MAT2605, Cálculo Científico I, 2021-2

Tarea 4

Entrega para el 24 de septiembre de 2021

Pueden discutir los problemas con sus compañeros. Sin embargo, sus entregas, tanto la parte escrita como los códigos, deben ser individuales. **No** está permitido copiar las respuestas de alguien más ni dejar que otros copien sus respuestas. Su entrega debe estar compuesta por un único archivo en formato `.pdf` que incluya todas las respuestas y todos los gráficos que se están pidiendo, junto con un archivo `.zip` que incluya todos los archivos `.m` que produjeron y utilizaron durante esta tarea. Estos dos archivos deben ser subidos en Canvas. Si hay más de una línea en un gráfico, utilice distintos estilos de línea o distintos colores para diferenciarlas e incluya leyendas. No se olvide de nombrar todos sus ejes y líneas en las leyendas.

7 pts. 1. (a) Considere las ecuaciones normales asociadas a la aproximación por mínimos cuadrados discretos de un conjunto de m datos (x_i, y_i) para $i=1,\ldots,m$ a un polinomio de grado a lo sumo $n < m-1$. La matriz $(n+1)\times(n+1)$ asociada al sistema lineal, A, tiene componentes definidos como $A_{jk} = \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}$ para $j,k = 0,\ldots,n$. Defina el vector $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ por sus componentes c_j para $j = 0,\ldots,n$ y muestre que $c^T Ac = \sum_{i=1}^{m}(p(x_i))^2$ donde $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$.

5 pts. (b) Use el resultado de (a) para mostrar que la aproximación polinomial por mínimos cuadrados discretos al conjunto de $m > n+1$ datos, donde n es el máximo grado del polinomio, tiene solución única.
Pista: Argumente por contradicción asumiendo que A es singular, por lo que existe un $c \neq 0$ tal que $Ac = 0$, y en particular $c^T Ac = 0$. Siéntase libre de usar lo que ya demostró en la Tarea 2.

6 pts. (c) Considere las ecuaciones normales asociadas a la aproximación por mínimos cuadrados (continua) de una función $f \in C([a,b])$ a un polinomio de grado a lo sumo n. La matriz $(n+1)\times(n+1)$ asociada al sistema lineal, B, tiene componentes definidos como $B_{jk} = \int_a^b x^{j+k}\,\mathrm{d}x$ para $j,k = 0,\ldots,n$. Considere el vector $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ con componentes c_j para $j = 0,\ldots,n$ que define el polinomio $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$. Encuentre una expresión para $c^T Bc$ en términos de p.

5 pts. (d) Use su expresión de (c) para concluir que la aproximación polinomial por mínimos cuadrados (continua) de una función $f \in C([a,b])$ tiene solución única.
Pista: Argumente por contradicción asumiendo que B es singular, por lo que existe un $c \neq 0$ tal que $Bc = 0$, y en particular $c^T Bc = 0$. ¿Qué puede decir de una función no negativa cuya integral es cero?

8 pts. 2. (a) Suponga que para un conjunto de nodos *fijo*, $\vec{x} = (x_0,\ldots,x_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$, y funciones $\vec{\varphi}_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ para $j = 0,\ldots,n \leq m-1$, se satisface que $\vec{\varphi}_j(\vec{x})\cdot\vec{\varphi}_k(\vec{x}) = \delta_{jk}|\vec{\varphi}_k(\vec{x})|^2$. En otras palabras, asuma que los vectores $\{\vec{\varphi}_0(\vec{x}),\ldots,\vec{\varphi}_n(\vec{x})\}$ son ortogonales en $\mathbb{R}^m$ con respecto al producto punto Euclidiano común y corriente (y por ende, linealmente independientes). Un $\vec{\varphi}$-polinomio es definido por el ansatz $\Phi_n = a_0\vec{\varphi}_0(\vec{x}) + \ldots + a_n\vec{\varphi}_n(\vec{x}) = \sum_{j=0}^{n} a_j\vec{\varphi}_j(\vec{x})$. Muestre que la aproximación $\vec{\varphi}$-polinomial por mínimos cuadrados discretos a un vector de datos en $\mathbb{R}^m$, $\vec{y} = (y_0,\ldots,y_{m-1})$, i.e., el Φ_n cuyos coeficientes $\vec{a} = (a_0,\ldots,a_n)$ minimizan la función

$$E(\vec{a}) = |\vec{y} - \Phi_n|^2 = (\vec{y} - \Phi_n)\cdot(\vec{y} - \Phi_n) = \sum_{i=0}^{m-1}\left(y_i - (\Phi_n)_i\right)^2,$$

es determinado por los coeficientes

$$a_j = \frac{\vec{\varphi}_j(\vec{x})\cdot\vec{y}}{|\vec{\varphi}_j(\vec{x})|^2}, \qquad j = 0,\ldots,n.$$

Pista: Primero demuestre que las ecuaciones normales son $\sum_{k=0}^{n} a_k\vec{\varphi}_j(\vec{x})\cdot\vec{\varphi}_k(\vec{x}) = \vec{\varphi}_j(\vec{x})\cdot\vec{y}$ para $j = 0,\ldots,n$.
Nota: Cuando los nodos son equidistantes en $[-\pi,\pi]$ (i.e., $x_i = -\pi + \frac{i}{m}2\pi$), las funciones $\vec{\varphi}_j(\vec{x}) = \cos(j\vec{x})$ o $\vec{\varphi}_j(\vec{x}) = \sin(j\vec{x})$, tienen la propiedad ortogonal descrita. Esta es la base de la aproximación (e interpolación) trigonométrica discreta, relacionada a la transformada de Fourier discreta.

$\boxed{\text{7 pts.}}$ (b) Usando los polinomios de Legendre en $[-1,1]$, $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\} = \{1, x, x^2 - \frac{1}{3}, \ldots\}$, que son ortogonales en L^2, encuentre la mejor aproximación lineal y cuadrática por mínimos cuadrados (continua) a $f(x) = e^{-3x}$.

$\boxed{\text{7 pts.}}$ (c) Sea $G_0(x) = 1$. Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar los polinomios mónicos de Laguerre lineal y cuadrático, $G_1(x)$ y $G_2(x)$, que forman una base ortogonal en L^2_w para los polinomios cuadráticos en $[0, \infty)$ con el peso $w(x) = e^{-x}$.