Pregunta 1

(a) Primero encontremos la formulacíon variacional. De la segunda restricción se concluye que $u \in H_0^1(\Omega)$, y entonces consideremos multiplicar la primera restricción por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrar sobre Ω, de lo que resulta

$$\int_\Omega -\mu \Delta u v \, dx + \int_\Omega b \nabla u v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Integrando por partes el primer término tenemos que

$$\int_\Omega -\mu \Delta u v \, dx = \int_\Omega \mu \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial \Omega} \mu (\nabla u \cdot n) v \, dx$$

Pero el último término se anula en la frontera puesto que $v \in H_0^1(\Omega)$, y entonces la restrcción resulta en

$$\int_\Omega \mu \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Omega b \nabla u v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

Y entonces la formulación variacional del problema resulta en encontar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Con

$$a(u, v) := \int_\Omega \mu \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Omega b \nabla u v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx$$

Y

$$L(v) := \int_\Omega f v \, dx$$

Con el objetivo de usar Lax-Milgram, vamos a demostrar que se cumplen las hipótesis.

Primero notemos que a es bilineal, esta propiedad se hereda de la linealidad del operador integral (y del operador derivada). Notemos que $L(v)$ también hereda dicha linealidad, y por tanto es lineal. Además $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert según lo visto en el curso. Así, comprobamos las hipótesis triviales y ahora veamos las hipótesis más interesantes.

La continuidad de L es directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, puesto que

$$|L(v)| \leq |\int_\Omega f v \, dx| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$$

Veamos ahora que a es continuo. Primero, por desigualdad triangular tenemos que

$$|a(u, v)| \leq \left| \int_\Omega \mu \nabla u \nabla v \, dx \right| + \left| \int_\Omega b \nabla u v \, dx \right| + \left| \int_\Omega c u v \, dx \right|$$

Ahora, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$|a(u,v)| \leq \|\mu\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \|b\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$$

Por el teorema de Poincare tenemos que

$$\|u\|_{L^2} \leq C_P\|\nabla u\|_{L^2}, \quad \|v\|_{L^2} \leq C_P\|\nabla v\|_{L^2}$$

Y entonces

$$|a(u,v)| \leq C_P^2\|\mu\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + C_P\|b\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$$

Factorizando

$$|a(u,v)| \leq (C_P^2\|\mu\|_{L^\infty} + C_P\|b\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty})\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$$

Y por definición de $\|\cdot\|_{H^1}$

$$|a(u,v)| \leq (C_P^2\|\mu\|_{L^\infty} + C_P\|b\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty})\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

Demostrando así la continuidad de a. Ahora veamos la coercividad de a, para esto tenemos que

$$a(u,u) = \int_\Omega \mu(\nabla u)^2\,dx + \int_\Omega b\nabla u u\,dx + \int_\Omega cu^2\,dx$$

Para acotar el primer término necesitamos que $\mu \geq \mu_0 > 0$ casi en todas partes. Y entonces

$$a(u,u) \geq \mu_0\int_\Omega (\nabla u)^2\,dx + \int_\Omega b\nabla u u\,dx + \int_\Omega cu^2\,dx$$

Para acotar el término central notemos que por la regla de la cadena

$$\nabla(bu^2) = \nabla b u^2 + 2b\nabla u u$$

Del teorema de la divergencia

$$\int_\Omega \nabla(bu^2)\,dx = \int_{\partial\Omega} (bu^2)\cdot n\,dx = 0$$

Donde la última igualdad se tiene puesto que $u = 0$ en $\partial\Omega$. Entonces, de estas ecuaciones podemos concluír que

$$\int_\Omega \nabla b u^2\,dx + 2\int_\Omega b\nabla u u\,dx = 0$$

Y reemplazando en la ecuación original

$$a(u,u) \geq \mu_0\int_\Omega (\nabla u)^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla b u^2\,dx + \int_\Omega cu^2\,dx$$

De la linealidad de la integral

$$a(u,u) \geq \mu_0 \int_\Omega (\nabla u)^2 \, dx + \int_\Omega \left(c - \frac{1}{2} \nabla b \right) u^2 \, dx$$

Ahora necesitamos que $\left(c - \frac{1}{2} \nabla b \right) \geq c_0 > 0$ casi en todas partes. Y entonces

$$a(u,u) \geq \mu_0 \int_\Omega (\nabla u)^2 \, dx + c_0 \int_\Omega u^2 \, dx$$

De la definición de $\| \cdot \|_{L^2}$

$$a(u,u) \geq \mu_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2 + c_0 \|u\|_{L^2}^2$$

Y de la definición de $\| \cdot \|_{H^1}$

$$a(u,u) \geq \min\{\mu_0, c_0\} \cdot \|u\|_{H^1}^2$$

Demostrando así la coercividad.

Hemos demostrado todas las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram, y entonces podemos concluir que existe una única solución débil. Además, el teorema nos indica que es continua, en particular nos dice que

$$\|u\|_{H^1} \leq \frac{1}{\min\{\mu_0, c_0\}} \cdot \|L\|_{H^{-1}}$$

Demostrando lo pedido, recordemos que las hipótesis sobre los parámetros son que $\mu, b, c \in L^\infty(\Omega)$ y que $\exists \mu_0, c_0$ tales que

$$\mu \geq \mu_0 > 0, \quad \left(c - \frac{1}{2} \nabla b \right) \geq c_0 > 0, \quad \text{casi en todas partes}$$

(b) Ahora comencemos a trabajar con el dominio $\Omega = (0,1)$ (en la pregunta anterior quise mantenerme lo más general posible). Entonces el problema consiste en encontrar u tal que

$$-\mu(x)\, u''(x) + b(x)\, u'(x) + c(x)\, u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega = (0,1) \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{2}$$

Consideremos dividir el intervalo en puntos equidistantes por simplicidad de la notación (ya que según mis cálculos la segunda derivada queda medio horrible), y consideremos hacer diferencias centradas. Así, dividamos el intervalo $[0,1]$ en $N+1$ puntos equiespaciados $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$, con tamaño $h = \frac{1}{N}$. Buscamos aproximar la solución u en los puntos interiores $x_1, \ldots, x_{N-1}$, ya que en los puntos extremos ya sabemos que $x_0 = x_N = 0$

Aproximamos las derivadas por diferencias centradas, de lo que resulta que

$$u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$
$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Y entonces, la ecuación diferencial se discretiza como

$$-\mu_i \cdot \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + b_i \cdot \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + c_i u_i = f_i \quad \text{para } i = 1, \ldots, N-1$$

donde $\mu_i = \mu(x_i)$, $b_i = b(x_i)$, $c_i = c(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

Esto se puede escribir como un sistema lineal $Au = f$, donde la matriz $A \in \mathbb{R}^{N+1 \times N+1}$ es tridiagonal con entradas

$$A_{i,i-1} = -\frac{\mu_i}{h^2} - \frac{b_i}{2h}$$
$$A_{i,i} = \frac{2\mu_i}{h^2} + c_i$$
$$A_{i,i+1} = -\frac{\mu_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h}$$

Y si en el sistema queremos forzar que $u_0 = u_N = 0$ (realmente no es necesario en este caso, pero me gusta hacerme la costumbre para recordarlo cuando si sea necesario), entonces el sistema matricial nos queda de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_1}{h^2} - \frac{b_1}{2h} & \frac{2\mu_1}{h^2} + c_1 & -\frac{\mu_1}{h^2} + \frac{b_1}{2h} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_2}{h^2} - \frac{b_2}{2h} & \frac{2\mu_2}{h^2} + c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\mu_{N-1}}{h^2} - \frac{b_{N-1}}{2h} & \frac{2\mu_{N-1}}{h^2} + c_{N-1} & -\frac{\mu_{N-1}}{h^2} + \frac{b_{N-1}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y entonces la solución u del sistema es la solución a la ecuación aproximada, concluyendo lo pedido.

(c) De la formulación débil obtenida en (a), ahora para el caso $\Omega = (0,1)$ resulta que la forma bilineal es

$$a(u,v) = \int_0^1 \mu(x) u'(x) v'(x)\, dx + \int_0^1 b(x) u'(x) v(x)\, dx + \int_0^1 c(x) u(x) v(x)\, dx$$

Y la forma lineal es

$$L(v) = \int_0^1 f(x) v(x)\, dx$$

Y recordemos que buscamos $u \in H_0^1(0,1)$ tal que

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Para la discretización dividimos $[0,1]$ en $N+1$ puntos equiespaciados $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 1$, con tamaño $h = \frac{1}{N}$. Y entonces los intervalos son definidos de la forma obvia $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ para $i \in \{0, \ldots, N-1\}$. Como queremos usar elementos finitos de primer orden, consideramos el espacio de aproximación $\mathbb{P}_h^1$, definido como se hizo en el curso

$$\mathbb{P}_h^1 = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_{I_i} \in \mathbb{P}^1 \quad \forall i \in \{0, \ldots, N-1\}\}$$

Consideremos las funciones sombrero $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_N\}$, la base clásica de $\mathbb{P}_h^1$ definidas como lo vimos en el curso. Así, buscamos $u_h = \sum_{j=0}^N u_j \varphi_j$ que cumpla la formulación débil. La matriz de rigidez $A \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ tiene entradas (obviando los bordes)

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^1 \mu(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\,dx + \int_0^1 b(x)\varphi_j'(x)\varphi_i(x)\,dx + \int_0^1 c(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)\,dx$$

y el vector del lado derecho es

$$f_i = L(\varphi_i) = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx$$

Sabemos que la matriz es tridiagonal, puesto que el soporte de φ_i solo intersecta con φ_{i-1} y φ_{i+1}. Comencemos por calcular $A_{i,i}$, tenemos que

$$A_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \mu(x)\varphi_i'(x)^2\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} b(x)\varphi_i'(x)\varphi_i(x)\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} c(x)\varphi_i(x)^2\,dx$$

Dividamos las integrales en dos rangos $[x_{i-1}, x_i]$ y $[x_i, x_{i+1}]$ y encontremos la contribución de cada uno. En $[x_{i-1}, x_i]$ tenemos que $\varphi(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h}$ y que $\varphi'(x) = \frac{1}{h}$, y entonces la contribución de este intervalo resulta en

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu(x)\frac{1}{h^2}\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x)\frac{1}{h}\frac{x - x_{i-1}}{h}\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2 dx$$

Si conocieramos μ, b, c quizás podríamos obtener una fórmula para la integral explícitamente. Sin embargo, voy a proponer una regla de cuadratura como $\mu(x) \approx \mu(x_i) =: \mu_i$ en $[x_{i-1}, x_i]$, $b(x) \approx b(x_i) =: b_i$ en $[x_{i-1}, x_i]$ y $c(x) \approx c(x_i) =: c_i$ en $[x_{i-1}, x_i]$. Y entonces la contribución es

$$\frac{\mu_i}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} 1\,dx + \frac{b_i}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} x - x_{i-1}\,dx + \frac{c_i}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2\,dx$$

Calculando las integrales

$$\frac{\mu_i}{h^2} \cdot h + \frac{b_i}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{c_i}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{\mu_i}{h} + \frac{b_i}{2} + \frac{c_i}{3}h$$

Encontrando así la contribución $[x_{i-1}, x_i]$, mientras que en $[x_i, x_{i+1}]$ tenemos que $\varphi(x) = \frac{x_{i+1}-x}{h}$ y que $\varphi'(x) = -\frac{1}{h}$, y entonces la contribución de este intervalo resulta en

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu(x)\frac{1}{h^2}\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x)\frac{-1}{h}\frac{x_{i+1}-x}{h}\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} c(x)\left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)^2\,dx$$

Consideremos una regla de cuadratura análoga a la anterior $\mu(x) \approx \mu_i, b(x) \approx b_i, c(x) \approx c_i$. De lo que resulta

$$\frac{\mu_i}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1\,dx - \frac{b_i}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x_{i+1} - x\,dx + \frac{c_i}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)^2\,dx$$

Calculando las integrales

$$\frac{\mu_i}{h^2}\cdot h - \frac{b_i}{h^2}\cdot\frac{h^2}{2} + \frac{c_i}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{\mu_i}{h} - \frac{b_i}{2} + \frac{c_i}{3}h$$

Y entonces sumando ambas contribuciones resulta que

$$A_{i,i} = 2\frac{\mu_i}{h} + \frac{2c_i}{3}h$$

Ahora calculemos $A_{i,i+1}$. Tenemos entonces restringiéndonos al soporte resulta que

$$A_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu(x)\varphi_{i+1}'(x)\varphi_i'(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x)\varphi_{i+1}'(x)\varphi_i(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} c(x)\varphi_{i+1}(x)\varphi_i(x)\,dx$$

Reemplazando por los valores de la función

$$A_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu(x)\frac{1}{h}\cdot\frac{-1}{h}\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x)\frac{1}{h}\cdot\frac{x_{i+1}-x}{h}\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} c(x)\frac{x-x_i}{h}\frac{x_{i+1}-x}{h}\,dx$$

Consideremos una regla de cuadratura análoga a la anterior $\mu(x) \approx \mu_i, b(x) \approx b_i, c(x) \approx c_i$. De lo que resulta

$$A_{i,i+1} = \frac{-\mu_i}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1\,dx + \frac{b_i}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x_{i+1} - x\,dx + \frac{c_i}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x_{i+1}-x)\,dx$$

Evaluando

$$A_{i,i+1} = \frac{-\mu_i}{h^2}\cdot h + \frac{b_i}{h^2}\cdot\frac{h^2}{2} + \frac{c_i}{h^2}\cdot\frac{h^3}{6} = -\frac{\mu_i}{h} + \frac{b_i}{2} + \frac{c_i}{6}h$$

Ahora calculemos $A_{i,i-1}$. Tenemos entonces restringiéndonos al soporte resulta que

$$A_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu(x)\varphi_{i-1}'(x)\varphi_i'(x)\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x)\varphi_{i-1}'(x)\varphi_i(x)\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)\varphi_{i-1}(x)\varphi_i(x)\,dx$$

Reemplazando por los valores de la función

$$A_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu(x)\frac{-1}{h}\cdot\frac{1}{h}\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x)\frac{-1}{h}\cdot\frac{x-x_i}{h}\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)\frac{x_i-x}{h}\frac{x-x_{i-1}}{h}\,dx$$

Consideremos una regla de cuadratura análoga a la anterior $\mu(x)\approx\mu_i, b(x)\approx b_i, c(x)\approx c_i$. De lo que resulta

$$A_{i,i-1} = \frac{-\mu_i}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} 1\,dx + \frac{b_i}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} x-x_i\,dx + \frac{c_i}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)(x-x_{i-1})\,dx$$

Evaluando

$$A_{i,i-1} = \frac{-\mu_i}{h^2}\cdot h + \frac{b_i}{h^2}\cdot\frac{-h^2}{2} + \frac{c_i}{h^2}\cdot\frac{h^3}{6} = -\frac{\mu_i}{h} - \frac{b_i}{2} + \frac{c_i}{6}h$$

Para el lado derecho tenemos que

$$f_i = L(\varphi_i) = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)\,dx$$

Ya que el soporte de φ_i es $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Separando la integral en dos

$$f_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)\,dx$$

Reemplazando según φ_i

$$f_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\frac{x-x_{i-1}}{h}\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\frac{x_{i+1}-x}{h}\,dx$$

Consideremos la cuadratura $f(x)\approx f_i'$, donde el prima lo puse solo para no abusar de la notación, entonces

$$f_i = \frac{f_i'}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})\,dx + \frac{f_i'}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)\,dx$$

Y calculando la integral

$$f_i = \frac{f_i'}{h}\frac{h^2}{2} + \frac{f_i'}{h}\frac{h^2}{2} = f_i'h$$

Encontrando así el lado derecho. Y entonces el sistema se puede escribir como un sistema lineal $Au = f$, donde la matriz $A \in \mathbb{R}^{N+1\times N+1}$ es tridiagonal, explícitamente es de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_1}{h} - \frac{b_1}{2} + \frac{c_1 h}{6} & \frac{2\mu_1}{h} + \frac{2c_1 h}{3} & -\frac{\mu_1}{h} + \frac{b_1}{2} + \frac{c_1 h}{6} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_2}{h} - \frac{b_2}{2} + \frac{c_2 h}{6} & \frac{2\mu_2}{h} + \frac{2c_2 h}{3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\mu_{N-1}}{h} - \frac{b_{N-1}}{2} + \frac{c_{N-1}h}{6} & \frac{2\mu_{N-1}}{h} + \frac{2c_{N-1}h}{3} & -\frac{\mu_{N-1}}{h} + \frac{b_{N-1}}{2} + \frac{c_{N-1}h}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1'h \\ f_2'h \\ \vdots \\ f_{N-1}'h \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obteniendo la formulación explícita, tal como se solicitó.

(d) Recordemos que de diferencias finitas obtuvimos que

$$\begin{aligned} A_{i,i-1}^{DF} &= -\frac{\mu_i}{h^2} - \frac{b_i}{2h} \\ A_{i,i}^{DF} &= \frac{2\mu_i}{h^2} + c_i \\ A_{i,i+1}^{DF} &= -\frac{\mu_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h} \\ f_i^{DF} &= f_i' \end{aligned}$$

Y para la del método de elementos finitos podemos dividir tanto la matriz como el lado derecho por h sin cambiar la solución del sistema, y entonces uno equivalente corresponde a

$$\begin{aligned} A_{i,i-1}^{FEM} &= -\frac{\mu_i}{h^2} - \frac{b_i}{2h} + \frac{c_i}{6} \\ A_{i,i}^{FEM} &= 2\frac{\mu_i}{h^2} + \frac{2c_i}{3} \\ A_{i,i+1}^{FEM} &= -\frac{\mu_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h} + \frac{c_i}{6} \\ f_i^{FEM} &= f_i' \end{aligned}$$

Comparando ambos sistemas, se aprecia que los coeficientes correspondientes a los términos que involucran a μ y b coinciden. La diferencia entre ambos métodos está únicamente en el término asociado a c, puesto que el método de elementos finitos reparte este término parcialmente con sus nodos vecinos.

Por lo tanto, ambas discretizaciones conducen al mismo sistema lineal solo cuando $c = 0$, ya que en ese caso la única diferencia desaparece. En cambio, si $c \neq 0$, los métodos difieren debido a la construcción. Más formalmente queremos que $c = 0$ solo en los x_i, pero sería poco natural pedirle que se anule justo donde yo cree la malla, ya que podría querer cambiar la malla.

Notemos que obviamente si las mallas utilizadas por ambos métodos no son las mismas, entonces los sistemas lineales también serán distintos, pero yo decidí usar puntos equidistantes. Por otra parte, en el método de elementos finitos se podrían utilizar cuadraturas más precisas que modifiquen los coeficientes de la matriz o el lado derecho, obteniendo una mayor flexibilidad para esta decisión. Sin embargo, como no conocemos las funciones con antelación, mi cuadratura escogida parece razonable.

(e) Una consideración práctica es que diferencias finitas es más fáciles de implementar, especialmente en problemas con mallas regulares. Además, es mucho mas intuitivo su idea, simplificando las cosas.

En cuanto a la flexibilidad geométrica, las diferencias finitas están limitadas a mallas estructuradas y problemas con geometrías simples, mientras que los elementos finitos ofrecen alta flexibilidad, permitiendo manejar geometrías complejas y mallas no estructuradas.

En términos de precisión, las diferencias finitas convergen con un orden $O(h^2)$ para esquemas centrales, bajo ciertas condiciones, mientras que los elementos finitos de primer orden nos aseguran convergencia con un orden $O(h)$.

Así, puesto que la geometria de este poblema es en $(0, 1)$ es muy simple, entonces nos conviene mucho más utilizar diferencias finitas, ya que nos asegura (teóricamente, en la práctica pareciera ser similar en este caso) convergencia cuadrática y además es mucho más fácil de implementar.

Pregunta 2

(a) Comencemos por probar que

$$\|D^2 v\|_{L^2} = \|\Delta v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

Sea $v \in C_0^\infty(\Omega)$, por definición se tiene que

$$\|D^2 v\|_{L^2} = \int_\Omega |D^2 v| \, dx = \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (v_{x_j x k})^2 \, dx$$

Usando la linealidad de la integral y expandiendo el cuadrado

$$\|D^2 v\|_{L^2} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega v_{x_j x_k} v_{x_j x_k} \, dx$$

Para j, k fijos podemos integrar por partes con respecto a x_j. Considerando que se anula el término de la frontera puesto que $v \in C_0^\infty(\Omega)$, se obtiene que

$$\|D^2 v\|_{L^2} = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega v_{x_j x_k x_j} v_{x_k} \, dx$$

Podemos cambiar el orden de derivación sin alterar el resultado debido a la regularidad de $v \in C_0^\infty(\Omega)$, obteniendo que

$$\|D^2 v\|_{L^2} = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega v_{x_j x_j x_k} v_{x_k} \, dx$$

Integrando por partes nuevamente

$$\|D^2v\|_{L^2} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega v_{x_jx_j}v_{x_kx_k}\,dx$$

De la linealidad y factorizando

$$\|D^2v\|_{L^2} = \int_\Omega \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} v_{x_jx_j}v_{x_kx_k}\,dx = \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n} v_{x_jx_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} v_{x_kx_k}\right)dx$$

De la definición de Δv

$$\|D^2v\|_{L^2} = \int_\Omega (\Delta v)^2\,dx = \|\Delta v\|_{L^2}$$

De la densidad de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H_0^2(\Omega)$ se obtiene que

$$\|D^2v\|_{L^2} = \|\Delta v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

Tal como queríamos demostrar. Veamos ahora que $v \to \|\Delta v\|_{L^2}$ es una norma.

1. Homogeniedad: Notemos que de la linealidad del operador Laplaciano tenemos que

   $$\Delta(\alpha v) = \alpha\Delta v$$

   Y entonces

   $$\|\Delta(\alpha v)\|_{L^2} = \|\alpha\Delta v\|_{L^2} = |\alpha|\|\Delta v\|_{L^2}$$

   Donde la última igualdad se tiene puesto que $\|\cdot\|_{L^2}$ es una norma, demostrando así la homogeniedad.

2. Definida Positiva: Supongamos que $\|\Delta v\|_{L^2} = 0$, queremos demostrar que $v = 0$. Como $\|\Delta u\|_{L^2} = 0$, por lo demostrado antes se tiene que $\|D^2u\|_{L^2} = 0$ y entonces $D^2u = 0$ casi en todas partes (por ser $\|\cdot\|_{L^2}$ norma).

   Como Ω es conexo, por el teorema del valor medio generalizado podemos demostrar que $D^2v(x) = 0$ casi en todas partes implica que $v(x) = a^Tx + b$ casi en todas partes para $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. Pero $v = \nabla v \cdot n = 0$ en $\partial\Omega$, de lo que se concluye que necesariamente $a = b = 0$, y entonces $v = 0$ casi en todas partes, tal como queríamos demostrar.

3. Desigualdad Triangular: Sean $v, u \in H_0^2(\Omega)$, entonces por la linealidad del operador Laplaciano

   $$\|\Delta(v+u)\|_{L^2} = \|\Delta v + \Delta u\|_{L^2}$$

   Y de la desigualdad triangular de $\|\cdot\|_{L^2}$ resulta que

   $$\|\Delta(v+u)\|_{L^2} \leq \|\Delta v\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}$$

   Demostrando así la desigualdad triangular.

Y por tanto concluímos que es una norma, tal como queríamos demostrar.

(b) La norma natural en $H^2(\Omega)$ corresponde a

$$\|v\|_{H^2} = \|v\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2} + \|D^2 v\|_{L^2}$$

Probemos entonces que las normas son equivalentes

1. Primero veamos que $\exists C_2$ tal que

$$\|\Delta v\|_{L^2} \leq C_2 \|v\|_{H^2} \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

Pero de lo demostrado en (a)

$$\|\Delta v\|_{L^2} = \|D^2 v\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2} + \|D^2 v\|_{L^2} = \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

Obteniendo fácilmente esta parte de la desigualdad

2. Ahora veamos que $\exists C_1$ tal que

$$C_1 \|v\|_{H^2} \leq \|\Delta v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

De la desigualdad de Poincare tenemos que existe C_P tal que

$$\|v\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla v\|_{L^2}$$

Además tenemos que

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 = \int_\Omega (\nabla v)^2 \, dx = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v \, dx = -\int_\Omega v(\Delta v) \, dx \leq \|v\|_{L^2} \|\Delta v\|_{L^2}$$

De la desigualdad de Young resulta que

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2C_P^2} \|v\|_{L^2}^2 + \frac{C_P^2}{2} \|\Delta v\|_{L^2}^2$$

Y entonces de la desigualdad de Poincare tenemos que

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{C_P^2}{2} \|\Delta v\|_{L^2}^2$$

Y entonces despejando

$$\|\nabla v\|_{L^2} \leq C_P \|\Delta v\|_{L^2}$$

Y nuevamente de la desigualdad de Poincare

$$\|v\|_{L^2} \leq C_P^2 \|\Delta v\|_{L^2}$$

Y recordemos de lo demostrado al inicio

$$\|D^2 v\|_{L^2} = \|\Delta v\|_{L^2}$$

Y entonces

$$\|v\|_{H^2} = \|v\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2} + \|D^2 v\|_{L^2} \leq (1 + C_P + C_P^2)\|\Delta v\|_{L^2}$$

Y considerando $C_1 = (1 + C_P + C_P^2)$ resulta que

$$\frac{1}{(1 + C_P + C_P^2)} \cdot \|v\|_{H^2} \leq \|\Delta v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

Demostrando la segunda desigualdad

De lo que se concluye que las normas son equivalentes, tal como queríamos demostrar.

(c) Consideremos multiplicar por una función $v \in H_0^2(\Omega)$ e integrar sobre Ω

$$\int_\Omega \Delta^2 uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx$$

Hagamos una primera integración por partes, tenemos que

$$\int_\Omega \Delta^2 uv \, dx = \int_\Omega \Delta(\Delta u)v \, dx = -\int_\Omega \nabla(\Delta u)\nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} (\nabla(\Delta u) \cdot n)v \, dx = -\int_\Omega \nabla(\Delta u)\nabla v \, dx$$

Donde la primea igualdad es por definición, la segunda por la integración por partes, y la tercera puesto que el segundo término se anula en la frontera. Así, integrando por partes nuevamente resulta que

$$-\int_\Omega \nabla(\Delta u)\nabla v \, dx = \int_\Omega (\Delta u)\Delta v \, dx - \int_{\partial\Omega} (\Delta u)(\nabla v \cdot n) \, dx = \int_\Omega (\Delta u)\Delta v \, dx$$

Donde la primera igualdad es por integración por partes, y la segunda puesto que el segundo término se anula en la frontera. Y entonces consideramos el operador bilineal $a(u, v)$ como

$$a(u, v) := \int_\Omega (\Delta u)\Delta v \, dx$$

Y $L(v)$ como

$$L(v) := \int_\Omega fv \, dx$$

Y así la formulación variacional consiste en encontrar $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

Notemos que puesto que $v \in H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, entonces si $f \in L^2(\Omega)$ es suficiente para que la integral en $L(v)$ este bien definida.

Sin embargo, considerando $f \in H^{-2}(\Omega)$, donde recordemos que este conjunto es el dual de $H_0^2(\Omega)$, es la regularidad más débil que le podemos pedir a f para que $L(v)$ tenga sentido (por definición), y por tanto esta es la regularidad más general que se le debe pedir a f. Sin embargo, si queremos mantener las cosas simples podríamos pedirle simplemente estar en $L^2(\Omega)$, ya que honestamente no le tengo mucha intuición a ese nuevo espacio.

(d) Con el objetivo de usar Lax-Milgram, vamos a demostrar que se cumplen las hipótesis.

Primero notemos que a es bilineal, esta propiedad se hereda de la linealidad del operador integral (y del operador Laplaciano). Notemos que $L(v)$ también es lineal puesto que el operador integral es lineal. Además $H_0^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert según lo visto en el curso. Así, comprobamos las hipótesis triviales y ahora veamos las hipótesis más interesantes.

La continuidad de L es directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, puesto que

$$|L(v)| \leq |\int_\Omega fv\,dx| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^2}$$

Veamos ahora que a es continuo. Tenemos por Cauchy-Schwarz y de lo demostrado en (b) que

$$|a(u,v)| \leq \left|\int_\Omega \Delta u \Delta v\,dx\right| \leq \|\Delta u\|_{L^2}\|\Delta v\|_{L^2} \leq C_2^2\|u\|_{H^2}\|v\|_{H^2}$$

Demostrando así la continuidad de a. Para ver la coercividad tenemos que

$$a(u,u) = \int_\Omega (\Delta u)^2\,dx = \|\Delta u\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{(1+C_P+C_P^2)^2}\|u\|_{H^2}^2$$

Donde la última desigualdad es por lo demostrado en (b)

Así, se cumplen todas las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram, y por tanto se concluye que existe única solución al problema de encontrar $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

Tal como queríamos demostrar.

Pregunta 3

(a) Consideremos $\rho : \Omega_t \times (0,t) \to \mathbb{R}$ una función de densidad. Entonces, la masa en una región $\omega_t \subset \Omega_t$ la podemos calcular como

$$M_{\omega_t}(t) = \int_{\omega_t} \rho(x,t)\,dx$$

A diferencia de lo visto en clases, la masa no necesariamente se conserva, sino que puede haber creación o destrucción de esta según θ. Así, considerando esto resulta que

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{\omega_t}(t) = \int_{\omega_t} \theta(x,t)\, dx$$

Pero si ρ es suficientemente regular, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{\omega_t}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega_t} \rho(x,t)\, dx = \int_{\omega_t} \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \operatorname{div}(\rho\tilde{\mathrm{v}})\ dx$$

Y entonces igualando ambas expresiones, y recordando que ω_t era arbitrario, resulta que

$$\int_{\omega_t} \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \operatorname{div}(\rho \mathrm{v})\ dx = \int_{\omega_t} \theta(x,t)\, dx \quad \forall \omega_t \subset \Omega_t$$

Y entonces del Teorema de Localización resulta que

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \operatorname{div}(\rho \mathrm{v}) = \theta(x,t) \quad \text{en } \Omega_t$$

Obteniendo la ecuación descrita.

(b) Sustituímos en la ecuación, de lo que resulta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(-K\nabla\rho) = \theta$$

De la linealidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(K\nabla\rho) = \theta$$

Notemos que esto corresponde a la generalización de la ecuación del calor. Ahora tratemos de encontrar una formulación débil para condiciones de Dirichlet homogéneas. Multipliquemos por un $v \in H_0^1(\Omega)$ e integremos sobre Ω, de lo que resulta

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} v\, dx - \int_\Omega \operatorname{div}(K\nabla\rho) v\, dx = \int_\Omega \theta v\, dx$$

Pero de las fórmulas para integración por partes tenemos que

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(K\nabla\rho) v\, dx = \int_\Omega K\nabla\rho\nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega} (K\nabla\rho\cdot n) v\, dx = \int_\Omega K\nabla\rho\nabla v\, dx$$

Donde la última igualdad se consigue puesto que $v \in H_0^1(\Omega)$ se anula en $\partial\Omega$, reemplazando en la ecuación anterior resulta que

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} v\, dx + \int_\Omega K\nabla\rho\nabla v\, dx = \int_\Omega \theta v\, dx$$

Y usando notación de producto interno, se tiene que la formulacíon débil consiste en encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}, v\right) + (K\nabla\rho\nabla, v) = (\theta, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Tal como queríamos demostrar.

(c) Consideremos una discretización en el tiempo con un esquema implícito. Sea una partición temporal uniforme $t^n = n \cdot \Delta t$. A cada instante t^n, aplicamos un esquema de diferencias finitas implícito, de lo que resulta en

$$\frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\Delta t} - \operatorname{div} \cdot (K\nabla\rho^n) = \theta(t^n)$$

Donde ρ^n corresponde a $\rho(\cdot, t^n)$

Ahora encontremos una formulación débil del problema en t^n. Multipliquemos la ecuación por una función de prueba $v \in H_0^1(\Omega)$ y usamos integración por partes. Suponiendo que $K \in L^\infty(\Omega)$ para que tenga sentido la integral, resulta que

$$\int_\Omega \frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\Delta t} v\, dx - \int_\Omega \operatorname{div}(K\nabla\rho^n) \cdot v\, dx = \int_\Omega \theta(t^n) v\, dx.$$

Usando integración por partes

$$\int_\Omega \operatorname{div}(K\nabla\rho^n) \cdot v\, dx = -\int_\Omega K\nabla\rho^n \cdot \nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega} (K\nabla\rho^n \cdot n) \cdot v\, dx = -\int_\Omega K\nabla\rho^n \cdot \nabla v\, dx$$

Puesto que v se anula en la frontera. Y entonces resulta que la formulación débil consiste en encontrar $\rho^n \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\Delta t} v\, dx + \int_\Omega K\nabla\rho^n \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega \theta(t^n) v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Y en notación de producto interno buscamos $\rho^n \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\left(\frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\Delta t}, v\right) + (K\nabla\rho^n, \nabla v) = (\theta(t^n), v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Demostrando lo pedido. Ahora consideremos una discretización en el tiempo con el método θ. Sea $\lambda \in [0, 1]$ un parámetro de interpolación (no usaré θ para no confundir la notación con el lado derecho) y sea una partición temporal uniforme $t^n = n \cdot \Delta t$. A cada instante t^n, la ecuación aproximada resulta en

$$\frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\Delta t} - \operatorname{div}\left(K\nabla\left(\lambda\rho^n + (1-\lambda)\rho^{n-1}\right)\right) = \lambda\theta(t^n) + (1-\lambda)\theta(t^{n-1})$$

Donde nuevamente ρ^n corresponde a $\rho(\cdot, t^n)$

Multiplicamos la ecuación por una función de prueba $v \in H_0^1(\Omega)$ y usamos integración por partes (usamos que $v = 0$ sobre $\partial\Omega$ para eliminar el término de frontera en la integración por partes análogo al resultado anterior). Suponiendo que $K \in L^\infty(\Omega)$ para que la integral tenga sentido resulta que

$$\int_\Omega \frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\Delta t} v\,dx + \int_\Omega K\nabla\left(\lambda\rho^n + (1-\lambda)\rho^{n-1}\right)\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega \lambda\theta(t^n) + (1-\lambda)\theta(t^{n-1})\,v\,dx$$

Entonces, la formulación débil del problema en el instante t^n consiste en encontrar $\rho^n \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\left(\frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\Delta t}, v\right) + \left(K\nabla\left(\lambda\rho^n + (1-\lambda)\rho^{n-1}\right), \nabla v\right) = \left(\lambda\theta(t^n) + (1-\lambda)\theta(t^{n-1}), v\right) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Encontrando la formulación débil

(d) Primero encontremos el operador bilineal y el operador lineal que describen al problema. Reorganizando el poblema en el instane t^n consiste en encontrar $\rho^n \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\left(\frac{\rho^n}{\Delta t}, v\right) + \lambda\left(K\nabla\rho^n, \nabla v\right) = \left(\lambda\theta(t^n) + (1-\lambda)\theta(t^{n-1}) + \frac{\rho^{n-1}}{\Delta t}, v\right) + (\lambda-1)\left(K\nabla\rho^{n-1}, \nabla v\right)$$

Para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Entonces podemos considerar el operador bilineal como

$$a(\rho^n, v) = \left(\frac{\rho^n}{\Delta t}, v\right) + \lambda\left(K\nabla\rho^n, \nabla v\right) = \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \rho^n v\,dx + \lambda\int_\Omega K\nabla\rho^n\nabla v\,dx$$

Y el operador lineal como

$$L(v) = \left(\lambda\theta(t^n) + (1-\lambda)\theta(t^{n-1}) + \frac{\rho^{n-1}}{\Delta t}, v\right) + (\lambda - 1)\left(K\nabla\rho^{n-1}, \nabla v\right)$$

Y entonces el problema consiste en encontrar $\rho^n \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(\rho^n, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Intentemos usar el Teorema de Lax-Milgram. Dejé L escrito de esa forma para que sea inmediato que es lineal (linealidad del producto interno y el operador derivada) y continuo (desigualdad de Cauchy-Schwarz). Nuevamente por la linealidad del producto interno y el operador derivada se tiene que a es bilineal. Además el espacio $H_0^1(\Omega)$ es de Hilbert. Así, se tienen las hipótesis triviales del teorema, ahora veamos las más interesantes. Para ver la continuidad de a tenemos que

$$|a(\rho^n, v)| \leq \left|\frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \rho^n v\,dx\right| + \left|\lambda\int_\Omega K\nabla\rho^n\nabla v\,dx\right|$$

Por Cauchy-Schwarz, y recordando que $\Delta t, \lambda \geq 0$ y $K \in L^\infty(\Omega)$, entonces

$$|a(\rho^n, v)| \leq \frac{1}{\Delta t}\|\rho^n\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \lambda\|K\|_{L^\infty}\|\nabla\rho^n\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}$$

Y entonces de la definición de $\|\cdot\|_{H^1}$

$$|a(\rho^n, v)| \leq \left(\frac{1}{\Delta t} + \lambda\|K\|_{L^\infty}\right)\|\rho^n\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

Demostrando asi la continuidad. Ahora para ver la coercividad vamos a tener que asumir que K es definida positiva, y entonces tenemos que

$$a(u, u) = \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega u^2\, dx + \lambda\int_\Omega K(\nabla u)^2\, dx$$

Como asumimos que K es definida positiva, entonces existe constante k tal que

$$a(u, u) \geq \frac{1}{\Delta t}\|u\|_{L^2}^2 + \lambda k\|\nabla u\|_{L^2}^2$$

Y considerando $\alpha = \min\left\{\frac{1}{\Delta t}, \lambda k\right\}$ se tiene que

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|_{H^1}^2$$

Sin embargo para que sea elíptico es necesario que $\alpha > 0$, por lo que si $\lambda > 0$ se tiene la coercividad. Sin embargo, si $\lambda = 0$ es un caso que debemos estudiar aparte, en dicho caso tenemos que

$$a(u, u) = \frac{1}{\lambda}\|u\|_{L^2}^2$$

Y entonces para demostrar que a en dicho caso no es coercitivo nos basta con encontrar una sucesión de u_n tal que

$$\|u_n\|_{L^2} \to 0, \quad \|\nabla u_n\|_{L^2} \not\to 0$$

Daremos un ejemplo. Sea $\Omega = (0, 1)$, y consideremos la sucesión de funciones

$$u_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n\pi x)$$

Entonces $u_n \in H_0^1(0, 1)$, puesto que $u_n(0) = u_n(1) = 0$ y $u_n \in C^\infty(0, 1)$. Ahora calculemos su norma

$$\|u_n\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{n}\sin(n\pi x)\right)^2 dx = \frac{1}{n^2}\int_0^1 \sin^2(n\pi x)dx = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2n^2}$$

Por lo tanto, $\|u_n\|_{L^2} \to 0$. Ahora calculemos la norma de su gradiente, el cual viene dado por

$$u_n'(x) = \frac{1}{n}\cdot n\pi\cos(n\pi x) = \pi\cos(n\pi x)$$

Y entonces su norma es

$$\|\nabla u_n\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \pi^2 \cos^2(n\pi x)dx = \pi^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

De lo que tenemos $\|u_n\|_{L^2} \not\to 0$, y por tanto no puede existir dicha constante α de coercividad, y por tanto no es coercivo.

Así, el sistema es invertible para $\lambda = \{1, \frac{1}{2}\}$, pero no lo es para $\lambda = 0$.

(e) Veamos que $a(u,v)$ no satisface la condición inf-sup sobre $H_0^1(\Omega)$, es decir, que

$$\inf_{u\in H_0^1(\Omega),\, u\neq 0} \sup_{v\in H_0^1(\Omega),\, v\neq 0} \frac{a(u,v)}{\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}} = 0$$

Para ello, consideremos Ω, u_n tales como en la pregunta anterior. De lo que recordamos que

$$\|u_n\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}n}, \quad \|u_n\|_{H^1} = \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}n} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Sea $v \in H_0^1(0,1)$ arbitrario, de Cauchy-Schwarz y de la definición de $\|\cdot\|_{H^1}$ se tiene que

$$|a(u_n,v)| = \left|\int_0^1 u_n(x)v(x)\,dx\right| \leq \|u_n\|_{L^2}\cdot\|v\|_{L^2} \leq \|u_n\|_{L^2}\cdot\|v\|_{H^1} \implies \frac{a(u_n,v)}{\|v\|_{H^1}} \leq \|u_n\|_{L^2}$$

Y entonces

$$\frac{a(u_n,v)}{\|v\|_{H^1}\|u_n\|_{H^1}} \leq \frac{\|u_n\|_{L^2}}{\|u_n\|_{H^1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}n}}{\frac{1}{\sqrt{2}n} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \pi} = \frac{1}{1+\pi n}$$

Como dicha propiedad se cumple para cualquier v entonces podemos considerar el supremo sobre todos los v, de lo que se concluye que

$$\sup_{v\in H_0^1(0,1), v\neq 0} \frac{a(u_n,v)}{\|v\|_{H^1}\|u_n\|_{H^1}} \leq \frac{\|u_n\|_{L^2}}{\|u_n\|_{H^1}} = \frac{1}{1+\pi n}$$

Pero como $\frac{1}{1+\pi n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, y como la sucesión $u_n \neq 0$ está en $H_0^1(0,1)$ entonces tomando ínfimo sobre todo el espacio incluye a la sucesión, y entonces

$$\inf_{u\in H_0^1(0,1), u\neq 0} \sup_{v\in H_0^1(0,1), v\neq 0} \frac{a(u,v)}{\|v\|_{H^1}\|u\|_{H^1}} = 0$$

Esto es, la forma bilineal $a(u,v)$ no satisface la condición inf-sup en $H_0^1(0,1)$ cuando $\lambda = 0$, y entonces es posible que la solución no sea única para $\lambda = 0$.

(f) Para el problema semi-discreto voy a considerar el esquema implícito en el tiempo por simplicidad. Recordemos que la formulación débil consiste en encontrar $\rho^n \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \frac{\rho^n - \rho^{n-1}}{\Delta t} v\, dx + \int_\Omega K\nabla\rho^n \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega \theta(t^n) v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Despejando

$$\frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \rho^n\, v\, dx + \int_\Omega K\nabla\rho^n \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega \theta(t^n) v\, dx + \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \rho^{n-1}\, v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Y así considerando

$$a(\rho^n, v) = \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \rho^n\, v\, dx + \int_\Omega K\nabla\rho^n \cdot \nabla v\, dx$$

Y

$$L(v) = \int_\Omega \theta(t^n) v\, dx + \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \rho^{n-1}\, v\, dx$$

Tenemos que la formulacíon débil corresponde a encontrar $\rho^n \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Como no conocemos la geometría $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de forma explícita, ni siquiera cierta estructura o propiedad interesante, vamos a asumir que podemos encontrar una triangulación $\mathcal{T}_h$ del dominio Ω, con parámetro de malla h.

En base a dicha triangulación, podemos definir el espacio de elementos finitos como

$$V_h := \{v_h \in H_0^1(\Omega) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T)\ \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

donde $P_1(T)$ es el espacio de polinomios en d variables de grado a lo más 1 (esquema lineal).

Y entonces el problema discreto consiste en para cada instante de tiempo t^n (dado ρ_h^{n-1} obtenido en el tiempo anterior) encontrar $\rho_h^n \in V_h$ tal que

$$\frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \rho_h^n\, v_h\, dx + \int_\Omega K\nabla\rho_h^n \cdot \nabla v_h\, dx = \int_\Omega \theta(t^n) v_h\, dx + \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \rho_h^{n-1}\, v_h\, dx \quad \forall v_h \in H_0^1(\Omega)$$

Y entonces para cada tiempo (discreto) podemos encontrar la solución para el siguiente tiempo resolviendo este sistema discreto para el espacio, y por tanto tenemos un problema completamente discreto que aproxima el problema original. Notar que las integrales las podemos calcular puesto que las funciones viven en V_h o haciendo una cuadratura.

Sea $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ una base para V_h, entonces buscamos los ponderadores tales que

$$\rho_h^n = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j$$

Y entonces si consideramos $v_h = \varphi_i$ tenemos que de la ecuación resulta

$$a\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j, \varphi_i\right) = L(\varphi_i)$$

Y si hacemos esto para cada φ_i entonces obtenemos un sistema de ecuaciones N que nos permite encontrar los valores para los N α_j. Esto nos abre la puerta para resolver este problema computacionalmente.