MAT2605, Cálculo Científico I, 2021-2

Tarea 2

Entrega para el 2 de septiembre de 2021

Pueden discutir los problemas con sus compañeros. Sin embargo, sus entregas, tanto la parte escrita como los códigos, deben ser individuales. **No** está permitido copiar las respuestas de alguien más ni dejar que otros copien sus respuestas. Su entrega debe estar compuesta por un único archivo en formato `.pdf` que incluya todas las respuestas y todos los gráficos que se están pidiendo, junto con un archivo `.zip` que incluya todos los archivos `.m` que produjeron y utilizaron durante esta tarea. Estos dos archivos deben ser subidos en Canvas. Si hay más de una línea en un gráfico, utilice distintos estilos de línea o distintos colores para diferenciarlas e incluya leyendas. No se olvide de nombrar todos sus ejes y líneas en las leyendas.

1. La función inversa del seno hiperbólico (arcsinh) tiene una serie de Taylor alrededor de $x = 0$ dada por

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} .$$

Estamos interesados en evaluar el coeficiente $k = 1000$ de x^{2k+1} en esta expansión.

3 pts. (a) Primero intente el siguiente código para calcular el coeficiente de Taylor

```
k = 1000;
TaylorCoefficient = (-1)^k*factorial(2*k)/(4^k*factorial(k)^2*(2*k+1))
```

Explique cuidadosamente porque MATLAB produce `NaN` (asegurése de averiguar primero que significa `NaN`).

7 pts. (b) Escriba un código para `TaylorCoefficient` que permita calcular el coeficiente de Taylor $k = 1000$ con precisión. ¿Qué valor obtiene para el coeficiente?

2. La fórmula de interpolación de Lagrange puede ser reescrita como la fórmula baricéntrica,

$$P_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k} f(x_k)}{\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k}} , \qquad w_k = \frac{1}{\prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)} , \tag{$*$}$$

donde x_k son los nodos de interpolación, w_k son los pesos, $f(x_k)$ son los valores de la función, y x es el punto de evaluación.

7 pts. (a) Escriba un comando de MATLAB para calcular los pesos w_k mostrados arriba. Su rutina debe tener la sigiente firma (`w` es un vector de pesos y `xnod` es un vector de nodos de interpolación):

```
function w = BarycentricWeights(xnod)
```

Escriba otra rutina que evalúe el interpolante baricéntrico $P_n(x)$ utilizando $(*)$ en los puntos $x = \tilde{x}_1, x = \tilde{x}_2, \ldots, x = \tilde{x}_m$ (en general m puede ser distinto a n). Su comando debe tener la siguiente firma (`xnod` es un vector de nodos, `w` es un vector de pesos, `f` es un vector de valores de la función en `xnod`, `xeval` es un vector de puntos de evaluación, y `P` es un vector de valores interpolados en `xeval`):

```
function P = BarycentricEvaluation(xnod,w,f,xeval)
```

Acuérdese que si $x = x_k$ en el formato de punto flotante para algún $k = 0, 1, \ldots, n$, entonces $(*)$ resultará en `NaN`, por lo cual en esos casos utilice directamente el valor conocido $P_n(x_k) = f(x_k)$.

3 pts. (b) Considere nodos de interpolación "uniformemente espaciados" y de "Chebyshev de segundo tipo" en $[-1, 1]$ para $n = 10$:

(i) $x_k = -1 + \frac{2k}{n}$ para $k = 0, 1, \ldots, n$,

(ii) $x_k = -\cos \frac{k\pi}{n}$ para $k = 0, 1, \ldots, n$.

Use la rutina `BarycentricWeights` de la parte (a) para calcular los pesos para cada uno de estos conjuntos de nodos. En un solo gráfico, muestre los valores de los pesos como función de los nodos, i.e., use la rutina `plot(xnod,w)` para los dos conjuntos de nodos. Comente sobre los resultados.

3 pts. (c) Usted notará que las entradas del vector `w = BarycentricWeights(xnod)` alternan en signo, i.e., $w_k = \pm(-1)^k |w_k|$. Usando la fórmula para los w_k en $(*)$, muestre que para cualquier conjunto de nodos distintos ordenados (i.e., $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$) los pesos siempre alternan en signo.

2 pts. (d) Para las dos distribuciones nodales de la parte (b) (donde $n = 10$), "uniformemente espaciados" y "Chebyshev", use su rutina `BarycentricEvaluation` para evaluar el polinomio interpolante de grado n de la función $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ en los 201 puntos dados por $\tilde{x}_j = -1 + \frac{2j}{200}$ para $j = 0, 1, \ldots, 200$. Grafique el error, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, en estos 201 puntos para las dos familias de nodos (en un solo gráfico, con dos líneas correspondiendo a "uniformemente espaciados" y "Chebyshev" respectivamente). Comente sobre los resultados.

2 pts. (e) Repita la parte (d) con $f(x) = |x|$. ¿Cuál conjunto de nodos es mejor?

3 pts. (f) A veces es posible derivar fórmulas explícitas para los pesos baricéntricos w_k. Muestre que para $x_k = -1 + \frac{2k}{n}$ con $k = 0, 1, \ldots, n$, los pesos están dados por

$$w_k = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n (-1)^{n-k}}{n!} \binom{n}{k}.$$

3. (*El buscador y la enciclopedia más populares en internet deberían ser más que suficiente ayuda para resolver este ejercicio. ¡Buena suerte!*)

James Halliday era un multimillonario excéntrico y aficionado a las arquitecturas computacionales antiguas que recientemente falleció. Como su último deseo, decidió jugar un juego con sus seis ($n = 6$) hijos, a quienes numeró de 1 a 6 empezando con la mayor: Ana (1), Beatriz (2), Carlos (3), David (4), Elena (5), y Fernando (6). Él codificó una llave maestra (S) usando el esquema de Shamir ("SSS") en aritmética (estándar) sobre los enteros positivos, y les dejó escondidas claves personalizadas a cada uno de sus hijos en la forma de números de cuatro dígitos que cada uno debía encontrar. Lo hizo de tal manera que la llave maestra podía ser descifrada por los primeros tres ($k = 3$) hijos que lograran encontrar sus respectivas claves personalizadas. La llave maestra determina un número de dos dígitos decimales que abren una caja fuerte con todo su dinero y pertenencias, pero solo hay una única oportunidad para abrir la caja y si el número incorrecto es introducido, la caja se auto-destruirá. Naturalmente, los tres hermanos que logren abrir la caja fuerte pueden distribuir la fortuna como quieran, posiblemente dejando a los otros tres sin nada, así que cuando su padre murió, desesperadamente trataron de encontrar sus claves personalizadas. Después de meses de búsquedas de tesoros y acertijos, tres hermanos finalmente encontraron sus claves:

- Beatriz (2) determinó que su clave era el año del cuarto eclipse solar de la serie de Saros 138 en el siglo 21.
- David (4) encontró que su clave era el producto de del sexto y quincuagésimo noveno números primos.
- Elena (5) descubrió que su clave correspondía a los dígitos de la expansión decimal de π desde la posición 9447 a la posición 9450 (note que '1415' corresponden a las posiciones 1 a 4 en la expansión decimal de π).

9 pts. (a) Escriba el polinomio interpolante del esquema de Shamir usando polinomios de Lagrange. Encuentre todos los coeficientes del polinomio (que deberían ser enteros positivos).

3 pts. (b) Descubra la llave maestra secreta S utilizando su expansión polinomial. ¿Cuál cree que es el número de dos dígitos que abre la caja fuerte?

3 pts. (c) Después de la muerte de su padre, Betariz y David fueron los primeros en encontrar sus claves personalizadas y se volvieron impacientes con el resto de sus hermanos que no lo lograban. Como consecuencia, trataron de hacer trampa y averiguar la llave maestra usando solo sus dos claves. Con inteligencia, ¿sería posible descubrir el número de abre la caja fuerte y partir la fortuna en dos? ¿Qué podría haber hecho su padre (James Halliday) para asegurarse que sus hijos no pudieran hacer trampa?

$\boxed{\text{4 pts.}}$ 4. (a) Sea

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,, \qquad (\dagger)$$

el polinomio interpolante de grado n que pasa exactamente por los $n+1$ valores tabulados $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Resolviendo para los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ resulta en el sistema de Vandermonde,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix}}_{V_n} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

Demuestre que $\det(V_n) = \prod_{0 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$. Aquí hay un camino (pero siéntase libre de producir su propia demostración):

(i) Defina la función $\gamma_n(x)$ como

$$\gamma_n(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{bmatrix}.$$

Deduzca que es un polinomio en x de grado n, y que tiene n raíces en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ (recuerde que $\det(M) \neq 0$ si y solo si las filas de M son linealmente independientes), por lo que puede ser escrito como $\gamma_n(x) = C(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$.

(ii) Usando la última fila en la definición de $\gamma_n(x)$ y la regla de Laplace (expansión en cofactores) para el determinante, deduzca que $C = \det(V_{n-1})$.

(iii) Escriba el determinante de la matriz de Vandermonde por medio de la evaluación en x_n como $\det(V_n) = \gamma_n(x_n) = \det(V_{n-1})\prod_{0 \le i < n}(x_n - x_i)$. Itere $n-1$ veces para deducir el resultado.

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (b) Demuestre que un polinomio de grado a lo sumo n con más de n raíces debe ser exactamente cero. *Pista*: Puede ser demostrado por inducción empezando desde el caso base $n = 0$, o usando (a).

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (c) La fórmula de interpolación de Lagrange para el polinomio de grado n pasando exactamente por los valores tabulados $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ es

$$\tilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)\,, \qquad L_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}\,. \qquad (\ddagger)$$

Usando (b), demuestre que este polinomio, $\tilde{P}_n(x)$, y el polinomio interpolante ($\dagger$) (de la parte (a)), $P_n(x)$, son iguales.
Pista: Considere $G(x) = P_n(x) - \tilde{P}_n(x)$.

$\boxed{\text{3 pts.}}$ (d) Demuestre que $\sum_{k=0}^{n} L_k(x) = 1$.
Pista: Se puede evitar el álgebra completamente si considera ya sea el resultado de la parte (b) o ($\ddagger$).