

Pregunta 1

Tenemos que $H_1 := H$ y $H_2 := H$ son espacios de Hilbert y que $a : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal acotada. Así, cumple las hipótesis generales del Teorema de Lax-Milgram Generalizado. Ahora veamos que cumple las otras dos de la segunda parte de la equivalencia.

1. Primera hipótesis: Si $v = 0$ entonces

$$\sup_{u \in H, u \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|u\|_H} = \sup_{u \in H, u \neq 0} \frac{0}{\|u\|_H} = 0 \geq 0 = \alpha \|v\|_H$$

Donde α es la constante de elipsidad, se cumple trivialmente.

Si $v \neq 0$ arbitrario, por ser a elíptica se tiene que para la constante de elipsidad α se cumple que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2$$

Como $v \neq 0$ entonces $\|v\|_H \neq 0$ y así resulta que

$$\frac{a(v, v)}{\|v\|_H} \geq \alpha \|v\|_H$$

Pero $v \in H, v \neq 0$, así que tomando supremo sobre $u \in H, u \neq 0$, al ser v un caso particular se tiene que

$$\sup_{u \in H, u \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|u\|_H} \geq \frac{a(v, v)}{\|v\|_H} \geq \alpha \|v\|_H$$

Al ser v arbitrario, y considerando que ya lo demostramos para el caso $v = 0$, se concluye que

$$\sup_{u \in H, u \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|u\|_H} \geq \alpha \|v\|_H \quad \forall v \in H$$

Demostrando así la primera hipótesis

2. Segunda hipótesis: Sea $u \in H, u \neq 0$ arbitrario, entonces dada la constante de elipsidad α tenemos que

$$\sup_{v \in H} a(u, v) \geq a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H > 0$$

Donde la última desigualdad es estricta puesto que por ser elíptica $\alpha > 0$ y como $u \neq 0$ se tiene que $\|u\|_H > 0$. Así, como u era arbitrario

$$\sup_{v \in H} a(u, v) > 0 \quad \forall u \in H, u \neq 0$$

Demostrando así la segunda hipótesis

Y entonces concluimos que también satisfacen las hipótesis del Lema Generalizado de Lax-Milgram, tal como queríamos demostrar.

Pregunta 2

Comencemos por multiplicar la primera ecuación por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrar sobre Ω , de lo que resulta que

$$-\mu \int_{\Omega} \Delta u v \, dx + \int_{\Omega} \nabla p v \, dx = 0$$

Integrando por partes el primer término

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx$$

Donde la igualdad se tiene puesto que $v = 0$ en $\partial\Omega$. Integrando por partes el segundo término resulta que

$$\int_{\Omega} \nabla p v \, dx = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx + \int_{\partial\Omega} p(v \cdot n) \, dx = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx$$

Puesto que como $v \in H_0^1(\Omega)$ se tiene que $v \cdot n = 0$ en $\partial\Omega$. Y entonces la primera ecuación resulta en

$$\mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) \, dx = 0$$

Ahora, multiplicando la segunda ecuación por $q \in L_0^2(\Omega)$ e integrando sobre Ω y multiplicando por -1 resulta que

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) q \, dx = 0$$

Consideremos las formas bilineales

$$a(u, v) = \mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) \, dx = 0, \quad b(u, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) q \, dx$$

Y consideremos las formas lineales

$$F(v) = 0, \quad G(q) = 0$$

Entonces, de lo encontrado antes resulta que el problema es de la forma encontrar $(u, p) \in H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = F(v) & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ b(u, q) = G(q) & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

La formulación anterior se puede escribir en forma de operadores como:

$$\begin{pmatrix} A & B^\top \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

Donde A corresponde a $Au(v) = a(u, v)$, B corresponde a $Bu(q) = b(u, q)$ y B^\top corresponde a $B^\top p(v) = b(v, p)$.

Notemos que es importante considerar $L_0^2(\Omega)$ en lugar de $L^2(\Omega)$, puesto que en el problema original p aparece únicamente de la forma ∇p , y entonces si p es solución, también lo sería $p + c$ para cualquier constante c , ya que el operador derivada desaparece dicha constante.

Así, la solución para p no sería única si consideramos $L^2(\Omega)$. Para garantizar la unicidad de la solución, nos restringe a funciones con integral nula, lo que elimina el grado de libertad asociado a la constante y permite tener una solución (u, p) única.

Pregunta 3

En H , definamos la norma producto análogo a los apuntes, esto es

$$\|(u, p)\|_H := \|u\|_{H^1} + \|p\|_{L^2}$$

Sea $(u, p) \in H$ arbitrario. Encontremos $(v, q) \in H$ (posiblemente dependiendo del par anterior) para obtener una cota inferior que no dependa de (u, p) .

Usando la condición inf-sup de b (para β) tenemos que $\exists v_p \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$b(v_p, p) \geq \beta \|v_p\|_{H^1} \|p\|_{L^2}$$

De la linealidad de b y la homogeniedad de la norma podemos suponer además que $\|v_p\|_{H^1} = \|p\|_{L^2}$. Para $\delta > 0$ que fijaremos más adelante tomemos el par

$$v := u + \delta v_p, \quad q := -p$$

Y entonces por definición tenemos que

$$M((u, p), (v, q)) = a(u, v) + b(u, q) + b(v, p) = a(u, u + \delta v_p) + b(u, -p) + b(u + \delta v_p, p)$$

Usando la bilinealidad de los operadores tenemos que

$$M((u, p), (v, q)) = a(u, u) + \delta a(u, v_p) - b(u, p) + b(u, p) + \delta b(v_p, p) = a(u, u) + \delta a(u, v_p) + \delta b(v_p, p)$$

Pero de la coercidad de a tenemos que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2$$

De la continuidad de a

$$|a(u, v_p)| \leq C \|u\|_{H^1} \|v_p\|_{H^1} = C \|u\|_{H^1} \|p\|_{L^2} \implies a(u, v_p) \geq -C \|u\|_{H^1} \|p\|_{L^2}$$

Y de la condición inf-sup de b

$$b(v_p, p) \geq \beta \|p\|_{L^2}^2$$

Usando estas cotas en la expresión anterior, tenemos que

$$M((u, p), (v, q)) \geq \alpha \|u\|_{H^1}^2 - \delta C \|u\|_{H^1} \|p\|_{L^2} + \delta \beta \|p\|_{L^2}^2$$

Pero ahora para el término $\delta C \|u\|_{H^1} \|p\|_{L^2}$ lo podemos acotar con la desigualdad de Young

$$\delta C \|u\|_{H^1} \|p\|_{L^2} \leq \frac{\alpha}{2} \|u\|_{H^1}^2 + \frac{\delta^2 C^2}{2\alpha} \|p\|_{L^2}^2$$

Y entonces

$$M((u, p), (v, q)) \geq \frac{\alpha}{2} \|u\|_{H^1}^2 + \left(\delta \beta - \frac{\delta^2 C^2}{2\alpha} \right) \|p\|_{L^2}^2$$

Tomando ahora el δ que maximice el paréntesis tenemos que al tomar $\delta = \frac{\alpha \beta}{C^2}$ resulta que

$$\delta \beta - \frac{\delta^2 C^2}{2\alpha} = \frac{\alpha \beta^2}{C^2} - \frac{\alpha^2 \beta^2 C^2}{2\alpha C^4} = \frac{\alpha \beta^2}{2C^2}$$

Y entonces

$$M((u, p), (v, q)) \geq \frac{\alpha}{2} \|u\|_{H^1}^2 + \frac{\alpha \beta^2}{2C^2} \|p\|_{L^2}^2$$

Y considerando $\gamma = \min \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha \beta^2}{2C^2} \right\} > 0$ tenemos que

$$M((u, p), (v, q)) \geq \gamma (\|u\|_{H^1}^2 + \|p\|_{L^2}^2)$$

Calculemos la norma de $(v, q) = (u + \delta v_p, -p)$

$$\|(v, q)\|_H = \|u + \delta v_p\|_{H^1} + \|p\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} + \delta \|v_p\|_{H^1} + \|p\|_{L^2}$$

Pero de la suposición inicial

$$\|(v, q)\|_H \leq \|u\|_{H^1} + \delta \|p\|_{L^2} + \|p\|_{L^2} = \|u\|_{H^1} + (1 + \delta) \|p\|_{L^2}$$

Usando que $\delta = \frac{\alpha \beta}{C^2} > 0$ y la desigualdad $\sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y$ si $x, y \geq 0$

$$\|(v, q)\|_H \leq \|(u, p)\|_H + \delta \|p\|_{L^2} \leq (1 + \delta) \|(u, p)\|_H$$

Y entonces siguiendo la cota sobre M

$$\frac{M((u, p), (v, q))}{\|(v, q)\|_H \|(u, p)\|_H} \geq \frac{M((u, p), (v, q))}{(1 + \delta) \|(u, p)\|_H^2} \geq \frac{\gamma (\|u\|_{H^1}^2 + \|p\|_{L^2}^2)}{(1 + \delta) \|(u, p)\|_H^2}$$

Pero $\|(u, p)\|_H^2 \leq 2(\|u\|_{H^1}^2 + \|p\|_{L^2}^2)$

$$\frac{M((u, p), (v, q))}{\|(v, q)\|_H \|(u, p)\|_H} \geq \frac{\gamma}{2(1 + \delta)}$$

Y como $\gamma, 2(1 + \delta) > 0$ y recordando que (u, p) era arbitrario y (v, q) se construyó acordemente se concluye lo pedido, demostrando la condición inf-sup para M , tal como se había solicitado.

Pregunta 4

(a) Multipliquemos por un $v \in H_0^1(\Omega)$ e integremos sobre Ω , entonces resulta que

$$-\int_{\Omega} \mu \Delta u v \, dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla u v \, dx + \int_{\Omega} c u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

De la integración por partes (clásica de todas formas) realizada en la pregunta 2 resulta que

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla u v \, dx + \int_{\Omega} c u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

Obteniendo una formulación débil. Consideremos

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} b \cdot \nabla u v \, dx + \int_{\Omega} c u v \, dx$$

Y

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

Entonces el problema continuo consiste en buscar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Ahora pasemos este problema continuo a uno discreto. Como no conocemos la geometría $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de forma explícita, ni siquiera cierta estructura o propiedad interesante, vamos a asumir que podemos encontrar una triangulación \mathcal{T}_h del dominio Ω , con parámetro de malla h .

En base a dicha triangulación, podemos definir el espacio de elementos finitos como

$$V_h := \{v_h \in H_0^1(\Omega) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \ \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_{\partial\Omega} = 0\}$$

donde $\mathbb{P}_1(T)$ es el espacio de polinomios en d variables de grado a lo más 1 (esquema lineal).

Y entonces el problema discreto obtenido de elementos finitos consiste en encontrar $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v \in V_h$$

Ahora veamos por qué este problema efectivamente es discreto. Sea $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ una base para V_h , entonces buscamos los ponderadores tales que

$$u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j$$

Y entonces si consideramos $v_h = \varphi_i$ tenemos que de la ecuación resulta

$$a\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j, \varphi_i\right) = L(\varphi_i)$$

Y si hacemos esto para cada φ_i entonces obtenemos un sistema de ecuaciones N que nos permite encontrar los valores para los $N \alpha_j$. Esto nos abre la puerta para resolver este problema computacionalmente, ya que el sistema de ecuaciones es un problema discreto.

- (b) Recordemos que $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ por definición y además V_h es un espacio de Hilbert, y entonces basta demostrar que el problema continuo está bien puesto, y el problema discreto va a heredar estas buenas propiedades.

Con el objetivo de usar Lax-Milgram, vamos a demostrar que se cumplen las hipótesis.

Primero notemos que a es bilineal, esta propiedad se hereda de la linealidad del operador integral (y del operador derivada). Notemos que $L(v)$ también hereda dicha linealidad, y por tanto es lineal. Además $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert según lo visto en el curso. Así, comprobamos las hipótesis triviales y ahora veamos las hipótesis más interesantes.

La continuidad de L es directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, puesto que

$$|L(v)| \leq \left| \int_{\Omega} f v \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$$

Veamos ahora que a es continuo. Primero, por desigualdad triangular tenemos que

$$|a(u, v)| \leq \left| \int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} b \nabla u v \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} c u v \, dx \right|$$

Ahora, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$|a(u, v)| \leq \|\mu\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|b\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

Por el teorema de Poincare tenemos que

$$\|u\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2}, \quad \|v\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla v\|_{L^2}$$

Y entonces

$$|a(u, v)| \leq C_P^2 \|\mu\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + C_P \|b\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

Factorizando

$$|a(u, v)| \leq (C_P^2 \|\mu\|_{L^\infty} + C_P \|b\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty}) \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

Y por definición de $\|\cdot\|_{H^1}$

$$|a(u, v)| \leq (C_P^2 \|\mu\|_{L^\infty} + C_P \|b\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty}) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

Demostrando así la continuidad de a . Ahora veamos la coercividad de a , para esto tenemos que

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \mu (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega} b \nabla u u dx + \int_{\Omega} c u^2 dx$$

Para acotar el primer término necesitamos que $\mu \geq \mu_0 > 0$ casi en todas partes. Y entonces

$$a(u, u) \geq \mu_0 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega} b \nabla u u dx + \int_{\Omega} c u^2 dx$$

Para acotar el término central notemos que por la regla de la cadena

$$\nabla(bu^2) = \nabla bu^2 + 2b\nabla uu$$

Del teorema de la divergencia

$$\int_{\Omega} \nabla(bu^2) dx = \int_{\partial\Omega} (bu^2) \cdot n dx = 0$$

Donde la última igualdad se tiene puesto que $u = 0$ en $\partial\Omega$. Entonces, de estas ecuaciones podemos concluir que

$$\int_{\Omega} \nabla bu^2 dx + 2 \int_{\Omega} b \nabla u u dx = 0$$

Y reemplazando en la ecuación original

$$a(u, u) \geq \mu_0 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla bu^2 dx + \int_{\Omega} c u^2 dx$$

De la linealidad de la integral

$$a(u, u) \geq \mu_0 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \int_{\Omega} \left(c - \frac{1}{2} \nabla b \right) u^2 dx$$

Ahora necesitamos que $(c - \frac{1}{2} \nabla b) \geq c_0 > 0$ casi en todas partes. Y entonces

$$a(u, u) \geq \mu_0 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + c_0 \int_{\Omega} u^2 dx$$

De la definición de $\|\cdot\|_{L^2}$

$$a(u, u) \geq \mu_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2 + c_0 \|u\|_{L^2}^2$$

Y de la definición de $\|\cdot\|_{H^1}$

$$a(u, u) \geq \min \{\mu_0, c_0\} \cdot \|u\|_{H^1}^2$$

Demostrando así la coercividad.

Hemos demostrado todas las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram, y entonces podemos concluir que existe una única solución débil para el problema continuo. Y así, por el argumento inicial, podemos también concluir que existe una única solución para el problema discreto planteado anteriormente, demostrando así que está bien puesto.

- (c) Dado que el espacio $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ es conforme y la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es continua y coerciva con constantes conocidas, por el estimado de Cea se tiene que la solución discreta $u_h \in V_h$ satisface que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \frac{(C_P^2 \|\mu\|_{L^\infty} + C_P \|b\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty})}{\min \{\mu_0, c_0\}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{V_h}$$

Como estamos utilizando elementos finitos lineales, dada la solución exacta $u \in H^2(\Omega)$, de lo visto en clases se tiene que

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{V_h} \leq Ch\|u\|_{H^2}$$

Y en conjunto con el estimado de Cea

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch\|u\|_{H^2}$$

Y entonces el método es convergente (asumiendo que podemos obtener las triangulaciones en función de h) y tenemos que converge con la tasa

$$\|u - u_h\|_{H^1} = \mathcal{O}(h)$$

Y en norma L^2 se tiene la tasa

$$\|u - u_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2)$$