Tarea 5

Vicente Opazo

November 8, 2025

1

1.1

1. $T_n(1) = cos(n \cdot \arccos 1) = cos(n \cdot 0) = cos(0) = 1$
   $T_n(-1) = cos(n \cdot \arccos -1) = cos(n \cdot \pi)$
   Si n es par con $n = 2k$, entonces $T_n(-1) = cos(n \cdot \pi) = cos(0 + k \cdot 2\pi) = cos(0) = 1$
   Si n es impar con $n = 2k+1$, entonces $T_n(-1) = cos(n \cdot \pi) = cos((2k+1) \cdot \pi) = cos(\pi + k \cdot 2\pi) = cos(\pi) = -1$
   Entonces, en general se tiene que $T_n(-1) = (-1)^n$

2. Sea $m > n \geq 0$, entonces

$$T_m(x)T_n(x) = cos(m \cdot \arccos x)cos(n \cdot \arccos x)$$

   Multiplicando por 1 se obtiene

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}(2cos(m \cdot \arccos x)cos(n \cdot \arccos x))$$

   Reacomodando

$$\begin{aligned} T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}((&cos(m \cdot \arccos x)cos(n \cdot \arccos x) - (sin(m \cdot \arccos x)sin(n \cdot \arccos x)) \\ &+ (cos(m \cdot \arccos x)cos(n \cdot \arccos x) + (sin(m \cdot \arccos x)sin(n \cdot \arccos x))) \end{aligned}$$

   Usando identidades trigonometricas de suma y resta de coseno

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}(cos(m \cdot \arccos x + n \cdot \arccos x) + cos(m \cdot \arccos x - n \cdot \arccos x))$$

   Factorizando

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}(cos((m+n) \cdot \arccos x) + cos((m-n) \cdot \arccos x))$$

   Usando la definición de polinomio de Chebyshev

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}(T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x))$$

3. Primero encontremos $T_n'(x)$

$$T_n'(x) = \frac{d}{dx}cos(n \arccos x) = -sin(n \arccos x)\frac{d}{dx}n \arccos x = -sin(n \arccos x)n\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

   Y entonces

$$T_n'(x) = \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

   Sea ahora $n \geq 1$, entonces se tiene que

$$\frac{T_{n+1}'(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}'(x)}{n-1} = \frac{(n+1)\sin((n+1)\arccos x)}{(n+1)\sqrt{1-x^2}} - \frac{(n-1)\sin((n-1)\arccos x)}{(n-1)\sqrt{1-x^2}}$$

Simplificando

$$\frac{T'_{n+1}(x)}{n+1}-\frac{T'_{n-1}(x)}{n-1}=\frac{\sin((n+1)\arccos x)-\sin((n-1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Usando identidad trigonómetrica

$$=\frac{2\cdot cos(\frac{(n+1)\arccos x+(n-1)\arccos x}{2})\cdot sin(\frac{(n+1)\arccos x-(n-1)\arccos x}{2})}{\sqrt{1-x^2}}$$

Factorizando

$$=\frac{2\cdot cos(\frac{2n\arccos x}{2})\cdot sin(\frac{2\arccos x}{2})}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\cdot cos(n\arccos x)\cdot sin(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pero como se tiene que $sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$, entonces

$$\frac{T'_{n+1}(x)}{n+1}-\frac{T'_{n-1}(x)}{n-1}=2\cdot cos(n\arccos x)=2T_n(x)$$

4. Veamos primero el caso para $T_0(x)$, entonces

$$\langle T_0,T_0\rangle_w=\int_{-1}^{1}cos^2(0\arccos x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}cos^2(0)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Usando la antiderivada

$$\langle T_0,T_0\rangle_w=-\arccos x\Big|_{-1}^{1}=\arccos -1-\arccos 1=\pi-0=\pi$$

Ahora veamos el caso para $T_n(x)$ con $n\geq 1$, entonces

$$\langle T_n,T_n\rangle_w=\int_{-1}^{1}cos^2(n\arccos x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Haciendo la sustitución $u=\arccos x$

$$\langle T_n,T_n\rangle_w=\int_{\pi}^{0}-cos^2(nu)du=\int_{0}^{\pi}cos^2(nu)du$$

Usando identidad trigonométrica

$$\langle T_n,T_n\rangle_w=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+cos(2nu))du=\frac{1}{2}(\int_0^{\pi}1+\int_0^{\pi}cos(2nu))$$

Pero la integral de *cos* es *sin* y lo evaluaremos en puntos de la forma $k2\pi$ así que resultará *cero*, entonces

$$\langle T_n,T_n\rangle_w=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}1=\frac{\pi}{2}$$

5. Del item 3 ya sabemos que $T'_n(x)=\frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$, busquemos $T''_n(x)$

$$T''_n(x)=\frac{d}{dx}\frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}=n\frac{d}{dx}\frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Usando regla de la división

$$T''_n(x)=n\frac{(\sqrt{1-x^2})\frac{d}{dx}\sin(n\arccos x)-\sin(n\arccos x)\frac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2})}{1-x^2}$$

Desarrollando

$$T''_n(x)=n\frac{-n\cdot cos(n\arccos x)+\frac{x\cdot sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

Reordenando se obtiene

$$T_n''(x) = \frac{nx \cdot sin(n \arccos x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n^2 \cdot cos(n \arccos x)}{1-x^2}$$

Ahora, reemplazando en la ecuación diferencial $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$ resulta

$$(1-x^2)(\frac{nx \cdot sin(n \arccos x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n^2 \cdot cos(n \arccos x)}{1-x^2}) - x\frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} + n^2 cos(n \arccos x) = 0$$

Distribuyendo

$$\frac{nx \cdot sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} - n^2 \cdot cos(n \arccos x) - \frac{nx \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} + n^2 cos(n \arccos x) = 0$$

De donde se verifica fácilmente que $0 = 0$, y por ende $T_n(x)$ es solución de dicha ecuación diferencial

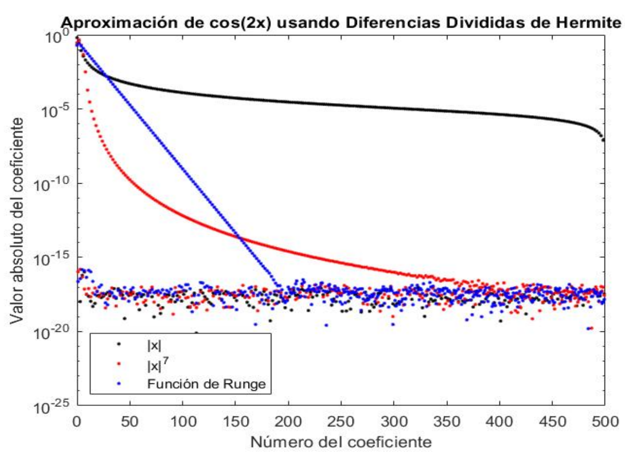
1.2

a) La tabla resumen es la siguiente

	(I)	(II)	(III)
cond(V)	5.7536×10^{18}	5.7762×10^{18}	7.1754×10^{18}
cond(C)	1.4756×10^{17}	1.4142	1.4867

Los valores para la matriz de Vandermonde con los tres tipos de nodos son muy grandes así que no es recomendado usar la matriz de Vandermonde. Tampoco es recomendado usar la matriz de Chebyshev-Vandermonde con los nodos equidistantes. Las otras dos combinaciones son recomendadas, y el cual usar depende del problema, ya que los errores causados al invertir la matriz son similares, por lo que es importante minimizar otros tipos de errores existentes en el problema. Cabe señalar que la matriz de Chebyshev-Vandermonde con los nodos de Chebyshev de primer tipo es la matriz con el valor de condicionamiento más bajo.

b) El gráfico obtenido fue el siguiente



De aquí se puede ver que para cada función los coeficientes siguen una línea, la cual es la tasa de convergencia de dichos coeficientes. Lo primero es notar que la función de Runge, la cual es infinitamente diferenciable, tiene una tasa de convergencia exponencial (líneal en un gráfico logarítmico). Por otra parte, la función $|x|^7$ tiene mejor tasa de convergencia que $|x|$, esto se debe a que la primera es una función más "suave".