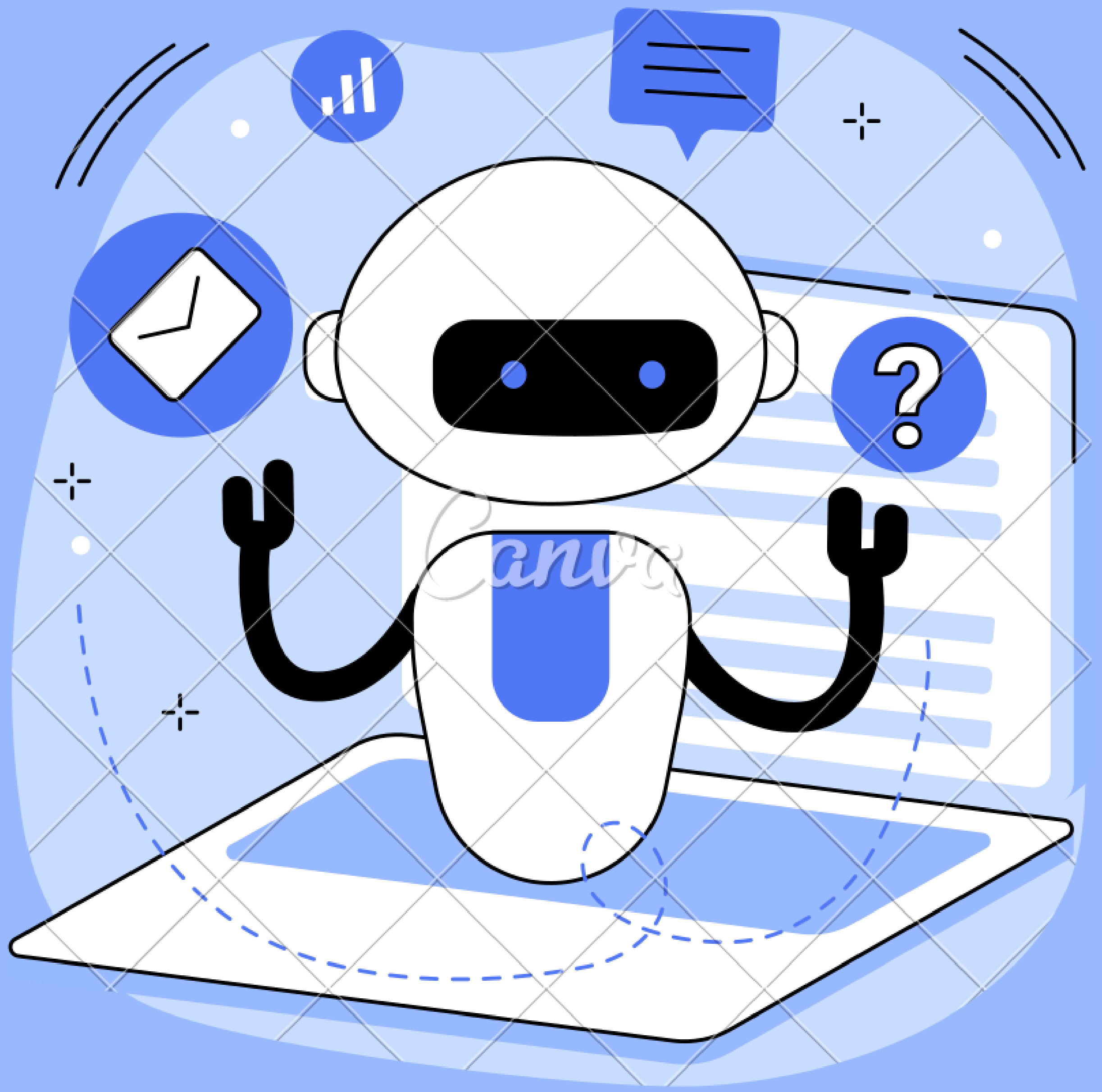
PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

imcuc
Instituto de Ingeniería Matemática
y Computacional

CONTROL ÓPTIMO

Regido por la Ecuación de Poisson

ÍNDICE



MOTIVACIÓN

PROBLEMA

¿Cómo calentamos una habitación eficientemente?

PROBLEMA

- Alcanzar un perfil de temperatura deseado
- Usar la menor cantidad posible de energía
- Equilibrar nuestro objetivo y su costo

MODELAMIENTO

- y : temperatura de la habitación
- u : energía introducida al sistema
- z_d : perfil de temperatura deseado

Ecuación para la temperatura $-\Delta y = u$

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

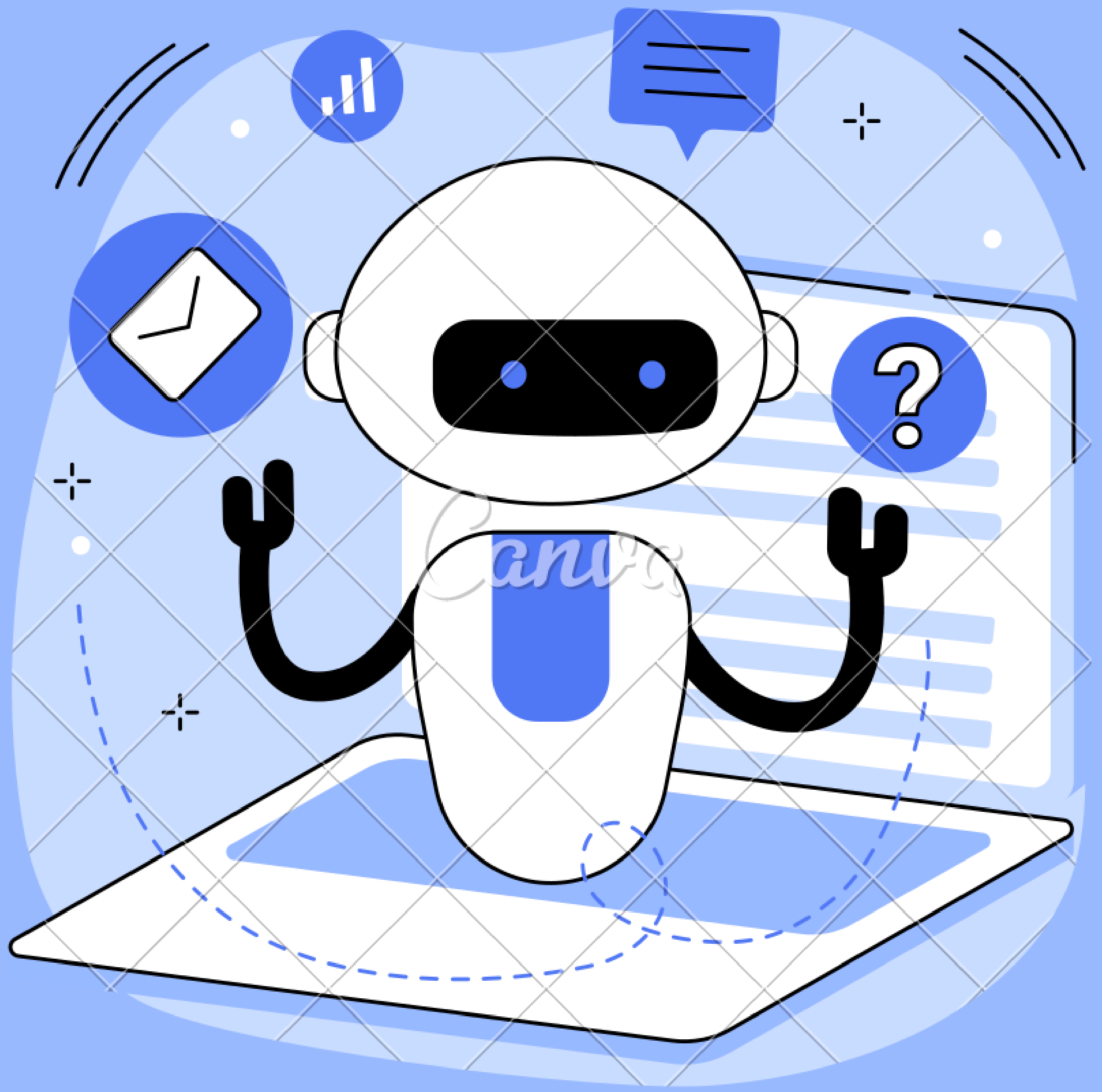
$$
\begin{aligned}
\min_{y,u} \quad & \frac{1}{2}\|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\text{s.a.} \quad & -\Delta y = u \quad \text{en } \Omega, \\
& y = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

¿Qué es β?

FORMULACIÓN: CONTROL RESTRINGIDO

$$
\begin{aligned}
\min_{y,u} \quad & \frac{1}{2}\|y - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\text{s.a.} \quad & -\Delta y = u \quad \text{en } \Omega, \\
& y = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \\
& a \leq u \leq b \quad \text{en } \Omega,
\end{aligned}
$$

¿Cómo interpretamos a y b?



ANÁLISIS CONTINUO

ECUACIÓN DE ESTADO

$$-\Delta y = u \quad \text{en } \Omega, \qquad y = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Se expresa en formulación débil como

$$a(y,v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Donde

$$a(y,v) = \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v \, dx \qquad F(v) = \int_\Omega uv \, dx$$

Por Lax-Milgram existe solución única para todo $u \in L^2(\Omega)$

EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL PAR ÓPTIMO

La función objetivo se puede escribir como

$$J(u) = \frac{1}{2}q(u,u) - L(u) + c$$

La condición de primer orden se caracteriza por la desig. variacional

$$J'(\hat{u})(v) \geq 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL PAR ÓPTIMO

Para el problema con control restringido:

- El dominio de u se restringe a un conjunto convexo y cerrado.

.

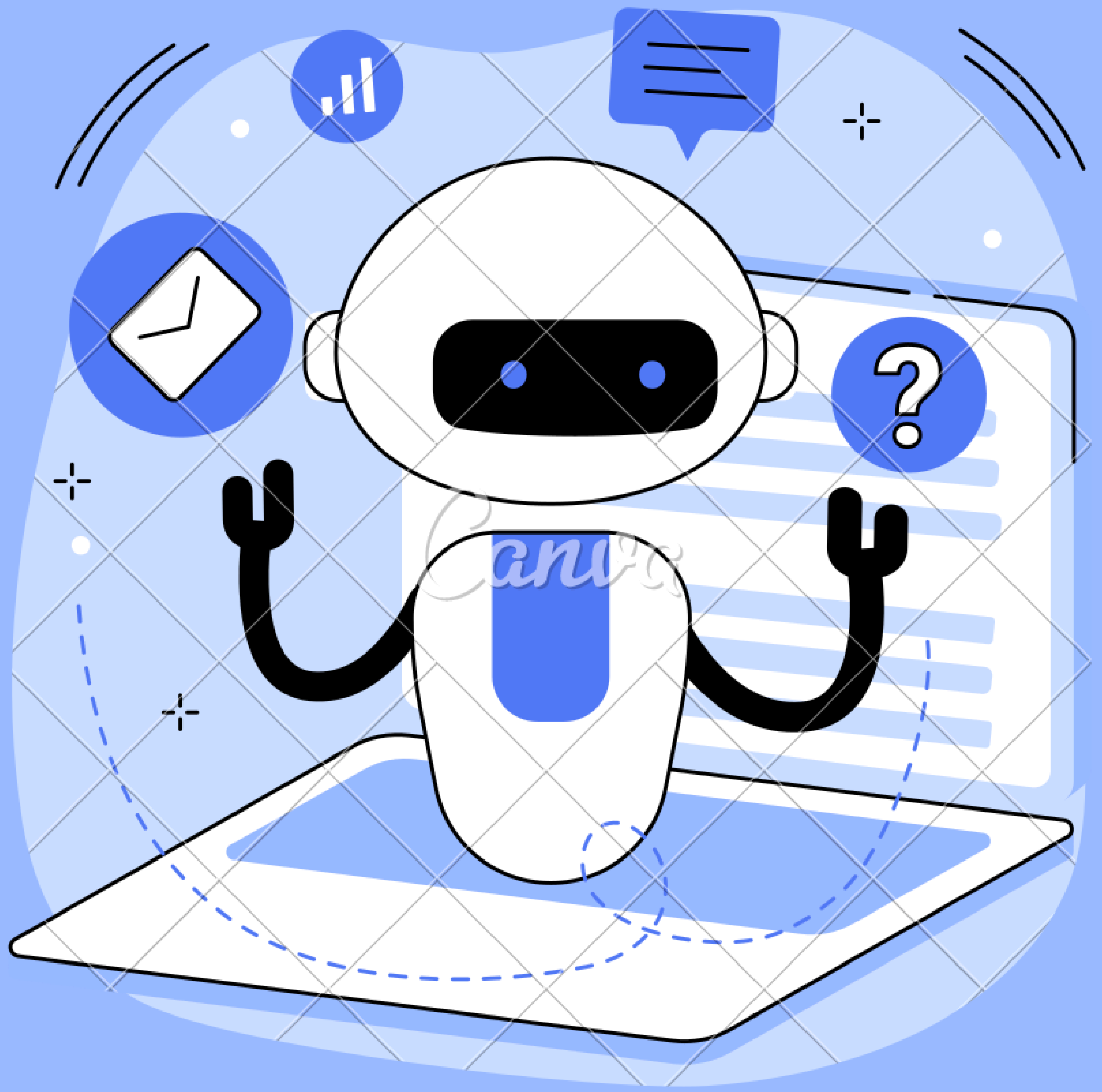
- Elipticidad en espacios de Hilbert implican fuerte-convexidad.

- El teorema de Stampacchia garantiza que la condición de optimalidad (desig. variacional) se cumple para un único control.

CARACTERIZACIÓN DEL ÓPTIMO

Al introducir el **estado adjunto** se puede expresar el óptimo como un sistema de EDPs

$$
\begin{cases}
-\Delta \hat{y} = \hat{u} & \text{en } \Omega, \\
-\Delta \hat{p} = \hat{y} - z_d & \text{en } \Omega, \\
\hat{p} + \beta \hat{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\
\hat{y} = \hat{p} = 0 & \text{en } \Gamma.
\end{cases}
$$



ANÁLISIS DISCRETO

TENEMOS DOS ESTRATEGIAS

- Optimizar y luego Discretizar
- Discretizar y luego Optimizar

OPTIMIZAR Y LUEGO DISCRETIZAR

$$\begin{cases} -\Delta \hat{y} = \hat{u} & \text{en } \Omega, \\ -\Delta \hat{p} = \hat{y} - z_d & \text{en } \Omega, \\ \hat{p} + \beta \hat{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \hat{y} = \hat{p} = 0 & \text{en } \Gamma. \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 & \mathbb{A}^\intercal \\ 0 & \beta \mathbb{N} & -\mathbb{B}^\intercal \\ \mathbb{A} & -\mathbb{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{M}\mathbf{z}_d \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

DISCRETIZAR Y LUEGO OPTIMIZAR

$$\min \tilde{J}_h(\mathbf{y},\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{z}_d)^\intercal \mathbb{M}(\mathbf{y}-\mathbf{z}_d) + \frac{\beta}{2}\mathbf{u}^\intercal \mathbb{N}\mathbf{u}$$

$$\text{s.a.} \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_u}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_y} : \quad \mathbb{A}\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{u}.$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 & \mathbb{A}^\intercal \\ 0 & \beta\mathbb{N} & -\mathbb{B}^\intercal \\ \mathbb{A} & -\mathbb{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{M}\mathbf{z}_d \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

CONMUTATIVIDAD DE LAS ESTRATEGIAS

¿Qué pasa si elegimos espacios distintos para p, y al optimizar y luego discretizar?

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{T}} & 0 & \tilde{\mathbb{A}} \\ 0 & \beta\mathbb{N} & -\tilde{\mathbb{B}}^\intercal \\ \mathbb{A} & -\mathbb{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{T}}\mathbf{z}_d \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

En este caso las estrategias no conmutan.

CONVERGENCIA

Si utilizamos un esquema FEM tal que:

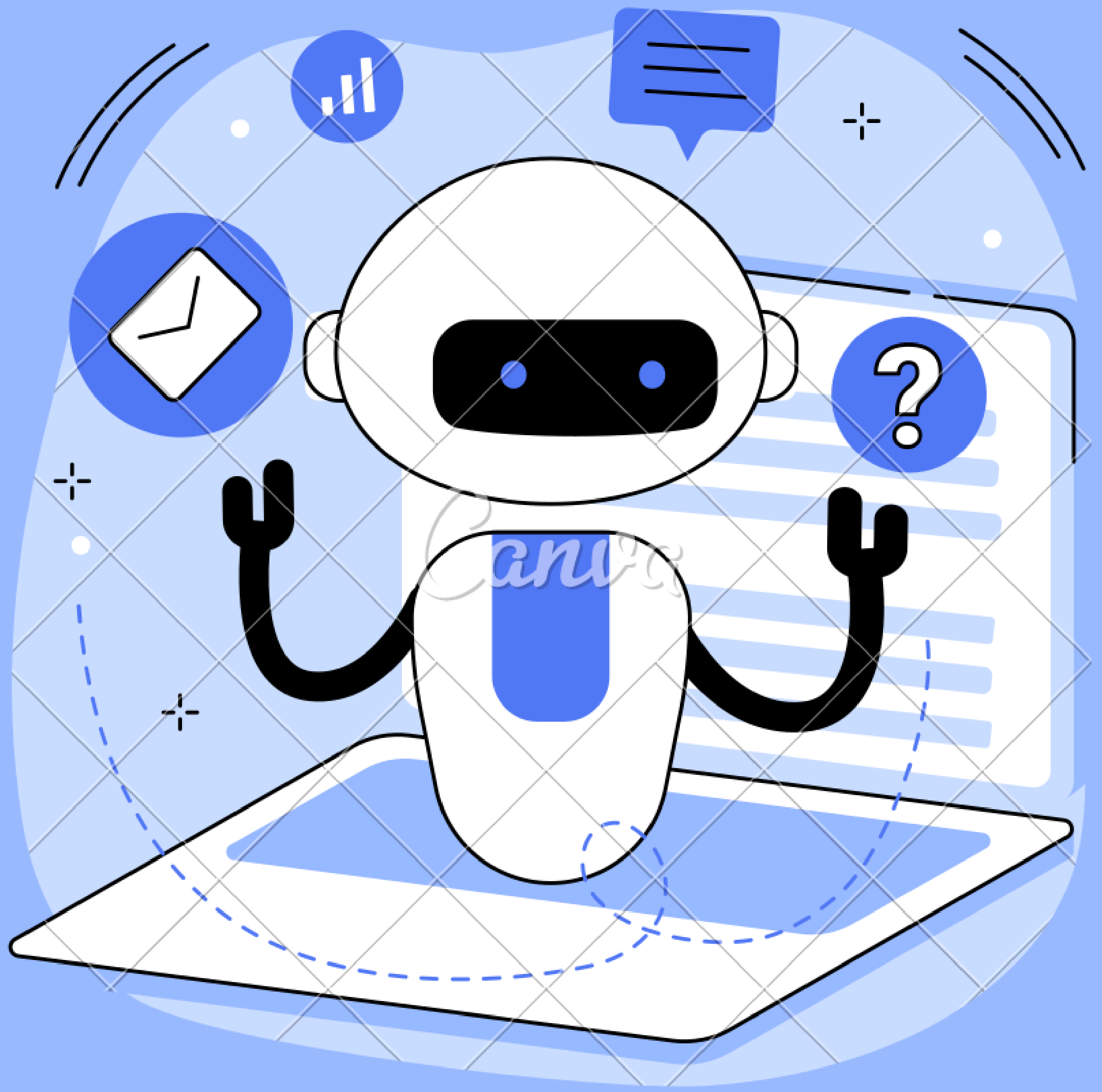
- Los elementos para y, p son de grado r
- Los elementos para u son de grado s

Entonces

$$\|y - y_h\|_V + \|p - p_h\|_V + \|u - u_h\|_{\mathcal{U}} \leq c_1 h^r (|y|_{H^{r+1}(\Omega)} + |p|_{H^{r+1}(\Omega)}) + c_2 h^s |u|_{H^s(\Omega)}$$

Para

$$y, p \in H^{r+1}(\Omega),\ u \in H^s(\Omega),\ r \geq 1,\ s \geq 0.$$



MÉTODO DEL GRADIENTE

MÉTODO DEL GRADIENTE

Para resolver con la estrategia DtO utilizamos el método del gradiente

$$\nabla J_h(\mathbf{u}) = \beta \mathbb{N}\mathbf{u} + \mathbb{B}^\intercal(\mathbb{A}^{-\intercal}\mathbb{M}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\mathbf{u} - \mathbf{z}_d)) = \beta \mathbb{N}\mathbf{u} - \mathbb{B}^\intercal \mathbf{p}$$

Nos movemos en dirección opuesta al gradiente

$$u^{k+1} = u^k - \eta_k \nabla J(u^k)$$

BÚSQUEDA DEL PASO

Comenzamos con un paso inicial. Vemos si se cumple la condición de Armijo

$$J(u - t\nabla J(u)) \leq J(u) - \sigma t \|\nabla J(u)\|^2,$$

Considerando el parámetro de relajación. En caso de no cumplirse reducimos el paso

$$t := \rho \cdot t$$

En caso de que el paso sea menor que cierto mínimo, terminamos.

MÉTODO DEL GRADIENTE PROYECTADO

Para el caso de control restringido usamos el método proyectado a la restricción

$$\mathbf{u}_{\text{proj}}^{k+1} = \text{Proj}_C(\mathbf{u}^{k+1}),$$

El conjunto a proyectar corresponde a la región (convexa) de la restricción

$$C = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : a \leq u_i \leq b, \forall i\}$$

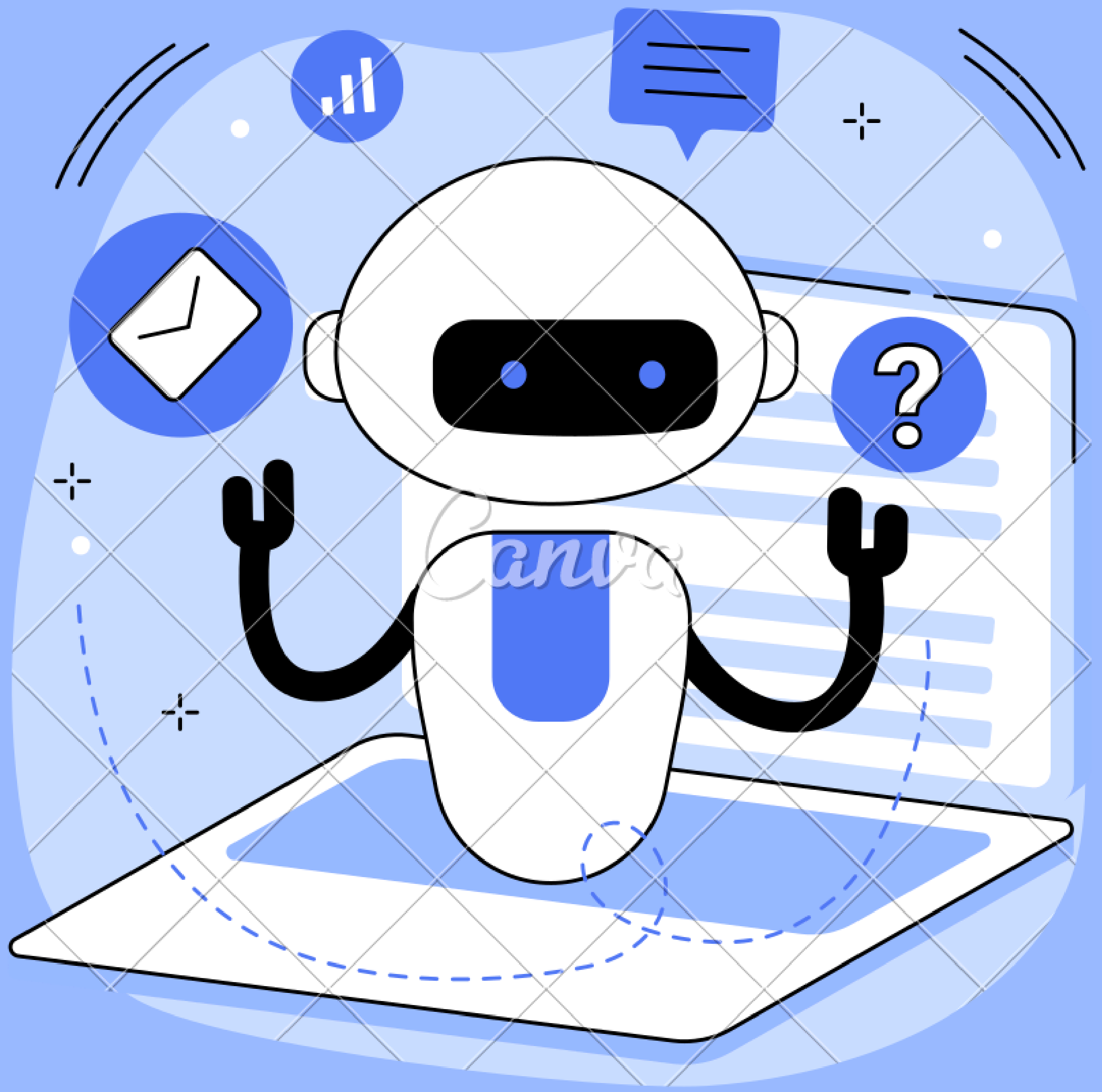
PROYECCIÓN EN NUESTRO PROBLEMA

El operador de proyección por componente tiene la siguiente forma en este caso

$$\mathrm{Proj}_C(u_i) = \begin{cases} a & \text{si } u_i < a, \\ u_i & \text{si } a \leq u_i \leq b, \\ b & \text{si } u_i > b. \end{cases}$$

Para el vector discretizado se obtiene lo siguiente

$$\mathrm{Proj}_C(\mathbf{u}) = (\mathrm{Proj}_C(u_1), \mathrm{Proj}_C(u_2), \ldots, \mathrm{Proj}_C(u_n))$$



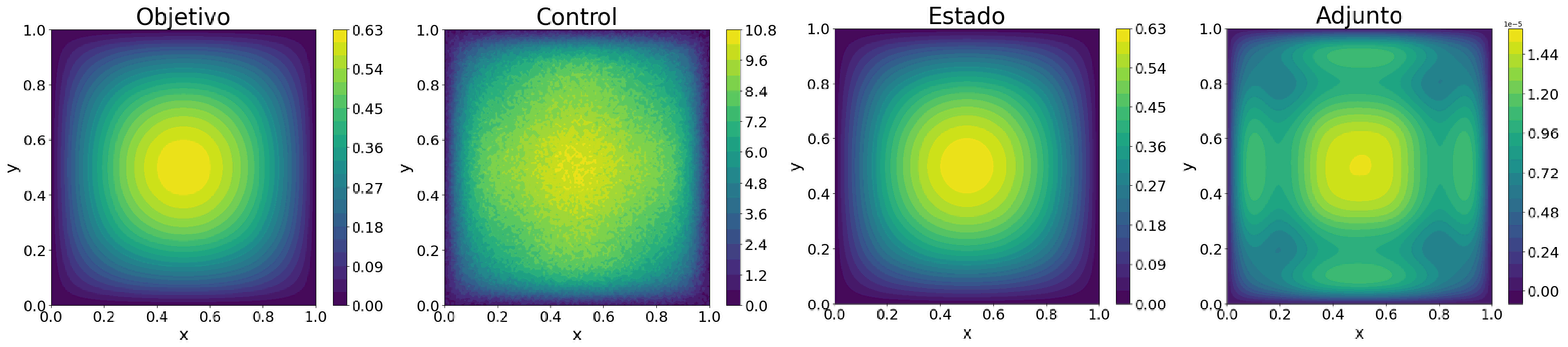
SIMULACIONES

CASO IRRESTRICTO: SETUP

- Mallado triangular con 7 niveles de refinamiento (16 641 nodos y 32 768 elementos)
- Espacio de aproximación: $\mathbb{P}_1$
- $\sigma = 10^{-2}, \rho = 0.5, t_0 = 1.0, t_{\min} = 10^{-20}, \mathrm{tol} = 10^{-18}, K_{\max} = 200$
- Función objetivo: $z_d(x, y) = 10 \cdot x(1 - x) \cdot y(1 - y)$
- $\beta \in \{10^{-3}, 10^{-6}\}$

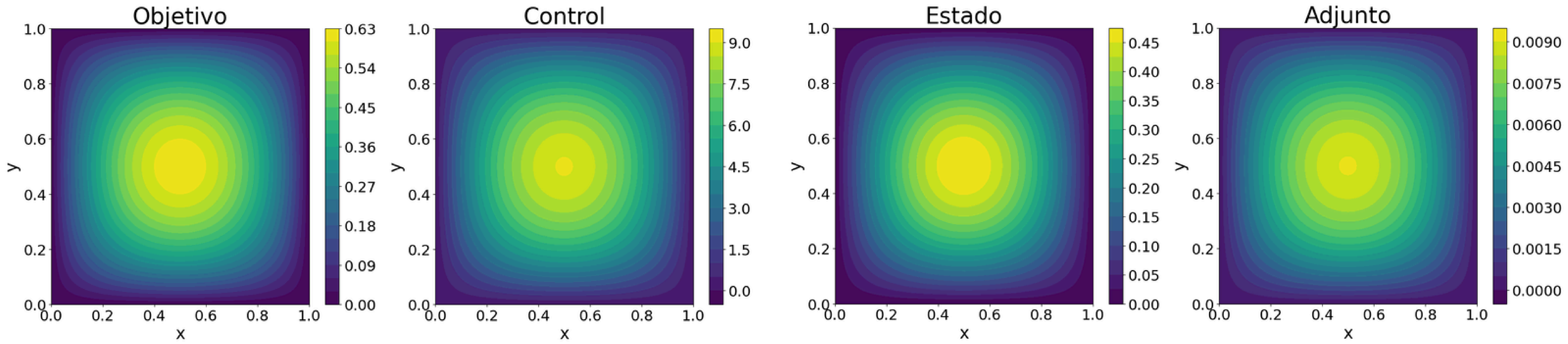
CASO IRRESTRICTO: SIMULACIÓN

$$\beta = 10^{-6}$$



CASO IRRESTRICTO: SIMULACIÓN

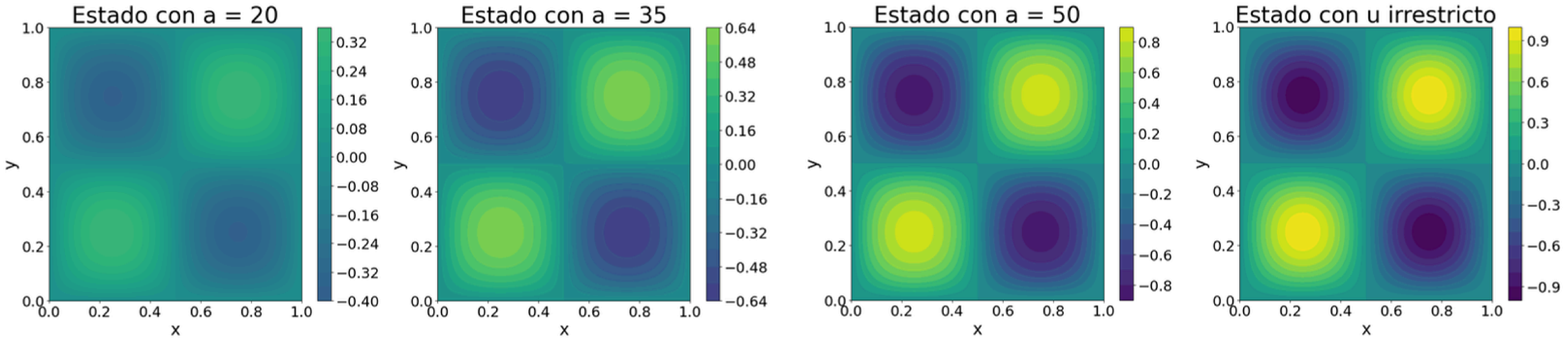
$$\beta = 10^{-3}$$



CASO RESTRICTO: SETUP

- Mallado triangular con 7 niveles de refinamiento (16 641 nodos y 32 768 elementos)
- Espacio de aproximación: $\mathbb{P}_1$
- $\sigma = 10^{-2}, \rho = 0.5, t_0 = 1.0, t_{\min} = 10^{-20}, \mathrm{tol} = 10^{-18}, K_{\max} = 200$
- Función objetivo: $z_d(x, y) = \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y), \beta = 10^{-6}$
- $-a \leq u \leq a, \quad a \in \{20, 35, 50, \infty\}$

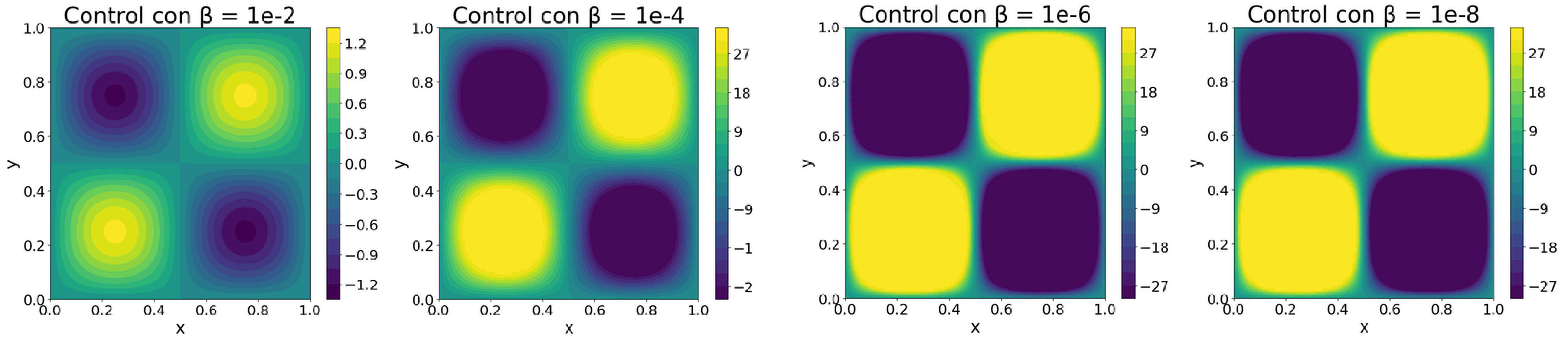
CASO RESTRICTO: SIMULACIÓN



CASO RESTRICTO: SETUP

- Mallado triangular con 7 niveles de refinamiento (16 641 nodos y 32 768 elementos)
- Espacio de aproximación: $\mathbb{P}_1$
- $\sigma = 10^{-2}, \rho = 0.5, t_0 = 1.0, t_{\min} = 10^{-20}, \mathrm{tol} = 10^{-18}, K_{\max} = 200$
- Función objetivo: $z_d(x, y) = \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y)$
- $-30 \leq u \leq 30$
- $\beta \in \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}\}$

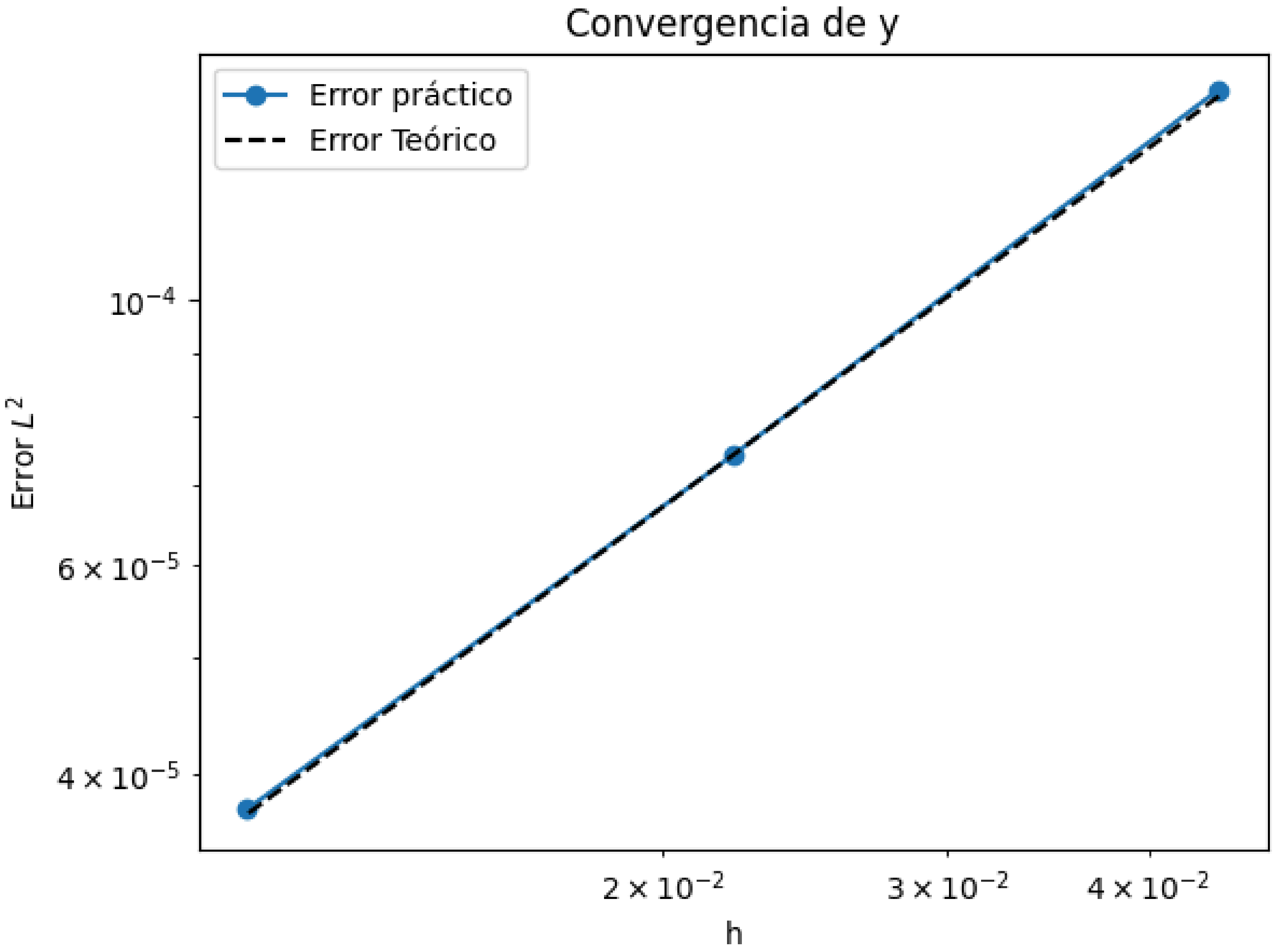
CASO RESTRICTO: SIMULACIÓN



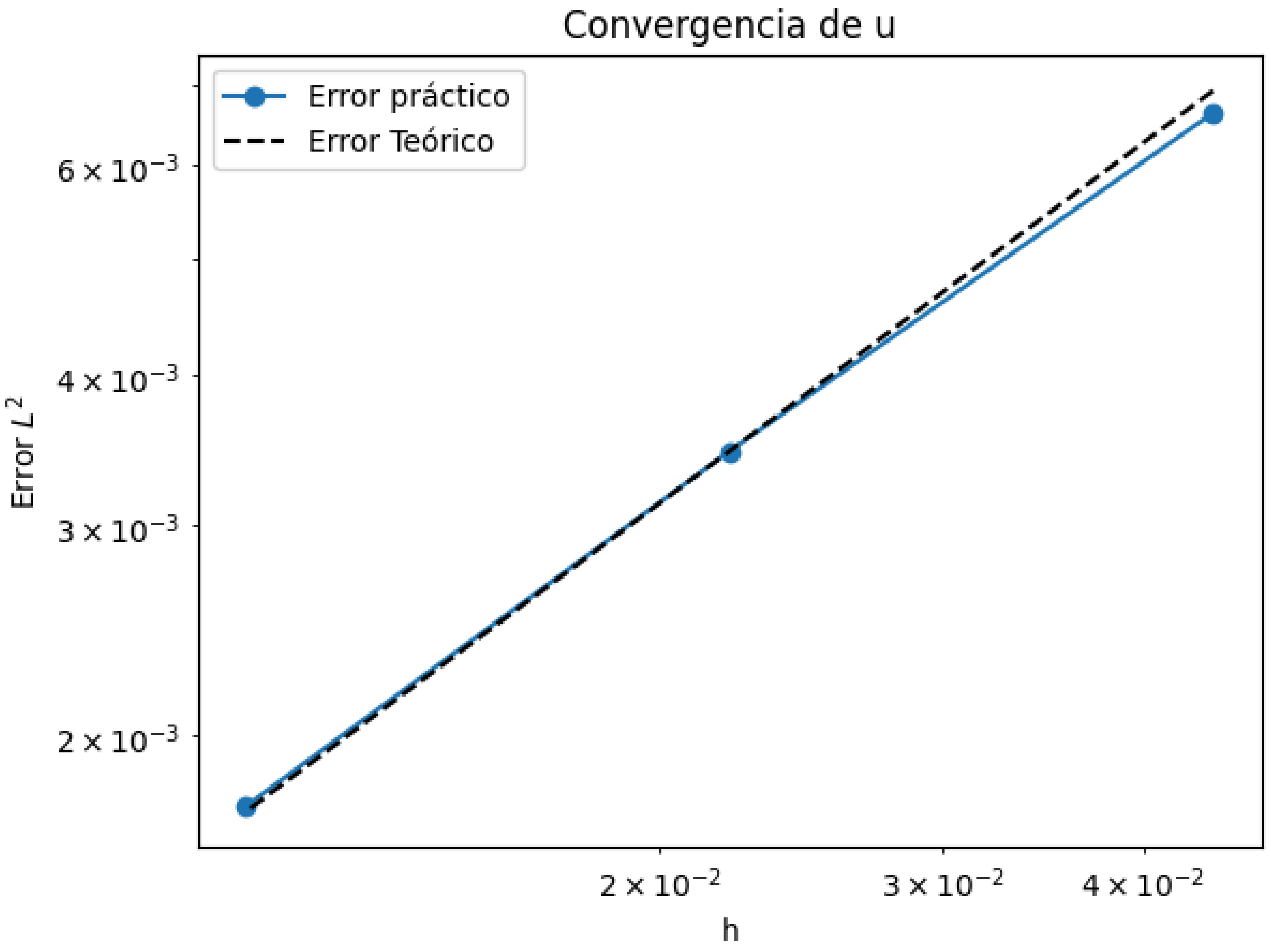
CONVERGENCIA DISCRETIZACIÓN: SETUP

- Mallado triangular con 7 niveles de refinamiento (16 641 nodos y 32 768 elementos)
- Espacio de aproximación: $\mathbb{P}_1$
- $\sigma = 10^{-2}, \rho = 0.5, t_0 = 1.0, t_{\min} = 10^{-20}, \mathrm{tol} = 10^{-18}, K_{\max} = 200$
- $\beta = 10^{-3}$
- Modelo irrestricto.
- $\hat{y}(x,y) = x(1-x)y(1-y)$
- $\hat{u}(x,y) = 2y(1-y) + 2x(1-x)$
- $\hat{p}(x,y) = -2\beta y(1-y) - 2\beta x(1-x)$
- $z_d(x,y) = x(1-x)y(1-y) + 8\beta$

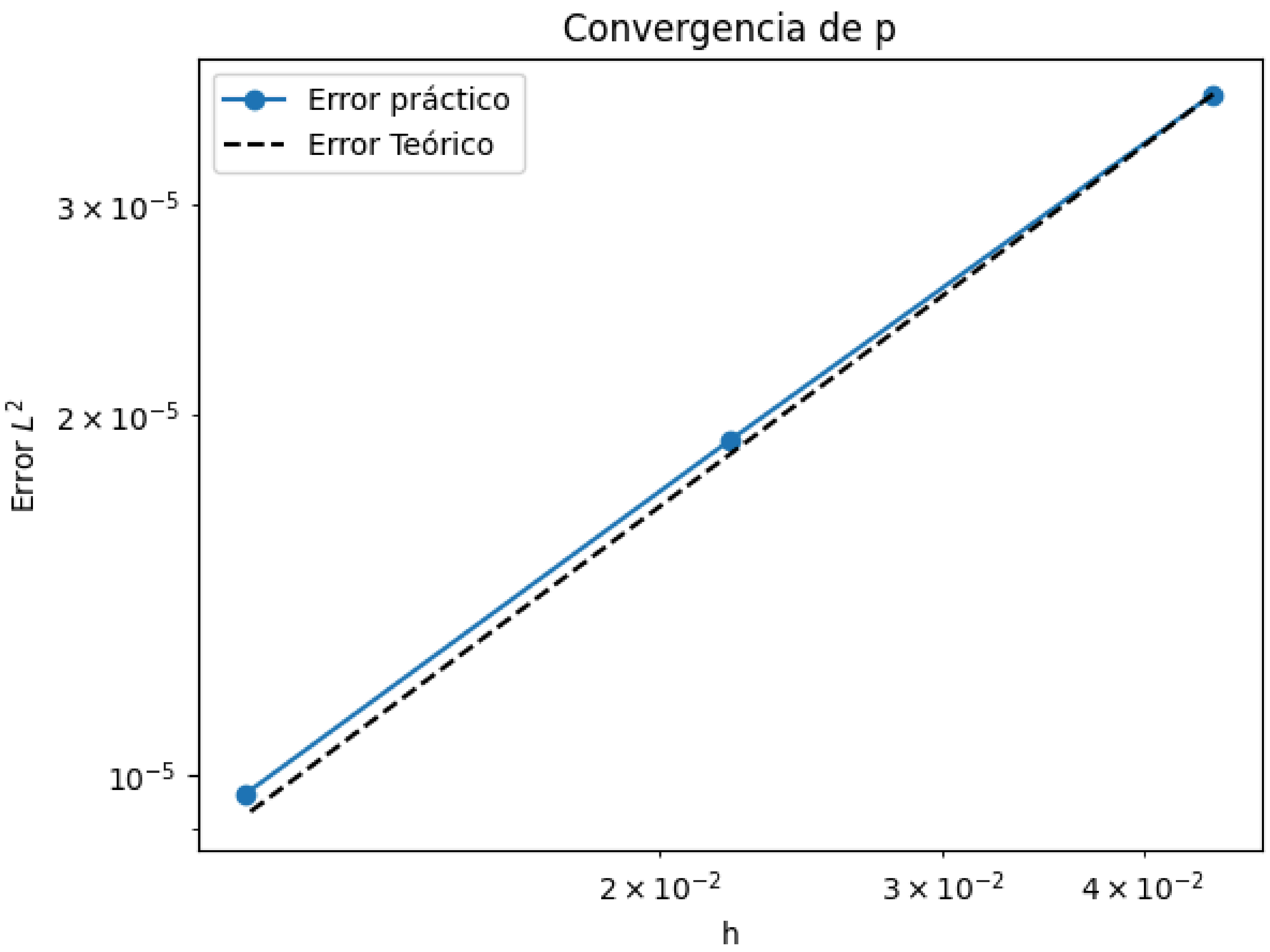
CONVERGENCIA DISCRETIZACIÓN: ESTADO



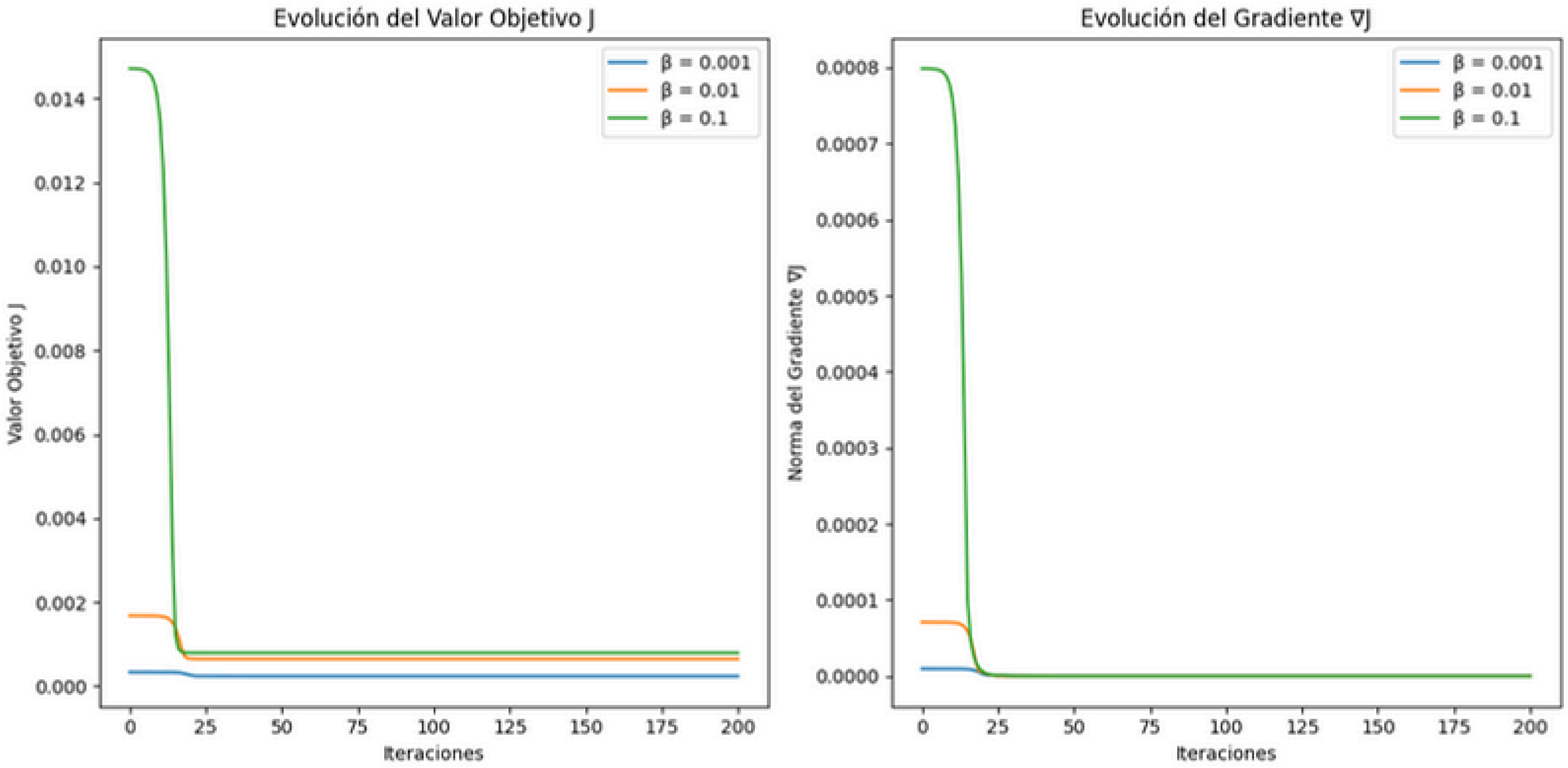
CONVERGENCIA DISCRETIZACIÓN: CONTROL



CONVERGENCIA DISCRETIZACIÓN: ADJUNTO



CONVERGENCIA MÉTODO DEL GRADIENTE



PREGUNTAS