Tarea 1

Vicente Opazo

November 8, 2025

1

1.1

(a) De aquí se tiene que $s = 0$, $c = 2^{10} + 2^3 + 2 = 1034$ y $f = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} = \frac{147}{256}$
Por lo tanto el número es $(-1)^0 \cdot 2^{1034-1023} \cdot (1 + \frac{147}{256}) = 2048 \cdot (\frac{403}{256}) = \frac{825344}{256} = 3224$

(b) Este caso es similar al anterior, con la diferencia de que $s = 1$, por lo que es -3224

(c) De aquí se tiene que $s = 0$, $c = 2^{10} - 1 = 1023$ y $f = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} = \frac{147}{256}$
Por lo tanto el número es $(-1)^0 \cdot 2^{1023-1023} \cdot (1 + \frac{147}{256}) = \frac{403}{256} = 1.57421875$

(d) En este caso $s = 0$, $c = 1023$ y $f = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{2^{52}}$
Por lo tanto el número es $(-1)^0 \cdot 2^{1023-1023} \cdot (1 + \frac{147}{256} + \frac{1}{2^{52}}) = \frac{403}{256} + \frac{1}{2^{52}}$
$= 1.57421875 + \frac{1}{2^{52}} \approx 1.5742187500000002$

1.2

El épsilon de la máquina es el menor número f positivo que se puede conseguir, entonces en este caso $\epsilon_{mach} = \frac{1}{2^{23}} = 2^{-23} \approx 1.19209 \times 10^{-7}$
De lo anterior se puede concluir que se espera que la máquina de 32-bits tenga entre 7 y 8 dígitos de precisión

2

(a) En este caso se tienen problemas cuando $\sqrt{x^2+1} \approx x$, lo que ocurre cuando x es positivo y grande. Una expresión alternativa es

$$\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

(b) En este caso se tienen problemas cuando $\ln x \approx \ln y \to x \approx y$. Una expresión alternativa se obtiene aplicando propiedades de logaritmos.

$$\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$$

(c) En este caso se tienen problemas cuando $\sin x \approx x$, lo que ocurre cuando x es positivo y pequeño. Una expresión alternativa viene dada por la expansión de Taylor para $x = 0$.

$$x^{-3}(\sin x - x) \approx x^{-3}(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!}) = \frac{x}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \frac{x^6}{9!}$$

(d) En este caso se tienen problemas cuando $\sin x \approx \tan x \to x \approx k\pi$ para algún $k \in Z$. Con un mayor grado de error para los k pares. Una expresión alternativa es

$$\sin x - \tan x = \sin x - \tan x \cdot \frac{\sin x + \tan x}{\sin x + \tan x} = \frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\sin x + \tan x} = \frac{\sin^2 x - \sec^2 x + 1}{\sin x + \tan x}$$

(e) En este caso se tienen problemas cuando $x \approx -\sqrt{x^2+1}$, esto es, cuando x tiende al infinito negativo. Una expresión alternativa es

$$\ln{(x+\sqrt{x^2+1})} = \ln{((x+\sqrt{x^2+1})\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}})} = \ln{(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x})} = -\ln{(\sqrt{x^2+1}-x)}$$

3

(a) $2*A+transpose(C)$

(b) Imposible, ya que C es de 3×2 y B de 3×3, y para poder sumarlas deben ser de igual tamaño

(c) $3*B-2*D$

(d) $A*D$

(e) $C*A)$

(f) $A*C$

(g) $B*D$

(h) Imposible, ya que C es de 3×2 y B de 3×3, y para poder multiplicarlas en ese orden la segunda componente de C debe ser igual a la primera de B

(i) $transpose(C)*B$

(j) Imposible, porque A es de 2×3 y el determinante solo existe si una matriz es cuadrada

(k) $det(D)$

(l) $A*transpose(A)$

(m) $transpose(A)*A$

(n) $det(A*transpose(A))$

(o) $det(transpose(A)*A)$

4

4.1

Lo primero es notar que $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, entonces

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 1^{2k+1}}{2k+1} \rightarrow \pi = \sum_{k=0}^{\infty}4\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

4.2

Lo primero es notar que $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, entonces

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}^{2k+1}}{2k+1} \rightarrow \pi = \sum_{k=0}^{\infty}6\frac{(-1)^k\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}^{2k+1}}{2k+1}$$

4.3

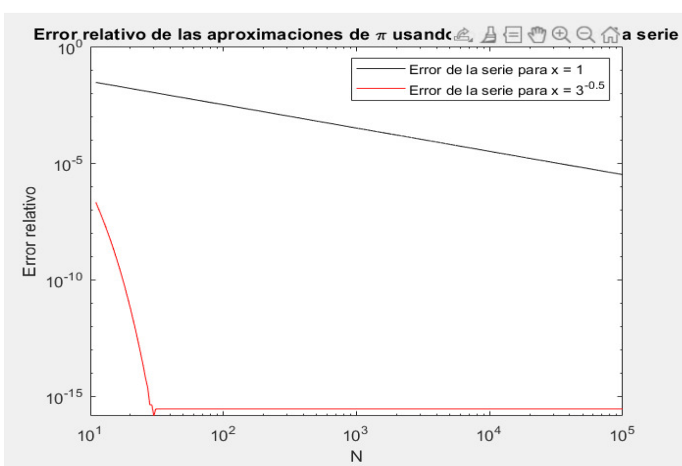
A continuación se presenta el código usado en MATLAB

```
Nmax=100000;
a=zeros(1,Nmax+1);
b=zeros(1,Nmax+1);
n = zeros(1, Nmax + 1);
errora=zeros(1, Nmax + 1);
errorb=zeros(1, Nmax + 1);
for k=0:Nmax
    n(k+1) = k+1;
    if k==0
        a(k+1)= 4;
        b(k+1)= 6/sqrt(3);
        errora(k+1) = abs(a(k+1) - pi)/pi;
        errorb(k+1) = abs(b(k+1) - pi)/pi;
    else
        a(k+1)=a(k)+ 4*(((-1)^k)/(2*k+1));
        b(k+1)=b(k)+ 6*(((-1)^k)*((1/sqrt(3))^(2*k+1))/(2*k+1));
        errora(k+1) = abs(a(k+1) - pi)/pi;
        errorb(k+1) = abs(b(k+1) - pi)/pi;
    end
end

loglog(n(11:Nmax+1), errora(11:Nmax+1), '-k', n(11:Nmax+1)
        , errorb(11:Nmax+1), '-r')
title('Error relativo de las aproximaciones de \pi usando
        los N t rminos de la serie')
xlabel('N')
ylabel('Error relativo')
legend({'Error de la serie para x = 1','Error de la serie
        para x = 3^{-0.5}'},'Location','northeast')

p = polyfit(log(n(11:Nmax+1)), log(errora(11:Nmax+1)), 1);
```

Y el gráfico obtenido fue el siguiente



La serie que mejor converge al valor de π es la con $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, y el error relativo se estanca en 2.8271×10^{-16}. Esto ocurre porque a partir de $N = 34$ los valores de dichos terminos de la sumatoria son menores que el epsilon de la máquina, y como π es del orden de las unidades, no hay suficiente precisión para guardar tantas cifras significativas, por lo que la máquina considera el término como si fuera simplemente 0.

El código para encontrar p se encuentra en el ya adjuntado anteriormente, y el valor de p obtenido es de -1.

5

5.1

Veamos que $lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ es finito.
Lo primero es notar que $f(0) = \frac{0}{0}$, así que podemos usar l'hopital, obteniendo que

$$lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$$

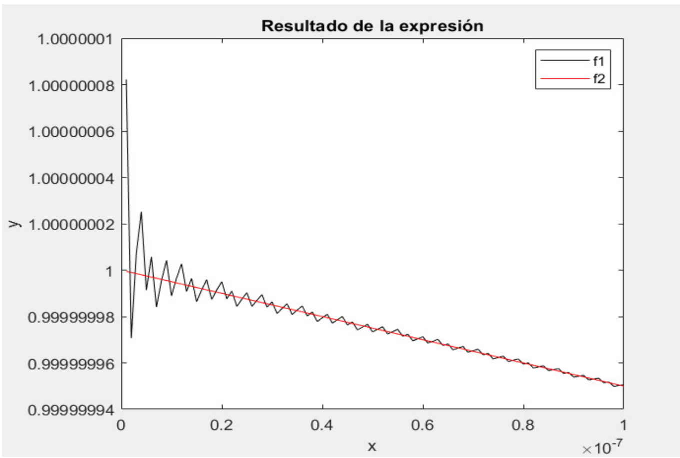
Y con esto se tiene que f tiene una singularidad removible

5.2

El código de MATLAB usado se adjunta a continuación.

```
x = 1e-9:1e-9:1e-7;
y=1+x;
f1 = log(1+x)./x;
f2=log(y)./(y-1);
plot(x, f1, '-k', x, f2, '-r')
title('Resultado de la expresi n')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend({'f1', 'f2'}, 'Location', 'northeast')
```

Y el gráfico obtenido es el siguiente.



A partir del gráfico se puede ver que f_2 aproxima de mejor manera a f, puesto a que f_1 oscila cerca de f, mientras que f_2 pareciera ser idéntica.
El error se produce en la división, ya que al cambiar x por $(1 + x - 1)$ el f_1 se comporta idéntico a f_2