Pregunta 1

(a) Primero multipliquemos por v una función de prueba arbitraria e integremos sobre Ω, de lo que resulta

$$-\int_\Omega (\operatorname{div} K\nabla u)\cdot v\,dx + \int_\Omega (b\cdot\nabla u)\cdot v\,dx + \int_\Omega (au)\cdot v\,dx = \int_\Omega f\cdot v\,dx \quad \forall v\in V$$

Consideremos integrar por partes el operador diferencial de segundo orden, usando el teorema de la divergencia resulta que

$$-\int_\Omega (\operatorname{div} K\nabla u)\cdot v\,dx = \int_\Omega (K\nabla u)\cdot\nabla v\,dx - \int_{\partial\Omega}(K\nabla u\cdot\mathbf{n})\cdot v\,dS$$

En Γ_N se tiene que $K\nabla u\cdot\mathbf{n} = t$ (al momento que hice esta parte no tenía el K pero según yo es un typo), de lo que resulta

$$-\int_\Omega (\operatorname{div} K\nabla u)\cdot v\,dx = \int_\Omega (K\nabla u)\cdot\nabla v\,dx - \int_{\Gamma_N} t\cdot v\,dS - \int_{\Gamma_D}(K\nabla u\cdot\mathbf{n})\cdot v\,dS$$

Esto motiva a considerar soluciones de la forma $u = u_0 + G$ donde $G\in H^1(\Omega)$ tal que $G = u_D$ en Γ_D. La existencia de G se justifica debido a la sobreyectividad de la traza de Dirichlet. Consideremos entonces el espacio de funciones test y el espacio de soluciones como

$$v\in V := H_1^0,\quad u = u_0 + G \quad u_0\in H_0^1,\, G\in H^1 : G = u_D \text{ en } \Gamma_D$$

Y entonces la expresión anterior resulta

$$-\int_\Omega (\operatorname{div} K\nabla u)\cdot v\,dx = \int_\Omega (K\nabla u)\cdot\nabla v\,dx - \int_{\Gamma_N} t\cdot v\,dS$$

Así, se tiene que

$$\int_\Omega K\nabla u\nabla v\,dx - \int_{\Gamma_N} tv\,dS + \int_\Omega b\nabla uv\,dx + \int_\Omega auv\,dx = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall v\in V$$

Y entonces recordando que $u = u_0 + G$ se tiene que la forma bilineal corresponde a

$$a(u_0,v) = \int_\Omega (K\nabla u_0)\cdot\nabla v + (b\cdot\nabla u_0)v + au_0v\,dx$$

Y la forma lineal corresponde a

$$f(v) = \int_\Omega fv - (K\nabla G)\cdot\nabla v - (b\cdot\nabla G)v - aGv\,dx + \int_{\Gamma_N} tv\,dS$$

Y por tanto nos interesa resolver el problema

$$a(u_0,v) = f(v) \quad \forall v\in H_0^1$$

Para luego obtener la solución con $u = u_0 + G$

(b) Primero comencemos por probar la identidad que se menciona en el enunciado. Y para esto comencemos por notar que usando la regla del producto.

$$\operatorname{div} u\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(u\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\mathbf{b}_i + u\frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial x_i}\right) = \nabla u\mathbf{b} + u \operatorname{div}\mathbf{b}$$

$$\int_\Omega (\operatorname{div} u\mathbf{b})u\,dx + \int_\Omega (u\mathbf{b})\nabla u\,dx = \int_{\partial\Omega} u\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}u\,dx = \int_{\partial\Omega} u^2\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,dx$$

Y usando la igualdad obtenida antes resulta que

$$\int_{\partial\Omega} u^2\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,dx = \int_\Omega (\operatorname{div} u\mathbf{b})u\,dx + \int_\Omega (u\mathbf{b})\nabla u\,dx = \int_\Omega (\nabla u\mathbf{b} + u\operatorname{div}\mathbf{b})u\,dx + \int_\Omega (u\mathbf{b})\nabla u\,dx$$

Demostrando la identidad.

Ahora veamos que se cumplen las hipótesis para aplicar el Lema de Lax-Milgram. Primero notemos que el espacio de soluciones y de funciones de prueba es H_0^1, el cual es un espacio de Hilbert. Además, es claro de las definiciones que $a(\cdot,\cdot)$ es bilineal y que $f(\cdot)$ es lineal, heredando la linealidad del operador integral.

Ahora veamos que $a(u,v)$ es continuo. Primero notemos que como $K \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d})$ y definido positivo, existe $C_K > 0$ tal que

$$(K\nabla u)\cdot\nabla v = \nabla v^T K\nabla u \le \|K\|_{op}\cdot|\nabla u|\cdot|\nabla v| = C_K|\nabla u|\cdot|\nabla v|$$

Y entonces integrando y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz resulta que

$$\left|\int_\Omega (K\nabla u)\cdot\nabla v\,dx\right| \le C_K\int_\Omega |\nabla u|\cdot|\nabla v|\,dx \le C_K\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \le C_K\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

Acotando el primer término. Para el segundo término notemos que como $b \in H(div;\Omega)$, y como Ω es acotado, entonces se tiene que $b \in L^\infty$. Así

$$\left|\int_\Omega (b\cdot\nabla u)v\,dx\right| \le \|b\|_{L^\infty}\int_\Omega |\nabla u||v|\,dx$$

Y usando Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\left|\int_\Omega (b\cdot\nabla u)v\,dx\right| \le \|b\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le C_b\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

Mostrando la continuidad del segundo término. Para el último término notemos que como $a \in L^\infty(\Omega)$, se tiene que

$$\left|\int_\Omega auv\right| \le \|a\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le C_a\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

Acotando el último término, y por tanto se concluye que existe $C > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \quad \forall u, v \in V$$

demostrando así la continuidad de $a(u,v)$. Ahora veamos la coercividad. Como K es definida positiva, entonces inmediatamente existe c_K tal que

$$\int_\Omega (K\nabla u) \cdot \nabla u \, dx = \int_\Omega \nabla u^T K \nabla u \, dx \geq c_K \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

Y usando la desigualdad de Poincaré, se tiene que existe c_K' tal que

$$\int_\Omega (K\nabla u) \cdot \nabla u \, dx \geq c_K' \|u\|_{H^1}$$

Además, usando la identidad demostrada al inicio se tiene que

$$\int_\Omega (b \cdot \nabla u) u \, dx = \int_\Omega ub \cdot \nabla u \, dx = \int_{\partial\Omega} u^2 (b \cdot n) \, dx - \int_\Omega (b\nabla u + u \operatorname{div} b) u \, dx$$

Pero como $\operatorname{div} b = 0$

$$\int_\Omega (b \cdot \nabla u) u \, dx = \int_{\partial\Omega} u^2 (b \cdot n) \, dx - \int_\Omega (b \cdot \nabla u) u \, dx \Rightarrow \int_\Omega (b \cdot \nabla u) u \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u^2 b \cdot n \, dS$$

Pero como además $b \cdot n \geq 0$ en Γ_N y $u = 0$ en Γ_D se concluye que

$$\int_\Omega (b \cdot \nabla u) u \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u^2 b \cdot n \, dS \geq 0$$

Para el último termino como $a(x) > 0$, entonces existe a_0 tal que $a(x) \geq a_0 > 0$, y así

$$\int_\Omega a u^2 \, dx \geq a_0 \|u\|_{L^2}^2$$

Por tanto

$$a(u,u) \geq c_K' \|\nabla u\|_{L^2}^2 + a_0 \|u\|_{L^2}^2 \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2$$

demostrando así la coercividad. Ahora veamos la continuidad de la forma lineal. Dado que $f \in H^{-1}(\Omega)$, se tiene que

$$\left| \int_\Omega f v \, dx \right| = |\langle f, v \rangle| \leq \|f\|_{H^{-1}} \|v\|_{H^1} = C_1 \|v\|_{H^1}$$

Además, como $t \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ y $v \in H^1(\Omega)$, su traza sobre Γ_N está en $H^{1/2}(\Gamma_N)$, y se tiene

$$\left| \int_{\Gamma_N} tv \, dS \right| \leq \|t\|_{H^{-1/2}(\Gamma_N)} \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} \leq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Y por la continuidad del operador bilineal $a(G, v)$ demostrado anteriormente resulta que

$$\left| \int_\Omega (K\nabla G) \cdot \nabla v + (b \cdot \nabla G)v - aGv\, dx \right| \leq C_3 \|v\|_{H^1}$$

Por lo tanto,

$$|f(v)| \leq C\|v\|_{H^1}$$

Mostrando la continuidad de $f(v)$. Así, todas las hipótesis del Lema de Lax-Milgram han sido verificadas, y por tanto existe una única solución $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V$$

Pregunta 2

(a) Multipliquemos la primera ecuación por v_1 e integremos sobre Ω

$$\int_\Omega (-\Delta u_1 + u_2)v_1\, dx = \int_\Omega f_1 v_1\, dx$$

Aplicando integración por partes (Identidad de Green)

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1\, dx + \int_\Omega u_2 v_1\, dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u_1 \cdot \mathbf{n})v_1\, dS = \int_\Omega f_1 v_1\, dx$$

Y podemos observar que sobre la frontera en la integral se tiene la expresión $(\nabla u_1 \cdot \mathbf{n})v_1$, por lo que podemos considerar una mezcla de condiciones de borde. Digamos que se tienen dos conjuntos Γ_D^1, Γ_N^1 tales que $\overline{\partial\Omega} = \overline{\Gamma_D^1} \cup \overline{\Gamma_N^1}$, entonces las condiciones de borde adecuadas son de la forma

$$u_1 = g_1 \quad \text{en } \Gamma_D^1, \quad \nabla u_1 \cdot \mathbf{n} = h_1 \quad \text{en } \Gamma_N^1$$

Ahora multipliquemos la segunda ecuación por v_2 e integremos sobre Ω

$$\int_\Omega (-\Delta u_2 - u_1)v_2\, dx = \int_\Omega f_2 v_2\, dx$$

Aplicando integración por partes (Identidad de Green)

$$\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2\, dx - \int_\Omega u_1 v_2\, dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u_2 \cdot \mathbf{n})v_2\, dS = \int_\Omega f_2 v_2\, dx$$

Y podemos observar que sobre la frontera en la integral se tiene la expresión $(\nabla u_2 \cdot \mathbf{n})v_2$, por lo que podemos considerar una mezcla de condiciones de borde. Digamos que se tienen dos conjuntos Γ_D^2, Γ_N^2 tales que $\overline{\partial\Omega} = \overline{\Gamma_D^2} \cup \overline{\Gamma_N^2}$, entonces las condiciones de borde adecuadas son de la forma

$$u_2 = g_2 \quad \text{en } \Gamma_D^2, \quad \nabla u_2 \cdot \mathbf{n} = h_2 \quad \text{en } \Gamma_N^2$$

(b) Consideremos $V_0 := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ el espacio de soluciones. Consideremos naturalmente la norma

$$\|u\|_{V_0} = \sqrt{\|u_1\|_{H^1}^2 + \|u_2\|_{H^1}^2} = \sqrt{\|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + \|u_2\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_2\|_{L^2}^2}$$

Sumemos ambas ecuaciones (debilitando aún más la formulación pero más adelante veremos que de todas formas la solución es única). Entonces, buscamos $u = (u_1, u_2) \in V_0$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + \int_\Omega u_2 v_1 \, dx + \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, dx - \int_\Omega u_1 v_2 \, dx = \int_\Omega f_1 v_1 \, dx + \int_\Omega f_2 v_2 \, dx$$

para todo $v = (v_1, v_2) \in V_0$. Así, considerando $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ con $u_1, u_2, v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ definimos los siguientes operadores

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + u_2 v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 - u_1 v_2 \, dx \\ f(v) &:= \int_\Omega f_1 v_1 + f_2 v_2 \, dx \end{aligned}$$

Concluyendo que la formulación débil corresponde a encontrar $u \in V_0$ tal que

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V_0$$

Notemos que para la formulación débil se requiere que $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$. Esta regularidad requerida se debe a que queremos que la integral en $f(v)$ esté bien definida, y como por definición de H_0^1 se tiene que $v_1, v_2 \in L^2(\Omega)$, solo falta la condición antes mencionada.

(c) Con el objetivo de usar Lax-Milgram, primero notemos que $a(\cdot, \cdot)$ es bilineal y que $f(\cdot)$ es lineal, ambos heredados de la linealidad del operador integral. Además, notemos el dominio es V_0, es un espacio de Hilbert por ser producto cartesiano de dos espacios de Hilbert. Así, hemos mostrado las primeras hipótesis del teorema.

Ahora demostremos la continuidad de $a(\cdot, \cdot)$. Se tiene que

$$|a(u, v)| = \left| \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + u_2 v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 - u_1 v_2 \, dx \right|$$

Usando desigualdad triangular

$$|a(u, v)| \leq \int_\Omega |\nabla u_1| \cdot |\nabla v_1| \, dx + \int_\Omega |u_2||v_1| \, dx + \int_\Omega |\nabla u_2| \cdot |\nabla v_2| \, dx + \int_\Omega |u_1||v_2| \, dx$$

Y entonces usando Cauchy Schwarz

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u_1\|_{L^2} \|\nabla v_1\|_{L^2} + \|u_2\|_{L^2} \|v_1\|_{L^2} + \|\nabla u_2\|_{L^2} \|\nabla v_2\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2} \|v_2\|_{L^2}$$

Y así, usando Cauchy Schwarz nuevamente (sobre $\mathbb{R}^4$)

$$|a(u,v)| \leq \left(\|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2}^2 + \|u_2\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_2\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \left(\|v_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_1\|_{L^2}^2 + \|v_2\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_2\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$$

Finalmente, por definición

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{V_0}\|v\|_{V_0}$$

Demostrando así, la continuidad. Para la coercitividad veamos que

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_1 + u_2 u_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla u_2 - u_1 u_2 \, dx = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_1 dx + \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla u_2 dx$$

Esto es De la cota de Poincare se tiene que existe una constante C_P dependiente de la geometría tal que

$$\|u_1\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla u_1\|_{L2}, \quad \|u_2\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla u_2\|_{L2}$$

Y entonces

$$\|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L2}^2 + \|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L2}^2 \leq (1 + C_P^2)(\|\nabla u_1\|_{L2}^2 + \|\nabla u_2\|_{L2}^2)$$

De lo que podemos concluir

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_1 dx + \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla u_2 dx = \|\nabla u_1\|_{L2}^2 + \|\nabla u_2\|_{L2}^2$$

Y sumado a lo anterior

$$a(u,u) \geq \frac{1}{1 + C_P^2}\left(\|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L2}^2 + \|u_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_1\|_{L2}^2\right) = \frac{1}{1 + C_P^2}\|u\|_{V_0}^2$$

Demostrando así la coercividad con $\alpha = \frac{1}{1+C_P^2}$.

Ahora veamos la continuidad de la forma lineal $f(v)$. Se tiene que

$$|f(v)| = \left| \int_\Omega f_1 v_1 + f_2 v_2 \, dx \right|$$

Usando desigualdad triangular

$$|f(v)| \leq \int_\Omega |f_1| \cdot |v_1| \, dx + \int_\Omega |f_2||v_2| \, dx$$

Y entonces usando Cauchy Schwarz

$$|f(v)| \leq \|f_1\|_{L^2}\|v_1\|_{L^2} + \|f_2\|_{L^2}\|v_2\|_{L^2}$$

Y así, usando Cauchy Schwarz nuevamente

$$|f(v)| \leq \left(\|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_2\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \left(\|v_1\|_{L^2}^2 + \|v_2\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$$

Finalmente, por definición de $\|v\|_{V_0}$ se tiene que

$$|f(v)| \leq \left(\|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_2\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \|v\|_{V_0}$$

Y como f_1, f_2 son fijas y están en L^2, entonces $\left(\|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_2\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$ es constante, demostrando así la continuidad de $f(v)$

Y con esto verificamos todas las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram, y usándolo podemos concluir que existe una único $u \in V_0$ tal que

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V_0$$

Y según las constantes de continuidad y coercividad encontradas, se tiene que la cota a priori de estabilidad viene dada por

$$\|u\|_{V_0} \leq (1 + C_P^2)\|f\|_{V_0'}$$

Y depende solamente de la geometría Ω

Pregunta 3

(a) Digamos que las matrices son de $n \times n$. Por definición de producto de Frobenius se tiene que

$$A : B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot B_{ij}$$

Lo cual lo podemos escribir, sumando cada elemento dos veces y multiplicando por un medio

$$A : B = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot B_{ij} + A_{ji} \cdot B_{ji} \right)$$

Pero como A es simétrica se tiene que $A_{ij} = A_{ji}$ y como B es antisimétrica se tiene que $B_{ij} = -B_{ji}$ y entonces

$$A : B = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot B_{ij} - A_{ij} \cdot B_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 0 \right) = 0$$

Demostrando lo pedido.

(b) Comencemos aplicando integración por partes a τ_{ij} y v_i, derivando con respecto a x_j. De esto resulta que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} v_i \, dx + \int_{\Omega} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = \int_{\partial\Omega} \tau_{ij} v_i n_j \, dS$$

Sumando sobre i y sobre j resulta que

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} v_i \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \tau_{ij} v_i n_j \, dS$$

Pero por definición se tiene que

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} v_i = [\operatorname{div} \tau]_i v_i$$

Y entonces sumando sobre i resulta que

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} v_i = \operatorname{div} \tau \cdot v$$

Y además, por definición de producto de Frobenius se tiene que

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \tau_{ij} \nabla v_{ij} = \tau : \nabla v$$

Y además

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \tau_{ij} v_i n_j = \sum_{i=1}^{d} v_i (\tau_i \cdot n) = v \cdot (\tau n)$$

Y entonces resulta que la expresión antes encontrada se puede escribir como

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \tau \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \tau : \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot (\tau n) \, dS$$

Demostrando lo pedido.

(c) Comencemos multiplicando la primera ecuación de la formulación fuerte por una función de prueba $v \in V_0$ arbitraria e integrando sobre Ω, de lo que resulta que

$$\int_{\Omega} - \operatorname{div}(\sigma(\mathrm{u}))\, v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V_0$$

Usemos la fórmula de integración por partes demostrada en (b). De lo que resulta que

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} v \cdot (\sigma(u) n) \, dS = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V_0$$

Ahora notemos que la integral de borde la podemos separar en

$$\int_{\partial\Omega} v \cdot (\sigma(u) n) \, dS = \int_{\Gamma_D} v \cdot (\sigma(u) n) \, dS + \int_{\Gamma_N} v \cdot (\sigma(u) n) \, dS$$

Pero $v = 0$ en Γ_D por definición y además $\sigma(u)n = t$ según las condiciones de borde de la formulación fuerte del problema, y por tanto

$$\int_{\partial\Omega} v \cdot (\sigma(u)n)\, dS = \int_{\Gamma_N} t \cdot v\, dS$$

Y por tanto reemplazando en la expresión anterior resulta que

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \nabla v\, dx = \int_{\Omega} f v\, dx + \int_{\Gamma_N} t \cdot v\, dS \quad \forall v \in V_0$$

Consideremos la parte antisimétrica de ∇v, para esto definamos el operador

$$\bar{\epsilon}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - [\nabla u]^T)$$

Y entonces, se puede escribir ∇v como

$$\nabla v = \epsilon(v) + \bar{\epsilon}(v)$$

Y así

$$\sigma(u) : \nabla v = \sigma(u) : \epsilon(v) + \sigma(u) : \bar{\epsilon}(v)$$

Pero como $\bar{\epsilon}(v)$ es por definición antisimétrico, por lo demostrado en la parte (a) se tiene que $\sigma(u) : \bar{\epsilon}(v) = 0$, y entonces

$$\sigma(u) : \nabla v = \sigma(u) : \epsilon(v)$$

Reemplazando en la expresión anterior

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v)\, dx = \int_{\Omega} f v\, dx + \int_{\Gamma_N} t \cdot v\, dS \quad \forall v \in V_0$$

Y usando la notación vista en el curso

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \epsilon(v)\, dx = \langle f, v \rangle_{V_0', V_0} + \langle t, v \rangle_{[H^{1/2}(\Gamma_N)]', H^{1/2}(\Gamma_N)} \quad \forall v \in V_0$$

Y recordando que de la formulación fuerte se requiere que $u = u_D$ en Γ_D entonces buscamos funciones $u \in V_{u_D}$, demostrando la formulación débil solicitada.

(d) Sea $u \in H^1(\Omega)^d$. Por lo definido antes se tiene que $\nabla u = \epsilon(u) + \bar{\epsilon}(u)$. Como $\epsilon(u)$ es simétrica y $\bar{\epsilon}(u)$ es antisimétrica, se cumple que

$$\epsilon(u) : \bar{\epsilon}(v) = 0$$

Entonces, al integrar

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |\epsilon(u) + \bar{\epsilon}(u)|^2 dx = \int_{\Omega} |\epsilon(u)|^2 dx + \int_{\Omega} \epsilon(u) : \bar{\epsilon}(u) dx + \int_{\Omega} |\bar{\epsilon}(u)|^2 dx$$

Y por ortogonalidad, se tiene que $\int_\Omega \epsilon(u) : \overline{\epsilon}(u) dx = 0$, y entonces

$$\|\nabla u\|_{0,\Omega}^2 = \|\epsilon(u)\|_{0,\Omega}^2 + \|\overline{\epsilon}(u)\|_{0,\Omega}^2 \geq \|\epsilon(u)\|_{0,\Omega}^2$$

Tomando raíz cuadrada se concluye que

$$\|\varepsilon(u)\|_{0,\Omega} \leq \|\nabla u\|_{0,\Omega}$$

Tal como queríamos demostrar considerando $C = 1$.

(e) Probemos el resultado para funciones en $[C_0^\infty(\Omega)]^d$, esto es suficiente puesto que este espacio es denso en $[H_0^1(\Omega)]^d$. Supongamos por contradicción que no existe dicho C, entonces existe una secuencia $(u_n)_n \subset [C_0^\infty(\Omega)]^d$ tales que $\|u_n\|_{1,\Omega} = 1$ y

$$\|\epsilon(u_n)\|_{0,\Omega} < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $(u_n)_n$ es acotada en $[H_0^1(\Omega)]^d$, el cual es un espacio de Hilbert reflexivo, existe una subsecuencia $(u_{n_k})_k$ tal que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } [H_0^1(\Omega)]^d$$

Así, por el teorema de Rellich-Kondrachov, existe convergencia fuerte en $[L^2(\Omega)]^d$

$$u_k \to u \quad \text{fuertemente en } [L^2(\Omega)]^d$$

Y en particular converge en norma, y como $\|u_k\|_{1,\Omega} = 1$, resulta que

$$\|u\|_{1,\Omega} = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{1,\Omega} = 1$$

Sea $\varphi \in [C_0^\infty(\Omega)]^{d\times d}$. Definimos el funcional vectorial $\phi_\varphi : [H_0^1(\Omega)]^d \to \mathbb{R}$ como

$$\phi_\varphi(w) = \langle \epsilon(w), \varphi \rangle$$

El cual es continuo puesto que por Cauchy-Schwarz y del resultado anterior de la parte (d)

$$\phi_\varphi(w) = \langle \epsilon(w), \varphi \rangle \leq \|\epsilon(w)\|_{0,\Omega} \cdot \|\varphi\|_{0,\Omega} \leq C\|\nabla w\|_{0,\Omega} \cdot \|\varphi\|_{0,\Omega} \leq C\|w\|_{1,\Omega} \cdot \|\varphi\|_{0,\Omega}$$

Por lo que ϕ_φ es parte del dual. Ahora volvamos a la subsuseción u_k, se tiene entonces que para cualquier función test φ se cumple

$$|\langle \epsilon(u_k), \varphi \rangle| \leq \|\epsilon(u_k)\|_{0,\Omega} \cdot \|\varphi\|_{0,\Omega} < \frac{1}{n_k}\|\varphi\|_{0,\Omega} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Por lo tanto $\epsilon(u_k) \to 0$ débilmente en $[L^2(\Omega)]^d$. De lo anterior se concluye que $\epsilon(u) = 0$. Entonces u es un movimiento rígido, esto es, dadas constantes α, β, γ se puede escribir como

$$u = \begin{pmatrix} \alpha x_2 + \beta \\ -\alpha x_1 + \gamma \end{pmatrix}$$

Como $u = 0$ en $\partial\Omega$, puesto que $u \in [H_0^1(\Omega)]^d$, entonces se concluye que las constantes anteriores están dadas por $\alpha = \beta = \gamma = 0$, y entonces $u = 0$. Ahora recordemos que

$$1 = \|u_k\|_{1,\Omega}^2 = \|u_k\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla u_k\|_{0,\Omega}^2$$

Al converger $\|u_k\|_{0,\Omega} \to 0$, se tiene $\|\nabla u_k\|_{0,\Omega}^2 \to 1$. Sin embargo, $\varepsilon(u_k) \to 0$ implica que la parte simétrica del gradiente tiende a cero. La única manera de que la norma del gradiente no tienda a cero es que la parte antisimétrica tienda a algo distinto de 0, sin embargo se tiene que

$$\begin{aligned}
\|(\nabla u_k)^T\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} \left| \frac{\partial (u_k)_j}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx \\
&= \int_\Omega \sum_{j,i=1}^{2} \left| \frac{\partial (u_k)_j}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} \left| \frac{\partial (u_k)_i}{\partial x_j}(x) \right|^2 dx \\
&= \|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Y por lo tanto la parte antisimétrica también debe tender a 0. De hecho otra forma de verlo es que contradiciería que $u = 0$. Así, la suposición inicial de la no existencia de dicha constante C es falsa, lo que demuestra lo pedido. Llamemos a la constante abstracta obtenida en esta demostración como C_K

(f) Primero consideremos convertir la condición de Dirichlet en homogénea. Consideremos soluciones de la forma $u = u_0 + G$ donde $G \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ tal que $G = u_D$ en Γ_D. La existencia de G se justifica debido a la sobreyectividad de la traza de Dirichlet. Consideremos entonces el espacio de funciones test y el espacio de soluciones como

$$v \in V_0, \quad u = u_0 + G \quad u_0 \in V_0,\, G \in V_{u_D}$$

Recordemos que la formulación corresponde a buscar $u \in V_{u_D}$ tal que

$$\int_\Omega \sigma(u) : \epsilon(v)\, dx = \int_\Omega f v\, dx + \int_{\Gamma_N} t \cdot v\, dS \quad \forall v \in V_0$$

Consideremos

$$a(u, v) = \int_\Omega \sigma(u) : \epsilon(v)\, dx, \quad L(v) = \int_\Omega f v\, dx + \int_{\Gamma_N} t \cdot v\, dS$$

Notemos que a es bilineal, puesto que el operador integral es lineal, la norma de Frobenius es lineal, y tanto el σ, ϵ y los gradientes son lineales, de esta forma a es simplemente composiciones de funciones lineales, de lo que se conluye que a es bilineal.

Además, L es lineal puesto que f y t son dadas y el operador integral es lineal.

Entonces el problema se puede escribir como buscar $u \in V_{u_D}$ tal que

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V_0$$

Y entonces

$$a(u_0 + G, v) = L(v) \quad \forall v \in V_0$$

Y por la bilinealidad de a

$$a(u_0, v) = L(v) - a(G, v) \quad \forall v \in V_0$$

Considerando $\overline{L}(v) = L(v) - a(G,v)$ (puesto que G es dado), el problema se transforma en buscar $u_0 \in V_0$ tal que

$$a(u_0, v) = \overline{L}(v) \quad \forall v \in V_0$$

Y como a es bilineal y L es lineal, se concluye que $\overline{L}$ también debe ser lineal. Así, ahora tenemos un problema bilineal con condiciones de Dirichlet homogéneas.

Sustituyendo en la forma bilineal la definición de $\sigma(u)$ y usando la linealidad del producto de Frobenius

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(2\mu\, \epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda \operatorname{div}(u) I : \epsilon(v)\right) dx$$

Notemos que

$$I : \epsilon(v) = \sum_i \epsilon(v)_{ii} = \operatorname{tr}(\epsilon(v)) = \operatorname{div}(v)$$

Por lo que de forma más explícita

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(2\mu\, \varepsilon(u) : \varepsilon(v) + \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v)\right) dx$$

Ahora, para poder usar el teorema de Lax-Milgram demostremos las hipótesis necesarias. La primera es notar que V_0 es un espacio de Hilbert, y recordar la bilinealidad de a y la linealidad de L.

Para demostrar la continuidad de $a(u,v)$, comenzemos por notar que

$$|a(u,v)| \leq 2\mu \int_\Omega |\varepsilon(u)||\varepsilon(v)| dx + \lambda \int_\Omega |\operatorname{div}(u)||\operatorname{div}(v)| dx$$

Y entonces, por Cauchy-Schwarz se tiene que

$$|a(u,v)| \leq 2\mu \|\varepsilon(u)\|_{L^2} \|\varepsilon(v)\|_{L^2} + \lambda \|\operatorname{div}(u)\|_{L^2} \|\operatorname{div}(v)\|_{L^2}$$

Para acotar el segundo término se tiene que Sea $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Entonces,

$$\|\operatorname{div}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq d \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 dx$$

Donde la primera igualdad es por definición y la segunda se obtiene de Cauchy-Schwarz. Por lo tanto

$$\|\operatorname{div}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq d \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq d \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx = d\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

De lo que se concluye que

$$\|\operatorname{div}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{d}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{d}\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Además, por el resultado del ítem (d)

$$\|\varepsilon(u)\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Por tanto, se tiene que

$$|a(u, v)| \leq (d + 1)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in V_0$$

Demostrando así la continuidad de $a(u, v)$ con constante $C = (d + 1)$, para ver la coercividad comenzemos del ítem (e)

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_K\|\varepsilon(v)\|_{L^2} \quad \forall v \in V_0$$

Desarrollando resulta que

$$a(v, v) = \int_\Omega 2\mu|\varepsilon(v)|^2 + \lambda(\operatorname{div}(v))^2\, dx \geq 2\mu\|\varepsilon(v)\|_{L^2}^2 \geq \frac{2\mu}{C_K^2}\|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Por tanto, a es coerciva sobre V_0 con constante $\alpha = \frac{2\mu}{C_K^2} > 0$.

Ahora para ver la continuidad de L, notamos que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|t\|_{H^{-1/2}(\Gamma_N)}\, \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)}$$

Como $v \in V_0 \subset H^1(\Omega)$, se tiene que $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ y además, por continuidad de la aplicación traza, $\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}$. Por lo tanto, existe una constante C' tal que

$$|L(v)| \leq C'\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V_0$$

lo que prueba que L es continua en V_0. De esto se concluye que $\overline{L}$ también debe ser continua, ya que tanto a y L lo son, y entonces es una suma de funciones continuas.

Así, se cumplen todas las hipótesis del teorema de Lax-Milgram garantiza la existencia y unicidad de una única solución $u_0 \in V_0$ tal que:

$$a(u_0, v) = \overline{L}(v) \quad \forall v \in V_0$$

De Lax-Milgram también se deduce la cota de estabilidad dada por

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\alpha} \|L\|_{V_0'}$$

Y por las cotas obtenidas anteriormente

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{(d+1)C_K^2}{2\mu} \|L\|_{V_0'}$$

Encontrando así la cota de estabilidad, tal como queríamos.