Pregunta 1

(a) Comencemos por calcular el desplazamiento en coordenadas materiales $U(X,t)$, por definición tenemos que

$$U(X,t) = x(X,t) - X = \begin{bmatrix} e^t X_1 - e^{-t} X_2 \\ e^t X_1 + e^{-t} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e^t - 1) X_1 - e^{-t} X_2 \\ e^t X_1 + (e^{-t} - 1) X_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En cuanto a la velocidad en coordenadas materiales $V(X,t)$, se tiene que por definición

$$V(X,t) = \frac{\partial x}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}(e^t X_1 - e^{-t} X_2) \\ \frac{\partial}{\partial t}(e^t X_1 + e^{-t} X_2) \\ \frac{\partial}{\partial t} X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t X_1 + e^{-t} X_2 \\ e^t X_1 - e^{-t} X_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para la aceleración en coordenadas materiales $A(X,t)$ se tiene que

$$A(X,t) = \frac{\partial^2 x}{\partial^2 t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}(e^t X_1 + e^{-t} X_2) \\ \frac{\partial}{\partial t}(e^t X_1 - e^{-t} X_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t X_1 - e^{-t} X_2 \\ e^t X_1 + e^{-t} X_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Lo primero que tenemos que hacer es invertir la transformación. Notemos primero que es directo que $X_3 = x_3$ por la definición de la transfomación. Además sabemos que

$$x_1 = e^t X_1 - e^{-t} X_2, \quad x_2 = e^t X_1 + e^{-t} X_2$$

Sumando ambas ecuaciones

$$x_1 + x_2 = 2e^t X_1 \implies X_1 = \frac{x_1 + x_2}{2e^t}$$

Restando las ecuaciones

$$x_2 - x_1 = 2e^{-t} X_2 \implies X_2 = \frac{e^t (x_2 - x_1)}{2}$$

Y entonces se tiene que

$$X(x,t) = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2e^t} \\ \frac{e^t (x_2 - x_1)}{2} \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos calcular lo pedido. Comencemos por calcular el desplazamiento en coordenadas espaciales. Tenemos que reemplazando en $U(X,t)$ los valores de X en función de x resulta que

$$u(x,t) = \begin{bmatrix} (e^t - 1)\frac{x_1 + x_2}{2e^t} - e^{-t}\frac{e^t (x_2 - x_1)}{2} \\ e^t \frac{x_1 + x_2}{2e^t} + (e^{-t} - 1)\frac{e^t (x_2 - x_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(e^t - 1)(x_1 + x_2)}{2e^t} - \frac{(x_2 - x_1)}{2} \\ \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{(1 - e^t)(x_2 - x_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora calculemos la velocidad en coordenadas espaciales. Tenemos que reemplazando en $V(X,t)$ los valores de X en función de x resulta que

$$v(x,t) = \begin{bmatrix} e^t \frac{x_1+x_2}{2e^t} + e^{-t}\frac{e^t(x_2-x_1)}{2} \\ e^t \frac{x_1+x_2}{2e^t} - e^{-t}\frac{e^t(x_2-x_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{(x_2-x_1)}{2} \\ \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{(x_2-x_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente calculemos la aceleración en coordenadas espaciales. Tenemos que reemplazando en $A(X,t)$ los valores de X en función de x resulta que

$$a(x,t) = \begin{bmatrix} e^t \frac{x_1+x_2}{2e^t} - e^{-t}\frac{e^t(x_2-x_1)}{2} \\ e^t \frac{x_1+x_2}{2e^t} + e^{-t}\frac{e^t(x_2-x_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{(x_2-x_1)}{2} \\ \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{(x_2-x_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) Comencemos por calcular el tensor gradiente de transformación F, por definición tenemos que

$$F = \nabla_X x = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & -e^{-t} & 0 \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora calculemos el tensor de Cauchy-Green C

$$C = F^TF = \begin{bmatrix} e^t & e^t & 0 \\ -e^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & -e^{-t} & 0 \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}+e^{2t} & -e^0+e^0 & 0 \\ -e^0+e^0 & e^{-2t}+e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, calculemos el tensor E

$$E = \frac{1}{2}(C-I) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} e^{2t}-\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t}-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(f) Primero veamos que dadas matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cualesquiera tenemos que

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n}(BA)_{ii} = \operatorname{tr}(BA)$$

Y entonces podemos conmutar las matrices dentro del operador $\operatorname{tr}(\cdot)$. Ahora demostremos las invarianzas, sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible, entonces

$$I_1(Q^{-1}AQ) = \operatorname{tr}(Q^{-1}AQ) = \operatorname{tr}(AQQ^{-1}) = \operatorname{tr}(AI) = \operatorname{tr}(A) = I_1(A)$$

Demostrando la primera invariante. Para la segunda pimero veamos que

$$I_2(Q^{-1}AQ) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(Q^{-1}AQ)^2 - \operatorname{tr}\left((Q^{-1}AQ)^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(Q^{-1}AQ)^2 - \operatorname{tr}\left(Q^{-1}AQQ^{-1}AQ\right)\right]$$

Pero $QQ^{-1} = I$ y entonces

$$I_2(Q^{-1}AQ) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(Q^{-1}AQ)^2 - \operatorname{tr}\left(Q^{-1}A^2Q\right)\right]$$

Pero como vimos antes que $\operatorname{tr}(\cdot)$ es una invariante resulta que

$$I_2(Q^{-1}AQ) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right] = I_2(A)$$

Demostrando la segunda invariante.

Ahora demostremos una propiedad del determinante. Sea $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y definamos $C = AB$. Veamos que

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Utilizamos la definición del determinante mediante el símbolo de Levi-Civita

$$\det(C) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1\ldots i_n} C_{1i_1}C_{2i_2}\cdots C_{ni_n}$$

Como $C = AB$, se tiene que

$$C_{ki_k} = \sum_{j_k=1}^{n} A_{kj_k}B_{j_ki_k}$$

Y entonces

$$\det(C) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \varepsilon_{i_1\ldots i_n}\left(\sum_{j_1} A_{1j_1}B_{j_1i_1}\right)\cdots\left(\sum_{j_n} A_{nj_n}B_{j_ni_n}\right)$$

Factorizamos las sumatorias

$$\det(C) = \sum_{i_1,\ldots,i_n}\sum_{j_1,\ldots,j_n} \varepsilon_{i_1\ldots i_n} A_{1j_1}\cdots A_{nj_n}B_{j_1i_1}\cdots B_{j_ni_n}$$

Reordenamos las sumas convenientemente

$$\det(C) = \sum_{j_1,\ldots,j_n} A_{1j_1}\cdots A_{nj_n}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n} \varepsilon_{i_1\ldots i_n} B_{j_1 i_1}\cdots B_{j_n i_n}\right)$$

La suma interna es el determinante de B con índices de fila $j_1,\ldots,j_n$, esto es el determinante y con el signo correspondiente dado por $j_1,\ldots,j_n$ y entonces

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} \varepsilon_{i_1\ldots i_n} B_{j_1 i_1}\cdots B_{j_n i_n} = \varepsilon_{j_1\ldots j_n}\det(B)$$

Reemplazando en la expresión anterior

$$\det(C) = \det(B)\sum_{j_1,\ldots,j_n} \varepsilon_{j_1\ldots j_n} A_{1j_1}\cdots A_{nj_n} = \det(B)\det(A)$$

Tal como queríamos demostrar. Ahora demostremos otra propiedad, sea Q una matriz invertible, entonces tenemos que

$$\det(Q^{-1})\det(Q) = \det(Q^{-1}Q) = \det(I) = 1 \implies \det(Q^{-1}) = \det(Q)^{-1}$$

Ahora podemos demostrar directamente la tercera invariante

$$I_3(Q^{-1}AQ) = \det(Q^{-1}AQ) = \det(Q^{-1})\det(A)\det(Q) = \det(Q)^{-1}\det(A)\det(Q) = \det(A) = I_3(A)$$

Donde usamos las propiedades demostradas anteriormente, demostrando así la tercera invariante.

(g) Tomemos la derivada con respecto a A. Consideremos una perturbación dA y calculemos

$$dA^3 - dI_1(A)A^2 + dI_2(A)A - dI_3(A)I = 0$$

Derivemos cada término. Para el primero usando la regla del producto

$$dA^3 = (dA)A^2 + A(dA)A + A^2(dA)$$

Para el segundo término usando la regla del producto

$$dI_1(A)A^2 = (dI_1(A))A^2 + I_1(A)(dA^2)$$

Pero $dI_1(A) = d\,\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(dA)$ para el primer término y usando la regla del producto en el segundo

$$dI_1(A)A^2 = \mathrm{tr}(dA)A^2 + \mathrm{tr}(A)A(dA) + \mathrm{tr}(A)(dA)A$$

Para el tercer término usando la regla del producto

$$dI_2(A)A = (dI_2(A))A + I_2(A)(dA)$$

Pero como $I_2(A) = \frac{1}{2}(\text{tr(A)}^2\text{- tr(A}^2))$, entonces

$$dI_2(A)A = (\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(dA) - \operatorname{tr}(AdA))A + I_2(A)(dA)$$

Y el último términoo es sencillo puesto que no se puede hace mucho más que usar la definición.

$$dI_3(A)I = (d\det A)I$$

Y entonces resulta que

$$\begin{aligned}
(d\det A)I =&(dA)A^2 + A(dA)A + A^2(dA) && (1)\\
&- \operatorname{tr}(dA)A^2 - \operatorname{tr}(A)A(dA) - \operatorname{tr}(A)(dA)A && (2)\\
&+ (\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(dA) - \operatorname{tr}(AdA))A + I_2(A)(dA) && (3)
\end{aligned}$$

Tomando la traza en ambos lados, se tiene que

$$\begin{aligned}
3(d\det A) =& \operatorname{tr}((dA)A^2) + \operatorname{tr}(A(dA)A) + \operatorname{tr}(A^2(dA)) && (4)\\
&- \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(dA)A^2) - \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(A)A(dA)) - \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(A)(dA)A) && (5)\\
&+ \operatorname{tr}((\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(dA)) - \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(AdA)A) + \operatorname{tr}(I_2(A)(dA)) && (6)
\end{aligned}$$

Usando la ciclicidad de la traza y que podemos sacar los escalares fuera de la traza

$$\begin{aligned}
3(d\det A) =& \operatorname{tr}((dA)A^2) + \operatorname{tr}((dA)A^2) + \operatorname{tr}((dA)A^2) && (7)\\
&- \operatorname{tr}(dA)\operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A(dA)) - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A(dA)) && (8)\\
&+ \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(dA) - \operatorname{tr}(AdA)\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}((\det A)A^-T)\operatorname{tr}(dA) && (9)
\end{aligned}$$

Y si factorizamos el lado derecho por (dA), reordenando resulta que

$$d\det A = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{3}\left[3A^2 - \operatorname{tr}(A^2)I - 3\operatorname{tr}(A)A + \operatorname{tr}(A)I + I_2(A)I\right](dA)\right)$$

Y esto ya es insostenible, así que hagámoslo de otra forma. Usando el símbolo de

Levi-Civita tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \det A}{\partial A} &= \frac{\partial}{\partial A_{qm}}\left(\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}A_{ia}A_{jb}A_{kc}\right) && (10)\\
&= \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}\left[A_{ia}A_{jb}\frac{\partial A_{kc}}{\partial A_{qm}} + A_{ia}A_{kc}\frac{\partial A_{jb}}{\partial A_{qm}} + A_{jb}A_{kc}\frac{\partial A_{ia}}{\partial A_{qm}}\right] && (11)\\
&= \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}\left[\delta_{kq}\delta_{cm}A_{ia}A_{jb} + \delta_{jq}\delta_{bm}A_{ia}A_{kc} + \delta_{iq}\delta_{am}A_{jb}A_{kc}\right] && (12)\\
&= \frac{1}{6}\left(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abm}A_{ia}A_{jb} + \varepsilon_{ijq}\varepsilon_{amc}A_{ia}A_{kc} + \varepsilon_{qjk}\varepsilon_{mbc}A_{jb}A_{kc}\right) && (13)\\
&= \frac{1}{6}\left(\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{acm}A_{ia}A_{kc} + \varepsilon_{kij}\varepsilon_{cma}A_{kc}A_{ia} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mbc}A_{jb}A_{kc}\right) && (14)\\
&= \frac{1}{6}\left(\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{acm}A_{ia}A_{kc} + \varepsilon_{ikj}\varepsilon_{acm}A_{ia}A_{kc} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mbc}A_{jb}A_{kc}\right) && (15)\\
&= \frac{1}{6}\left(3\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{acm}A_{ia}A_{kc}\right) && (16)\\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{acm}A_{ia}A_{kc} && (17)\\
&= (\operatorname{adj} A)T && (18)\\
&= (\det A)A^{-T} && (19)
\end{aligned}$$

Demostrando así lo pedido

Pregunta 2

(a) El tensor de Piola para un material hiper-elástico se calcula como

$$P = \frac{\partial \Psi}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{C}{2}\left(\operatorname{tr}(\mathbf{C}) - 3\right) + \frac{\kappa}{2}(J-1)^2\right)$$

Usando la linealidad de la derivada

$$P = \frac{C}{2}\frac{\partial}{\partial F}\operatorname{tr}(\mathbf{C}) + \frac{\kappa}{2}\frac{\partial}{\partial F}(J-1)^2$$

Calculemos las derivadas

$$\frac{\partial}{\partial F}\operatorname{tr}(\mathbf{C}) = \frac{\partial}{\partial F}\operatorname{tr}(F^T F) = \frac{\partial}{\partial F}F : F = 2F$$

Y para la otra tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial F}(J-1)^2 = 2(J-1)\frac{\partial}{\partial F}(J-1) = 2(J-1)JF^{-1}$$

Donde la última igualdad se tiene de la propiedad $\frac{\partial}{\partial F}J = JF^{-1}$. Y entonces el tensor de Piola resulta en

$$P = CF + \kappa(J-1)JF^{-1}$$

(b) La ecuación de conservación del momento lineal en la configuración de referencia es

$$\rho_0 \ddot{u} - \operatorname{div}_X P(F) = 0 \quad \text{en } \Omega_0$$

Multiplicamos la ecuación por una función $v \in H^1(\Omega_0)^d$, con $v = 0$ e integramos sobre Ω_0

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{u} \cdot v \, dX - \int_{\Omega_0} (\operatorname{div}_X P(F)) \cdot v \, dX = 0$$

Aplicamos integración por partes al segundo término

$$-\int_{\Omega_0} (\operatorname{div}_X P(F)) \cdot v \, dX = \int_{\Omega_0} P(F) : \nabla v \, dX - \int_{\partial\Omega_0} (P(F) \cdot N) \cdot v \, dS$$

Donde N es el tensor normal exterior sobre $\partial\Omega_0$. Reemplazando en la ecuación anterior

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{u} \cdot v \, dX + \int_{\Omega_0} P(F) : \nabla v \, dX - \int_{\partial\Omega_0} (P(F) \cdot N) \cdot v \, dS = 0$$

Supongamos condiciones de contorno

(a) $u = v = 0$ en $\Gamma_D \subset \partial\Omega_0$ (Dirichlet)

(b) $P(F) \cdot N = t_N$ en $\Gamma_N = \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_D$ (Neumann)

Entonces, la integral sobre la frontera se convierte en

$$\int_{\partial\Omega_0} (P(F) \cdot N) \cdot v \, dS = \int_{\Gamma_N} t_N \cdot v \, dS.$$

Y así, la formulación débil consiste en buscar $u \in H^1(\Omega_0)^d$, con $u = 0$ en Γ_D, tal que para toda función de prueba $v \in H^1(\Omega_0)^d$, con $v = 0$ en Γ_D, se cumple

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{u} \cdot v \, dX + \int_{\Omega_0} P(F) : \nabla v \, dX = \int_{\Gamma_N} t_N \cdot v \, dS$$

Reemplazando por el tensor de Piola encontrado

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{u} \cdot v \, dX + \int_{\Omega_0} (CF + \kappa(J-1)JF^{-1}) : \nabla v \, dX = \int_{\Gamma_N} t_N \cdot v \, dS$$

Esto es

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{u} \cdot v \, dX + C \int_{\Omega_0} F : \nabla v \, dX + \kappa \int_{\Omega_0} ((J-1)JF^{-1}) : \nabla v \, dX = \int_{\Gamma_N} t_N \cdot v \, dS$$

Encontrando así lo pedido.

Pregunta 3

Podemos escribir la masa de un subdominio $\omega_t \subseteq \Omega_t$ en el tiempo t como la integral de la densidad sobre el dominio, esto es

$$M(t) = \int_{\omega_t} \rho(x,t)\, dx$$

Pero por lo descrito en el enunciado se tiene que el flujo de masa viene dado por su gradiente normal. Y entonces derivando con respecto a t

$$\frac{dM(t)}{\partial t} = \int_{\partial\omega_t} K\nabla_x \rho(x,t)\cdot n\, dS \implies \frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho(x,t)\, dx = \int_{\partial\omega_t} K\nabla_x \rho(x,t)\cdot n\, dS$$

Pero usando el Teorema de Transporte de Reynolds resulta que

$$\int_{\omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \nabla_x \cdot (\rho(x,t)v)\right) dx = \int_{\partial\omega_t} K\nabla_x \rho(x,t)\cdot n\, dS$$

Usando el Teorema de la Divergencia en el lado derecho, resulta que

$$\int_{\omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \nabla_x \cdot (\rho(x,t)v)\right) dx = \int_{\partial} \nabla_x \cdot (K\nabla_x \rho(x,t))\, dS$$

Y usando la regla de la cadena en el término $\nabla_x \cdot (\rho(x,t)v)\, dx$ resulta que

$$\int_{\omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + v(\nabla_x \cdot \rho(x,t)) + (\nabla_x \cdot v)\rho(x,t)\right) dx = \int_{\partial} \nabla_x \cdot (K\nabla_x \rho(x,t))\, dS$$

Pero como w_t es arbitrario, usando el Teorema de Localización resulta que la expresión anterior se cumple punto a punto, y entonces (y pasando restando el lado derecho) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + v(\nabla_x \cdot \rho(x,t)) + (\nabla_x \cdot v)\rho(x,t) - \nabla_x \cdot (K\nabla_x \rho(x,t)) = 0$$

Y entonces el operador diferencial en espacio de la ecuación resulta en

$$\mathcal{L}(\rho) = \underbrace{-\nabla_x \cdot (K\nabla_x \rho(x,t))}_{\text{Difusión}} + \underbrace{v \cdot \nabla_x \rho(x,t)}_{\text{Advección}} + \underbrace{(\nabla_x \cdot v)\rho(x,t)}_{\text{Reacción}} = 0$$

Por lo que corresponde a un problema del tipo ADR (Advección-Difusión-Reacción) escrito en su forma estándar.

Pregunta 4

Voy a asumir que el material es elástico y lineal, ya que en caso contrario no tendría mucho sentido la pregunta.

(a) Tenemos la ecuación

$$\rho_0 \ddot{u} - \operatorname{div}_X P(F) = 0$$

Pero sabemos que F se puede escribir como

$$F = I + \nabla_X u$$

Y queremos escribir el tensor de Piola en función de E, que por definición es

$$E = \frac{1}{2}(F^T F - I)$$

Y por ser un material elástico y lineal sabemos que el segundo tensor de Piola lo podemos escribir en función de E, esto es

$$S = S(E)$$

Y que el primer tensor de Piola se puede escribir en función del segundo a través de la identidad

$$P = FS(E)$$

Y sabemos que F lo podemos escribir en función de E, así que el tensor de Piola P podría quedar completamente en función de E, pero de momento lo dejaré así porque se me hará más sencilla la linealización.

Queremos linealizar el siguiente operador diferencial

$$\mathcal{F}(u) = \rho_0 \ddot{u} - \operatorname{div}_X (F(u)S(E(u)))$$

Con respecto a $u_0 = 0$. Para esto valor se cumple que $\ddot{u}_0 = 0$, $F(u_0) = I$, $E(u_0) = 0$, $S(0) = 0$, y entonces $\mathcal{F}(u_0) = 0$

Ahora calculemos la derivada de Gateaux en u_0. Sea δu un incremento. Por definición de la derivada de Gateaux

$$dF(u_0)[\delta u] = \frac{d}{d\varepsilon} F(u_0 + \varepsilon\, \delta u)\Big|_{\varepsilon=0}$$

Para el término inercial se tiene directamente que

$$d_u\left(\rho_0\, \ddot{u}\right)(u_0)[\delta u] = \rho_0\, \ddot{\delta u}$$

Para el término del tensor de Piola usando la regla multiplicativa y la regla de la cadena.

$$d_u\left(FS(E)\right)(u_0)[\delta u] = d_uF\big(u_0)[\delta u]S(E(u_0)) + F(u_0)d_ES(0)\left[d_uE(u_0)[\delta u]\right]$$

Pero $S(E(u_0)) = S(0) = 0$. Además $F(u_0) = I$, y entonces (y reemplazando $P = FS(E)$)

$$d_uP\big(u_0)[\delta u] = d_ES(0)\left[d_uE(u_0)[\delta u]\right]$$

La derivada de E la podemos calcular, puesto que $E = \frac{1}{2}(F^TF - I)$, y como $F = I + \nabla_X u$ entonces podemos calcular su derivada y usar la regla multiplicativa en E, de lo que resulta

$$d_uE(u_0)[\delta u] = \frac{1}{2}\left(\nabla_X\delta u + (\nabla_X\delta u)^T\right)$$

Y entonces podemos definir $\varepsilon(\delta u)$, tal como en el problema de elastodinámica lineal como

$$\varepsilon(\delta u) = \frac{1}{2}\left(\nabla_X\delta u + (\nabla_X\delta u)^T\right)$$

Y entonces

$$d_uE(u_0)[\delta u] = \varepsilon(\delta u)$$

Para la derivada de S, como el material es elástico y lineal entonces se tiene que

$$d_ES(0)[\varepsilon(\delta u)] = S(\varepsilon(\delta u)) = \mathbb{C} : \varepsilon(\delta u)$$

Para algún tensor de elasticidad de cuarto orden $\mathbb{C}$. Si el material es además isotrópico se tiene que

$$\mathbb{C} : \varepsilon(\delta u) = \lambda\,\mathrm{tr}(\varepsilon(\delta u))\,I + 2\mu\,\varepsilon(\delta u)$$

donde λ y μ son los coeficientes de Lamé del material. Por tanto, podemos escribir

$$d_ES(0)[\varepsilon(\delta u)] = \lambda\,\mathrm{tr}(\varepsilon(\delta u))\,I + 2\mu\,\varepsilon(\delta u)$$

Juntando ambos términos

$$d_uF(u_0)[\delta u] = \rho_0\,\ddot{\delta u} - \mathrm{div}_X(\lambda\,\mathrm{tr}(\varepsilon(\delta u))\,I + 2\mu\,\varepsilon(\delta u))$$

Ya que hemos hecho la linealización, voy a escribir simplemente u en vez de δu, y voy a igualar a cero nuevamente. De lo que resulta que el problema corresponde a encontrar u tal que

$$\rho_0\,\ddot{u} - \mathrm{div}_X(\lambda\,\mathrm{tr}(\varepsilon(u))I + 2\mu\,\varepsilon(u)) = 0$$

(b) De la ecuación anterior, pasando el segundo término del lado derecho y volviendo a usar $\mathbb{C}$ general, resulta que

$$\rho_0\,\ddot{u} = \mathrm{div}_X \cdot(\mathbb{C} : \varepsilon(u))$$

El cual coincide exactamente con la forma del problema de elastodinámica lineal provista en el apunte, demostrando la primera parte.

Notemos que entonces el $\mathbb{C}$ es el tensor de Hoooke que define el problema. Para el caso del material isotrópico, como se discutió antes se tiene que el tensor de Hooke viene dado por

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

con λ y μ los coeficientes de Lamé, y δ_{ij} la delta de Kronecker.

Este tensor es de segundo orden. Para seguir la notación anterior de $\mathbb{C}$ que sea de cuarto orden, queremos escribir esta relación en la forma general

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}$$

donde $\mathbb{C}_{ijkl}$ es el tensor de elasticidad de cuarto orden de la forma general. Entonces buscamos una expresión de $\mathbb{C}_{ijkl}$ tal que

$$\mathbb{C}_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} = \lambda\, \delta_{ij}\, \varepsilon_{kk} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}$$

Dividimos el análisis en dos partes

- El primer término $\lambda\, \delta_{ij}\, \varepsilon_{kk}$ se puede escribir como

$$\lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl}\, \varepsilon_{kl}$$

  ya que $\delta_{kl}\, \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kk}$

- El segundo término $2\mu\, \varepsilon_{ij}$ se puede obtener usando

$$\mu\, (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\, \varepsilon_{kl} = 2\mu\, \varepsilon_{ij}$$

Sumando ambos, obtenemos que el tensor de Hooke de cuarto orden para un material isotrópico es

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \lambda\, \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\, (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Otra forma es, tal como en la Tarea 3, definir el tensor de Hooke como un operador $\sigma(u)$ definido como

$$\sigma(u) = \lambda\, \mathrm{tr}(\varepsilon(u))\, I + 2\mu\, \varepsilon(u)$$

Y obtener el problema de la forma en la que se entregó en la Tarea 3

$$\rho_0\, \ddot{u} - \mathrm{div}_X \cdot \sigma(u) = 0$$

Demostrando así que el problema corresponde al problema de elastodinamica lineal.

Pregunta 5

Junto con mi compañero Javier Gatica vamos a trabajar el proyecto propuesto número 8 sobre el problema de control óptimo. Para ser preciso lo adjunto a continuación

Un problema de control óptimo: Un problema de control óptimo es un problema de optimización restringido por una EDP (ecuación diferencial parcial). La idea de este proyecto es estudiar la discretización de un problema de control óptimo simple, dado por el control en volumen del operador de Laplace. Esto puede formularse como el siguiente problema de minimización:

$$\min_{u,\mu} \frac{1}{2}\|u - u_\Omega\|_0^2 + \alpha\|\mu\|_0^2$$
$$\text{s.a} \quad -\Delta u = \mu \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

Este proyecto consiste en:

- Estudiar el método adjunto
- Establecer la bien planteada (well-posedness) del problema utilizando el teorema de Stampacchia
- Formular una aproximación por el Método de los Elementos Finitos (FEM) del problema, usando estrategias de "optimizar-luego-discretizar" y "discretizar-luego-optimizar"
- Mostrar que la optimización y la discretización en este contexto no conmutan
- Mostrar las tasas de convergencia del modelo
- Implementar el problema y validar numéricamente todas las afirmaciones teóricas

Lo escogimos ya que creemos que un problema de optimización a primera vista pareciera algo muy diferente a lo que hemos estudiado en el curso, por lo que se ve muy interesante y nos podría entregar nuevas herramientas que complementen nuestro aprendizaje del curso.