

MAT2605, Cálculo Científico I, 2021-2

Tarea 9

Entrega para el 9 de diciembre de 2021

Pueden discutir los problemas con sus compañeros. Sin embargo, sus entregas, tanto la parte escrita como los códigos, deben ser individuales. **No** está permitido copiar las respuestas de alguien más ni dejar que otros copien sus respuestas. Su entrega debe estar compuesta por un único archivo en formato `.pdf` que incluya todas las respuestas y todos los gráficos que se están pidiendo, junto con un archivo `.zip` que incluya todos los archivos `.m` que produjeron y utilizaron durante esta tarea. Estos dos archivos deben ser subidos en Canvas. Si hay más de una línea en un gráfico, utilice distintos estilos de línea o distintos colores para diferenciarlas e incluya leyendas. No se olvide de nombrar todos sus ejes y líneas en las leyendas.

- [8 pts.]** 1. (a) Escriba un algoritmo que usa el método de Newton para encontrar las raíces del polinomio cúbico $f(x) = x^3 - 2x + 2$ con buena precisión. Si el valor inicial es $x^{(0)} = 0.5$, ¿a qué valor converge el algoritmo? ¿Es una raíz? Si el valor inicial es $x^{(0)} = 0.1$, ¿a qué valor converge el algoritmo? ¿Es una raíz? Mire el comportamiento de los iterados y trate de explicar lo que sucede. Si el valor inicial es $x^{(0)} = 1 + \sqrt{-1}$, ¿a qué valor converge el algoritmo? ¿Es una raíz?
[7 pts.] (b) Escriba un algoritmo que usa el método de punto fijo para encontrar las raíces del polinomio cúbico $f(x) = x^3 - 2x + 2$ con buena precisión. Como función de búsqueda del punto fijo escoja $g(x) = x - cf(x)$ donde $c \neq 0$ es una constante. Dado el punto inicial $x^{(0)} = 0.1$, ¿para cuáles valores de c converge el método?
- [20 pts.]** 2. Escriba su propio comando `legendrepts(n)` para computar los nodos y pesos de cuadratura de Gauss-Legendre en $[-1, 1]$ usando el método de Newton para encontrar las raíces de $P_n(x) = 0$, donde P_n es el grado el polinomio de Legendre de grado n . Explícitamente, es un procedimiento iterativo que empieza en $x_j^{(0)}$ y se actualiza por la expresión

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - \frac{P_n(x_j^{(k)})}{P'_n(x_j^{(k)})},$$

para $j = 0, \dots, n - 1$. El método de Newton necesita de tres elementos para iniciar y actualizar:

- Las aproximaciones iniciales: intente usar los puntos de Chebyshev $x_j^{(0)} = \cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right)$ para $j = 0, \dots, n - 1$.
- Un esquema de evaluación para $P_n(x)$: use que $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ y la relación de recurrencia $P_{l+1}(x) = \frac{1}{l+1}((2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x))$ para calcular $P_n(x)$.
- Un esquema de evaluación para $P'_n(x)$: use la relación $P'_n(x) = \frac{n}{1-x^2}(P_{n-1}(x) - xP_n(x))$.

Finalmente, se necesita un criterio de terminación para parar las iteraciones de Newton-Raphson (en k). Para esto, puede usar el criterio de que el valor absoluto del cambio en la actualización, i.e. $|x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| = \left|\frac{P_n(x_j)}{P'_n(x_j)}\right|$ es menos que una tolerancia predeterminada (que le toca escoger), aunque también vale la pena limitar el número de iteraciones por debajo de cierto máximo. Después de las iteraciones de Newton-Raphson (si ya han convergido), calcule los pesos de cuadratura de Gauss-Legendre usando la relación establecida en el Problema 1(e) de la Tarea 6,

$$w_j = \frac{2}{(1 - x_j^2)(P'_n(x_j))^2}, \quad j = 0, \dots, n - 1.$$

La firma de la rutina debería ser `[x,w]=legendrepts(n)`, donde `x` es un vector columna de $n \times 1$ y `w` es un vector fila $1 \times n$. Si quiere confirme sus resultados para bajos valores de `n` comparándolos con los que puede encontrar en los libros de clase.