MAT2605, Cálculo Científico I, 2021-2

Tarea 1

Entrega para el 26 de agosto de 2021

Pueden discutir los problemas con sus compañeros. Sin embargo, sus entregas, tanto la parte escrita como los códigos, deben ser individuales. **No** está permitido copiar las respuestas de alguien más ni dejar que otros copien sus respuestas. Su entrega debe estar compuesta por un único archivo en formato `.pdf` que incluya todas las respuestas y todos los gráficos que se están pidiendo, junto con un archivo `.zip` que incluya todos los archivos `.m` que produjeron y utilizaron durante esta tarea. Estos dos archivos deben ser subidos en Canvas. Si hay más de una línea en un gráfico, utilice distintos estilos de línea o distintos colores para diferenciarlas e incluya leyendas. No se olvide de nombrar todos sus ejes y líneas en las leyendas.

[4*2 pts.] 1. (a) Usando el formato de 64 bits para números de punto flotante en doble precisión, escriba el equivalente de los siguientes números flotantes en formato decimal.

   (i) 0 10000001010 1001001100000000000000000000000000000000000000000000

   (ii) 1 10000001010 1001001100000000000000000000000000000000000000000000

   (iii) 0 01111111111 1001001100000000000000000000000000000000000000000000

   (iv) 0 01111111111 1001001100000000000000000000000000000000000000000001

[4 pts.] (b) En el formato de 32 bits para números de punto flotante en simple precisión, el signo está dado por el primer bit, el exponente (o caracterśtica) está dado por los siguientes 8 bits, y la mantisa (o parte significativa) está dada por los 23 bits restantes. ¿Cuál sería el epsilon de la máquina, $\varepsilon_{\text{mach}}$, con este formato? Escríbalo como una expresión exacta y como un número en formato científico decimal con 6 cifras significativas. Basado en esto, ¿más o menos cuántos dígitos de precisión (cifras significativas decimales) espera que tenga el error relativo de un número real a su aproximación por un número flotante?

2. Cuando hay dos números reales que son muy similares, $x_1 \approx x_2$, el computador suele incurrir en un *error de cancelación* nada deseable cuando computa $x_1 - x_2$. En las siguientes expresiones, ¿cuándo pueden volverse problemáticas las computaciones? (e.g. cuando x es positivo/negativo y/o pequeño/grande). Cuando este sea el caso, proponga una expresión alternativa: si una reformulación exacta de la expresión original es asequible, utilícela; de lo contrario use expansiones truncadas de series de Taylor.

[2,3 pts.] (a) $\sqrt{x^2+1} - x$

[2,2 pts.] (b) $\ln(x) - \ln(y)$

[3 pts.] (c) $x^{-3}(\sin(x) - x)$

(d) $\sin(x) - \tan(x)$

(e) $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$

[12 pts.] 3. (Práctica de MATLAB) MATLAB abrevia "laboratorio de matrices". Es muy útil saber como manipular matrices en MATLAB. Cree cuatro matrices aleatorias A, B, C, y D tal que A es 2-por-3, B es 3-por-3, C es 3-por-2, and D es 3-por-3 (matrices aleatorias del tamaño `m`-por-`n` pueden ser creadas en MATLAB con `rand(m,n)`). Ejecute las siguientes operaciones sobre estas matrices usando MATLAB. Si la operación no se puede hacer, explique por qué. Si la operación es válida, simplemente escriba el comando de MATLAB que utilizó para ejecutar la operación, no el resultado de ésta (e.g. AB sería una operación válida escrita como `A*B`).

(a) $2A + C^T$

(b) $C - 3B$

(c) $3B - 2D$

(d) AD

(e) CA

(f) AC

(g) BD

(h) CB

(i) C^TB

(j) $\det(A)$

(k) $\det(D)$

(l) AA^T

(m) A^TA

(n) $\det(AA^T)$

(o) $\det(A^TA)$

4. La serie de Maclaurin de arctan es

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

1 pts. (a) Obtenga la expansión en serie para π sustituyendo $x = 1$ en la serie.

1 pts. (b) Obtenga la expansión en serie para π sustituyendo $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ en la serie.

(c) Escriba un programa de MATLAB para aproximar π usando las partes (a) y (b) como se desribe a continuación. En el archivo `.pdf` muestre su código (i.e. Editor>File>Print) e incluya la gráfica relevante al problema.

2 pts. (i) Calcule la aproximación truncando las dos series hasta $k = N$ términos en vez de ∞, para todos los enteros N desde 0 hasta 100000 y guarde los resultados. Algo parecido a esto:

```
Nmax=100000;
a=zeros(1,Nmax+1);
b=zeros(1,Nmax+1);
for k=0:Nmax
    if k==0
        a(k+1)=;% expresion para primer (k=0) termino en (a)
        b(k+1)=;% expresion para primer (k=0) termino en (b)
    else
        a(k+1)=a(k)+;% expresion para termino general en (a)
        b(k+1)=b(k)+;% expresion para termino general en (b)
    end
end
```

1 pts. (ii) Para cada término en `a` y `b`, calcule el error relativo en la aproximación usando `pi`, la constante pre-guardada por MATLAB para π (i.e. asuma que `pi` es el valor "exacto").

3 pts. (iii) Para valores de N entre 10 y 100000, grafique el error relativo en un único gráfico log-log (vea el comando `loglog` de MATLAB), con el error relativo de la parte (a) trazado en negro (color de MATLAB `k`) y el de (b) trazado en rojo (color de MATLAB `r`). Nombre el eje x como `N` y el eje y como `error relativo`. Agregue una leyenda correctamente etiquetada a su gráfico.

1 pts. (iv) Comente sobre los resultados. ¿Cuál serie converge mejor a π? ¿En qué valor se estanca el error relativo y por qué se estanca?

3 pts. (v) La serie en (a) converge lentamente de la forma $|x_{N+1} - x_N| = \mathcal{O}(N^p)$ como se ve en el gráfico log-log. Encuentre el valor de p utilizando la función de MATLAB `polyfit` para encontrar la aproximación lineal (orden 1) de los datos log-log (i.e., encuentre la pendiente de la línea en el gráfico log-log). ¿Cuál es el valor de p?

5. Considere la función

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}.$$

5 pts. (a) Muestre que f tiene una singularidad "removible", i.e., demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x)$ es finito.

(b) Escriba un programa de MATLAB para calcular $f(x)$ para valores pequeños de x como se describe a continuación. En el archivo `.pdf` muestre su código (i.e. Editor>File>Print) e incluya la gráfica relevante al problema.

2 pts. (i) Calcule $f(x)$ para `x=1e-9:1e-9:1e-7` usando `f1=log(1+x)./x`. Note que el `.` antes de `/` implica que MATLAB computa esta división componente por componente (de lo contrario, ¡sería una división de dos vectores!).

2 pts. (ii) Calcule $f(x)$ para `x=1e-9:1e-9:1e-7` usando la variable intermedia `y=1+x` y luego la expresión `f2=log(y)./(y-1)`.

3 pts. (iii) Grafique `f1` y `f2` como una función de `x`. Use distintos colores, agregue una leyenda y nombre sus ejes. ¿Cuál de los dos aproxima mejor la función exacta, $f(x)$? ¿Puede explicar por qué?