Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Matemática y Computacional
Primer Semestre 2025
Optimización Avanzada IMT3150

Tarea 3

Entrega: 15 de Junio de 2025 a las 23:59, a través de Canvas.

Pregunta 1. El objetivo de esta pregunta es estudiar la dualidad de Fenchel para el modelo de limpieza de imágenes por variación total (TV).

(a) Imagen original

(b) Imagen + ruido

(c) Imagen reconstruída por el modelo TV

Sea $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}^2$ y $\Omega' = \{1, 2, \ldots, n-1\}^2$. Llamaremos imagen a una matriz $f \in \mathbb{R}^\Omega$, el cual corresponde a una discretización ruidosa de una imagen real. Nuestro objetivo es limpiar el ruido a través del modelo

$$(P) \min_{u \in \mathbb{R}^\Omega} \{\Psi(u) + \lambda \Phi(\mathrm{Grad}(u))\}.$$

donde $\lambda > 0$ es un parámetro de regularización; $\Psi(u) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in\Omega} (u_{i,j} - f_{i,j})^2$ es un término de ajuste cuadrático; la transformación lineal

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Grad} : \mathbb{R}^\Omega & \longmapsto & \mathbb{R}^{\Omega'} \times \mathbb{R}^{\Omega'} \\ u & \longmapsto & (u_{i+1,j} - u_{i,j}, u_{i,j+1} - u_{i,j})_{(i,j)\in\Omega'}, \end{array}$$

es el gradiente discreto; y

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{R}^{\Omega'} \times \mathbb{R}^{\Omega'} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & g = (g^1_{i,j}, g^2_{i,j})_{(i,j)\in\Omega'} & \longmapsto & \sum_{(i,j)\in\Omega'} \sqrt{(g^1_{i,j})^2 + (g^2_{i,j})^2}, \end{array}$$

es la norma mixta ℓ_1/ℓ_2 (no es necesario que pruebe que esto es una norma). En lo que sigue, consideramos el producto interno de Frobenius $\langle u, v\rangle = \mathrm{Tr}(u^\top v)$ para $u, v \in \mathbb{R}^\Omega$, y analogamente para $g = [g^1; g^2], h = [h^1; h^2] \in \mathbb{R}^{\Omega'} \times \mathbb{R}^{\Omega'}$, $\langle g, h\rangle := \mathrm{Tr}((g^1)^\top h^1) + \mathrm{Tr}((g^2)^\top h^2)$. Esto corresponde simplemente al producto interno usual para las representaciones vectorizadas de una imagen y su gradiente discreto, respectivamente.

Nota: La justificación del modelo (P) para limpiar el ruido de una imagen proviene de un supuesto de *esparsidad del gradiente* de una imagen (para una discusión detallada, consultar la referencia original [1]).

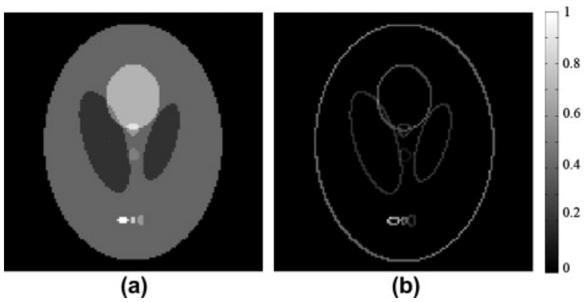

Figura 1: en (a) se ve una imagen, mientras que en (b) vemos (la norma $\|\cdot\|_2$) del gradiente en cada punto. Si bien la imagen no es sparse, su gradiente lo es, y esto se relaciona con el hecho de que las imágenes naturales están compuestas de variaciones graduales de tonalidad y contrastes drásticos en los contornos de los objetos. Esto motiva el uso de la norma ℓ_1 del gradiente como un sustituto convexo de la esparsidad del gradiente.

(a) Calcule Φ^* y Ψ^*.

(b) Calcule Grad^*. ¿Puede dar una interpretación a este operador?

(c) Obtenga el dual (general) de Fenchel de (P) y verifique si hay dualidad fuerte. Pruebe que en el par óptimo primal-dual (u^*, z^*) se satisface la siguiente relación:

$$u^* = f - \mathrm{Grad}^*(z^*). \tag{1}$$

Pregunta 2. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, y sea $(d_i)_{i\in V}$ una demanda; es decir, tal que $\sum_{i\in V} d_i = 0$. Decimos que $x = (x_e)_{e\in E}$ es un *flujo* si

$$d_i = \sum_{e\in\delta_i^+} x_e - \sum_{e\in\delta_i^-} x_e \ (\forall i \in V), \tag{F}$$

donde $\delta_i^+ := \{e \in E : e = (i,j)\,(\exists j \in V)\}$, y $\delta_i^- := \{e \in E : e = (j,i)\,(\exists j \in V)\}$. Diremos que G y d son compatibles si existe un flujo en G que satisface d.

Dados G y d compatibles, y dadas funciones de latencia $\ell_e : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ estrictamente crecientes (estas funciones representan el tiempo que se demora una unidad infinitesimal de flujo en atravesar el arco), se dice que un flujo es un *equilibrio de Wardrop* si es una solución óptima de

$$\text{mín}\left\{\sum_{e\in E}\int_0^{x_e} \ell_e(s)ds : \ x \geq 0 \text{ satisface (F)}\right\}. \tag{P}$$

(a) Calcule la conjugada de

$$L_e(x) = \begin{cases} \int_0^{x_e} \ell_e(s)\,ds & x_e \geq 0 \\ 0 & x_e < 0. \end{cases}$$

(b) Calcule el dual Lagrangeano de (P), denotando a las variables duales de las restricciones de desigualdad como λ, y las restricciones de igualdad como μ.

(c) Pruebe que hay dualidad fuerte, y que más aun en el primal hay una única solución óptima (es decir, que existe un único equilibrio de Wardrop).

(d) Sean $(x, (\lambda^*, \mu^*))$ un par primal-dual óptimo. Pruebe que se cumple que para todo $e = (i, j) \in E$

$$(x_e = 0) \quad \vee \quad (\mu_j^* = \mu_i^* + \ell_e(x_e^*)).$$

¿Puede dar una interpretación económica de lo que ocurre en equilibrio? **Indicación.** (λ^*, μ^*) pueden ser medidos en unidades de tiempo.

Referencias

[1] L I Rudin, S Osher, and E Fatemi, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physica D: Nonlinear Phenomena **60** (1992), no. 1-4, 259–268.