ICS3143 2024-2
Tarea 2

1. **(6 puntos)** Demuestre que si $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un polítopo con más de un elemento, entonces P es igual a la envoltura convexa de la unión de sus facetas.

2. **(10 puntos)** Sea $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \sum_{i\in N} \min\{x_i, y_i\} \geq 1\}$.

   (a) **(6 puntos)** Determine una descripción minimal de P.

   (b) **(4 puntos)** Verifique si $\mathrm{rec}(P) = \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$.

3. **(18 puntos)** Dados $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$, sean $S = \{x \in \{0, 1\}^n : \ a^\top x \leq b\}$ y $P = \mathrm{conv}(S)$. Suponga que $a > 0$, $b > 0$ y que P es de dimensión completa.

   Sean $C \subseteq N$ un cubrimiento, $c = |C|$ y $\lambda = \sum_{i\in C} a_i - b > 0$ su exceso. Sean $C_1 = \{i \in C : \ a_i < \lambda\}$, $C_2 = \{i \in C : \ a_i \geq \lambda\}$, $c_1 = |C_1|$ y $c_2 = |C_2|$. Sin pérdida de generalidad, suponga $C_1 = \{1, \ldots, c_1\}$, $C_2 = \{c_1 + 1, \ldots, c\}$, $a_1 \geq \cdots \geq a_{c_1}$ y $a_{c_1+1} \geq \cdots \geq a_c$.

   (a) **(4 puntos)** Sean $j, k \in C_1$ tales que $a_j + a_k > \lambda$. Sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\hat{x}_i = 1$ para todo $i \in C \setminus \{j, k\}$, $\hat{x}_j = 0$ y $\hat{x}_k = \frac{a_j + a_k - \lambda}{a_k}$. Verifique que $\hat{x}$ es un vértice de la relajación lineal de S.

   (b) **(6 puntos)** Verifique que la desigualdad

   $$\sum_{i\in C_1} x_i + 2\sum_{i\in C_2} x_i \leq c_1 + 2c_2 - 2 \quad (*)$$

   es válida para S. Para ello, analice los casos (i) $x_i = 1$ para todo $i \in C_1$, (ii) $x_i = 1$ para todo $i \in C_2$, y (iii) existen $i_1 \in C_1$ e $i_2 \in C_2$ tales que $x_{i_1} = x_{i_2} = 0$.

   (c) **(8 puntos)** Demuestre que si $C = N$, $c_1 \geq 3$, $\lambda \leq a_1 + a_{c_1}$ y $\lambda \leq a_2 + a_3$, entonces $(*)$ define una faceta de P. Para ello, determine apropiadamente c_2 elementos de S con exactamente un 0 y c_1 elementos de S con exactamente dos 0's.

4. **(26 puntos)** En relación a la pregunta anterior, dada una solución $\hat{x}$ de la relajación lineal de S, podemos determinar una restricción $(*)$ violada por $\hat{x}$ resolviendo el problema de separación

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i\in N} (\hat{x}_i - 1)w_{1i} + 2\sum_{i\in N} (\hat{x}_i - 1)w_{2i} + 2 \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i\in N} a_i(w_{1i} + w_{2i}) \geq b + 1 \\
& a_k w_{1k} \leq \sum_{i\in N} a_i(w_{1i} + w_{2i}) - b - 1 \quad \forall k \in T \\
& a_k w_{2k} \geq \sum_{i\in N} a_i(w_{1i} + w_{2i}) - b - M(1 - w_{2k}) \quad \forall k \in T \\
& w_{1i} + w_{2i} \leq 1 \quad \forall i \in S, \ j \in T \\
& w_1, w_2 \in \{0, 1\}^N,
\end{aligned}$$

donde w_1 y w_2 determinan C_1 y C_2, respectivamente, y $M = \sum_{i \in N} a_i - b > 0$.

Considere ahora un problema de la forma

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} (f_{ij} y_{ij} + c_{ij} x_{ij}) \\
\text{s.a} \quad & \sum_{j \in T} x_{ij} = \alpha_i \quad \forall i \in S \\
& \sum_{i \in S} x_{ij} = \beta_j \quad \forall j \in T \\
& x_{ij} \leq m_{ij} y_{ij} \quad \forall i \in S,\ j \in T \\
& x, y \in \{0,1\}^{S \times T},
\end{aligned}$$

donde todos los coeficientes son enteros positivos, $\sum_{i \in S} \alpha_i = \sum_{j \in T} \beta_j$ y $m_{ij} = \min\{\alpha_i, \beta_j\}$. Notemos que las desigualdades $\sum_{j \in T} m_{ij} y_{ij} \geq \alpha_i$ para $i \in S$ y $\sum_{i \in S} m_{ij} y_{ij} \geq \beta_j$ para $j \in T$ son válidas. Definiendo $z_{ij} = 1 - y_{ij}$, obtenemos las restricciones tipo mochila $\sum_{j \in T} m_{ij} z_{ij} \leq \sum_{j \in T} m_{ij} - \alpha_i$ para $i \in S$ y $\sum_{i \in S} m_{ij} z_{ij} \leq \sum_{i \in S} m_{ij} - \beta_j$ para $j \in T$, las cuales pueden ser utilizadas para generar cortes del tipo $(*)$.

En el archivo `tarea02.py` se presenta una implementación del problema anterior junto con la generación de cortes a partir de las restricciones tipo mochila para $i \in S$ mediante un callback. Dicho código se divide en cuatro bloques.

(a) **(6 puntos)** Explique claramente el Bloque 3, indicando cómo se relaciona con el problema a resolver y con el problema de separación.

(b) **(2 puntos)** Revise la documentación de Gurobi e indique por qué es necesario que el parámetro `PreCrush` tome el valor 1 en el Bloque 4.

(c) **(6 puntos)** Explique claramente el Bloque 1, indicando cómo se relaciona con el Bloque 3.

(d) **(6 puntos)** Observe qué pasa si se cambia la tolerancia de violación inicial de 0,001 y si se elimina la condición `model.cbGet(GRB.Callback.MIPNODE_NODCNT) == 0`. Experimente con distintas instancias y comente sobre los resultados obtenidos.

(e) **(6 puntos)** Extienda los Bloques 3 y 1 para adicionalmente generar cortes a partir de las restricciones tipo mochila para $j \in T$. Experimente nuevamente y comente sobre los resultados obtenidos.