) \in H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = F(v) & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ b(u, q) = G(q) & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

La formulación anterior se puede escribir en forma de operadores como:

$$\begin{pmatrix} A & B^\top \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

Donde  $A$  corresponde a  $Au(v) = a(u, v)$ ,  $B$  corresponde a  $Bu(q) = b(u, q)$  y  $B^\top$  corresponde a  $aB^\top p(v) = b(v, p)$ .

Notemos que es importante considerar  $L_0^2(\Omega)$  en lugar de  $L^2(\Omega)$ , puesto que en el problema original  $p$  aparece únicamente de la forma  $\nabla p$ , y entonces si  $p$  es solución, también lo sería  $p + c$  para cualquier constante  $c$ , ya que el operador derivada desaparece dicha constante.

Así, la solución para  $p$  no sería única si consideramos  $L^2(\Omega)$ . Para garantizar la unicidad de la solución, nos restringe a funciones con integral nula, lo que elimina el grado de libertad asociado a la constante y permite tener una solución  $(u, p)$  única.

## Pregunta 3

En  $H$ , definamos la norma producto análogo a los apuntes, esto es

$$\|(u, p)\|_H := \|u\|_{H^1} + \|p\|_{L^2}$$

Sea  $(u, p) \in H$  arbitrario. Encontremos  $(v, q) \in H$  (posiblemente dependiendo del par anterior) para obtener una cota inferior que no dependa de  $(u, p)$ .

Usando la condición inf-sup de  $b$  (para  $\beta$ ) tenemos que  $\exists v_p \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$b(v_p, p) \geq \beta \|v_p\|_{H^1} \|p\|_{L^2}$$

De la linealidad de  $b$  y la homogeneidad de la norma podemos suponer además que  $\|v_p\|_{H^1} = \|p\|_{L^2}$ . Para  $\delta > 0$  que fijaremos más adelante tomemos el par

$$v := u + \delta v_p, \quad q := -p$$

Y entonces por definición tenemos que

$$M((u, p), (v, q)) = a(u, v) + b(u, q) + b(v, p) = a(u, u + \delta v_p) + b(u, -p) + b(u + \delta v_p, p)$$

Usando la bilinealidad de los operadores tenemos que

$$M((u, p), (v, q)) = a(u, u) + \delta a(u, v_p) - b(u, p) + b(u, p) + \delta b(v_p, p) = a(u, u) + \delta a(u, v_p) + \delta b(v_p, p)$$

Pero de la coercidad de  $a$  tenemos que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2$$

De la continuidad de  $a$

$$|a(u, v_p)| \leq C \|u\|_{H^1} \|v_p\|_{H^1} = C \|u\|_{H^1} \|p\|_{L^2} \implies a(u, v_p) \geq -C \|u\|_{H^1} \|p\|_{L^2}$$

Y de la condición inf-sup de  $b$

$$b(v_p, p) \geq \beta \|p\|_{L^2}^2$$

Usando estas cotas en la expresión anterior, tenemos que

$$M((u, p), (v, q)) \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2 - \delta C \|u\|_{H^1} \|p\|_{L^2} + \delta \beta \|p\|_{L^2}^2$$

Pero ahora para el término  $\delta C \|u\|_{H^1} \|p\|_{L^2}$  lo podemos acotar con la desigualdad de Young

$$\delta C \|u\|_{H^1} \|p\|_{L^2} \leq \frac{\alpha}{2} \|u\|_{H^1}^2 + \frac{\delta^2 C^2}{2\alpha} \|p\|_{L^2}^2$$

Y entonces

$$M((u, p), (v, q)) \geq \frac{\alpha}{2} \|u\|_{H^1}^2 + \left( \delta \beta - \frac{\delta^2 C^2}{2\alpha} \right) \|p\|_{L^2}^2$$

Tomando ahora el  $\delta$  que maximice el paréntesis tenemos que al tomar  $\delta = \frac{\alpha \beta}{C^2}$  resulta que

$$\delta \beta - \frac{\delta^2 C^2}{2\alpha} = \frac{\alpha \beta^2}{C^2} - \frac{\alpha^2 \beta^2 C^2}{2\alpha C^4} = \frac{\alpha \beta^2}{2C^2}$$

Y entonces

$$M((u, p), (v, q)) \geq \frac{\alpha}{2} \|u\|_{H^1}^2 + \frac{\alpha \beta^2}{2C^2} \|p\|_{L^2}^2$$

Y considerando  $\gamma = \min \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha \beta^2}{2C^2} \right\} > 0$  tenemos que

$$M((u, p), (v, q)) \geq \gamma (\|u\|_{H^1}^2 + \|p\|_{L^2}^2)$$

Calculemos la norma de  $(v, q) = (u + \delta v_p, -p)$

$$\|(v, q)\|_H = \|u + \delta v_p\|_{H^1} + \|p\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} + \delta \|v_p\|_{H^1} + \|p\|_{L^2}$$

Pero de la suposición inicial

$$\|(v, q)\|_H \leq \|u\|_{H^1} + \delta \|p\|_{L^2} + \|p\|_{L^2} = \|u\|_{H^1} + (1 + \delta) \|p\|_{L^2}$$

Usando que  $\delta = \frac{\alpha \beta}{C^2} > 0$  y la desigualdad  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y$  si  $x, y \geq 0$

$$\|(v, q)\|_H \leq \|(u, p)\|_H + \delta \|p\|_{L^2} \leq (1 + \delta) \|(u, p)\|_H$$

Y entonces siguiendo la cota sobre  $M$

$$\frac{M((u, p), (v, q))}{\|(v, q)\|_H \|(u, p)\|_H} \geq \frac{M((u, p), (v, q))}{(1 + \delta) \|(u, p)\|_H^2} \geq \frac{\gamma (\|u\|_{H^1}^2 + \|p\|_{L^2}^2)}{(1 + \delta) \|(u, p)\|_H^2}$$

Pero  $\|(u, p)\|_H^2 \leq 2(\|u\|_{H^1}^2 + \|p\|_{L^2}^2)$

$$\frac{M((u, p), (v, q))}{\|(v, q)\|_H \|(u, p)\|_H} \geq \frac{\gamma}{2(1 + \delta)}$$

Y como  $\gamma, 2(1 + \delta) > 0$  y recordando que  $(u, p)$  era arbitrario y  $(v, q)$  se construyó acordemente se concluye lo pedido, demostrando la condición inf-sup para  $M$ , tal como se había solicitado.

## Pregunta 4

(a) Multipliquemos por un  $v \in H_0^1(\Omega)$  e integremos sobre  $\Omega$ , entonces resulta que

$$-\int_{\Omega} \mu \Delta uv \, dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla uv \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx$$

De la integración por partes (clásica de todas formas) realizada en la pregunta 2 resulta que

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla uv \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx$$

Obteniendo una formulación débil. Consideremos

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla uv \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx$$

Y

$$L(v) = \int_{\Omega} fv \, dx$$

Entonces el problema continuo consiste en buscar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Ahora pasemos este problema continuo a uno discreto. Como no conocemos la geometría  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  de forma explícita, ni siquiera cierta estructura o propiedad interesante, vamos a asumir que podemos encontrar una triangulación  $\mathcal{T}_h$  del dominio  $\Omega$ , con parámetro de malla  $h$ .

En base a dicha triangulación, podemos definir el espacio de elementos finitos como

$$V_h := \{v_h \in H_0^1(\Omega) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \, \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_{\partial\Omega} = 0\}$$

donde  $\mathbb{P}_1(T)$  es el espacio de polinomios en  $d$  variables de grado a lo más 1 (esquema lineal).

Y entonces el problema discreto obtenido de elementos finitos consiste en encontrar  $u_h \in V_h$  tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Ahora veamos por qué este problema efectivamente es discreto. Sea  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  una base para  $V_h$ , entonces busquemos los ponderadores tales que

$$u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j$$

Y entonces si consideramos  $v_h = \varphi_i$  tenemos que de la ecuación resulta

$$a\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j, \varphi_i\right) = L(\varphi_i)$$

Y si hacemos esto para cada  $\varphi_i$  entonces obtenemos un sistema de ecuaciones  $N$  que nos permite encontrar los valores para los  $N$   $\alpha_j$ . Esto nos abre la puerta para resolver este problema computacionalmente, ya que el sistema de ecuaciones es un problema discreto.

- (b) Recordemos que  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  por definición y además  $V_h$  es un espacio de Hilbert, y entonces basta demostrar que el problema continuo está bien puesto, y el problema discreto va a heredar estas buenas propiedades.

Con el objetivo de usar Lax-Milgram, vamos a demostrar que se cumplen las hipótesis.

Primero notemos que  $a$  es bilineal, esta propiedad se hereda de la linealidad del operador integral (y del operador derivada). Notemos que  $L(v)$  también hereda dicha linealidad, y por tanto es lineal. Además  $H_0^1(\Omega)$  es un espacio de Hilbert según lo visto en el curso. Así, comprobamos las hipótesis triviales y ahora veamos las hipótesis más interesantes.

La continuidad de  $L$  es directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, puesto que

$$|L(v)| \leq \left| \int_{\Omega} f v \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$$

Veamos ahora que  $a$  es continuo. Primero, por desigualdad triangular tenemos que

$$|a(u, v)| \leq \left| \int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} b \nabla u v \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} c u v \, dx \right|$$

Ahora, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$|a(u, v)| \leq \|\mu\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|b\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

Por el teorema de Poincare tenemos que

$$\|u\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2}, \quad \|v\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla v\|_{L^2}$$

Y entonces

$$|a(u, v)| \leq C_P^2 \|\mu\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + C_P \|b\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

Factorizando

$$|a(u, v)| \leq (C_P^2 \|\mu\|_{L^\infty} + C_P \|b\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty}) \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

Y por definición de  $\|\cdot\|_{H^1}$

$$|a(u, v)| \leq (C_P^2 \|\mu\|_{L^\infty} + C_P \|b\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty}) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

Demostrando así la continuidad de  $a$ . Ahora veamos la coercividad de  $a$ , para esto tenemos que

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \mu (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega} b \nabla u u dx + \int_{\Omega} c u^2 dx$$

Para acotar el primer término necesitamos que  $\mu \geq \mu_0 > 0$  casi en todas partes. Y entonces

$$a(u, u) \geq \mu_0 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega} b \nabla u u dx + \int_{\Omega} c u^2 dx$$

Para acotar el término central notemos que por la regla de la cadena

$$\nabla(bu^2) = \nabla bu^2 + 2b \nabla u u$$

Del teorema de la divergencia

$$\int_{\Omega} \nabla(bu^2) dx = \int_{\partial\Omega} (bu^2) \cdot n dx = 0$$

Donde la última igualdad se tiene puesto que  $u = 0$  en  $\partial\Omega$ . Entonces, de estas ecuaciones podemos concluir que

$$\int_{\Omega} \nabla bu^2 dx + 2 \int_{\Omega} b \nabla u u dx = 0$$

Y reemplazando en la ecuación original

$$a(u, u) \geq \mu_0 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla bu^2 dx + \int_{\Omega} c u^2 dx$$

De la linealidad de la integral

$$a(u, u) \geq \mu_0 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega} \left( c - \frac{1}{2} \nabla b \right) u^2 dx$$

Ahora necesitamos que  $(c - \frac{1}{2} \nabla b) \geq c_0 > 0$  casi en todas partes. Y entonces

$$a(u, u) \geq \mu_0 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + c_0 \int_{\Omega} u^2 dx$$

De la definición de  $\|\cdot\|_{L^2}$

$$a(u, u) \geq \mu_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2 + c_0 \|u\|_{L^2}^2$$

Y de la definición de  $\|\cdot\|_{H^1}$

$$a(u, u) \geq \min \{\mu_0, c_0\} \cdot \|u\|_{H^1}^2$$

Demostrando así la coercividad.

Hemos demostrado todas las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram, y entonces podemos concluir que existe una única solución débil para el problema continuo. Y así, por el argumento inicial, podemos también concluir que existe una única solución para el problema discreto planteado anteriormente, demostrando así que está bien puesto.

- (c) Dado que el espacio  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  es conforme y la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es continua y coerciva con constantes conocidas, por el estimado de Cea se tiene que la solución discreta  $u_h \in V_h$  satisface que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \frac{(C_P^2 \|\mu\|_{L^\infty} + C_P \|b\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty})}{\min \{\mu_0, c_0\}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{V_h}$$

Como estamos utilizando elementos finitos lineales, dada la solución exacta  $u \in H^2(\Omega)$ , de lo visto en clases se tiene que

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{V_h} \leq Ch \|u\|_{H^2}$$

Y en conjunto con el estimado de Cea

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \|u\|_{H^2}$$

Y entonces el método es convergente (asumiendo que podemos obtener las triangulaciones en función de  $h$ ) y tenemos que converge con la tasa

$$\|u - u_h\|_{H^1} = \mathcal{O}(h)$$

Y en norma  $L^2$  se tiene la tasa

$$\|u - u_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2)$$