Pregunta 1

(a) Consideremos diferencias finitas centradas para las derivadas espaciales con paso h, de lo que resulta

$$\partial_{xx} u_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}$$

Y si consideramos condiciones Neumman homogéneas en los bordes y las aproximamos con un esquema centrado resulta que en el borde izquierdo

$$\partial_x u_0^n = \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} = 0 \Rightarrow u_1^n = u_{-1}^n$$

Y entonces para ese borde izquierdo la derivada espacial resulta

$$\partial_{xx} u_0^n = \frac{u_1^n - 2u_0^n + u_{-1}^n}{h^2} = \frac{2(u_1^n - u_0^n)}{h^2}$$

Análogamente en el borde derecho

$$\partial_x u_M^n = \frac{u_{M+1}^n - u_{M-1}^n}{2h} = 0 \Rightarrow u_{M+1}^n = u_{M-1}^n$$

Obteniendo que

$$\partial_{xx} u_M^n = \frac{u_{M+1}^n - 2u_M^n + u_{M-1}^n}{h^2} = \frac{2(u_{M-1}^n - u_M^n)}{h^2}$$

Para la derivada temporal consideremos un esquema explícito y con paso τ, de lo que resulta

$$\dot{u}_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}$$

Reagrupando todo resulta que se obtiene la ecuación

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \mu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + u_i^n(1 - (u_i^n)^2) + f(t^n, x_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, M-1\}$$

Y en los bordes

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} = \mu \frac{2(u_1^n - u_0^n)}{h^2} + u_0^n(1 - (u_0^n)^2) + f(t^n, 0)$$

$$\frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\tau} = \mu \frac{2(u_{M-1}^n - u_M^n)}{h^2} + u_M^n(1 - (u_M^n)^2) + f(t^n, 1)$$

Para estudiar la convergencia recordemos que por Taylor se tiene que

$$\frac{u(t, x+h) - 2u(t, x) + 2u(t, x-h)}{h^2} = \partial_{xx} u(t, x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Y que además en la otra dimensión

$$\frac{u(t+\tau,x)-u(t,x)}{\tau}=\dot{u}(t,x)+\mathcal{O}(\tau)$$

Así, el residuo total resulta, considerando desigualdad triangular por lo que basta sumar los errores, en

$$\epsilon = O(h^2)+O(\tau)$$

Y entonces es claro que el error $\epsilon \to 0$ cuando $h,\tau \to 0$, mostrando así la consistencia del esquema de discretización.

(b) Para aplicar el análisis de Von Neumann, linealicemos la ecuación e ignoremos el término fuente (ya que este no afecta la estabilidad). Para la linealización se tiene que cerca del 0 (condición inicial) se tiene que

$$-u(1-u^2)=-u+\mathcal{O}(u^3)$$

Y entonces la linealización del problema resulta en

$$\dot{u}=\mu\partial_{xx}u+u$$

Así, con este término linealizado el esquema anterior nos resultaría en

$$u_j^{n+1}=u_j^n+\tau\left(\mu\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}+u_j^n\right)$$

Supongamos una solución de la forma

$$u_j^n=e^{i\xi jh},\quad u_j^{n+1}=g(\xi)e^{i\xi jh}$$

Sustituímos en la ecuación

$$g(\xi)e^{i\xi jh}=e^{i\xi jh}+\tau\left(\mu\frac{e^{i\xi(j+1)h}-2e^{i\xi jh}+e^{i\xi(j-1)h}}{h^2}+e^{i\xi jh}\right)$$

Dividamos por $e^{i\xi jh}$

$$g(\xi)=1+\tau\left(\mu\frac{e^{i\xi h}+e^{-i\xi h}-2}{h^2}+1\right)$$

De la identidad $e^{i\xi h}+e^{-i\xi h}=2\cos(\xi h)$ resulta

$$g(\xi)=1+\tau\left(2\mu\frac{\cos(\xi h)-1}{h^2}+1\right)$$

Sabemos que $\cos(\xi h)\in[-1,1]$, así que $\cos(\xi h)-1\in[-2,0]$. De la misma forma tenemos que $\frac{2\mu}{h^2}(\cos(\xi h)-1)\in\left[\frac{-4\mu}{h^2},0\right]$. Siguiendo con esto $\tau\left(2\mu\frac{\cos(\xi h)-1}{h^2}+1\right)\in\left[\frac{-4\mu\tau}{h^2}+\tau,\tau\right]$. Finalmente se concluye que

$$g(\xi)\in\left[\frac{-4\mu\tau}{h^2}+\tau+1,\tau+1\right]$$

En este sentido, la cota superior se viola incondicionalmente. Esto podría parecer terrible pero esta viene dada claramente por la linealización del término no lineal, y además se da cuando $\cos(\xi h) = 1 \Rightarrow \xi = 0$, por lo que la onda es constante y no nos interesa tanto este análisis.

En cambio, cuando $\cos(\xi h) = -1$ la solución oscila, por lo que nos interesa estudiar este caso. Queremos entonces que

$$-1 \leq \frac{-4\mu\tau}{h^2} + \tau + 1 \leq 1$$

Esto es

$$-2 \leq \tau\left(\frac{-4\mu}{h^2} + 1\right) \leq 0$$

Y entonces para que el esquema sea estable se requiere que

$$\frac{4\mu}{h^2} \geq 1, \quad \tau \leq \frac{2}{\frac{4\mu}{h^2} - 1} = \frac{2h^2}{4\mu - h^2}$$

Y asumiendo que $h^2 \ll 4\mu$ se concluye que para que el esquema sea estable se requiere que

$$\frac{4\mu}{h^2} \geq 1, \quad \tau \leq \frac{h^2}{2\mu}$$

Y como es consistente, por el Teorema de Equivalencia de Lax se concluye que la discreticación sería convergente en caso de cumplirse dichas condiciones.

(c) La formulación explícita en el tiempo ya fue realizada en la parte (a).

Ahora hagamos la formulación implícita en el tiempo. Consideraremos el mismo esquema espacial realizado para la formulación explícita. Pero ahora para el esquema temporal se realiza de forma implícita, por lo que ahora se tiene que

$$\dot{u}_i^n = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau}$$

Reagrupando todo resulta que se obtiene la ecuación

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \mu\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + u_i^{n+1}(1 - (u_i^{n+1})^2) + f(t^{n+1}, x_i) \quad \forall i \in \{1, \ldots, M-1\}$$

Y en los bordes

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} = \mu\frac{2(u_1^{n+1} - u_0^{n+1})}{h^2} + u_0^{n+1}(1 - (u_0^{n+1})^2) + f(t^{n+1}, 0)$$

$$\frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\tau} = \mu\frac{2(u_{M-1}^{n+1} - u_M^{n+1})}{h^2} + u_M^{n+1}(1 - (u_M^{n+1})^2) + f(t^{n+1}, 1)$$

Y para la discretización en tiempo semi-implícita vamos a considerar el esquema de punto medio, por lo que solo nos basta con realizar una combinación lineal de factor $\frac{1}{2}$ sobre los esquemas anteriores. De lo que resulta que

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} =& \frac{\mu}{2}\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{h^2}+\frac{1}{2}u_i^{n+1}(1-(u_i^{n+1})^2)+\frac{1}{2}f(t^{n+1},x_i)\\ &+\frac{\mu}{2}\frac{u_{i+1}^{n}-2u_i^{n}+u_{i-1}^{n}}{h^2}+\frac{1}{2}u_i^{n}(1-(u_i^{n})^2)+\frac{1}{2}f(t^{n},x_i)\quad \forall i\in\{1,\dots,M-1\}\end{aligned}$$

En el borde izquierdo

$$\begin{aligned}\frac{u_0^{n+1}-u_0^n}{\tau} =& \mu\frac{u_1^{n+1}-u_0^{n+1}}{h^2}+\frac{1}{2}u_0^{n+1}(1-(u_0^{n+1})^2)+\frac{1}{2}f(t^{n+1},0)\\ &+\mu\frac{u_1^{n}-u_0^{n}}{h^2}+\frac{1}{2}u_0^{n}(1-(u_0^{n})^2)+\frac{1}{2}f(t^{n},0)\end{aligned}$$

Y en el borde derecho

$$\begin{aligned}\frac{u_M^{n+1}-u_M^n}{\tau} =& \mu\frac{u_{M-1}^{n+1}-u_M^{n+1}}{h^2}+\frac{1}{2}u_M^{n+1}(1-(u_M^{n+1})^2)+\frac{1}{2}f(t^{n+1},1)\\ &+\mu\frac{u_{M-1}^{n}-u_M^{n}}{h^2}+\frac{1}{2}u_M^{n}(1-(u_M^{n})^2)+\frac{1}{2}f(t^{n},1)\end{aligned}$$

(d) Para resolver la formulación implícita en cada paso temporal usemo el método de Newton. Si fijamos el tiempo t^{n+1}, el sistema no lineal de ecuaciones $F(u^{n+1})=0$, donde $u^{n+1}=(u_0^{n+1},\dots,u_M^{n+1})^T$ es el vector de incógnitas y $u^n=(u_0^n,\dots,u_M^n)^T$ es conocido, resulta en

$$F_i(u^{n+1})=\begin{cases}\dfrac{u_0^{n+1}-u_0^n}{\tau}-\mu\dfrac{2(u_1^{n+1}-u_0^{n+1})}{h^2}-u_0^{n+1}(1-(u_0^{n+1})^2)-f(t^{n+1},0) & i=0\\ \dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}-\mu\dfrac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{h^2}-u_i^{n+1}(1-(u_i^{n+1})^2)-f(t^{n+1},x_i) & 1\le i\le M-1\\ \dfrac{u_M^{n+1}-u_M^n}{\tau}-\mu\dfrac{2(u_{M-1}^{n+1}-u_M^{n+1})}{h^2}-u_M^{n+1}(1-(u_M^{n+1})^2)-f(t^{n+1},1) & i=M\end{cases}$$

Ahora consideremos calcular la derivada, se tiene que

$$\nabla F_{ij}(u^{n+1})=\begin{cases}-\dfrac{\mu}{h^2} & 1\le i\le M,\ j\in\{i-1,i+1\}\\ -\dfrac{2\mu}{h^2} & (i=0,\ j=1)\vee(i=M,\ j=M-1)\\ \dfrac{1}{\tau}+\dfrac{2\mu}{h^2}-1+3\left(u_i^{n+1}\right)^2 & j=i\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Y entonces en el método de Newton vamos a iterar, comenzando desde la solución inicial dada por $u^{n+1,0} = u^n$, y luego para cada iteración k-ésima vamos a resolver el problema

$$\nabla F(u^{n+1,k}) \cdot \delta u^{n+1,k+1} = -F(u^{n+1,k})$$

Obteniendo la solución del sistema $\delta u^{n+1,k+1}$ y así conseguir un mejor valor en la iteración dado por

$$u^{n+1,k+1} = u^{n+1,k} + \delta u^{n+1,k+1}$$

Y lo realizaremos hasta encontrar una solución suficientemente buena.

El método de Newton tiene convergencia cuadrática siempre que la función F sea suficientemente suave (lo cual se cumple aquí) y que la iteración parta suficientemente cerca de la solución exacta. Por lo anterior, si τ no es demasiado grande nuestro método va a converger adecuadamente (sumado a que la función pareciera ser bastante regular)

Pregunta 2

(a) Sea $f_n \to f$ en $L^1(\mathbb{R})$ y sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, entonces se tiene que

$$|T_{f_n}(\varphi) - T_f(\varphi)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(x) - f(x))\varphi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |(f_n(x) - f(x))\varphi(x)|\, dx$$

Pero como $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ entonces tiene soporte compacto, digamos $[a, b]$, de lo que resulta

$$|T_{f_n}(\varphi) - T_f(\varphi)| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \cdot |\varphi(x)|\, dx$$

Por ser $|\varphi(x)|$ continua (composición de funciones continuas) en $[a, b]$ compacto, entonces debe alcanzar su máximo, llamémoslo M. Entonces

$$|T_{f_n}(\varphi) - T_f(\varphi)| \leq M \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx = M\|f_n - f\|_{L_1}$$

Pero $f_n \to f$ en $L^1(\mathbb{R})$ y por tanto el lado derecho tiende a cero. Así, como φ era arbitrario, se concluye que

$$T_{f_n}\varphi \to T_f\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Esto es, $T_{f_n} \to T_f$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ y por tanto T es continua, tal como queríamos demostrar.

(b) Podemos considerar la convergencia débil* debido a que es la noción de convergencia natural de un espacio dual. Además tiene buenas propiedades cuando trabajamos con el operador de integración (como lo estamos haciendo). Por lo que podemos decir lo siguiente

Una sucesión de distribuciones $T_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge a una distribución $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sí y solo sí

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

(c) Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Entonces por definición se tiene que

$$\langle T_{I_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} I(x)\varphi(x)dx$$

Por la definición de I_n y considerando su soporte, se tiene que

$$\langle T_{I_n}, \varphi \rangle = \int_{x_0-\frac{1}{2n}}^{x_0+\frac{1}{2n}} n \cdot \varphi(x)dx = n\int_{x_0-\frac{1}{2n}}^{x_0+\frac{1}{2n}} \varphi(x)dx$$

Sea $\epsilon > 0$. Por ser φ continua se tiene que existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |\varphi(x_0) - \varphi(x)| < \epsilon$$

Sea n tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Entonces se tiene que

$$\langle T_{I_n}, \varphi \rangle \leq n\int_{x_0-\frac{1}{2n}}^{x_0+\frac{1}{2n}} (\varphi(x_0)+\epsilon)dx = n \cdot \frac{1}{n}(\varphi(x_0)+\epsilon) = \varphi(x_0)+\epsilon$$

Como ϵ era arbitrario, podemos concluir que $\forall \epsilon$ existe n tal que

$$\langle T_{I_n}, \varphi \rangle \leq \varphi(x_0)+\epsilon$$

Haciendo $\epsilon \to 0$ se tiene que

$$\langle T_{I_n}, \varphi \rangle \to \varphi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

Y por tanto $T_{I_n} \to \delta_{x_0}$, demostrando lo pedido.

(d) Supongamos por contradicción que existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $T_f = \delta_0$. Esto es

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Consideremos la función

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{\varphi_n\} \subset D(\mathbb{R})$ definidas como:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \dfrac{1}{n} \\ \frac{\phi\left(\frac{2}{n}-|x|\right)}{\phi\left(\frac{2}{n}-|x|\right)+\phi\left(|x|-\frac{1}{n}\right)} & \text{si } \dfrac{1}{n} < |x| < \dfrac{2}{n} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \dfrac{2}{n} \end{cases}$$

Basicamente lo que hicimos fue una construcción clásica de una función que valga 1 en $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, que valga 0 fuera de los x con $|x| \geq \frac{2}{n}$ y que en el medio sea tal que la función sea infinitamente diferenciable, para que sea parte de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Y entonces por definición de f se tiene que para todo n

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\,dx = \varphi_n(0) = 1$$

Pero del cálculo directo de la integral se tiene que

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\,dx\right| \leq \int_{-\frac{2}{n}}^{\frac{2}{n}} |f(x)|\,dx$$

Y por la continuidad de la integral de Lebesgue se tiene que cuando $n \to \infty$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\,dx \to 0$$

Por lo que se tiene que

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0$$

Absurdo, y por tanto podemos concluir que no existe dicha $f \in L^1(\mathbb{R})$

(e) Primero veamos que $(\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^d))'$ es homeomorfo a $[(\mathcal{D}(\Omega))']^d$. Para esto recordemos que

$$\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^d) = \{\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) : \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)\}$$

Y entonces dado $F \in (\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^d))'$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ su aplicación se puede escribir como

$$\langle F, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle F_i, \varphi_i\rangle$$

Puesto que como F debe ser lineal, se puede aislar cada componente considerando su aplicación sobre $\varphi = (0, \ldots, 0, \varphi_i, 0 \ldots, 0)$. Pero entonces si escribimos F separándolo componente a componente

$$F = (F_1, \ldots, F_d) \in [(\mathcal{D}(\Omega))']^d$$

Y por tanto el homeomorfismo se da de la forma natural. Notamos que la inversa existe ya que simplemente basta con agrupar las d distribuciones (por lo que es una biyección). Claramente la biyección es continua en ambas direcciones (de hecho es lineal), por lo que se concluye que $(\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^d))'$ y $[(\mathcal{D}(\Omega))']^d$ son homeomorfos, tal como queríamos demostrar.

Ahora con dicho homomorfismo podemos extender la noción de derivada distribucional a más dimensiones, así que calculemos su divergencia. Consideremos aplicar la ley de Gauss a φF tal como nos indica la pista

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\varphi F) = \int_{\partial\Omega} \varphi(F \cdot n)$$

Pero recordemos que

$$\operatorname{div}(\varphi F) = \nabla\varphi \cdot F + \varphi \operatorname{div} F$$

Y entonces

$$\int_\Omega (\nabla\varphi \cdot F + \varphi \operatorname{div} F) = \int_{\partial\Omega} \varphi(F \cdot n)$$

Obteniendo el hint

$$\int_\Omega (\operatorname{div} F)\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi(F \cdot n) - \int_\Omega F \cdot \nabla\varphi$$

Por tener φ soporte contenido en Ω, entonces en $\partial\Omega$ se anula, por lo que se tiene que

$$\int_\Omega (\operatorname{div} F)\varphi = -\int_\Omega F \cdot \nabla\varphi$$

Y entonces

$$\langle \operatorname{div} F, \varphi \rangle := -\langle F \cdot \nabla\varphi \rangle$$

Construyendo así una definición de divergencia.

(f) Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Se tiene que

$$\nabla \cdot (\varphi \times F) = F \cdot (\nabla \times \varphi) - \varphi \cdot (\nabla \times F)$$

Integrando sobre Ω

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\varphi \times F) = \int_\Omega F \cdot (\nabla \times \varphi) - \int_\Omega \varphi \cdot (\nabla \times F)$$

Aplicando la fórmula de la divergencia

$$\int_{\partial\Omega} (\varphi \times F) \cdot n = \int_\Omega F \cdot (\nabla \times \varphi) - \int_\Omega \varphi \cdot (\nabla \times F)$$

Y reordenando

$$\int_\Omega (\nabla \times F) \cdot \varphi = -\int_{\partial\Omega} (\varphi \times F) \cdot n + \int_\Omega F \cdot (\nabla \times \varphi)$$

Pero φ se anula cerca del borde, así que el término de borde desaparece. Por tanto, resulta que

$$\int_\Omega (\nabla \times F) \cdot \varphi = \int_\Omega F \cdot (\nabla \times \varphi)$$

Por lo que podemos definir el curl de F como

$$\langle \operatorname{curl} F, \varphi \rangle := \langle F, \operatorname{curl} \varphi \rangle$$

(g) Dado que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es suave con soporte compacto, todas sus derivadas existen y son continuas, y su soporte está contenido en un compacto $K \subset \mathbb{R}^d$.

Para todo $h > 0$, el soporte de $D_j^h f$ está contenido en el conjunto $K + \overline{\mathcal{B}}(0, h)$ (suma de Minkowski), el cual es compacto y decrece hacia K cuando $h \to 0$. Entonces, la sucesión $\{D_j^h f\}_h$ está contenida en un compacto común para h suficientemente pequeño (fijo).

Ahora, veamos que para cada multiíndice α, la derivada parcial $\partial^\alpha D_j^h f$ converge uniformemente a $\partial^\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\partial^\alpha f$. Primero notemos que

$$\partial^\alpha (D_j^h f)(x) = D_j^h(\partial^\alpha f)(x) = \frac{\partial^\alpha f(x + he_j) - \partial^\alpha f(x)}{h}$$

Y como $\partial^\alpha f$ es por definición una función suave, podemos aplicar el desarrollo de Taylor de orden 1

$$\partial^\alpha f(x + he_j) = \partial^\alpha f(x) + h\frac{\partial}{\partial x_j}\partial^\alpha f(x) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\partial^\alpha f(x + \theta h e_j)$$

para algún $\theta \in (0, 1)$. Entonces

$$\partial^\alpha (D_j^h f)(x) = \frac{\partial^\alpha f(x + he_j) - \partial^\alpha f(x)}{h} = \frac{\partial}{\partial x_j}\partial^\alpha f(x) + \frac{h}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\partial^\alpha f(x + \theta h e_j)$$

Como las derivadas de f son continuas y su soporte está contenido en un compacto común, la cota del término de error $\frac{h}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\partial^\alpha f(x + \theta h e_j)$ se puede hacer uniforme en x, digamos M (ya que una función continua alcanza su máximo y mínimo sobre un compacto), de lo que resulta.

$$\partial^\alpha (D_j^h f)(x) = \frac{\partial^\alpha f(x + he_j) - \partial^\alpha f(x)}{h} = \frac{\partial}{\partial x_j}\partial^\alpha f(x) + \frac{h}{2}M$$

Así, el error tiende uniformemente a cero cuando $h \to 0$. Por lo tanto, $\partial^\alpha (D_j^h f)$ converge uniformemente a $\frac{\partial}{\partial x_j}\partial^\alpha f$ para cualquier α, y entonces

$$D_j^h f \to \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \text{en } \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

Demostrando lo pedido.

(h) Notemos que podemos escribir $\Phi(x)$ en coordenadas radiales como para $r := |x| > 0$ como

$$f(r) = \frac{1}{4\pi r}e^{-ikr}$$

Ahora calculemos el operador Δ en coordenadas esféricas. Para una función escalar $f(r,\theta,\phi)$ Δf resulta en

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

Si la función f depende solo de r, los términos con derivadas respecto a θ y ϕ desaparecen, y obtenemos la fórmula

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right)$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 f'(r)\right) = 2rf'(r) + r^2 f''(r)$$

Y así

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\left(2rf'(r) + r^2 f''(r)\right)$$

Y entonces

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$$

Calculemos la primera derivada, usando la regla de la cadena se tiene que

$$f'(r) = -\frac{1}{4\pi r^2}e^{-ikr} - \frac{-ik}{4\pi r}e^{-ikr} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{r^2}e^{-ikr} - \frac{ik}{r}e^{-ikr}\right)$$

Derivamos nuevamente

$$f''(r) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{r^3}e^{-ikr} + \frac{ik}{r^2}e^{-ikr} + \frac{ik}{r^2}e^{-ikr} - \frac{k^2}{r}e^{-ikr}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{r^3}e^{-ikr} + \frac{2ik}{r^2}e^{-ikr} - \frac{k^2}{r}e^{-ikr}\right)$$

Luego

$$\Delta f(r) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)e^{-ikr} + \frac{2}{r}\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)e^{-ikr} = -\frac{k^2}{4\pi r}e^{-ikr}$$

Y entonces

$$\Delta f(r) + k^2 f(r) = -\frac{k^2}{4\pi r}e^{-ikr} + \frac{k^2}{4\pi r}e^{-ikr} = 0 \quad \forall r > 0$$

Esto es

$$\Delta\Phi(x) + k^2\Phi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

Ahora estudiemos que sucede en la singularidad $x = 0$ en el contexto de las distribuciones. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, entonces podemos sacar la singularidad usando un límite

$$\int_{\mathbb{R}^3}(\Delta + k^2)\Phi(x)\cdot\varphi(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}(\Delta + k^2)\Phi(x)\cdot\varphi(x)dx$$

Por lo que estudiemos que sucede en la bola. Cambiemos el orden del operador por lo mostrado antes

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}(\Delta+k^2)\Phi(x)\cdot\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}\Phi(x)\cdot(\Delta+k^2)\varphi(x)dx$$

Del Teorema de Green se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}\Phi(x)\Delta\varphi(x)-\varphi(x)\Delta\Phi(x)dx=\int_{\partial\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}\Phi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x)-\varphi(x)\frac{\partial\Phi}{\partial n}(x)dx$$

Y entonces

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}\Phi(x)\Delta\varphi(x)dx=\int_{\partial\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}\Phi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x)-\varphi(x)\frac{\partial\Phi}{\partial n}(x)dx+\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}\varphi(x)\Delta\Phi(x)dx$$

Agregando el término $k^2\Phi(x)\varphi(x)$ en ambos lados resulta

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}\Phi(x)(\Delta+k^2)\varphi(x)dx=\int_{\partial\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}\Phi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x)-\varphi(x)\frac{\partial\Phi}{\partial n}(x)dx+\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}\varphi(x)(\Delta+k^2)\Phi(x)dx$$

Pero de lo visto antes $(\Delta+k^2)\Phi(x)=0$ fuera de $x=0$ y entonces resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}\Phi(x)(\Delta+k^2)\varphi(x)dx=\int_{\partial\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)}\Phi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x)-\varphi(x)\frac{\partial\Phi}{\partial n}(x)dx$$

Ahora calculemos el lado derecho. Por ser función radial

$$\Phi(x)=\frac{1}{4\pi\epsilon}e^{-ik\epsilon}$$

Nuevamente por ser función radial

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}(x)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi r}e^{-ikr}\right)\Big|_{r=\epsilon}=-\frac{e^{-ik\epsilon}}{4\pi}\left(\frac{1}{\epsilon^2}+\frac{ik}{\epsilon}\right)$$

Como φ es suave se tiene que

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\mathcal{O}(\epsilon)$$

Y que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x)=\nabla\varphi(x)\cdot\hat{n}(x)=\nabla\varphi(0)\cdot\frac{x}{|x|}+\mathcal{O}(\epsilon)$$

Pero notemos que al integrar sobre una esfera el término $\nabla\varphi(0)\cdot\frac{x}{|x|}$ va a integrar 0. Entonces, el primer término resulta que

$$\int_{\partial\mathcal{B}(0,\epsilon)}\Phi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x)\,dS=\mathcal{O}(\epsilon)$$

Realmente el término anterior tiene una potencia mayor de ϵ pero con lo anterior claramente ya es suficiente. Para el segundo término

$$\int_{\partial\mathcal{B}(0,\epsilon)} \varphi(x)\frac{\partial\Phi}{\partial n}(x)\,dS = (\varphi(0)+\mathcal{O}(\epsilon))\cdot\int_{\partial\mathcal{B}(0,\epsilon)} -\frac{e^{-ik\epsilon}}{4\pi}\left(\frac{1}{\epsilon^2}+\frac{ik}{\epsilon}\right)dS$$

Sabemos que el área de la esfera es $4\pi\epsilon^2$ así que resulta que

$$\int_{\partial\mathcal{B}(0,\epsilon)} \varphi(x)\frac{\partial\Phi}{\partial n}(x)\,dS = -\varphi(0)\cdot e^{-ik\epsilon}(1+ik\epsilon)+\mathcal{O}(\epsilon)$$

Entonces, al tomar el límite cuando $\epsilon\to 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\mathcal{B}}(0,\epsilon)} \Phi(x)(\Delta+k^2)\varphi(x)dx = \int_{\partial\mathcal{B}(0,\epsilon)} \Phi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x)-\varphi(x)\frac{\partial\Phi}{\partial n}(x)\,dS \to \varphi(0)$$

Por lo tanto, en el sentido de distribuciones

$$(\Delta+k^2)\Phi = \delta_0$$

Tal como queríamos demostrar.