MAT2605, Cálculo Científico I, 2021-2

Tarea 5

Entrega para el 1 de octubre de 2021

Pueden discutir los problemas con sus compañeros. Sin embargo, sus entregas, tanto la parte escrita como los códigos, deben ser individuales. **No** está permitido copiar las respuestas de alguien más ni dejar que otros copien sus respuestas. Su entrega debe estar compuesta por un único archivo en formato `.pdf` que incluya todas las respuestas y todos los gráficos que se están pidiendo, junto con un archivo `.zip` que incluya todos los archivos `.m` que produjeron y utilizaron durante esta tarea. Estos dos archivos deben ser subidos en Canvas. Si hay más de una línea en un gráfico, utilice distintos estilos de línea o distintos colores para diferenciarlas e incluya leyendas. No se olvide de nombrar todos sus ejes y líneas en las leyendas.

1. (a) Muestre que los polinomios de Chebyshev, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, satisfacen las siguientes propiedades:

   $\boxed{\text{2 pts.}}$ (i) $T_n(1) = 1$ y $T_n(-1) = (-1)^n$ para $n = 0, 1, \ldots$.

   $\boxed{\text{2 pts.}}$ (ii) $T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}\big(T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)\big)$, para $m > n \geq 0$.

   $\boxed{\text{3 pts.}}$ (iii) $2T_n(x) = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1}$, para $n \geq 1$.

   $\boxed{\text{3 pts.}}$ (iv) $\langle T_n, T_n \rangle_w = \int_{-1}^{1} \big(T_n(x)\big)^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ si $n \geq 1$ y $\langle T_0, T_0 \rangle_w = \pi$.

   $\boxed{\text{3 pts.}}$ (v) $T_n(x)$ satisface la ecuación diferencial $(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2 T_n(x) = 0$ para $n \geq 0$.

   (b) Sea $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = c_0 + c_1 T_1(x) + \cdots + c_n T_n(x)$ un polinomio de grado a lo sumo n tanto el la base de polinomios de Chebyshev como con la base canónica de monomios. Suponga que quisiéramos que $P_n(x)$ interpolara $f(x)$ en los nodos $x_0, \ldots, x_n$, por lo que $P_n(x_j) = f(x_j)$ para todo $j = 0, \ldots, n$. Encontrar los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ lleva al sistema lineal escrito en el Problema 4 de la Tarea 2, que involucra invertir la matriz $(n+1) \times (n+1)$ de Vandermonde (usual), V_n. Por otro lado, encontrar los coeficientes $c_0, \ldots, c_n$ lleva al sistema lineal escrito abajo, que involucra invertir la matriz $(n+1) \times (n+1)$ de Chebyshev-Vandermonde, C_n,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_0(x_0) & T_1(x_0) & \cdots & T_n(x_0) \\ T_0(x_1) & T_1(x_1) & \cdots & T_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0(x_n) & T_1(x_n) & \cdots & T_n(x_n) \end{bmatrix}}_{C_n} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

   $\boxed{\text{7 pts.}}$ (i) Para $n = 100$ use la rutina `cond(A)` de MATLAB para investigar el número de condición de V_n y C_n cuando los $n+1$ nodos en $[-1, 1]$ son:

   (I) equidistantes, $x_j = -1 + \frac{2j}{n}$ para $j = 0, \ldots, n$ (en MATLAB `x=-1:2/n:1`);

   (II) puntos de Chebyshev (de primer tipo), $x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right)$ para $j = 0, \ldots, n$ (en MATLAB `x=cos((2*(0:n)+1)*pi/(2*(n+1)))`, que son equivalentes a $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2(n+1)}\pi\right)$ para $k = 1, \ldots, n+1$ (i.e. tomando $k = j+1$), y que a veces se muestra en algunos libros;

   (III) puntos de Chebyshev de segundo tipo (iguales a los del Problema 2 de la Tarea 2), $x_j = \cos\left(\frac{j}{n}\pi\right)$ para $j = 0, \ldots, n$ (en MATLAB `x=cos((0:n)*pi/n)`).

   Tabule los números de condición en la siguiente tabla 2×3:

	(I)	(II)	(III)
`cond(V)`			
`cond(C)`			

   El número de condición representa la tasa de errores relativos entre una entrada y una salida, por lo que números de condición muy grandes típicamente resultan en errores grandes. ¿Qué combinación de nodos y sistema lineal recomienda usar?

   $\boxed{\text{5 pts.}}$ (ii) Use la matriz de Chebyshev-Vandermonde, C_n, y los puntos de Chebyshev (de primer tipo) para calcular los primeros $n = 500$ coeficientes de Chebyshev de las funciones $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|^7$, y $h(x) = 1/(1 + 25x^2)$ (use `c=C\f` en MATLAB, donde `C` es la matriz, `f` es el vector de muestras de la función, y `c` es el vector de coeficientes resultante). Grafique el valor absoluto de los coeficientes en un único gráfico semilog-y (asegúrese de poder distinguir entre las líneas). Brevemente discuta como las tasas de convergencia de los coeficientes se relaciona a la regularidad o "suavidad" de la función.

2. (a) Sea f una función diferenciable en x_0. Su derivada, $f'(x_0)$, puede ser aproximada numéricamente usando fórmulas que únicamente involucran el valor de f en una plantilla de nodos en la vecindad de x_0. La diferencia entre $f'(x_0)$ y la aproximación numérica (calculada con aritmética exacta) se llama el error de truncación, τ.

6 pts. (i) Deduzca la única fórmula de 4 puntos de orden $\mathcal{O}(h^3)$ (i.e., el error de truncación es de la forma $\tau = \mathcal{O}(h^3)$) que utiliza la plantilla $(x_0 - h, x_0, x_0 + h, x_0 + 2h)$. Puede asumir que la función es suave (i.e. $f \in C^\infty([a, b])$).

6 pts. (ii) La fórmula más precisa que usa la plantilla $(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, x_0 + 3h, x_0 + 4h)$ se llama la fórmula de 5 puntos de frontera inicial y está dada por la siguiente expresión,

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f(x_0 + 4h) + 16f(x_0 + 3h) - 36f(x_0 + 2h) + 48f(x_0 + h) - 25f(x_0)}{12h}.$$

Asumiendo que la función es suave (i.e. $f \in C^\infty([a, b])$), verifique que el error de truncación toma la forma $\tau = Ch^4 f^{(5)}(x_0) + \ldots$ y encuentre C (es decir, $\tau = \mathcal{O}(h^4)$).

(b) Desafortunadamente las fórmulas utilizadas para diferenciar numéricamente a veces no producen los resultados esperados. Esto se debe a que la fórmulas tienen hipótesis que a veces no se satisfacen, como el hecho de que se asume que se computan con aritmética exacta.

4 pts. (i) Considere la función $f(x) = \sin(x)$ en el punto $x_0 = 0.5$ donde $f'(x_0) = \cos(x_0)$. Usando el computador, aproxime $f'(x_0)$ usando la fórmula de diferencias adelantadas para distintos valores de h entre 10^{-10} y 10^{-6} (`h=1e-10:0.25e-10:1e-6`). Grafique el error *absoluto* entre el valor exacto y la aproximación para cada valor de h en un gráfico log-log. ¿Qué sucede? Explique los resultados.

6 pts. (ii) Con la función $f(x) = \sin(x)$ en el punto $x_0 = 0.5$ donde $f'(x_0) = \cos(x_0)$, ahora use el computador para aproximar $f'(x_0)$ usando varias fórmulas de diferenciación numérica para distintos valores de h entre 10^{-3} y 10^{-1} (`h=1e-3:0.5e-3:1e-1`). Use la fórmula de diferencias adelantadas, la fórmula de diferencias centradas, y la fórmula de 5 puntos centrada, dadas por las siguientes expresiones:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \qquad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$
$$f'(x_0) \approx \frac{-f(x_0 + 2h) + 8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{12h}.$$

En el mismo gráfico log-log, grafique el error absoluto entre el valor exacto de la derivada y cada una de las aproximaciones. Utilice la rutina de MATLAB `polyfit` para encontrar el orden de convergencia de cada aproximación. ¿Cuáles son? ¿Tienen sentido sus resultados? *Consejo*: Use funciones "anónimas" en MATLAB para simplificar su código. Por ejemplo defina la función `f=@(x) sin(x)` (o `f=@(x) x.*abs(x)`) que luego permite evaluar las fórmulas más facilmente (e.g. `df=(f(x0+h)-f(x0))./h`, etc.).

3 pts. (iii) Repita el mismo procedimiento en (ii) pero con la función $f(x) = x|x|$ que en $x_0 = 0$ tiene la derivada $f'(0) = 0$. ¿Cuáles son los órdenes de convergencia de cada una de las tres aproximaciones? ¿Puede explicar los resultados?