Tarea 6

Vicente Opazo

November 8, 2025

1

1.1

(i) Fijemos $f \in \mathcal{P}_n$. Luego, su interpolante en los $n+1$ nodos $x_0, ..., x_n$ viene dado por la misma función. Y entonces

$$f = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) \to f(x)\omega(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j)\omega(x)$$

Aplicando el operador integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j)\omega(x)dx$$

Sacando la sumatoria hacia afuera y $f(x_j)$, el cual es constante.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \int_{-1}^{1} L_j(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) w_j$$

Por lo tanto la cuadratura es exacta.

(ii) Sea $f \in \mathcal{P}_{2n+1}$, entonces f se puede escribir como

$$f(x) = Q(x)\phi_{n+1}(x) + R(x) \ , \quad Q(x), R(x) \in \mathcal{P}_n$$

Así, aplicando el operador integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} (Q(x)\phi_{n+1}(x) + R(x))\omega(x)dx$$

Separando la integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} Q(x)\phi_{n+1}(x)\omega(x)dx + \int_{-1}^{1} R(x)\omega(x)dx$$

Pero $\int_{-1}^{1} Q(x)\phi_{n+1}(x)\omega(x)dx = 0$ por la ortogonalidad de $\phi_{n+1}(x)$ con la base de los polinomios de grado a lo sumo n con el peso $\omega(x)$. Entonces

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} R(x)\omega(x)dx$$

Pero $R(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo n, entonces por (i) se tiene que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} R(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{n} R(x_j) w_j$$

Como cada x_j es raíz de $P_{n+1}(x)$, entonces

$$f(x_j) = Q(x_j)\phi_{n+1}(x_j) + R(x_j) = 0 + R(x_j) = R(x_j)$$

Usando esto en lo anterior

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} R(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{n} R(x_j)w_j = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)w_j$$

Por lo tanto la cuadratura es exacta, demostrando lo pedido.

1.2

Fijemos $f = (L_j(x))^2 \in \mathcal{P}_{2n}$. Como $f \in \mathcal{P}_{2n+1}$ por lo demostrado en (a) entonces la aproximación es exacta, esto es $\int_{-1}^{1}(L_j(x))^2\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i(L_j(x_j))^2$.
Como $L_j(x)$ no es el polinomio nulo, entonces la izquierda es una función continua no nula, y por ende, la integral es estrictamente positiva (demostrado en tarea anterior). Así

$$\sum_{i=0}^{n} w_i(L_j(x_j))^2 > 0$$

Pero, como $L_j(x_i) = 0$ si $i \neq j$ y $L_j(x_i) = 1$ si $i = j$, y remplazando estos valores, solo se salva el término de j, entonces se tiene que

$$w_j > 0$$

Demostrando lo pedido.

1.3

Fijemos $f = (W(x))^2 \in \mathcal{P}_{2n+2}$. Se tiene que $W(x)$ no es el polinomio nulo, y por ende $(W(x))^2$ es una función continua no negativa, además $\omega(x)$ es estrictamente positivo, y por lo demostrado en una tarea anterior entonces $\int_{-1}^{1}(W(x))^2\omega(x)dx > 0$.
Sin embargo, por la definición de $W(x)$, se tiene que $W(x_i) = 0\ \forall i \in \{0, ..., n\}$, y entonces se cumple que $\sum_{i=0}^{n} w_i(W(x_j))^2 = 0$.
Así $\int_{-1}^{1}(W(x))^2\omega(x)dx \neq \sum_{i=0}^{n} w_i(W(x_j))^2$, por lo que la fórmula de cuadratura no es exacta para $(W(x))^2 \in \mathcal{P}_{2n+2}$, demostrando lo pedido.

1.4

Notar que de (b) se tiene que $w_j > 0\ \forall j \in \{0, ..., n\}$. Veamos que $\exists j^+ \in \{0, ..., n\}$ tal que $f(x_{j^+}) \geq 0$ y $\exists j^- \in \{0, ..., n\}$ tal que $f(x_{j^-}) \leq 0$.
Supongamos $\nexists j^+$, entonces $w_j f(x_j) < 0\ \forall j \in \{0, ..., n\}$, y entonces $\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) < 0$, absurdo puesto que $\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) = 0$, y por tanto si existe dicho j^+.
Supongamos $\nexists j^-$, entonces $w_j f(x_j) > 0\ \forall j \in \{0, ..., n\}$, y entonces $\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) > 0$, absurdo puesto que $\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) = 0$, y por tanto si existe dicho j^-.
Sabemos que $x_{j^+}, x_{j^-} \in [-1, 1]$, con $f(x_{j^+}) \geq 0$ y $f(x_{j^+}) \leq 0$, como f es continua, por el teorema del valor intermedio $\exists x^*$ entre x_{j^+} y x_{j^-} (más aún $x^* \in [-1, 1]$) tal que $f(x^*) = 0$, demostrando lo pedido.

1.5

(i) Como está definido $L_j(x)$ se tiene que

$$L_j(x) = \frac{W(x)}{x - x_j} \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}$$

Veamos que $W(x) = (x - x_j) \prod_{k=0, k\neq j}^{n} (x - x_k)$. Sea $a(x) = (x - x_j)$ y $b(x) = \prod_{k=0,k\neq j}^{n}(x - x_k)$. Entonces $W(x) = a(x)b(x)$. Encontremos $W'(x)$ usando la regla de la multiplicación

$$W'(x) = a'(x)b(x) + a(x)b'(x) = 1 \cdot b(x) + (x - x_j) \cdot b'(x)$$

Así

$$W'(x_j) = b(x_j) + (x_j - x_j) \cdot b'(x) = b(x_j) = \prod_{k=0,k\neq j}^{n} (x_j - x_k)$$

Entonces

$$L_j(x) = \frac{W(x)}{x - x_j} \cdot \frac{1}{W'(x_j)}$$

Como $W(x)$ es un polinomio de grado $n + 1$ con las mismas raíces que el polinomio de Legendre, por construcción se cumple que $AW(x) = AP_{n+1}(x)$, para algun A y usando la linealidad del operador derivada

$$L_j(x) = \frac{AP_{n+1}(x)}{x - x_j} \cdot \frac{1}{AP'_{n+1}(x_j)} = \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_j} \cdot \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)}$$

Entonces

$$\int_{-1}^{1} L_j(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_j} \cdot \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)} dx$$

Como $\frac{1}{P'_{n+1}(x_j)}$ es un valor constante, se puede sacar de la integral, resultando en

$$w_j = \int_{-1}^{1} L_j(x)dx = \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_j} dx$$

Demostrando así lo pedido.

(ii) Comencemos notando que

$$\frac{1}{x - x_j} = \frac{Q(x_j)}{Q(x_j)(x - x_j)} = \frac{Q(x_j) - Q(x)}{Q(x_j)(x - x_j)} + \frac{Q(x)}{Q(x_j)(x - x_j)}$$

Definamos $R(x) := Q(x_j) - Q(x)$, es un polinomio de grado igual a $Q(x)$(i.e n+1). Pero, $R(x_j) = Q(x_j) - Q(x_j) = 0$, y por lo tanto x_j es raíz de $R(x)$, y entonces $S(x) := \frac{R(x)}{(x - x_j)}$ es un polinomio de grado n. Así, remplazando se llega a que

$$\frac{1}{x - x_j} = \frac{S(x)}{Q(x_j)} + \frac{Q(x)}{Q(x_j)(x - x_j)}$$

Y reemplazando esto en la expresión encontrada en (i) se llega a que

$$w_j = \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)} \int_{-1}^{1} P_{n+1}(x) (\frac{S(x)}{Q(x_j)} + \frac{Q(x)}{Q(x_j)(x - x_j)}) dx$$

Separando las integrales

$$w_j = \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)} (\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x) \frac{S(x)}{Q(x_j)} dx + \int_{-1}^{1} P_{n+1}(x) \frac{Q(x)}{Q(x_j)(x - x_j)} dx)$$

Veamos que como P_{n+1} es un polinomio de Legendre, entonces es ortogonal a todos los polinomios con grado n o menor en L^2 (ya que se pueden formar por una combinación lineal de los polinomios de Legendre de grados menores, los cuales son ortogonales a P_{n+1} por construcción). En particular, como $S(x)$ es de grado n se tiene que

$$\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)S(x)dx = 0$$

Y como $Q(x_j)$ es constante, entonces se tiene que

$$\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)\frac{S(x)}{Q(x_j)}dx = \frac{1}{Q(x_j)}\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)S(x)dx = \frac{1}{Q(x_j)}\cdot 0 = 0$$

Reemplazando en la expresión anterior

$$w_j = \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)}(0 + \int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)\frac{Q(x)}{Q(x_j)(x-x_j)}dx) = \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)Q(x_j)}\int_{-1}^{1}\frac{Q(x)P_{n+1}(x)}{x-x_j}dx$$

Demostrando lo pedido

(iii) Usando la expresión de (ii), podemos fijar $Q(x) = P'_{n+1}(x)$, puesto que cumple con las hipótesis. Entonces

$$w_j = \frac{1}{(P'_{n+1}(x))^2}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)P'_{n+1}(x)}{x-x_j}dx$$

Busquemos el valor de la integral.
Como $P_{n+1}(x)$ se puede escribir como $(x-x_j)\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_j}$, entonces

$$P'_{n+1}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x-x_j} + (x-x_j)(\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_j})'$$

Reemplazando en la integral se llega a que

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)P'_{n+1}(x)}{x-x_j}dx = \int_{-1}^{1}(\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_j} + (x-x_j)(\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_j})')\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_j}dx$$

Separando la integral

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)P'_{n+1}(x)}{x-x_j}dx = \int_{-1}^{1}(\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_j})^2dx + \int_{-1}^{1}(\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_j})'P_{n+1}(x)dx$$

Pero $\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_j})'$ es un polinomio de grado $n-1$ y por la propiedad de ortogonalidad de $P_{n+1}(x)$, entonces la integral de la derecha es igual a 0, y se concluye que

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)P'_{n+1}(x)}{x-x_j}dx = \int_{-1}^{1}(\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_j})^2dx$$

Haciendo integración por partes con $dv = \frac{1}{(x-x_j)^2}$, $u = P^2_{n+1}(x)$, entonces $v = \frac{-1}{x-x_j}$ y $du = 2P'_{n+1}(x)P_{n+1}(x)$ (por regla de multiplicación), y así

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)P'_{n+1}(x)}{x-x_j}dx = P^2_{n+1}(x)\frac{-1}{x-x_j}\Big|_{-1}^{1} + 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-x_j}P'_{n+1}(x)P_{n+1}(x)dx$$

Despejando

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)P'_{n+1}(x)}{x-x_j}dx = \frac{P^2_{n+1}(x)}{x-x_j}\Big|_{-1}^{1} = \frac{P^2_{n+1}(1)}{1-x_j} - \frac{P^2_{n+1}(-1)}{-1-x_j}$$

Por la construcción inicial $P_{n+1}(1) = 1 \to P^2_{n+1}(1) = 1$ y $P_{n+1}(-1) = \pm 1 \to P^2_{n+1}(-1) = 1$, y reemplazando se tiene que

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)P'_{n+1}(x)}{x-x_j}dx = \frac{1}{1-x_j} + \frac{1}{1+x_j} = \frac{1-x_j+1+x_j}{(1-x_j)(1+x_j)} = \frac{2}{1-x_j^2}$$

Entonces

$$w_j = \frac{1}{(P'_{n+1}(x))^2}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)P'_{n+1}(x)}{x-x_j}dx = \frac{1}{(P'_{n+1}(x))^2}\cdot\frac{2}{1-x_j^2} = \frac{2}{(1-x_j^2)(P'_{n+1}(x))^2}$$

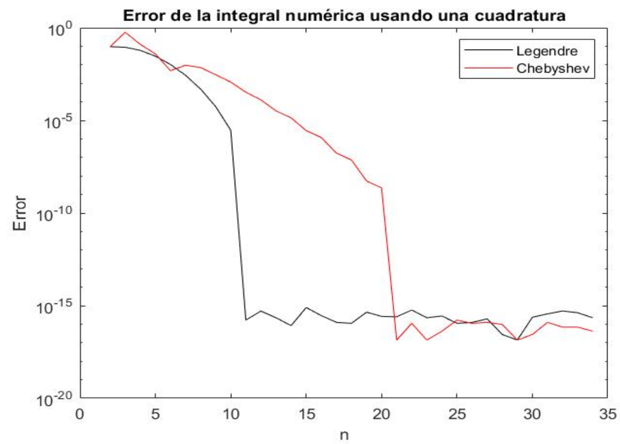
Demostrando lo pedido

2

(i) La integral exacta es

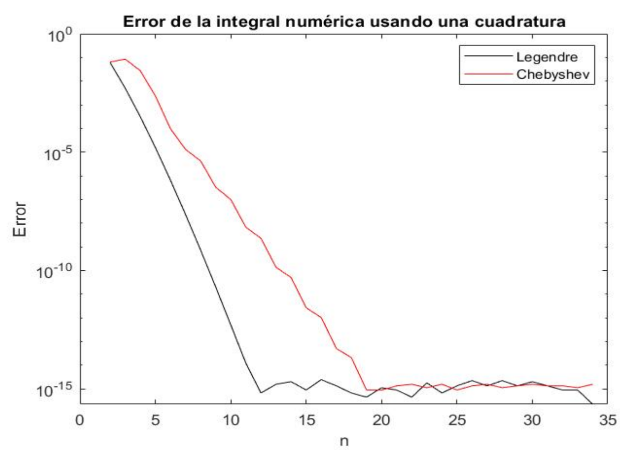
$$\int_{-1}^{1} x^{20} dx = \frac{x^{21}}{21}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \frac{2}{21}$$

Y el gráfico obtenido es



Se puede ver que converge mejor para la cuadratura de Legendre, lo cual era de esperar puesto que esta funciona mejor con polinomios.

(ii) La integral exacta fue obtenida numéricamente, con un valor de aproximadamente 1.493. Y el gráfico obtenido es

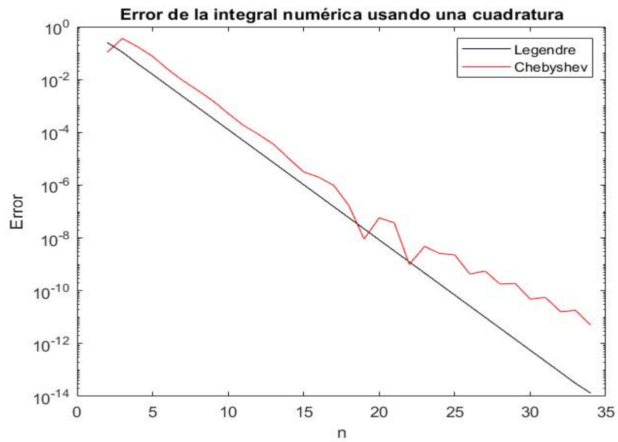


Se puede ver que converge mejor para la cuadratura de Legendre, sin embargo, ambas tienen una convergencia claramente exponencial (debido a la suavidad de la función), y por tanto, ambas producen buenas aproximaciones.

(iii) La integral exacta es

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^{2} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \cdot \arctan(u)\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\arctan(2) = \arctan(2)$$

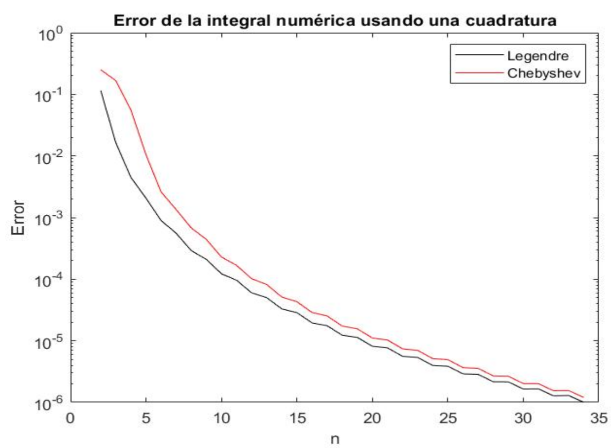
Y el gráfico obtenido es
Se puede ver que converge mejor para la cuadratura de Legendre, sin embargo, ambas tienen una convergencia claramente exponencial, y por tanto, ambas producen buenas aproximaciones.



(iv) La integral exacta es

$$\int_{-1}^{1} |x|^3 dx = 2\int_{0}^{1} x^3 dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Y el gráfico obtenido es

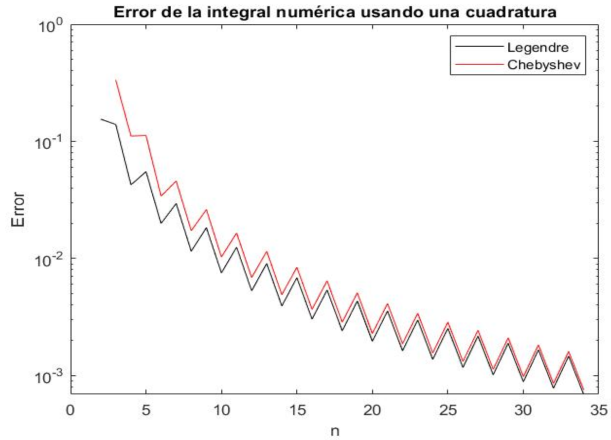


Se puede ver que converge mejor para la cuadratura de Legendre, sin embargo, para esta integral en ambas cuadraturas hay un error considerable (el cual no se debe al epsilon de la máquina), y eso se debe a que la función no es tan regular como las anteriores.

(v) La integral exacta es

$$\int_{-1}^{1} |x|dx = 2\int_{0}^{1} xdx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2\frac{1}{2} = 2$$

Y el gráfico obtenido es

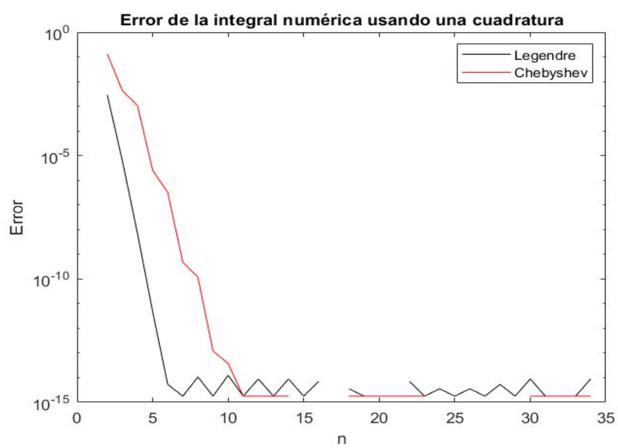


Se puede ver que converge mejor para la cuadratura de Legendre, sin embargo, para esta integral las aproximaciones no son muy buenas, ya que difieren cerca de 0.001 incluso para 30 nodos, esto se debe a que esta función no es ni siquiera diferenciable, y por lo tanto los teoremas de convergencia del error no aplican para este caso.

(vi) La integral exacta es

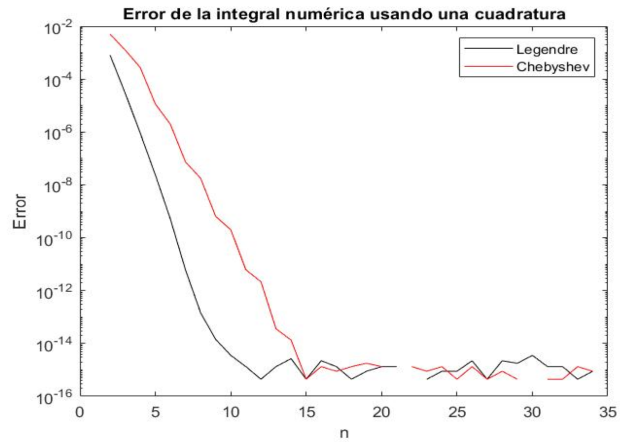
$$\int_{2}^{3} e^x dx = e^x\Big|_2^3 = e^3 - e^2$$

Y el gráfico obtenido es



Se puede ver que converge mejor para la cuadratura de Legendre, además para esta integral las aproximaciones son muy buenas, esto se debe a la regularidad y suavidad de esta función.

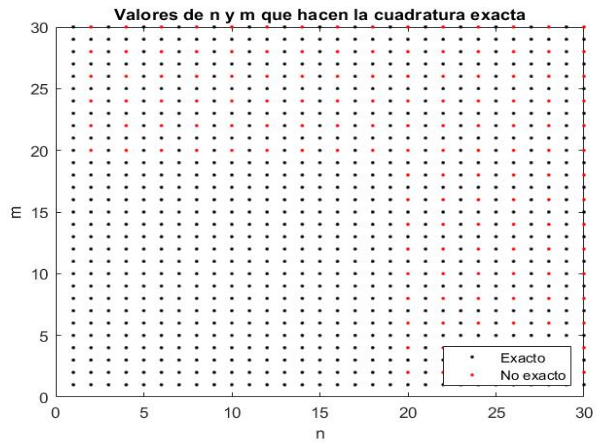
(vii) La integral exacta fue obtenida numéricamente, con un valor de aproximadamente 2.838. Y el gráfico obtenido es



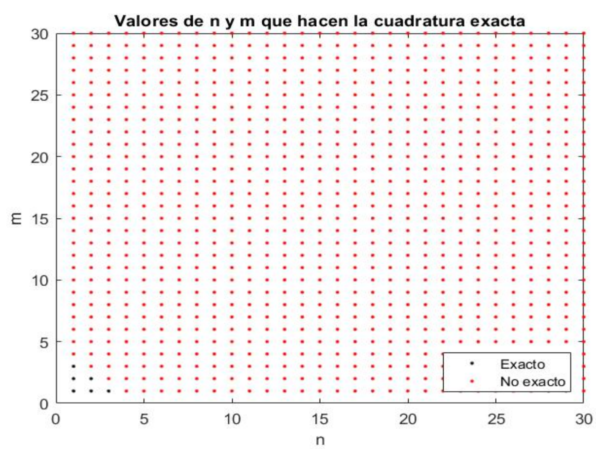
Se puede ver que converge mejor para la cuadratura de Legendre, sin embargo, ambas tienen una convergencia claramente exponencial, y por tanto, ambas producen buenas aproximaciones.

3

a) Los códigos en MATLAB se adjuntan en la entrega
Por la construcción como función de una función de esta cuadratura, es esperable que sea exacta si y solo si es exacta tanto para un polinomio de grado n como de grado m. Esto se puede ver en la siguiente figura, donde se grafica si el error es menor a epsilon usando 10 puntos de cuadratura por lado. Se puede observar en el cuadrado de puntos negros abajo a la izquierda



b) Los códigos en MATLAB se adjuntan en la entrega
Ahora creemos el mismo gráfico para el triángulo usando los mismos 10 puntos. Se obtiene el siguiente



De aquí se puede observar que se ha perdido mucha precisión, y solo es exacto cuando $n + m \leq 4$, lo cual son polinomios de bajo orden con respecto a la gran cantidad de nodos usados.