MAT2605, Cálculo Científico I, 2021-2

Tarea 6

Entrega para el 12 de octubre de 2021

Pueden discutir los problemas con sus compañeros. Sin embargo, sus entregas, tanto la parte escrita como los códigos, deben ser individuales. **No** está permitido copiar las respuestas de alguien más ni dejar que otros copien sus respuestas. Su entrega debe estar compuesta por un único archivo en formato `.pdf` que incluya todas las respuestas y todos los gráficos que se están pidiendo, junto con un archivo `.zip` que incluya todos los archivos `.m` que produjeron y utilizaron durante esta tarea. Estos dos archivos deben ser subidos en Canvas. Si hay más de una línea en un gráfico, utilice distintos estilos de línea o distintos colores para diferenciarlas e incluya leyendas. No se olvide de nombrar todos sus ejes y líneas en las leyendas.

1. Considere el problema de calcular la siguiente integral con peso vía la regla de cuadratura,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)\,, \tag{$*$}$$

donde $\omega(x) > 0$ es una función de peso estrictamente positiva, y w_j y x_j son los pesos y nodos de integración para $j = 0, \ldots, n$. Luego, sea $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\}$ una familia $L^2_\omega(-1,1)$-ortogonal de polinomios cuyos grados incrementan unitariamente, de tal manera que $\deg(\phi_j) = j$ (y en particular $\phi_j \in \mathcal{P}_j$, donde $\mathcal{P}_j$ son los polinomios de grado a lo sumo j), y escoja los puntos de integración, x_j para $j = 0, \ldots, n$, como las $n+1$ raíces de ϕ_{n+1}, y los pesos de integración como

$$w_j = \int_{-1}^{1} L_j(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad L_j(x) = \prod_{0\le k\le n, k\neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}\,, \qquad j = 0, \ldots, n\,.$$

7 pts. (a) Muestre que la fórmula de cuadratura $(*)$ con la selección de nodos y pesos de integración mostrada arriba es exacta para cualquier $f \in \mathcal{P}_{2n+1}$ (i.e., con esta selección, cualquier polinomio de grado a lo sumo $2n+1$ puede ser integrado exactamente con la fórmula).
Pista: Vea la demostración análoga para cuadratura de Gauss–Legendre.

3 pts. (b) Demuestre que los pesos de integración son estrictamente positivos, $w_j > 0$ para todo $j = 0, \ldots, n$.
Pista: Considere $f(x) = \big(L_j(x)\big)^2 \in \mathcal{P}_{2n}$.

3 pts. (c) Demuestre que independiente de la selección de $n+1$ puntos y pesos de integración, siempre existe un polinomio $f \in \mathcal{P}_{2n+2}$ tal que la fórmula de cuadratura asociada no es exacta (i.e., que la selección de puntos y pesos de integración propuesta arriba es óptima para integrar polinomios y no puede ser mejorada).
Pista: Dados los nodos $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$, considere $f(x) = \big(W(x)\big)^2 \in \mathcal{P}_{2n+2}$ donde $W(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$.

4 pts. (d) Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y suponga que $\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) = 0$ para la selección óptima de puntos y pesos de integración mostrada arriba. Muestre que existe por lo menos un $x^* \in [-1,1]$ tal que $f(x^*) = 0$.
Pista: Use (b) y un reconocido teorema de cálculo.

(e) Sea $\omega(x) = 1$ para todo $x \in [-1,1]$, por lo que $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\}$ son los polinomios de Legendre. Escójalos con la normalización estándar, i.e., tal que $\phi_j(x) = P_j(x)$ con $P_j(1) = 1$ y $P_j(-1) = (-1)^j$ para todo $j = 0, \ldots, n+1$.

4 pts. (i) Demuestre que

$$w_j = \int_{-1}^{1} L_j(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_j}\,\mathrm{d}x\,, \qquad j = 0, \ldots, n\,.$$

Pista: Establezca que $L_j(x) = \frac{W(x)}{x-x_j} \prod_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{1}{x_j - x_k} = \frac{W(x)}{x-x_j} \cdot \frac{1}{W'(x_j)} = \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)} \cdot \frac{P_{n+1}(x)}{x-x_j}$.

2 pts. (ii) Dado un $j = 0, \ldots, n$, muestre que para todo polinomio $Q \in \mathcal{P}_{n+1}$ sin raíz en x_j,

$$w_j = \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)Q(x_j)} \int_{-1}^{1} \frac{Q(x)P_{n+1}(x)}{x - x_j} \, \mathrm{d}x \, .$$

Pista: Note que $\frac{1}{x-x_j} = \frac{Q(x_j)}{Q(x_j)(x-x_j)} = \frac{Q(x_j)-Q(x)}{Q(x_j)(x-x_j)} + \frac{Q(x)}{Q(x_j)(x-x_j)}$ y que $R(x) := Q(x_j) - Q(x)$ tiene una raíz en x_j por lo que $\frac{R(x)}{(x-x_j)} \in \mathcal{P}_n$.

7 pts. (iii) Escoja $Q = P'_{n+1} \in \mathcal{P}_n$, y concluya que

$$w_j = \frac{2}{(1-x_j^2)\big(P'_{n+1}(x_j)\big)^2} \, , \qquad j = 0, \ldots, n \, .$$

Pista: Primero, use que $P_{n+1}(x) = A \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$ para algún $0 \neq A \in \mathbb{R}$ para mostrar que $\int_{-1}^{1} \frac{P'_{n+1}(x)}{x-x_j} P_{n+1}(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \big(\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_j}\big)^2 \, \mathrm{d}x$. Luego, note que $P'_{n+1}P_{n+1} = \frac{1}{2}\big(P_{n+1}^2\big)'$ e integre por partes.

10 pts. 2. Para este problema, use las rutinas de MATLAB `mylegpts` y `mychebpts` (adjuntas a esta tarea como `mylegpts.m` y `mychebpts.m`). Para todo $n = 2, 3, \ldots, 35$, calcule una aproximación numérica para las siguientes integrales usando las reglas de cuadratura de n puntos de Gauss–Legendre y Clenshaw–Curtis:

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{20} \, \mathrm{d}x$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

(iii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+4x^2} \, \mathrm{d}x$

(iv) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|^3 \, \mathrm{d}x$

(v) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x| \, \mathrm{d}x$

(vi) $\displaystyle\int_{2}^{3} e^{x} \, \mathrm{d}x$

(vii) $\displaystyle\int_{3}^{6} e^{-1/x^2} \, \mathrm{d}x$

No se olvide de actualizar los puntos y pesos de integración cuando el intervalo de integración no es $[-1, 1]$. Para cada integral, produzca un gráfico semilog (en y) del error de la regla de cuadratura como función de $2 \leq n \leq 35$ para ambas reglas de cuadratura (i.e., Gauss–Legendre y Clenshaw–Curtis). Para el valor "exacto" de la integral (usado para calcular el error), integre analíticamente cuando sea posible o de lo contrario (para (ii) y (vii)) use el valor de la integral via `mychebpts` con $n = 200$. ¿Puede explicar el comportamiento evidenciado en el gráfico para (i)? ¿Y para (ii)–(v)?

3. Un problema de gran interés es poder integrar una función en dos dimensiones sobre un dominio triangular. Este se reduce a integrar una función sobre un dominio triangular "maestro" (o estándar), $\hat{\Omega} = \{(\xi, \eta) \mid \xi \geq 0, \, \eta \geq 0, \, \xi + \eta \leq 1\}$. Una forma de hacer esto es usando reglas de cuadratura especializadas para dominios triangulares. Otra forma es adaptando reglas de cuadratura de cuadrados para que funcionen sobre triángulos, como lo evidencia este ejercicio.

10 pts. (a) Como un paso inicial, primero considere un dominio cuadrado "maestro", $\hat{\Omega}_Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Escriba una rutina con la firma `[xi2DQ,w2DQ]=GaussLeg2DQuad(n1D)`, donde `n1D` $\in \mathbb{N}$ es el número de puntos 1D de Gauss-Legendre en cada dirección, `xi2DQ` es una matriz de `n1D`$^2 \times 2$ con las coordenadas de los puntos de integración 2D de Gauss-Legendre en $\hat{\Omega}_Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$, y `w2DQ` es un vector fila de $1 \times$ `n1D`^{2} con los pesos de integración en los puntos correspondientes, i.e., $n_{int} =$ `n1D`^{2}, $\hat{w}_l = \tilde{w}_{\xi_l} \tilde{w}_{\eta_l}$ donde $\tilde{w}_{\xi_l}$ es el peso 1D asociado a $\hat{\xi}_l$ y similarmente con $\tilde{w}_{\eta_l}$, tal que

$$\texttt{xi2DQ} = \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 & \hat{\eta}_1 \\ \hat{\xi}_2 & \hat{\eta}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \hat{\xi}_{n_{int}} & \hat{\eta}_{n_{int}} \end{bmatrix} , \qquad \texttt{w2DQ} = \begin{bmatrix} \hat{w}_1 & \hat{w}_2 & \cdots & \hat{w}_{n_{int}} \end{bmatrix} \, .$$

Para hacerlo, use la rutina `mylegpts` adjunta a esta tarea. Verifique que su rutina es capaz de integrar funciones en 2D: revise que puede integrar exactamente productos tensoriales de polinomios en (ξ,η), i.e.,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\hat{f}(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathrm{d}\hat{\xi}\mathrm{d}\hat{\eta}\approx\sum_{l=1}^{n_{int}}\hat{w}_l\hat{f}(\hat{\xi}_l,\hat{\eta}_l)\,,\qquad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\hat{\xi}^n\hat{\eta}^m\mathrm{d}\hat{\xi}\mathrm{d}\hat{\eta}=\frac{\hat{\xi}^{n+1}}{n+1}\Big|_{-1}^{1}\frac{\hat{\eta}^{m+1}}{m+1}\Big|_{-1}^{1}\,,$$

```
f=@(xi,eta) (xi.^n).*(eta.^m);
numInt=w2DQ*f(xi2DQ(:,1),xi2DQ(:,2));
exactInt=(1/(n+1))*(1^(n+1)-(-1)^(n+1))*(1/(m+1))*(1^(m+1)-(-1)^(m+1));
```

¿Para qué valores de n y m como función de `n1D` espera que la cuadratura sea exacta (es decir, $|\texttt{exactInt}-\texttt{numInt}|<\texttt{eps}$) y por qué?

10 pts. (b) Considere un dominio triangular "maestro", $\hat{\Omega}=\{(\xi,\eta)\mid\xi\geq 0,\,\eta\geq 0,\,\xi+\eta\leq 1\}$. Luego, use la transformación de Duffy del dominio triangular maestro, $(\xi,\eta)\in\hat{\Omega}$, al dominio cuadrado maestro, $(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\hat{\Omega}_Q=[-1,1]\times[-1,1]$, para integrar sobre $\hat{\Omega}$. Esta transformación es definida por $\xi=\big(\frac{1}{2}(\hat{\xi}+1)\big)\big(1-\frac{1}{2}(\hat{\eta}+1)\big)$ y $\eta=\frac{1}{2}(\hat{\eta}+1)$, por lo que la integración sobre $\hat{\Omega}$ se vuelve

$$\begin{aligned}\int_{\hat{\Omega}}\hat{f}(\xi,\eta)\mathrm{d}\hat{\Omega}&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\hat{f}\Big(\big(\tfrac{1}{2}(\hat{\xi}+1)\big)\big(1-\tfrac{1}{2}(\hat{\eta}+1)\big),\tfrac{1}{2}(\hat{\eta}+1)\Big)\tfrac{1}{4}\big(1-\tfrac{1}{2}(\hat{\eta}+1)\big)\mathrm{d}\hat{\xi}\mathrm{d}\hat{\eta}\,,\\&\approx\sum_{l=1}^{n_{int}}\underbrace{\hat{w}_l\tfrac{1}{4}\big(1-\tfrac{1}{2}(\hat{\eta}_l+1)\big)}_{w_l}\hat{f}\Big(\underbrace{\big(\tfrac{1}{2}(\hat{\xi}_l+1)\big)\big(1-\tfrac{1}{2}(\hat{\eta}_l+1)\big)}_{\xi_l},\underbrace{\tfrac{1}{2}(\hat{\eta}_l+1)}_{\eta_l}\Big)\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, como es usual, $\int_{\hat{\Omega}}\hat{f}(\xi,\eta)\mathrm{d}\hat{\Omega}\approx\sum_{l=1}^{n_{int}}w_l\hat{f}(\xi_l,\eta_l)$, pero los pesos y puntos de integración para la cuadratura del triángulo maestro, w_l y (ξ_l,η_l), son definidos en términos de los pesos y puntos de cuadratura del cuadrado maestro, $\hat{w}_l$ y $(\hat{\xi}_l,\hat{\eta}_l)$. Escriba una rutina con firma `[xi2D,w2D]=GaussLeg2DTri(nP)` donde $\texttt{nP}\in\mathbb{N}$ y con salidas análogas a `GaussLeg2DQuad`. Internamente debería llamar a `GaussLeg2DQuad(n1D)` con `n1D=nP`. Usando que $\int_{\hat{\Omega}}\xi^n\eta^m\mathrm{d}\hat{\Omega}=\frac{n!m!}{(n+m+2)!}$, verifique que esta cuadratura es capaz de integrar funciones en 2D, por lo menos revisando que puede integrar exactamente productos tensoriales de polinomios en (ξ,η), i.e.,

$$\int_{\hat{\Omega}}\hat{f}(\xi,\eta)\mathrm{d}\hat{\Omega}\approx\sum_{l=1}^{n_{int}}w_l\hat{f}(\xi_l,\eta_l)\,,\qquad\int_{\hat{\Omega}}\xi^n\eta^m\mathrm{d}\hat{\Omega}=\frac{n!m!}{(n+m+2)!}\,,$$

```
f=@(xi,eta) (xi.^n).*(eta.^m);
numInt=w2D*f(xi2D(:,1),xi2D(:,2));
exactInt=factorial(n)*factorial(m)/factorial(n+m+2);
```

¿Para qué valores de n y m como función de `nP` está obteniendo valores exactos (es decir, $|\texttt{exactInt}-\texttt{numInt}|<\texttt{eps}$)?