Tarea 3.4 y 4

Vicente Opazo

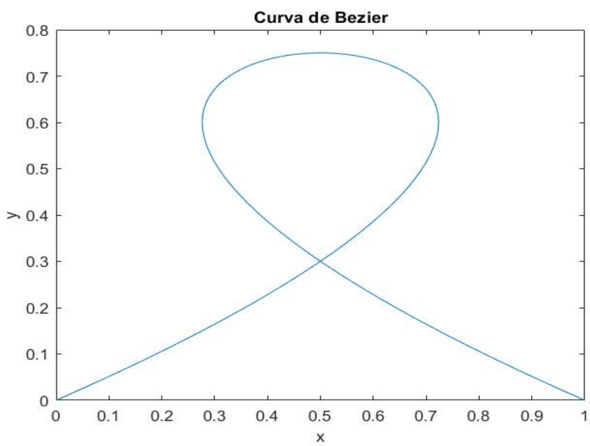
November 8, 2025

1

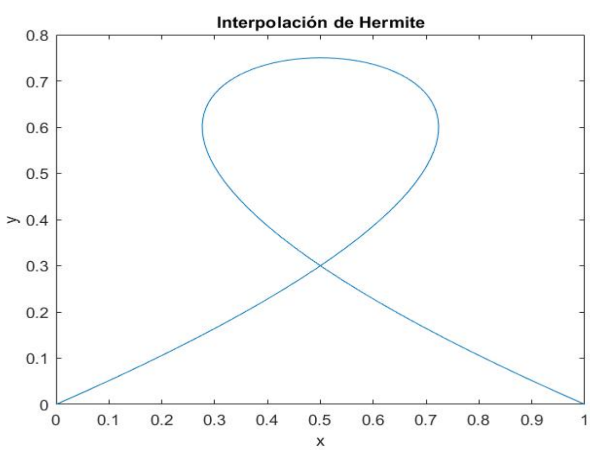
Esta es la pregunta 4 de la tarea anterior que dejé pendiente.

1.1

El código creado en MATLAB se adjunta en la entrega. El gráfico obtenido para la curva de Bezier es el siguiente



Y el gráfico obtenido para el polinomio interpolante de Hermite es el siguiente



Se puede ver que ambos gráficos son idénticos, tal como se esperaba.

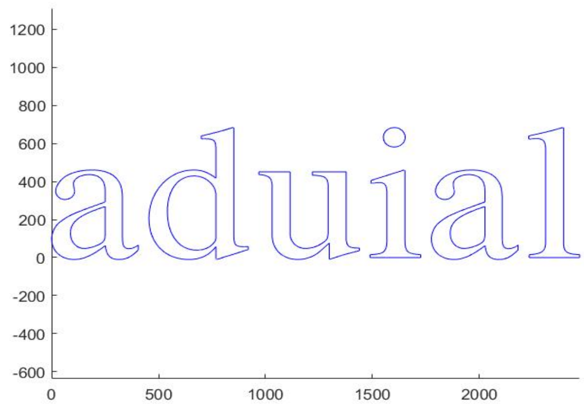
1.2

La expresión anterior tiene una forma similar a un binomio al cubo, entonces es esperable que una curva de grado n venga dada por una forma similar a un binomio a la n-ésima potencia. Entonces se espera que

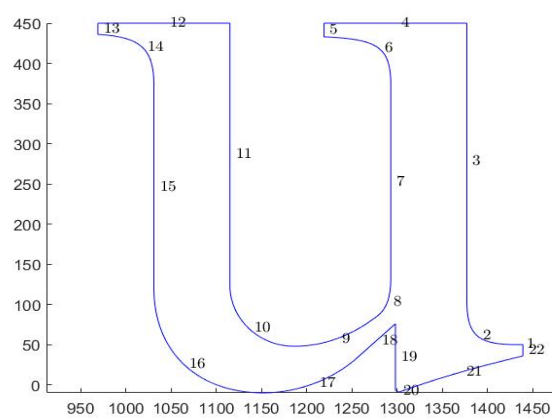
$$\vec{v} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i \cdot \vec{p_i}$$

1.3

La imagen obtenida al ejecutar el código es la siguiente



Y como todo el mundo sabe, aduial significa anochecer de la tarde en idioma élfico (en Sindarin), literalmente se traduce como segundo crepúsculo.
Tras modificar un poco el código, se puede ver que iterando desde la curva 51 hasta la 72 se consigue exactamente la u, y por lo tanto se necesitan 22 curvas de Bezier para componer el tercer glifo de la palabra.
Una muestra visual de estas 22 curvas es la siguiente



2

Esta es la pregunta 1 de la tarea 4.

2.1

De la definición de la matriz Ac, esta se escribe como

$$Ac = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^0 & \sum_{i=1}^m x_i^1 & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{n-1} & \sum_{i=1}^m x_i^n \\ \sum_{i=1}^m x_i^1 & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^n & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_i^{n-1} & \sum_{i=1}^m x_i^n & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{2n-2} & \sum_{i=1}^m x_i^{2n-1} \\ \sum_{i=1}^m x_i^n & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{2n-1} & \sum_{i=1}^m x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el resultado de este producto es

$$Ac = \begin{bmatrix} c_0 \sum_{i=1}^m x_i^0 + c_1 \sum_{i=1}^m x_i^1 + ... + c_{n-1} \sum_{i=1}^m x_i^{n-1} + c_n \sum_{i=1}^m x_i^n \\ c_0 \sum_{i=1}^m x_i^1 + c_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 + ... + c_{n-1} \sum_{i=1}^m x_i^n + c_n \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} \\ \vdots \\ c_0 \sum_{i=1}^m x_i^{n-1} + c_1 \sum_{i=1}^m x_i^n + ... + c_{n-1} \sum_{i=1}^m x_i^{2n-2} + c_n \sum_{i=1}^m x_i^{2n-1} \\ c_0 \sum_{i=1}^m x_i^n + c_1 \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} + ... + c_{n-1} \sum_{i=1}^m x_i^{2n-1} + c_n \sum_{i=1}^m x_i^{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^n c_j \sum_{i=1}^m x_i^j \\ \sum_{j=0}^n c_j \sum_{i=1}^m x_i^{j+1} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^n c_j \sum_{i=1}^m x_i^{j+n-1} \\ \sum_{j=0}^n c_j \sum_{i=1}^m x_i^{j+n} \end{bmatrix}$$

Y por último se cumple que

$$c^T Ac = c_0 \sum_{j=0}^n c_j \sum_{i=1}^m x_i^j + c_1 \sum_{j=0}^n c_j \sum_{i=1}^m x_i^{j+1} + ... + c_{n-1} \sum_{j=0}^n c_j \sum_{i=1}^m x_i^{j+n-1} + c_n \sum_{j=0}^n c_j \sum_{i=1}^m x_i^{j+n}$$

Esto es

$$c^T Ac = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{j=0}^n c_j \sum_{i=1}^m x_i^{j+k} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^m c_k c_j x_i^{j+k}$$

Cambiando el orden de las sumatorias

$$c^T Ac = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n c_k c_j x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n c_k x_i^k \sum_{j=0}^n c_j x_i^j = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n c_k x_i^k p(x_i)$$

Sacando hacia afuera nuevamente

$$c^T Ac = \sum_{i=1}^m p(x_i) \sum_{k=0}^n c_k x_i^k = \sum_{i=1}^m p(x_i) p(x_i) = \sum_{i=1}^m (p(x_i))^2$$

Demostrando así lo pedido

2.2

Para demostrar que la solución es única solo basta demostrar que A es invertible, lo haremos por contradicción.

Supongamos que A no fuera invertible, entonces significa que existe $c \neq 0$ tal que $Ac = 0$, y así $c^T Ac = c^T 0 = 0$.

Pero sabemos que $c^T Ac = \sum_{i=1}^m (p(x_i))^2$, y entonces $\sum_{i=1}^m (p(x_i))^2 = 0$. Como cada $(p(x_i))^2$ es positivo, entonces es una suma de términos positivos, y así la suma es cero si y solo si cada término es cero.

Pero además $(p(x_i))^2 = 0 \iff p(x_i) = 0$, y entonces $p(x_i) = 0 \ \forall i \in \{0, 1, ..., m\}$. Lo que significa que $p(x)$ tiene al menos m raíces, pero $p(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo n con $n < m$, y por lo demostrado en la tarea 2, este polinomio debe ser $p(x) = 0$.

Como $p(x) = 0$, entonces se tiene que $c_j = 0 \ \forall j \in \{0, 1, ..., n\}$. Pero entonces $c = 0$, y de nuestra hipótesis se tenía que $c \neq 0$, absurdo.

Este absurdo nace a partir de asumir que A no es invertible, y entonces es invertible. COmo es invertible la solución es única, y entonces queda demostrado lo pedido.

2.3

De la definición de la matriz Bc, esta se escribe como

$$Bc = \begin{bmatrix} \int_a^b x^0dx & \int_a^b x^1dx & \cdots & \int_a^b x^{n-1}dx & \int_a^b x^ndx \\ \int_a^b x^1dx & \int_a^b x^2dx & \cdots & \int_a^b x^ndx & \int_a^b x^{n+1}dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b x^{n-1}dx & \int_a^b x^ndx & \cdots & \int_a^b x^{2n-2}dx & \int_a^b x^{2n-1}dx \\ \int_a^b x^ndx & \int_a^b x^{n+1}dx & \cdots & \int_a^b x^{2n-1}dx & \int_a^b x^{2n}dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

Y por tanto, el resultado de este producto es

$$Bc = \begin{bmatrix} c_0\int_a^b x^0dx + c_1\int_a^b x^1dx + ... + c_{n-1}\int_a^b x^{n-1}dx + c_n\int_a^b x^ndx \\ c_0\int_a^b x^1dx + c_1\int_a^b x^2dx + ... + c_{n-1}\int_a^b x^ndx + c_n\int_a^b x^{n+1}dx \\ \vdots \\ c_0\int_a^b x^{n-1}dx + c_1\int_a^b x^ndx + ... + c_{n-1}\int_a^b x^{2n-2}dx + c_n\int_a^b x^{2n-1}dx \\ c_0\int_a^b x^ndx + c_1\int_a^b x^{n+1}dx + ... + c_{n-1}\int_a^b x^{2n-1}dx + c_n\int_a^b x^{2n}dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^n c_j\int_a^b x^jdx \\ \sum_{j=0}^n c_j\int_a^b x^{j+1}dx \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^n c_j\int_a^b x^{j+n-1}dx \\ \sum_{j=0}^n c_j\int_a^b x^{j+n}dx \end{bmatrix}$$

Y por último se cumple que

$$c^TBc = c_0\sum_{j=0}^n c_j\int_a^b x^jdx + c_1\sum_{j=0}^n c_j\int_a^b x^{j+1}dx + ... + c_{n-1}\sum_{j=0}^n c_j\int_a^b x^{j+n-1}dx + c_n\sum_{j=0}^n c_j\int_a^b x^{j+n}dx$$

Esto es

$$c^TBc = \sum_{k=0}^n c_k\sum_{j=0}^n c_j\int_a^b x^{j+k}dx = \sum_{k=0}^n\sum_{j=0}^n\int_a^b c_kc_jx^{j+k}dx$$

Cambiando el orden de las sumatorias (lo que se puede hacer por la linealidad del operador integral)

$$c^TBc = \int_a^b(\sum_{k=0}^n\sum_{j=0}^n c_kc_jx^{j+k})dx = \int_a^b(\sum_{k=0}^n c_kx^k\sum_{j=0}^n c_jx^j)dx = \int_a^b(\sum_{k=0}^n c_kx^kp(x))dx$$

Sacando hacia afuera nuevamente

$$c^TBc = \int_a^b(p(x)\sum_{k=0}^n c_kx^k)dx = \int_a^b(p(x)p(x))dx = \int_a^b(p(x))^2dx$$

LLegando a la siguiente expresión de c^TAc en términos de p

$$c^TBc = \int_a^b(p(x))^2dx$$

2.4

Comencemos por ver el siguiente lema: Sea $f \in C([a,b])$ tal que $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = 0 \to f(x) = 0$.
Demostremoslo por contradicción, esto es, supongamos $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) \neq 0$, i.e $f(x_0) = y_0 > 0$. Por la continuidad de f sabemos que $\exists\delta > 0$ tal que $|x_0 - x| < \delta \to |f(x_0) - f(x)| < \frac{y_0}{2}$. Sea $a_0 = min\{x_0 - \frac{\delta}{2}, a\}$ y $b_0 = min\{x_0 + \frac{\delta}{2}, b\}$.
Entonces $\forall x \in [a_0, b_0]$ se cumple que $|y_0 - f(x)| < |\frac{y_0}{2}| \to f(x) > \frac{y_0}{2}$.
Por ende $\int_{a_0}^{b_0} f(x)dx > (b_0-a_0)\frac{y_0}{2} > 0$, y así $\int_a^b f(x)dx > 0$, pero nuestra hipótesis es que $\int_a^b f(x)dx = 0$, absurdo. Este absurdo nace de asumir que $f(x) \neq 0$ y entonces se concluye que $f(x) = 0$.

Ahora, para demostrar que la solución es única solo basta demostrar que B es invertible, lo haremos por contradicción.
Supongamos que B no fuera invertible, entonces significa que existe $c \neq 0$ tal que $Bc = 0$, y así $c^T Bc = c^T 0 = 0$.
Pero sabemos que $c^T Bc = \int_a^b (p(x))^2 dx$, y entonces $\int_a^b (p(x))^2 dx = 0$. Como $(p(x))^2 \in C([a, b]) \wedge (p(x))^2 \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$, por el lema inicial se tiene que $(p(x))^2 = 0$, y entonces $p(x) = 0$
Como $p(x) = 0$, entonces se tiene que $c_j = 0 \ \forall j \in \{0, 1, ..., n\}$. Pero entonces $c = 0$, y de nuestra hipótesis se tenía que $c \neq 0$, absurdo.
Este absurdo nace a partir de asumir que B no es invertible, y entonces es invertible. Como es invertible la solución es única, y entonces queda demostrado lo pedido.

3

Esta es la pregunta 2 de la tarea 4.

3.1

Comencemos por reescribir $E(\vec{a})$ explícitamente

$$E(\vec{a}) = \sum_{i=0}^{m-1}(y_i - (\sum_{j=0}^{n}(a_j\vec{\varphi_j}(\vec{x}))_i)^2 = \sum_{i=0}^{m-1} y_i^2 - 2\sum_{i=0}^{m-1} y_i(\sum_{j=0}^{n}(a_j\vec{\varphi_j}(\vec{x}))_i + \sum_{i=0}^{m-1}(\sum_{j=0}^{n}(a_j\vec{\varphi_j}(\vec{x}))_i)^2$$

Reescribiendo se llega finalmente a que

$$E(\vec{a}) = \sum_{i=0}^{m-1} y_i^2 - 2\sum_{i=0}^{m-1} y_i(\sum_{j=0}^{n}(a_j\vec{\varphi_j}(\vec{x}))_i + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}(a_j\vec{\varphi_j}(\vec{x}))_i(a_k\vec{\varphi_k}(\vec{x}))_i$$

Para encontrar el mínimo hacemos las derivadas parciales iguales a 0. Para la j-ésima derivada parcial se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial a_j} = -2\sum_{i=0}^{m-1}\vec{y}_i(\vec{\varphi_j}(\vec{x}))_i + 2\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}(\vec{\varphi_j}(\vec{x}))_i(a_k\vec{\varphi_k}(\vec{x}))_i = 0$$

Invirtiendo las sumatorias del segundo término, usando la definición de producto punto y reordenando se llega a que

$$\frac{\partial}{\partial a_j} = -2\vec{y}\cdot\vec{\varphi_j}(\vec{x}) + 2\sum_{k=0}^{n} a_k\vec{\varphi_j}(\vec{x})\cdot\vec{\varphi_k}(\vec{x}) = 0$$

Reordenando la igualdad con el 0 se llega a que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\vec{\varphi_j}(\vec{x})\cdot\vec{\varphi_k}(\vec{x}) = \vec{\varphi_j}(\vec{x})\cdot\vec{y}$$

Pero de la hipótesis se tiene que $\vec{\varphi_j}(\vec{x})\cdot\vec{\varphi_k}(\vec{x}) = 0$ si $j \neq k$, y entonces de la sumatoria del lado izquierdo solo el término para el $k = j$ es no nulo, así que la igualdad queda de la siguiente forma

$$a_j\vec{\varphi_j}(\vec{x})\cdot\vec{\varphi_j}(\vec{x}) = \vec{\varphi_j}(\vec{x})\cdot\vec{y}$$

Despejando a_j se tiene que

$$a_j = \frac{\vec{\varphi_j}(\vec{x})\cdot\vec{y}}{\vec{\varphi_j}(\vec{x})\cdot\vec{\varphi_j}(\vec{x})} = \frac{\vec{\varphi_j}(\vec{x})\cdot\vec{y}}{|\vec{\varphi_j}(\vec{x})|^2}$$

Como en la derivada j-ésima solo se relaciona el término j-ésimo, entonces este valor obtenido para a_j es el que le corresponde. Con esto se demuestra lo pedido.

3.2

Comencemos por la aproximación lineal, como sabemos que el conjunto es ortogonal, entonces tenemos una expresión exacta para calcular los coeficientes del polinomio. Entonces para a_0 se tiene que

$$a_0 = \frac{\int_a^b \phi_0(x)f(x)dx}{\int_a^b(\phi_0(x))^2dx} = \frac{\int_{-1}^1 e^{-3x}dx}{\int_{-1}^1 1dx}$$

Encontrando la antiderivada se tiene que

$$\int_{-1}^1 e^{-3x}dx = -\frac{e^{-3x}}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{3}$$

Además se tiene que

$$\int_{-1}^1 1dx = x\Big|_{-1}^1 = 1 + 1 = 2$$

Y entonces se tiene que

$$a_0 = \frac{\int_{-1}^{1} e^{-3x} dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} = \frac{1}{2}(\frac{e^3}{3} - \frac{e^{-3}}{3}) = \frac{e^3}{6} - \frac{e^{-3}}{6}$$

Para a_1 es análogo

$$a_1 = \frac{\int_a^b \phi_1(x) f(x) dx}{\int_a^b (\phi_1(x))^2 dx} = \frac{\int_{-1}^{1} x e^{-3x} dx}{\int_{-1}^{1} (x)^2 dx} = -\frac{e^3}{3} - \frac{2e^{-3}}{3}$$

Usando integración por partes con $u = x$, $dv = e^{-3x}$

$$\int_{-1}^{1} x e^{-3x} dx = \frac{-1}{3} x e^{-3x}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} e^{-3x} dx = \frac{-1}{3} e^{-3x} - \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{e^{3x}}{9} - \frac{e^{-3x}}{9} = \frac{-2}{9} e^3 - \frac{4}{9} e^{-3}$$

Y la siguiente integral es sencilla por ser un polinomio

$$\int_{-1}^{1} (x)^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Y entonces

$$a_1 == \frac{\int_{-1}^{1} x e^{-3x} dx}{\int_{-1}^{1} (x)^2 dx} = \frac{3}{2}(\frac{-2}{9} e^3 - \frac{4}{9} e^{-3}) = -\frac{e^3}{3} - \frac{2e^{-3}}{3}$$

Y así se tiene que el polinomio lineal viene dado por

$$p(x) = \frac{e^3}{6} - \frac{e^{-3}}{6} - \frac{e^3}{3} x - \frac{2e^{-3}}{3} x$$

Para encontrar el polinomio cuadrático podemos reutilizar los valores que ya conocíamos, y por tanto solo nos falta encontrar a_2, el cual es análogo a los anteriores.

$$a_2 = \frac{\int_a^b \phi_2(x) f(x) dx}{\int_a^b (\phi_2(x))^2 dx} = \frac{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3}) e^{-3x} dx}{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2 e^{-3x} dx - \int_{-1}^{1} \frac{1}{3} e^{-3x} dx}{\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9} dx}$$

Calculemos las integrales (reutilizando integrales calculadas anteriormente)

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{-3x} dx = \frac{-1}{3} x^2 e^{-3x}\Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} x e^{-3x} dx = -\frac{e^{-3}}{3} + \frac{e^3}{3} + \frac{2}{3}(\frac{-2}{9} e^3 - \frac{4}{9} e^{-3}) = \frac{5e^3}{27} - \frac{17e^{-3}}{27}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{3} e^{-3x} dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} e^{-3x} dx = \frac{1}{3}(\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{3}) = \frac{e^{3x}}{9} - \frac{e^{-3x}}{9}$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9} dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9} + \frac{x}{9}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{45}$$

Reemplazando

$$a_2 = \frac{45}{8}(\frac{5e^3}{27} - \frac{17e^{-3}}{27} - \frac{e^{3x}}{9} + \frac{e^{-3x}}{9}) = \frac{45}{8}(\frac{2e^3}{27} - \frac{14e^{-3}}{27}) = \frac{5e^3}{12} - \frac{35e^{-3}}{12}$$

Y así el polinomio cuádratico viene dado por

$$p(x) = \frac{e^3}{6} - \frac{e^{-3}}{6} - \frac{e^3}{3} x - \frac{2e^{-3}}{3} x + \frac{5e^3}{12} x^2 - \frac{35e^{-3}}{12} x^2$$

3.3

Antes calcularemos unas integrales, mediante integración por partes, que nos serán utiles en el problema

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} e^0 - e^{-t} = 1 - 0 = 1$$

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}(0e^0 - te^{-t}) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}(0^2e^0 - t^2e^{-t}) + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$\int_0^\infty x^3e^{-x}dx = -x^3e^{-x}\Big|_0^\infty + 3\int_0^\infty x^2e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}(0^3e^0 - t^3e^{-t}) + 3\cdot 2 = 0 + 6 = 6$$

$$\int_0^\infty x^4e^{-x}dx = -x^4e^{-x}\Big|_0^\infty + 4\int_0^\infty x^3e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}(0^4e^0 - t^4e^{-t}) + 4\cdot 6 = 0 + 24 = 24$$

Comencemos del conjunto $\{1, x, x^2\}$, ya que son polinomios mónicos que forman una base para los polinomios cuadráticos. Sabemos además que $G_0(x) = 1$. Ahora encontremos $G_1(x)$, por el proceso de Gram Schmidt se tiene que

$$G_1(x) = x - \frac{\int_0^\infty xe^{-x}dx}{\int_0^\infty e^{-x}dx}1 = x - \frac{1}{1} = x - 1$$

Ahora busquemos $G_2(x)$ de la misma manera

$$G_2(x) = x^2 - \frac{\int_0^\infty x^2e^{-x}dx}{\int_0^\infty e^{-x}dx}1 - \frac{\int_0^\infty x^2(x-1)e^{-x}dx}{\int_0^\infty (x-1)^2e^{-x}dx}(x-1)$$

Reemplazando por los valores conocidos en el segundo término y seprando las integrales en el tercero

$$G_2(x) = x^2 - \frac{2}{1} - \frac{\int_0^\infty x^3e^{-x}dx - \int_0^\infty x^2e^{-x}dx}{\int_0^\infty x^2e^{-x}dx - 2\int_0^\infty xe^{-x}dx + \int_0^\infty e^{-x}dx}(x-1)$$

Reemplazando por los valores conocidos en el tercer término

$$G_2(x) = x^2 - 2 - \frac{6-2}{2-2+1}(x-1) = x^2 - 2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 2$$

Y así ya tenemos los valores de $G_0(x)$, $G_1(x)$ y $G_2(x)$, cumpliendo con lo pedido. Entonces nuestro conjunto es $\{1, x-1, x^2-4x+2\}$