Tarea 3

Vicente Opazo

November 8, 2025

1

1.1

(a) Encontremos el valor de $||W_n||_\infty$ para este caso. Lo primero es que

$$||W_n||_\infty = max_{a\leq x\leq b}|(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)|$$

por la definición de W_n y de la norma del supremo.
Como $(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b) = 0$ en a, b y $\frac{a+b}{2}$, por ser polinomio, esto es una función continua, entonces por el teorema de Rolle se sabe que alcanza su máximo y mínimos en los intervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2}, b]$. En particular, buscamos el máximo en $[a, \frac{a+b}{2}]$ y el opuesto del mínimo en $[\frac{a+b}{2}, b]$ por la forma del polinomio.
Un polinomio equivalente es el $p(x) = (x-c)x(x+c) = x^3 - xc^2$ en el intervalo $[-c, c]$ con $c = \frac{b-a}{2}$
Derivando e igualando a cero se tiene que

$$3x^2 - c^2 = 0 \rightarrow x = \pm\frac{c}{\sqrt{3}}$$

Reemplazando en $p(x)$ la solución negativa obtenemos el máximo en el intervalo (notar que la función es impar con respecto a $x = 0$ y por ende el resultado al aplicar valor absoluto entre las dos soluciones será el mismo)

$$p\left(\frac{-c}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-c}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{-c}{\sqrt{3}}\right)c^2 = \frac{-c^3}{3\sqrt{3}} + \frac{c^3}{\sqrt{3}} = \frac{2c^3}{3\sqrt{3}} = \frac{(b-a)^3}{8}\frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{(b-a)^3}{12\sqrt{3}}$$

Demostrando lo pedido.

(b) De (*) se tiene que

$$||f-P_n||_\infty \leq \frac{||f^{n+1}||_\infty}{(n+1)!}||W_n||_\infty = \frac{||\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}||_\infty}{(3)!}||W_n||_\infty = \frac{2}{6}||W_n||_\infty \leq \frac{2}{6}\cdot\frac{8}{12\sqrt{3}} = \frac{2}{9\sqrt{3}}$$

1.2

(a) Sean $x_0 < x_1 < ... < x_n$ los nodos de interpolación uniformemente espaciados por una distancia h, busquemos $||W_n||_\infty$, si $x = x_i$ para algun $i \in \{0, 1, ..., n\}$, entonces $W_n(x) = 0$, y así, sin pérdida de generalidad para encontrar el máximo supongamos $x \in (x_i, x_{i+1})$ para algún $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, entonces $(x - x_j) < h(i-j+1), \forall j \in \{0, 1, ..., i\}$ y $(x - x_j) < h(j-i), \forall j \in \{i+1, i+2, ..., n\}$, Y así se tiene que

$$W(x) < (h(i+1))\cdot(h\cdot i)\cdot(h(i-1))\cdot ...\cdot(2h)\cdot(h)\cdot(h)\cdot(2h)\cdot ...\cdot(h(n-1-i))\cdot(h(n-i))$$

Factorizando por h

$$W(x) < h^{n+1}(i+1)\cdot i\cdot(i-1)\cdot ...\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot ...\cdot(n-1-i)\cdot(n-i)$$

Y entonces

$$W(x) < h^{n+1} \cdot (i+1)! \cdot (n-i)!$$

Y el máximo global se alcanza cuando $i = 0$ o $i = n - 1$, y así se tiene que

$$W(x) < n!h^{n+1}$$

Demostrando así lo pedido.

(b) Usando (*) en conjunto con las hipótesis dadas en el enunciado se tiene que

$$||f - P_n||_\infty \leq \frac{||f^{n+1}||_\infty}{(n+1)!}||W_n||_\infty \leq \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)!} \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \cdot n!$$

Y despejando se llega a que

$$||W_n||_\infty \leq \left(\frac{10}{n}\right)^{n+1} \cdot n!$$

Demostrando lo pedido.
Entonces se define $A_n := \left(\frac{10}{n}\right)^{n+1} \cdot n!$, y con esto se tiene que

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\left(\frac{10}{n+1}\right)^{n+2} \cdot (n+1)!}{\left(\frac{10}{n}\right)^{n+1} \cdot n!} = 10\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = 10\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Del enunciado se tiene que

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 3 \rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \geq \frac{1}{3} \qquad \forall n \in N$$

Y además se tiene que

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq \frac{2}{3} \qquad \forall n \geq 2$$

Y entonces para $n > 2$ se cumple que

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = 10\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) \geq 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} > 2$$

Así, $A_{n+1} > 2 \cdot A_n$, y entonces los A_n crecen exponencialmente a medida que crece n, lo que implica que $lim_{n\rightarrow\infty}A_n = \infty$. Demostrando con esto lo pedido.

2

2.1

Hay $n + 1$ sumandos, así que hay que realizar n sumas.
Para el i-ésimo sumando se deben realizar $i - 1$ multiplicaciones e $i - 1$ restas. Entonces se deben realizar $\sum_{i=1}^{n+1} i - 1 = \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ multiplicaciones y restas.
Sumando, se tiene que son $n + 2\frac{n\cdot(n+1)}{2} = n^2 + 2n$ operaciones, lo cual asintóticamente se comporta como $O(n^2)$

2.2

La observación clave es que a partir del i-ésimo sumando, el factor $(x - x_{i-1})$ es común y por ende se puede factorizar. Así se tiene que

$$p(x) = f[x_0] + (x - x_0)(f[x_0, x_1] + (x - x_1)(f[x_0, x_1, x_2] + ... + (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, ..., x_n])...)$$

Al calcular $p(x)$ de esta manera anidada, asumiendo las diferencias divididas calculadas, por cada paréntesis anidado se debe realizar una resta, una multiplicación y una suma. Como se tienen n se deben realizar $3n$ operaciones, lo cual asintóticamente se comporta como $O(n)$

2.3

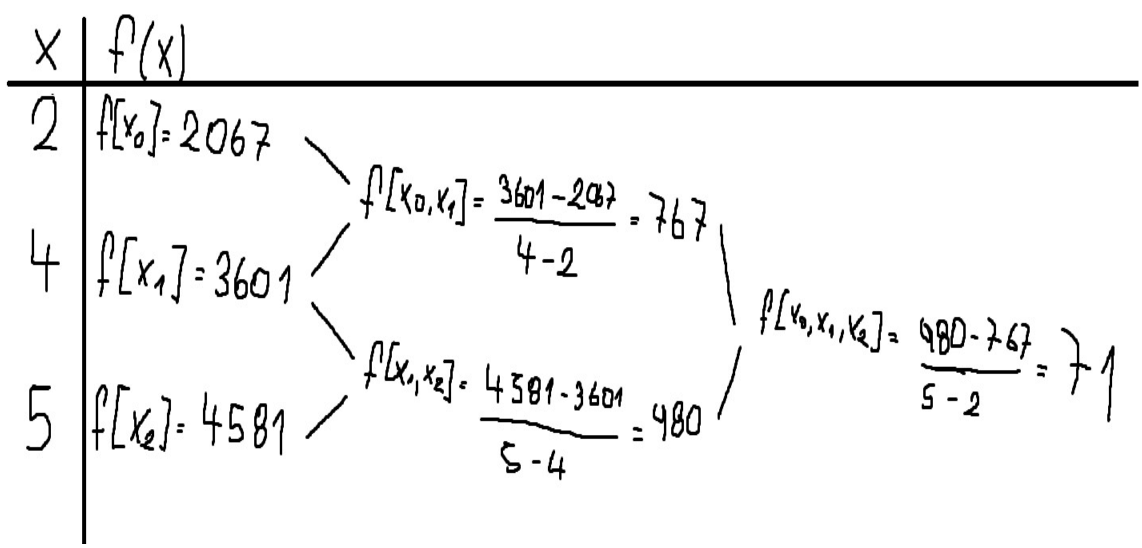
La fórmula puede aprovecharse del $p(x)$ anterior, sea el $p(x)$ anterior escrito como $q(x)$ y ahora $p(x)$ pasa a ser el actualizado, sea además $x_{n+1} = x_n$ el nuevo nodo. Entonces siguiendo la forma anidada anterior se tiene que

$$p(x) = q(x) + (x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_n)(x - x_n) f[x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}]$$

Primero veamos cuanto cuesta computar una diferencia dividida en la que se tienen k datos. Los valores de $f[x_i]$ son conocidos así que no requieren ninguna operación de punto flotante. Los valores de $f[x_i, x_{i+1}, ..., x_j]$, calculados de forma inteligente, requieren de dos restas y una multiplicación, esto es, requieren de 3 operaciones. Sean la cantidad de x_i incluidos el orden de la diferencia dividida, entonces es claro que hay $k-1$ de orden 2, $k-2$ de orden 3, y así, hasta tener 1 de orden $k-1$. Entonces hay en total $\sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{k(k-1)}{2}$ diferencias divididas, lo que nos da un total de $3\frac{k(k-1)}{2}$ operaciones.
Ahora, para este caso en particular, solo basta reemplazar en nuestra expresión anterior. Ahora tenemos $n+2$ datos y por ende se necesitan $3\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ operaciones, de las cuales se pueden reutilizar las operaciones con las que construimos la tabla para $n+1$ datos, que son $3\frac{n(n+1)}{2}$, además que la primera no requiere flops puesto que es simplemente la derivada. Entonces se requieren $3\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3\frac{n(n+1)}{2} - 3 = 3n$ operaciones, lo que asintonaticamente se comporta como $O(n)$.
Y para actualizar el valor de $p(x)$ se necesitan $3n + 3$ operaciones si se hace desde cero por lo visto anteriormente, aunque si se conoce el valor de $q(x)$ y se tenía guardado el valor de $(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_n)$ solo cuesta 3 flops.
Entonces, sumando ambos, la actualización se comporta como $O(n)$

2.4

La tabla se muestran en la siguiente imagen, calculada de la forma mostrada en la cátedra.



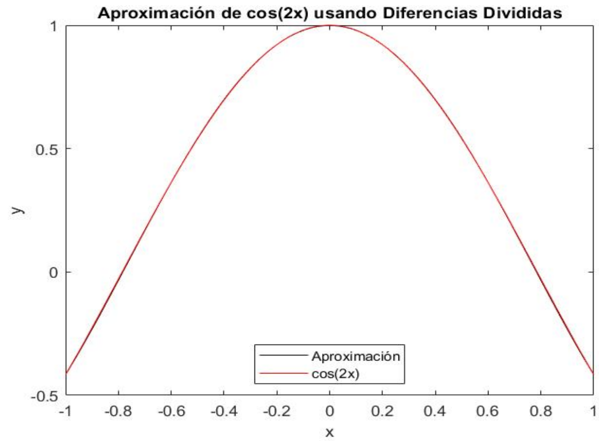
Entonces nos queda que

$$p(x) = 2067 + 767(x - 2) + 71(x - 2)(x - 4) = 71x^2 + 341x + 1101$$

De lo anterior es fácil comprobar que $p(2) = 2067$, $p(4) = 3601$ y $p(5) = 4581$

2.5

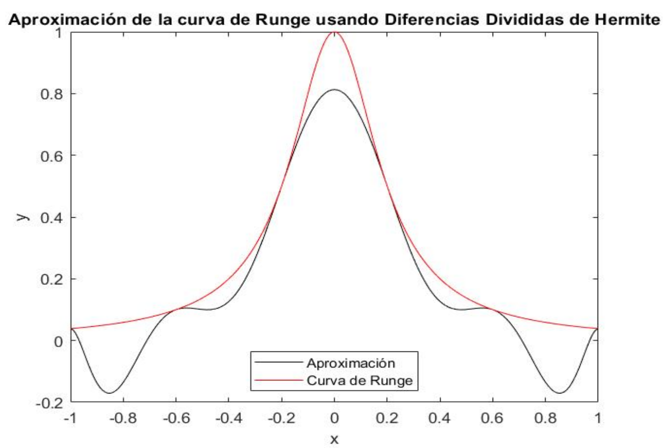
El código en MATLAB se adjunta en la entrega, y el gráfico obtenido es el siguiente.



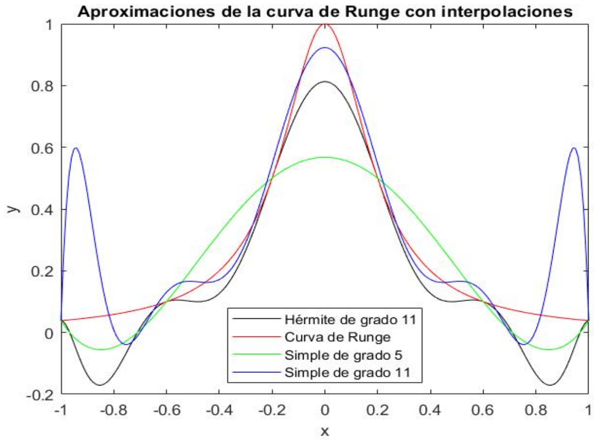
A primera vista pareciera ser una muy buena aproximación.

2.6

El código en MATLAB se adjunta en la entrega, y el gráfico obtenido es el siguiente.



Ahora comparémoslo con el polinomio interpolante simple de igual $n = 5$ y de igual grado (11). El gráfico es el siguiente



De aquí se puede ver que el polinomio interpolante de grado 5 es una aproximación bastante mala. Mientras que los otros dos parecieran ser aproximaciones de un nivel similar, con la diferencia que el polinomio simple de grado 11 es mejor en el centro del intervalo y el de Hermite de grado 11 trabaja mejor en los extremos del intervalo.

3

3.1

Lo haré del principio para practicar Lo primero es que se tiene que $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$. Además es tiene que $a_0 = f(x_0) = 0$, $a_1 = f(x_1) = 1$ y $a_2 = f(x_2) = 0$, y que $h_0 = 2$ y $h_1 = 1$. Entonces, para encontrar los c tenemos un sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3(a_2-a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1-a_0)}{h_0} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Esto es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{9}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Con solución $c_0 = 0$, $c_1 = -\frac{3}{4}$ y $c_2 = 0$ Entonces se tiene que

$$b_0 = \frac{(a_1-a_0)}{h_0} - \frac{h_0(2c_0+c_1)}{3} = \frac{1}{2} - \frac{-1.5}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

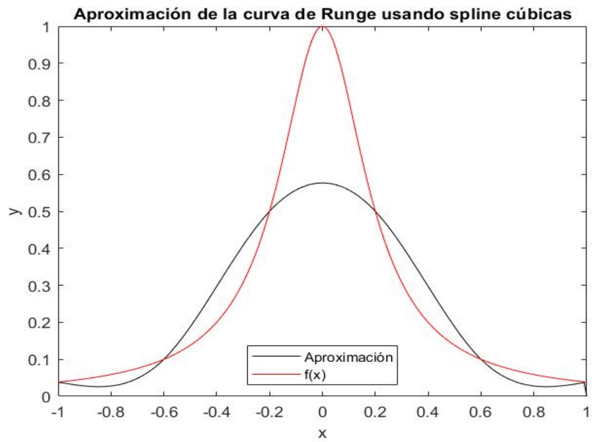
$$b_1 = \frac{(a_2-a_1)}{h_1} - \frac{h_1(2c_1+c_2)}{3} = -\frac{1}{1} - \frac{-1.5}{3} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$d_0 = \frac{(c_1-c_0)}{3h_0} = \frac{-0.75}{6} = -\frac{1}{8}$$

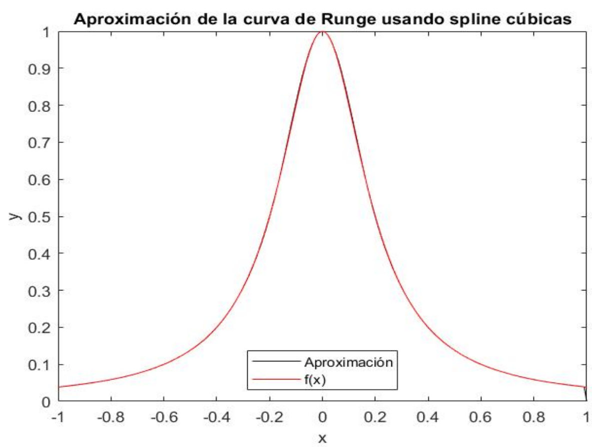
$$d_1 = \frac{(c_2-c_1)}{3h_1} = \frac{0.75}{3} = \frac{1}{4}$$

3.2

El código de MATLAB se adjunta en la entrega, y el gráfico obtenido es el siguiente



De aquí se puede ver que la aproximación es pésima, pero al menos es suave. Lo anterior se puede deber a que hay muy pocos nodos, de hecho con 12 nodos se obtiene una curva buena, la cual se adjunta a continuación.



3.3

Supongamos que la matriz A es singular, entonces $\exists c \neq 0$ tal que $Ac = 0$.
Sea $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $|c_i| \geq |c_j| \; \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ Como $Ac = 0$, en particular si vemos la componente i-ésima del vector resultante se tiene que

$$0 = A_i\vec{c} = A_{i1}c_1 + ... + A_{ii}c_i + ... + A_{in}c_n$$

Despejando y aplicando valor absoluto

$$|A_{ii}||c_i| = |A_{i1}c_1 + ... + A_{i(i-1)}c_{i-1} + A_{i(i+1)}c_{i+1} + ... + A_{in}c_n| = |\sum_{j=1, j\neq i}^{n} A_{ij}c_j|$$

Usando desigualdad triangular y separando el valor absoluto

$$|\sum_{j=1, j\neq i}^{n} A_{ij}c_j| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{ij}||c_j|$$

Pero por ser c_i máximo se tiene que

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{ij}||c_j| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{ij}||c_i|$$

Por transitividad

$$|A_{ii}||c_i| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{ij}||c_i|$$

Esto es

$$|A_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{ij}|$$

Lo cual contradice que A es de diagonal estrictamente dominante, y por ende es un absurdo. Este absurdo nace por asumir que A es singular, y por ende no es singular, esto es, es invertible.

3.4

En una spline natural los a_i vienen dados por $f(x_i)$, los b_i tienen formula cerrada para los a_i y c_i, y los d_i tienen formula cerrada para los a_i. Entonces la solución es única si y solo si los c_i son únicos. Los c_i vienen dados por la ecuación matricial $A_f c = b$, donde c es el vector con los c_i y b es un vector con constantes. y $A - f$ viene dada por

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Pero A_f es una matriz de diagonal estrictamente dominante porque $1 < 0$ y $h_i + h_{i+1} < 2h_i + 2h_{i+1}$ puesto que los h_i son números positivos (para esto es necesario que sean ordenados). Como A_f es de diagonal estrictamente dominante, entonces $det(A_f) \neq 0$ y así el sistema tiene solución única. Además, es necesario que los nodos sean distintos ya que en caso contrario $\exists i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ tal que $h_i = 0$, y por ende habría una indeterminación en la componente b_i.
Con esto se demuestra lo pedido.