

MAT2605, Cálculo Científico I, 2021-2

Tarea 9

Entrega para el 9 de diciembre de 2021

Pueden discutir los problemas con sus compañeros. Sin embargo, sus entregas, tanto la parte escrita como los códigos, deben ser individuales. **No** está permitido copiar las respuestas de alguien más ni dejar que otros copien sus respuestas. Su entrega debe estar compuesta por un único archivo en formato **.pdf** que incluya todas las respuestas y todos los gráficos que se están pidiendo, junto con un archivo **.zip** que incluya todos los archivos **.m** que produjeron y utilizaron durante esta tarea. Estos dos archivos deben ser subidos en Canvas. Si hay más de una línea en un gráfico, utilice distintos estilos de línea o distintos colores para diferenciarlas e incluya leyendas. No se olvide de nombrar todos sus ejes y líneas en las leyendas.

- 8 pts. 1. (a) Escriba un algoritmo que usa el método de Newton para encontrar las raíces del polinomio cúbico $f(x) = x^3 - 2x + 2$ con buena precisión. Si el valor inicial es $x^{(0)} = 0.5$, ¿a qué valor converge el algoritmo? ¿Es una raíz? Si el valor inicial es $x^{(0)} = 0.1$, ¿a qué valor converge el algoritmo? ¿Es una raíz? Mire el comportamiento de los iterados y trate de explicar lo que sucede. Si el valor inicial es $x^{(0)} = 1 + \sqrt{-1}$, ¿a qué valor converge el algoritmo? ¿Es una raíz?
- 7 pts. (b) Escriba un algoritmo que usa el método de punto fijo para encontrar las raíces del polinomio cúbico $f(x) = x^3 - 2x + 2$ con buena precisión. Como función de búsqueda del punto fijo escoja $g(x) = x - cf(x)$ donde $c \neq 0$ es una constante. Dado el punto inicial $x^{(0)} = 0.1$, ¿para cuáles valores de c converge el método?
- 20 pts. 2. Escriba su propio comando **legendrepts(n)** para computar los nodos y pesos de cuadratura de Gauss–Legendre en $[-1, 1]$ usando el método de Newton para encontrar las raíces de $P_n(x) = 0$, donde P_n es el grado el polinomio de Legendre de grado n . Explícitamente, es un procedimiento iterativo que empieza en $x_j^{(0)}$ y se actualiza por la expresión

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - \frac{P_n(x_j^{(k)})}{P'_n(x_j^{(k)})},$$

para $j = 0, \dots, n-1$. El método de Newton necesita de tres elementos para iniciar y actualizar:

- (I) Las aproximaciones iniciales: intente usar los puntos de Chebyshev $x_j^{(0)} = \cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right)$ para $j = 0, \dots, n-1$.
- (II) Un esquema de evaluación para $P_n(x)$: use que $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ y la relación de recurrencia $P_{l+1}(x) = \frac{1}{l+1}((2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x))$ para calcular $P_n(x)$.
- (III) Un esquema de evaluación para $P'_n(x)$: use la relación $P'_n(x) = \frac{n}{1-x^2}(P_{n-1}(x) - xP_n(x))$.

Finalmente, se necesita un criterio de terminación para parar las iteraciones de Newton–Raphson (en k). Para esto, puede usar el criterio de que el valor absoluto del cambio en la actualización, i.e. $|x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| = \left|\frac{P_n(x_j)}{P'_n(x_j)}\right|$ es menos que una tolerancia predeterminada (que le toca escoger), aunque también vale la pena limitar el número de iteraciones por debajo de cierto máximo. Después de las iteraciones de Newton–Raphson (si ya han convergido), calcule los pesos de cuadratura de Gauss–Legendre usando la relación establecida en el Problema 1(e) de la Tarea 6,

$$w_j = \frac{2}{(1 - x_j^2)(P'_n(x_j))^2}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

La firma de la rutina debería ser **[x,w]=legendrepts(n)**, donde **x** es un vector columna de $n \times 1$ y **w** es un vector fila $1 \times n$. Si quiere confirme sus resultados para bajos valores de **n** comparándolos con los que puede encontrar en los libros de clase.