Tarea 2

Vicente Opazo

November 8, 2025

1

1.1

Al intentar el código presentado efectivamente resulto en "NaN". Esto significa que MATLAB obtuvo una indeterminación, en este caso en particular se debe a que el numerador y denominador son considerados como infinito para la máquina (de hecho MATLAB no puede entregar el resultado de $n!$ para $n > 170$). Y de aquí se tiene que infinito dividido en infinito resulta en una indeterminación.

1.2

La idea del código es calcular valores parciales del coeficiente aprovechando que la multiplicación de dos fracciones se pueden separar facilmente, esto es $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, y así se cancelan en los valores parciales el numerador con el denominador y nunca llega a ser infinito.
Con esto, el valor obtenido es de 8.915×10^{-6}.

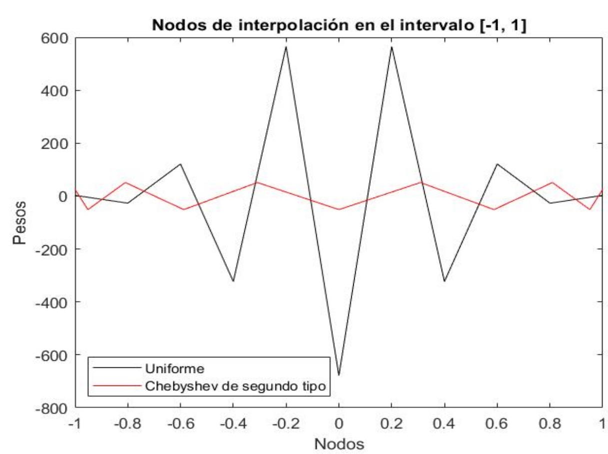
2

2.1

Los codigos de cada función se dejan en un script distinto para poder usarlas después.

2.2

El gráfico obtenido se muestra a continuación. Lo más interesante es que los nodos de interpolación de



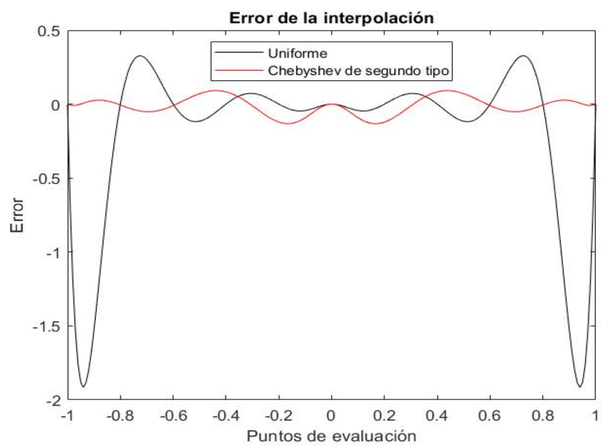
"Chebyshev de segundo tipo" tienen pesos menores en valor absoluto que los uniformemente espaciados. Otra cosa a notar es que los nodos cercanos al centro de los uniformemente espaciados tienen un peso mayor que los ubicados en los extremos.

2.3

Lo primero es notar que w_k tendrá el mismo signo que $\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)$.
Si $x_k < x_j$ entonces $x_k - x_j < 0$, mientras que si $x_k > x_j$ entonces $x_k - x_j > 0$. Así hay k factores positivos y $n - k$ factores negativos.
El producto tiene signo negativo si y solo si tiene una cantidad impar de factores negativos. Entonces para los k tales que $n - k$ es par, entonces w_k es positivo y si $n - k$ es impar, entonces w_k es negativo.
Así si para un k se tiene que w_k es positivo, entonces $n - k$ es par, y así $n - (k + 1)$ es impar y por ende w_{k+1} es negativo. Para el caso contrario es completamente análogo.
Y con lo anterior queda demostrada la aseveración.

2.4

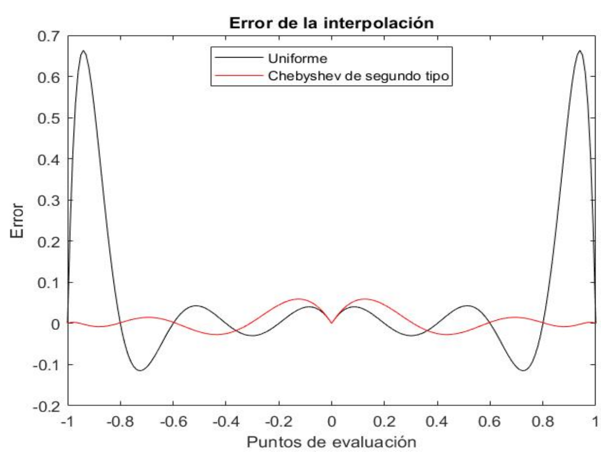
Tras la ejecución del codigo se obtuvo el siguiente gráfico. Lo primero es notar que el error oscila con



respecto a los nodos usados.
Lo otro importante es señalar que los nodos de "Chebyshev de segundo tipo" tienen un menor error promedio que los uniformemente espaciados en los valores extremos del intervalo [-1, 1]. Por otro lado, los uniformemente espaciados tienen un menor error promedio para los valores centrales del intervalo.

2.5

El gráfico obtenido para esta nueva función es el siguiente Las observaciones del punto anterior también



aplican en este caso. De hecho, tienen un cierto grado de similitud ambos gráficos.

En tanto, el conjunto de nodos de "Chebyshev de segundo tipo" son mejores que el de nodos uniformemente espaciados. Esto se debe a que nos entrega una buena aproximación en todo el intervalo, quizás los uniformemente espaciados tienen una mejor aproximación cercana al 0, pero si queremos algo que en cierto modo logre generalizar nuestra función los de "Chebyshev de segundo tipo" son una opción mucho más confiable.

2.6

Lo primero es notar que el factor $(-1)^{n-k}$ le entrega el signo al coeficiente, y su correctitud fue demostrada en la sección $2c$. Ahora solo basta ver el resto de la expresión.
Sea k arbitrario, entonces hay exactamente k nodos a su izquierda y $n-k$ nodos a su derecha, y todos esos nodos uniformemente espaciados. Esto es, los nodos a la izquierda están a distancia $\frac{2}{n}, \frac{4}{n}...\frac{2k}{n}$, mientras que a la derecha están a distancia $\frac{2}{n}, \frac{4}{n}...\frac{2(n-k)}{n}$. Así, ignorando el signo, $|w_k|$ viene dado por

$$|w_k| = \frac{1}{(\frac{2}{n} \cdot \frac{4}{n} \cdot ... \cdot \frac{2k}{n})(\frac{2}{n} \cdot \frac{4}{n} \cdot ... \cdot \frac{2(n-k)}{n})} = \frac{1}{\frac{2}{n}^k (1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k) \cdot \frac{2}{n}^{n-k}(1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-k))}$$

$$|w_k| = \frac{(\frac{n}{2})^n}{k!(n-k)!} = \frac{(\frac{n}{2})^n}{n!}\binom{n}{k}$$

Entonces, considerando el signo, la expresión es

$$w_k = \frac{(\frac{n}{2})^n(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k}$$

Demostrando así lo pedido

3

El número de Beatriz es el 2067.
El número de David es el 3601.
El número de Elena es el 4581.

3.1

De lo anterior se tienen 3 puntos $(x_0, y_0) = (2, 2067)$, $(x_1, y_1) = (4, 3601)$ y $(x_0, y_0) = (5, 4581)$.
Entonces, se tiene que

$$\ell_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x-4}{2-4} \cdot \frac{x-5}{2-5} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{10}{3}$$
$$\ell_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x-2}{4-2} \cdot \frac{x-5}{4-5} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 5$$
$$\ell_2 = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x-2}{5-2} \cdot \frac{x-4}{5-4} = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{8}{3}$$

Así, el polinomio viene dado por

$$f(x) = 2067(\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{10}{3}) + 3601(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 5) + 4581(\frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{8}{3}) = 71x^2 + 341x + 1101$$

3.2

De lo anterior se puede ver que el polinomio secreto es el $f(x) = 71x^2 + 341x + 1101$, y así el número de dos dígitos que abre la caja fuerte debe ser el 71

3.3

Es imposible que hubieran conseguido la contraseña, ya que para un polinomio de grado 2 se necesitan almenos tres puntos para definirla de forma única. Por ende hay muchos polinomios que pueden ser validos.

4

4.1

Haremos la demostración desde un punto de vista inductivo.
Primero veamos que para $n = 2$ es cierto, en este caso se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

y entonces su determinante es $(x_1 - x_0) = \prod_{0 \leq i < j \leq 1}(x_j - x_i)$
Ahora supongamos que se cumple para un sistema de Vandermonde $n \times n$ arbitrario, mostraremos que se cumple para uno de$n + 1 \times n + 1$. Entonces, se tiene que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Sabemos que las operaciones elementales no afectan el determinante, así que podemos a cada columna c_j (menos a la $j = 1$) hacerle la operación elemental $c_j = c_j - (x_0 \cdot c_{j-1})$ para dejar con 0 la fila superior, obteniendose

$$|A| = det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Usando la regla de Laplace sobre la primera fila, se obtiene que el determinante

$$|A| = det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) & \\ x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - x_0) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) & \end{bmatrix} \tag{4}$$

Factorizando cada fila se obtiene que

$$|A| = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \cdot det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & \\ x_2 - x_0 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & \end{bmatrix} \tag{5}$$

De la hipótesis de inducción se tiene que se cumple para una matriz de $n \times n$, y entonces se tiene que

$$|A| = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Y entonces

$$|A| = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Demostrando así lo pedido

4.2

Supongamos existiese un polinomio $p(x)$ no nulo de grado n con m raíces, esto es $p(x_1) = 0, p(x_2) = 0, ..., p(x_m) = 0$ y $m > n$.
Entonces, podemos factorizar el polinomio a partir de sus raíces

$$p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_m)$$

Donde a es el coeficiente que acompaña al término con la potencia mayor de x Pero entonces hay m factores, y multiplicando el primer término del monomio de cada uno de ellos se obtiene que existe un sumando igual a x^m, pero entonces el polinomio no puede ser de grado n, lo cual es un absurdo.
Este absurdo nace a partir de que el polinomio es no nulo, entonces se concluye que el polinomio debe ser nulo, i.e $p(x) = 0$, tal como queriamos demostrar.

4.3

La demostración es sencilla puesto que $P_n(x) - \bar{P}_n(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo k con $k + 1$ raíces definidas anteriormente por las soluciones dadas. Entonces debe ser el polinomio nulo, concluyendo que $P_n(x) = \bar{P}_n(x)$

4.4

Lo primero es notar lo siguiente $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$, y $L_i(x_j) = 1$ si $i = j$ Esto se debe a que si $i \neq j$ entonces el factor $(x_i - x_i) = 0$ está en el producto, haciendo todo el producto igual a 0. Mientras que si $i = j$ el producto es uno trivial y resulta en 1
Entonces $\sum L_i(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo k que pasa por los k+1 puntos $(x_0, 1), (x_1, 1) \cdots (x_n, 1)$. Debe ser el polinomio $p(x) = 1$.
Visto de otra forma el polinomio $\sum L_i(x) - 1$ es un polinomio de grado a lo sumo k con $k + 1$ raíces, y del punto (b) se tiene que es el polinomio nulo.