IMT3150: Optimización Avanzada	15 de junio de 2025

Tarea 3

Alumno: Vicente Opazo *Profesor: Cristóbal Guzmán*

Pregunta 1. *(a) Calculemos la conjugada de $\Phi(g)$. Por definición, se tiene que*

$$\Phi^*(h) = \sup_{g\in\mathbb{R}^{\Omega'}\times\mathbb{R}^{\Omega'}} \{\langle g, h\rangle - \Phi(g)\}$$

Por tanto

$$\Phi^*(h) = \sup_{g\in\mathbb{R}^{\Omega'}\times\mathbb{R}^{\Omega'}} \left\{ \sum_{(i,j)\in\Omega'} \left(g^1_{i,j}h^1_{i,j} + g^2_{i,j}h^2_{i,j} - \sqrt{(g^1_{i,j})^2 + (g^2_{i,j})^2} \right) \right\}$$

Como cada término es independiente, por lo que la sumatoria puede salir del supremo

$$\Phi^*(h) = \sum_{(i,j)\in\Omega'} \sup_{g\in\mathbb{R}^{\Omega'}\times\mathbb{R}^{\Omega'}} \left\{ \left(g^1_{i,j}h^1_{i,j} + g^2_{i,j}h^2_{i,j} - \sqrt{(g^1_{i,j})^2 + (g^2_{i,j})^2} \right) \right\}$$

Estudiemos ese supremo. Para (i,j) fijo consideremos por simplicidad de notación $x = (g^1_{i,j}, g^2_{i,j}) \in \mathbb{R}^2$, $a = (q^1_{i,j}, q^2_{i,j}) \in \mathbb{R}^2$. El problema a estudiar corresponde a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} \{\langle x, a\rangle - \|x\|_2\}$$

Si $\|a\|_2 \leq 1$, entonces usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz resulta que

$$\langle x, a\rangle - \|x\|_2 \leq \|x\|_2\|a\|_2 - \|x\|_2 \leq (\|a\|_2 - 1)\|x\|_2 \leq 0$$

Y para $x = 0$ se alcanza el valor $\langle 0, a\rangle - \|0\|_2 = 0$, y por tanto el supremo vale 0. Si $\|a\|_2 > 1$, entonces considerando $x = ta$ con $t > 0$ resulta que

$$\langle ta, a\rangle - \|ta\|_2 = t\|a\|_2^2 - t\|a\|_2 = t\|a\|_2(\|a\|_2 - 1) = t \cdot C$$

con $C = \|a\|_2(\|a\|_2 - 1) > 0$, y haciendo $t \to +\infty$ resulta que la función tiende a $+\infty$, y por tanto el supremo es $+\infty$. Entonces, tenemos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} \{\langle x, a\rangle - \|x\|_2\} = \begin{cases} 0 & \textit{si } \|a\|_2 \leq 1 \\ +\infty & \textit{si } \|a\|_2 > 1 \end{cases}$$

Aplicando esto a cada término en la conjugada, resulta que

$$\Phi^*(h) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \sqrt{(h^1_{i,j})^2 + (h^2_{i,j})^2} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in \Omega' \\ +\infty & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Encontrando la primera conjugada. Ahora calculemos la conjugada de $\Psi(u)$. De la definición tenemos que

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u - f\|_F^2$$

Por definición de conjugada de Fenchel se tiene que

$$\Psi^*(v) = \sup_{u\in\mathbb{R}^\Omega} \left\{ \langle u, v\rangle - \frac{1}{2}\|u - f\|_F^2 \right\}$$

Consideremos el cambio de variable $w = u - f$, de modo que $u = w + f$, de lo que resulta

$$\begin{aligned}\Psi^*(v) &= \sup_{w\in\mathbb{R}^\Omega} \left\{ \langle w + f, v\rangle - \frac{1}{2}\|w\|_F^2 \right\} \\ &= \sup_{w\in\mathbb{R}^\Omega} \left\{ \langle w, v\rangle + \langle f, v\rangle - \frac{1}{2}\|w\|_F^2 \right\} \\ &= \langle f, v\rangle + \sup_{w\in\mathbb{R}^\Omega} \left\{ \langle w, v\rangle - \frac{1}{2}\|w\|_F^2 \right\}\end{aligned}$$

Queremos encontrar el supremo de $\langle w, v\rangle - \frac{1}{2}\|w\|_F^2$. Dicha función es estrictamente cóncava (puesto que $\langle w, v\rangle$ es lineal y la norma es estrictamente convexa) y diferenciable, por lo que el punto que maximiza dicha función se obtiene anulando el gradiente

$$\nabla_w \left(\langle w, v\rangle - \frac{1}{2}\|w\|_F^2 \right) = v - w = 0 \quad \Rightarrow \quad w = v$$

Reemplazando

$$\sup_{w\in\mathbb{R}^\Omega} \left\{ \langle w, v\rangle - \frac{1}{2}\|w\|_F^2 \right\} = \langle v, v\rangle - \frac{1}{2}\|v\|_F^2 = \frac{1}{2}\|v\|_F^2$$

Y entonces, la conjugada resulta

$$\Psi^*(v) = \langle f, v\rangle + \frac{1}{2}\|v\|_F^2$$

(b) Queremos encontrar Grad tal que*

$$\langle \mathit{Grad}(u), g\rangle = \langle u, \mathit{Grad}^*(g)\rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^\Omega, g = (g^1, g^2) \in \mathbb{R}^{\Omega'} \times \mathbb{R}^{\Omega'}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \mathit{Grad}(u), g\rangle &= \sum_{(i,j)\in\Omega'} (u_{i+1,j} - u_{i,j})g^1_{i,j} + (u_{i,j+1} - u_{i,j})g^2_{i,j} \\ &= \sum_{(i,j)\in\Omega'} u_{i+1,j}g^1_{i,j} - u_{i,j}g^1_{i,j} + u_{i,j+1}g^2_{i,j} - u_{i,j}g^2_{i,j}\end{aligned}$$

Vamos a redefinir los sumandos, para el primero tenemos que

$$\sum_{(i,j)\in\Omega'} u_{i+1,j}g^1_{i,j} = \sum_{(i,j)\in\Omega'+(1,0)} u_{i,j}g^1_{i-1,j} = \sum_{(i,j)\in\Omega} u_{i,j}g^1_{i-1,j}$$

Considerando $g^1_{0,j} = 0$. Para el segundo tenemos que

$$\sum_{(i,j)\in\Omega'} -u_{i,j}g^1_{i,j} = \sum_{(i,j)\in\Omega} -u_{i,j}g^1_{i,j}$$

Considerando $g^1_{n,j} = g^1_{i,n} = 0$. Para el tercer sumando

$$\sum_{(i,j)\in\Omega'} u_{i,j+1} g^2_{i,j} = \sum_{(i,j)\in\Omega'+(0,1)} u_{i,j} g^2_{i,j-1} = \sum_{(i,j)\in\Omega} u_{i,j} g^2_{i,j-1}$$

Considerando $g^2_{j,0} = 0$. Para el último termino tenemos que

$$\sum_{(i,j)\in\Omega'} -u_{i,j} g^2_{i,j} = \sum_{(i,j)\in\Omega} -u_{i,j} g^2_{i,j}$$

Considerando $g^2_{n,j} = g^2_{i,n} = 0$. Entonces, usando las convenciones antes mencionadas resulta que

$$\langle \mathit{Grad}(u), g\rangle = \sum_{(i,j)\in\Omega} u_{i,j}\left(g^1_{i-1,j} - g^1_{i,j} + g^2_{i,j-1} - g^2_{i,j}\right)$$

Por lo tanto, el operador adjunto es, considerando las convenciones descritas anteriormente, esto es, $g_{i,j} = 0$ si $(i,j) \notin \Omega'$, se tiene que

$$\mathit{Grad}^*(g)_{i,j} = (g^1_{i-1,j} - g^1_{i,j}) + (g^2_{i,j-1} - g^2_{i,j})$$

Así como el operador Grad corresponde al gradiente discreto, este operador Grad* corresponde al divergente discreto, es decir, mide el flujo neto saliente de una coordenada.

(c) El problema primal lo podemos escribir como

$$\min_{x\in\mathbb{R}^\Omega} \{f(x) + g(Ax)\}$$

Considerando

$$f(x) = \Psi(x), \quad g(x) = \lambda\Phi(x), \quad A = \mathrm{Grad}$$

Y entonces, de lo visto en clases, el dual de Fenchel corresponde a

$$\min_{z\in\mathbb{R}^{\Omega'}\times\mathbb{R}^{\Omega'}} \{f^*(A^*z) + g^*(-z)\}$$

Volviendo a la notación anterior resulta que

$$\min_{z\in\mathbb{R}^{\Omega'}\times\mathbb{R}^{\Omega'}} \{\Psi^*(\mathit{Grad}^* z) + (\lambda\Phi)^*(-z)\}$$

Se la misma forma que se calculó Φ^*, de forma análoga resulta que

$$(\lambda\Phi)^*(h) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \sqrt{(h^1_{i,j})^2 + (h^2_{i,j})^2} \leq \lambda \quad \forall (i,j) \in \Omega' \\ +\infty & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Y entonces el dual es, de forma explícita

$$\begin{aligned} \min_{g\in\mathbb{R}^{\Omega'}\times\mathbb{R}^{\Omega'}} \quad & \langle f, \mathit{Grad}^*(g)\rangle + \frac{1}{2}\|\mathit{Grad}^*(g)\|_F^2 \\ \textit{sujeto a} \quad & \left\|(g^1_{i,j}, g^2_{i,j})\right\|_2 \leq \lambda \quad \forall (i,j) \in \Omega' \end{aligned}$$

Ahora veamos que hay dualidad fuerte. Primero verifiquemos que $\exists x_0 \in \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\Psi)$ tal que Φ es finita y continua en $Ax_0 = \mathrm{Grad}\, x_0$.

Consideremos $x_0 = 0$. Se tiene que

$$\Psi(0) = \frac{1}{2}\|0 - f\|_F^2 = \frac{1}{2}\|f\|_F^2$$

Y por ser norma de una matriz fija

$$-\infty < \frac{1}{2}\|f\|_F^2 < +\infty \implies 0 \in \operatorname{dom}(\Psi)$$

Además tenemos que

$$\operatorname{Grad} 0 = (0 - 0, 0 - 0) = (0, 0) = 0$$

Pero Φ es continua, puesto que es una suma finita de funciones continuas, y cada función $\|\cdot\|_2$ es continua (además de por ser norma) por ser una composición de $\sqrt{\cdot}$ y $(\cdot)^2, +$, las cuales son funciones continuas. Así, en particular Φ es continua en el 0. Entonces se cumplen las hipótesis de dualidad fuerte para el primal.

Ahora veamos que se cumplen las hipótesis de dualidad fuerte para el dual. Para esto primero necesitamos que $\Psi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^\Omega)$ y $\Phi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^{\Omega'} \times \mathbb{R}^{\Omega'})$

Veamos que $\lambda\Psi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^\Omega)$. Para esto verifiquemos las condiciones

1. *Convexidad: La norma al cuadrado es estrictamente convexa, y al hacer $(u - f)$ dentro de la norma simplemente movemos donde se ubica el 0, y por lo tanto no cambia la convexidad, resultando que Ψ es convexa (considerando multiplicar por la constante postiva $\lambda/2$).*
2. *Semi-Continua inferior: Ψ es una composición de funciones continuas (lineal, norma y cuadrado), por lo que es continua, y entonces, semi-continua inferior.*
3. *Propia: Basta notar que como Ψ es una norma al cuadrado (multiplicada por una constante mayor que cero), entonces toma valores finitos no negativas, y por tanto es propia.*

Y por tanto $\Psi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^\Omega)$. Ahora veamos que $\Phi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^{\Omega'} \times \mathbb{R}^{\Omega'})$, verifiquemos las condiciones

1. *Convexidad: Cada término en la suma es de la forma $\phi_{i,j}(g^1_{i,j}, g^2_{i,j}) := \|(g^1_{i,j}, g^2_{i,j})\|_2$, es decir, la norma Euclideana en $\mathbb{R}^2$, que es una función convexa. Y como la suma de funciones convexas es convexa, entonces concluímos que Φ es convexa.*
2. *Semi-Continua inferior: Φ es una suma de funciones continuas (norma), y por tanto es continua, y entonces, semi-continua inferior.*
3. *Propia: Basta notar que como Φ es una suma finita de normas, entonces toma valores finitos no negativas, y por tanto es propia.*

Ahora veamos que existe $z_0 \in \operatorname{dom}((\lambda\Phi)^*)$ tal que Ψ^* es continua y finita en $\operatorname{Grad}^* z_0$. Pero

$$\Psi^*(w) = \langle f, w\rangle + \frac{1}{2\lambda}\|w\|^2,$$

es continua y finita en todo $\mathbb{R}^\Omega$, es decir, $\Psi^* \in C(\mathbb{R}^\Omega)$. Por lo tanto, para cualquier $z_0 \in \operatorname{dom}((\lambda\Phi)^*)$ basta con que $\operatorname{Grad}^* z_0 \in \mathbb{R}^\Omega$ (lo cual ocurre siempre) para que $\Psi^*(\operatorname{Grad}^* z_0)$ esté bien definida y sea continua. Así que basta tomar cualquier z_0 y se cumple lo pedido.

Como hemos demostrado las dos hipótesis se cumple la condición requerida, y por tanto se garantiza que hay dualidad fuerte.

Por último, queremos probar que si u^* y z^* son soluciones óptimas del problema primal y dual respectivamente, entonces se cumple que

$$u^* = f - \mathrm{Grad}^*(z^*)$$

Para ello, consideramos el marco general de la dualidad de Fenchel. Si $\bar{x} \in S(P)$ y $\bar{z} \in S(D)$ es un par primal-dual óptimo, según lo visto en clases se cumple que

$$A^*\bar{z} \in \partial f(\bar{x}) \quad y \quad -\bar{z} \in \partial g(A\bar{x})$$

En nuestro caso particular, las funciones son

$$f(u) = \frac{1}{2}\|u - f\|_F^2, \quad g(v) = \lambda\Phi(v), \quad A = \mathrm{Grad}$$

Como f es diferenciable, el subdiferencial de f está dado por

$$\partial f(u) = \{\nabla f(u)\} = \{u - f\}$$

Entonces, usando la condición $\mathrm{Grad}^*\, z^* \in \partial f(u^*)$, se deduce

$$\mathrm{Grad}^*\, z^* = u^* - f \quad \Rightarrow \quad u^* = f - \mathrm{Grad}^*\, z^*$$

Tal como queríamos demostrar.

Pregunta 2. *(a) Por definición de la conjugada, se tiene que*

$$L_e^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{xy - L_e(x)\}$$

Como L_e está definida a trozos, entonces podemos separar el supremo entre los dos trozos, esto es

$$L_e^*(y) = \max\left\{\sup_{x\geq 0}\left\{xy - \int_0^x \ell_e(s)ds\right\},\ \sup_{x<0}\{xy\}\right\}$$

Para el segundo término tenemos que

$$\sup_{x<0}\{xy\} = \begin{cases} 0 & \textit{si } y \geq 0 \\ +\infty & \textit{si } y < 0 \end{cases}$$

Ya que si $y \geq 0$ entonces $xy \leq 0$ por tener distinto signo, y haciendo tender $x \to 0^-$ se alcanza el 0. Si $y < 0$, entonces considerando $x \to \infty$ tenemos que $xy \to \infty$. Ahora estudiemos el primer término, podemos encontrar los puntos críticos derivando e igualando a cero, de lo que resulta que

$$0 = \frac{d}{dx}\left(xy - \int_0^x \ell_e(s)ds\right) = y - \ell_e(x) \implies y = \ell_e(x) \implies x = \ell_e^{-1}(y)$$

Donde ℓ_e^{-1} es la inversa, y notemos que en caso de existir es único puesto que ℓ_e es estrictamente creciente. Notemos que si no existe x tal que $\ell_e(x) = y$, entonces la función nunca llega a ser y, y como es estrictamente creciente se tiene qu,

$$C := \sup_x \ell_e(x) < y$$

Y entonces
$$\sup_{x\geq 0}\left\{xy-\int_0^x \ell_e(s)ds\right\}\geq \sup_{x\geq 0}\{xy-Cx\}\geq \sup_{x\geq 0}\{x\cdot(y-C)\}=+\infty$$
Donde la última igualdad es puesto que como $y-C>0$ al hacer $x\to\infty$ la función se va a infinito. Así que si y no es parte del recorrido de ℓ_e, entonces el supremo se va a infinito.

También debemos estudiar que sucede en el borde izquierdo del intervalo

$$x=0 \implies xy-\int_0^x \ell_e(s)ds=0$$

Pero el punto $\ell_e^{-1}(y)$ supera el cero puesto que ℓ_e es estrictamente convexa, así que antes de llegar a valer y la integral crece más lento que y, y entonces el término de la integral domina sobre xy, por lo que nunca será este valor el óptimo.

Y entonces recapitulando todo, llegamos a la fórmula (mezclando el $y<0$ con $y>\ell$ en que no es parte de la imagen ya que se cumple para ambas)

$$L_e^*(y)=\begin{cases}\ell_e^{-1}(y)\cdot y-\int_0^{\ell_e^{-1}(y)}\ell_e(s)ds & \text{si } y\in \mathrm{Im}(\ell_e)\\ +\infty & \text{si } y\notin \mathrm{Im}(\ell_e)\end{cases}$$

Encontrando así la conjugada.

(b) Como se indica en el enunciado asociamos los siguientes multiplicadores duales

- *$\mu_i\in\mathbb{R}$ para cada ecuación de conservación de flujo en el nodo $i\in V$. Notemos que μ_i es irrestricto por ser una restricción de igualdad*
- *$\lambda_e\geq 0$ para la desigualdad $x_e\geq 0$.*

Entoces, la función Lagrangeana resulta en

$$\mathcal{L}(x,\mu,\lambda)=\sum_{e\in E}\int_0^{x_e}\ell_e(s)\,ds+\sum_{i\in V}\mu_i\left(\sum_{e\in\delta_i^+}x_e-\sum_{e\in\delta_i^-}x_e-d_i\right)-\sum_{e\in E}\lambda_e x_e$$

Pero podemos agrupar por aristas $e=(e_i,e_j)$, y entonces podemos escribir el Lagrangeano convenientemente como
$$\mathcal{L}(x,\mu,\lambda)=\sum_{e\in E}\left[\int_0^{x_e}\ell_e(s)\,ds+(\mu_{e_i}-\mu_{e_j}-\lambda_e)x_e\right]-\sum_{i\in V}\mu_i d_i$$
La función dual Lagrangiana, por definición resulta en

$$g(\mu,\lambda)=\inf_{x\in\mathbb{R}^E}\mathcal{L}(x,\mu,\lambda)=\sum_{e\in E}\inf_{x_e\in\mathbb{R}}\left[\int_0^{x_e}\ell_e(s)\,ds+(\mu_{e_i}-\mu_{e_j}-\lambda_e)x_e\right]-\sum_{i\in V}\mu_i d_i$$

Pero de la conjugada de Fenchel

$$L_e^*(y)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{xy-\int_0^x\ell_e(s)\,ds\right\}=-\inf_{x\in\mathbb{R}}\left\{\int_0^x\ell_e(s)\,ds-xy\right\}$$

Y aplicado en nuestra expresión anterior resulta que

$$\inf_{x_e} \left[\int_0^{x_e} \ell_e(s)\, ds + (\mu_{e_i} - \mu_{e_j} - \lambda_e) x_e \right] = -L_e^*(\lambda_e + \mu_{e_j} - \mu_{e_i})$$

Y reemplazando en la expresión anterior, resulta que el dual Lagrangeano coresponde a

$$g(\mu, \lambda) = -\sum_{e \in E} L_e^*(\lambda_e + \mu_{e_j} - \mu_{e_i}) - \sum_{i \in V} \mu_i d_i \quad \textit{con } \lambda_e \geq 0 \; \forall e \in E$$

Y entonces el problema de optimización asociado corresponde a

$$\max - \sum_{e \in E} L_e^*(\lambda_e + \mu_{e_j} - \mu_{e_i}) - \sum_{i \in V} \mu_i d_i \tag{1}$$

$$\textit{s.a} \quad \lambda_e \geq 0 \; \forall e \in E \tag{2}$$

Calculando así lo pedido

(c) Estudiemos la función $L_e(x_e)$. Como en el problema primal las variables están restringidas por $x_e \geq 0$, podemos considerar sólo con la parte $L_e(x_e) = \int_0^{x_e} \ell_e(s)\, ds$ definida en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Supongamos que ℓ_e es continua y estrictamente creciente. Entonces para $x_e \geq 0$, la función $L_e(x_e)$ es derivable con derivada

$$L_e'(x_e) = \ell_e(x_e)$$

que es estrictamente creciente por hipótesis. Entonces si consideramos la segunda derivada de $L_e(x_e)$ se tiene que

$$L_e''(x_e) = \ell_e'(x_e) > 0$$

Y entonces $L_e(x_e)$ tiene su matriz Hessiana (en este caso es un poco overkill hablar de matriz Hessiana pero igual) definida positiva, y por lo visto en clases, podemos concluir que $L_e(x_e)$ es estrictamente convexa.

Y entonces, la función objetivo total del problema primal

$$f(x) = \sum_{e \in E} L_e(x_e)$$

Es una suma de funciones estrictamente convexas (cada L_e), se concluye entonces que f es estrictamente convexa en el dominio factible.

Además, el conjunto factible

$$\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \; Ax = d\}$$

es convexo y cerrado, ya que está definido por restricciones lineales. Como por hipótesis G y d son compatibles, este conjunto no es vacío.

Y entonces, como la función es coerciva (se va a infinito cuando x se va a infinito puesto que los ℓ_e son crecientes), entonces se concluye que la solución del primal es única. Esto es, existe un único equilibrio de Wardrop.

Ahora veamos que hay dualidad fuerte. Supongamos que no hay aristas que no son parte de ningún ciclo. Si existiera alguna arista que no es parte de ningún ciclo, entonces encontrando las componentes fuertemente conexas y construyendo así el grafo condensado[1], sabemos exactamente cuanto flujo debe cruzar

[1] Ver https://cp-algorithms.com/graph/strongly-connected-components.html

por las aristas que no son parte de ningún ciclo y no tiene demasiado sentido tenerlas en cuenta para la optimización ya que sabemos a priori su valor.

Con lo anterior, veamos que existe una solución que cumple todas las restricciones de desigualdad de forma estricta. Como por hipótesis G y d son compatibles, existe un x_0 tal que es factible.

Ahora notemos que si consideramos un ciclo del grafo, y agregamos una unidad de flujo por cada arista del ciclo, entonces el flujo sigue siendo factible. Esto se tiene ya que al agregar flujo positivo a cada arista, no puede pasar que el flujo total se me vuelva negativo. Además, como a cada nodo del ciclo entro una vez y salgo una vez (por ser un ciclo), si agrego una unidad de flujo a la entrada y uno a la salida, entonces el flujo total (el que entra menos el que sale) en el nodo no se verá afectado y entonces seguirá siendo factible.

Así, lo que puedo hacer es considerar la solución factible x_0, considerar cada ciclo (simple) del grafo, y agregar una unidad de flujo por cada arista de dicho ciclo. Como hay una cantidad finita de ciclos simples en el grafo, entonces este proceso termina. Además, como supusimos que cada arista es parte de almenos un ciclo, entonces cada arista tiene al menos uno de flujo. Y entonces $x_e \geq 1 > 0$, y por tanto la restricción de desigualdad la cumple de forma estricta esta nueva solución. Por tanto, existe una solución factible en el interior relativo, esto es, se cumple la condición de Slatter.

Luego, por el teorema de Slater , se concluye que hay dualidad fuerte. Nuevamente, dado que f es estrictamente convexa y el conjunto factible es convexo, se concluye además que el óptimo primal es único, es decir, el flujo óptimo x^* es único (existe un único equilibtio de Wardrop).

(d) Primero notemos que como hay dualidad fuerte, entonces se tiene que para la restricción asociada a λ_e, esto es, la restricción

$$x_e \geq 0 \implies -x_e \leq 0$$

En el par primal-dual óptimo, por lo visto en clases, se cumple que

$$\lambda_e^* \cdot (-x_e^*) = 0$$

Entonces se tiene que

$$x_e^* > 0 \implies \lambda_e^* = 0$$

Además, como hay dualidad fuerte, entonces el par primal-dual óptimo por lo visto en clases debe cumplir que

$$x^* \in \operatorname{argmin}\{\mathcal{L}(x, \mu^*, \lambda^*) : x \geq 0\}$$

Pero $\mathcal{L}(x, \mu^*, \lambda^*)$ es una función convexa por ser suma de funciones convexas (por lo visto antes el primer término es convexo, y los otros términos son lineales). Así, usando la condición de fermat se tiene que

$$\nabla \mathcal{L}(x^*) = 0$$

Calculemos la derivada de $\mathcal{L}(x, \mu^*, \lambda^*)$. Recordemos primero que

$$\mathcal{L}(x, \mu, \lambda) = \sum_{e \in E} \int_0^{x_e} \ell_e(s)\, ds + \sum_{e \in E} (\mu_{e_i}^* - \mu_{e_j}^* - \lambda_e^*) x_e - \sum_{i \in V} \mu_i^* d_i$$

Y entonces la derivada direccional con respecto a x_e es simplemente

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \mu, \lambda)}{\partial x_e} = \ell_e(x_e) + (\mu_{e_i}^* - \mu_{e_j}^* - \lambda_e^*)$$

Y de la condición de Fermat

$$\ell_e(x_e^*) + (\mu_{e_i}^* - \mu_{e_j}^* - \lambda_e^*) = 0$$

Pero si $x_e^* = 0$ *se cumple la primera condición de lo que queremos demostrar y estamos listos, entonces supongamos ahora que* $x_e \neq 0$*. Por lo visto antes, entonces se tiene que* $\lambda_e^* = 0$*, y entonces la ecuación de la condición de Fermat resulta en*

$$\ell_e(x_e^*) + \mu_{e_i}^* - \mu_{e_j}^* = 0 \implies \ell_e(x_e^*) = \mu_{e_j}^* - \mu_{e_i}^*$$

Y honestamente no se como hacer aparecer el λ^**.*

La interpretación de las variables duales son que en el equilibrio, los μ_i *actúan como el costo de transporte en cada nodo. Si un arco* $e = (i, j)$ *transporta flujo (*$x_e > 0$*), la diferencia* $\mu_j - \mu_i$ *coincide exactamente con su latencia* $\ell_e(x_e)$*, reflejando que los usuarios eligen rutas donde el tiempo de viaje iguala la ganancia de potencial. Para arcos no utilizados (*$x_e = 0$*), la desigualdad* $\mu_j - \mu_i = \ell_e(0) + \lambda$*, y entonces como* $\lambda \geq 0$ *se tiene que* $\mu_j - \mu_i \geq \ell_e(0)$*. Esto indica que la latencia mínima de la arista supera la posible ganancia, justificando su falta de uso. En este sentido, el* λ *representa lo que se debe mejorar la latencia para que comience a ser competitiva esta arista.*