ICS3143 2024-2
Tarea 1

1. **(10 puntos)** Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito completo, donde $V = A \cup B$ con A, B disjuntos y E corresponde a todas las aristas entre elementos de A y B. Cada $a \in A$ tiene un orden total estricto sobre los elementos B, el cual interpretamos como preferencias. A su vez, cada $b \in B$ tiene un orden total estricto sobre A. Suponga que $|A| = |B|$.

   (a) **(5 puntos)** Investigue sobre el problema de emparejamiento estable. En particular, indique a qué corresponde el concepto de estabilidad dadas las definiciones anteriores.

   (b) **(5 puntos)** Indique una formulación lineal entera cuyas soluciones correspondan a emparejamientos estables. Explique claramente variables y restricciones.

2. **(7 puntos)** Determine si el conjunto $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq 1\}$ es un poliedro o no. Justifique claramente.

3. **(5 puntos)** En el contexto del ATSP sobre $n \geq 5$ nodos, verifique que dados $i, j, k \in N_1$ distintos, la desigualdad

$$u_i - u_k + (2n - 3)x_{ik} + (n - 4)x_{ki} + (n - 1)(x_{ij} + x_{jk}) \leq 2n - 4$$

   es válida para la formulación MTZ.

4. **(7 puntos)** Dado un grafo $G = (V, E)$, sea $S = \{x \in \{0, 1\}^V : \ x_i + x_j \leq 1 \ \forall (i, j) \in E\}$. Dado un clique $C \subseteq V$, considere la desigualdad $\sum_{i \in C} x_i \leq 1$. Usando inducción, demuestre que si $|C| = k \geq 2$, entonces la desigualdad asociada se puede obtener luego de $k - 2$ rondas del procedimiento de Chvátal-Gomory partiendo de la relajación lineal de S.

5. **(5 puntos)** Demuestre que si $L = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b\}$, entonces L es cerrado bajo combinaciones afines. ¿Es L cerrado bajo combinaciones lineales? Justifique claramente.

6. **(26 puntos)** En relación a la Pregunta 1 de la Interrogación 1, sea $\max\{w^\top x : \ Ax \leq b, \ x \in \mathbb{R}^E_+\}$ la relajación lineal del problema de emparejamiento de peso máximo sobre un grafo completo $G = (V, E)$ dados pesos $w \in \mathbb{R}^E_+$.

   Dada una solución fraccionara $\hat{x}$, desea intentar generar un corte de Chvátal-Gomory que sea violado por $\hat{x}$. Para ello, dados $0 < \epsilon \ll 1$ y $k > 0$, considere

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{e \in E} \alpha_e \hat{x}_e - \beta && (1)\\
\text{s.a} \quad & \mu^\top A_e = \alpha_e + f_e \quad \forall e \in E && (2)\\
& \mu^\top b = \beta + g && (3)\\
& f_e \leq 1 - \epsilon \quad \forall e \in E && (4)\\
& g \leq 1 - \epsilon && (5)\\
& -k \leq \beta \leq k && (6)\\
& f \in \mathbb{R}^E_+, \ g \in \mathbb{R}_+ && (7)\\
& \alpha \in \mathbb{Z}^E, \ \beta \in \mathbb{Z} && (8)\\
& \mu \in \mathbb{R}^V_+, && (9)
\end{aligned}
$$

donde A_e es la columna de A correspondiente a x_e para $e \in E$.

A partir del archivo `tarea01.py`, implemente una rutina en Python/Gurobi que resuelva la relajación lineal y agregue un corte de Chvátal-Gomory violado por la solución obtenida. Repita el procedimiento hasta que no se generen más cortes o la diferencia del valor objetivo de la relajación en iteraciones consecutivas sea suficientemente pequeño, y compare el valor obtenido con el valor óptimo del problema entero. Pruebe con distintas instancias para distintos valores de $|V|$, ϵ y k, y comente sobre sus resultados.