APPROSSIMAZIONE DI BORN

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + U(r) \equiv \hat{H}_0 + U(r) \qquad \sigma_c(\hat{H}) = \sigma_c(\hat{H}_0) = [0, \infty[$$

$W = W^{(0)} > 0$ trattiamo le autofunz. perturbativamente:

$$u(\vec{x}) = u^{(0)}(\vec{x}) + \lambda u^{(1)}(\vec{x}) + \lambda^2 u^{(2)}(\vec{x}) + \ldots$$

All'ordine zero:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u^{(0)}(\vec{x}) = W u^{(0)}(\vec{x})$$

Al primo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u^{(1)}(\vec{x}) + U(r)\, u^{(0)}(\vec{x}) = W u^{(1)}(\vec{x})$$

Al secondo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u^{(2)}(\vec{x}) + U(r)\, u^{(1)}(\vec{x}) = W u^{(2)}(\vec{x})$$

e genericamente:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u^{(n)}(\vec{x}) + U(r)\, u^{(n-1)}(\vec{x}) = W u^{(n)}(\vec{x})$$

Per il problema della diffusione siamo interessati a comportamenti asintotici del tipo:

$$u^{(+)}_{\vec{p}'}(\vec{x}) \xrightarrow[r \to \infty]{} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\left[e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}'\cdot\vec{x}} + f(\vec{p}; \theta_{\hat{p}\hat{x}})\frac{1}{r}e^{\frac{i}{\hbar}pr}\right]$$

All'ordine zero abbiamo una particella imperturbata:

$$u^{(0)}_{\vec{p}'}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \longrightarrow f^{(0)}(\vec{p}; \theta_{\hat{p}\hat{x}}) = 0$$

All'ordine n:

$$u^{(n)}_{\vec{p}'}(\vec{x}) \xrightarrow[r \to \infty]{} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} f^{(n)}(p; \theta_{\hat{p}\hat{x}})\frac{e^{\frac{i}{\hbar}pr}}{r}$$

con $f^{(n)}(\vec{p}; \theta_{\hat{p}\hat{x}})$ tale che: $f(\vec{p}; \theta_{\hat{p}\hat{x}}) = \sum_n f^{(n)}(\vec{p}; \theta_{\hat{p}\hat{x}})$

le $u^{(n)}(\vec{x})$ sono sol. di: EQ. DI HELMOTZ

$$(\nabla^2 + k^2)\, u^{(n)}(\vec{x}) = J^{(n)}(\vec{x}) \quad \text{con} \quad k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$$

e $J^{(n)}(\vec{x}) = \frac{2m}{\hbar^2} U(r)\, u^{(n-1)}(\vec{x})$

Dobbiamo trovare la funzione di Green, consideriamo l'eq. di Poisson:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = J(\vec{x}) \Rightarrow \varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} J(\vec{x}')$$

da cui $\varphi(\vec{x}) \propto \frac{1}{r}$

La funz. di Green dell' eq. di Poisson è:

$$\tilde{G}(\vec{x}-\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$ tale che:

$$\nabla^2 \tilde{G}(\vec{x}-\vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

Per l'eq. di Helmotz invece:

$$(\nabla^2 + K^2)\, G(\vec{x}-\vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$G(\vec{\xi}) \xrightarrow[\xi\to\infty]{} \frac{e^{iK\xi}}{\xi} \Rightarrow G(\vec{x}-\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{iK|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

↳ come $h_0^{(n)}(\vec{x})$

Per verificare che la Green sia questa consideriamo:

$$\nabla^2 = \nabla^{2(\vec{\xi})} = \frac{1}{\xi^2}\left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{\xi^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

Notiamo che: $G(\vec{x}-\vec{x}') = \tilde{G}(\vec{x}-\vec{x}')\, e^{iK|\vec{x}-\vec{x}'|}$

$$\Rightarrow \nabla^2 G(\vec{x}-\vec{x}') = \left(\nabla^2\tilde{G}(\vec{x}-\vec{x}')\right) e^{iK|\vec{x}-\vec{x}'|} + 2\vec{\nabla}\tilde{G}(\vec{x}-\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}e^{iK|\vec{x}-\vec{x}'|} +$$

$$+ \tilde{G}(\vec{x}-\vec{x}')\,\nabla^2 e^{iK|\vec{x}-\vec{x}'|} =$$ $\longrightarrow$ $\nabla^2(f\cdot g) = (\nabla^2 f)g + 2\vec{\nabla}f\vec{\nabla}g + f(\nabla^2 g)$

$$= \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') + 2\frac{\partial}{\partial\xi}\tilde{G}(\vec{\xi})\frac{\partial}{\partial\xi}e^{iK\xi} + \tilde{G}(\vec{\xi})\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2 e^{iK\xi}\right) =$$

$$= \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') - K^2 G(\vec{x}-\vec{x}') \Rightarrow (\nabla^2+K^2)\, G(\vec{x}-\vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

$\Rightarrow$ $G(\vec{x}-\vec{x}')$ è sol. dell' eq. di Helmotz.

Avremo quindi:

$$u^{(n)}(\vec{x}) = \int d^3x' G(\vec{x}-\vec{x}') \, S^{(n)}(\vec{x}') = \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \, G(\vec{x}-\vec{x}') \, U(r') \, u^{(n-1)}(\vec{x}')$$

dove $U(r)$ è un potenziale qualunque.

Al primo ordine quindi:

$$u^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x \, \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \, U(r') \, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}'}$$

da $u^{(1)}$ possiamo trovare $u^{(2)}$ e così via...

$$u^{(2)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 \int d^3x' \int d^3x'' \, G(\vec{x}-\vec{x}') \, G(\vec{x}-\vec{x}'') \, U(r') \, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}''}$$

↳ SERIE DI BORN: SOMMANDO TUTTI I TERMINI SI OTTIENE L'ESPRESSIONE ESATTA PER $f(\vec{p};\theta_{\vec{p}\vec{x}})$.

Studiamo ora il comportamento asintotico di $u^{(1)}(\vec{x})$: *

$$|\vec{x}-\vec{x}'| \xrightarrow[r\to\infty]{} r - \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Ci interessano solo i termini dell'ordine di $\frac{1}{r}$.

* L'APPROSSIMAZIONE DI BORN TIENE CONTO SOLO DEL PRIMO TERMINE.

$$u^{(1)}_{\vec p}(\vec x) \xrightarrow[r\to\infty]{} -\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\,\frac{1}{r}\,e^{\frac{i}{\hbar}pr}\,\frac{m}{2\pi\hbar}\int d^3x'\,U(r')\,e^{\frac{i}{\hbar}\left(\vec p - p\frac{\vec x}{r}\right)\cdot\vec x'} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

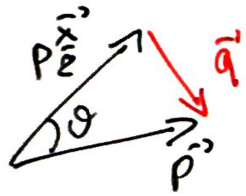
Confrontando con le condiz. asintotiche otteniamo:

$$f^{(1)}(\vec p;\theta_{\hat p\hat x}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x'\,U(r')\,e^{\frac{i}{\hbar}\left(\vec p - p\frac{\vec x}{r}\right)\cdot\vec x'}$$

e quindi: $\sigma(p,\theta) = |f^{(1)}(p;\theta_{\hat p\hat x})|^2 \rightarrow$ Se $U(r)$ non è centrale c'è anche φ.

Nel caso di un potenziale centrale definiamo:

$$\vec q = \vec p - p\frac{\vec x}{r}$$



Definiamo un sistema di coordinate polari per $\vec q$:

$$\vec x' \equiv \vec x'(r',\alpha,\beta)$$

$$\Rightarrow f^{(1)}(p;\theta_{\hat p\hat x}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty dr'\,r'^2\,e^{\frac{i}{\hbar}\vec q\cdot\vec r'}\,U(r')\int_0^\pi d\alpha\,\sin\alpha\int_0^{2\pi} d\beta =$$

$\vec q\cdot\vec r = qr\cos\alpha$

$$= -\frac{m}{\hbar^2}\int_0^\infty dr'\,r'^2\,U(r')\int_{-1}^{1} dy\,e^{\frac{i}{\hbar}qr'y}$$ con $y = \cos\alpha$, $dy = -\sin\alpha\,d\alpha$

$$\Rightarrow f^{(1)}(p;\theta_{\hat p\hat x}) = -\frac{2m}{\hbar q}\int_0^\infty dr'\,r'\,U(r')\,\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)$$

$q^2 = 4p^2\sin^2\left(\frac{\theta_{\hat p\hat x}}{2}\right) \longrightarrow$ 2p^2(1-cos(theta))

$$\Rightarrow f^{(1)}(p;\theta_{\hat{px}}) = -\frac{2m}{\hbar\, 2p \sin\left(\frac{\theta_{\hat{px}}}{2}\right)} \int_0^{\infty} dr'\, r'\, U(r) \sin\left[\frac{1}{\hbar}\left|\vec{p} - p\frac{\vec{x}'}{r}\right| r\right]$$

questo metodo funziona per $\frac{\hbar}{p} \ll b \rightarrow$ p grandi!

Vediamo come applicare questo metodo per il potenziale di Yukawa:

$$U(r) = -g\,\frac{e^{-\mu r}}{r} \quad \text{con} \quad \mu = \frac{1}{b} \rightarrow \text{Inverso del raggio d'azione}$$

$$f^{(1)}(p;\theta_{\hat{px}}) = \frac{2mg}{\hbar q} \int_0^{\infty} dr\, e^{-\mu r} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) =$$

$$= \frac{m}{i\hbar q}\, g \int_0^{\infty} dr\, e^{-\mu r}\left(e^{\frac{i}{\hbar}qr} - e^{-\frac{i}{\hbar}qr}\right) = \frac{2mg}{\hbar^2}\, \frac{1}{(q/\hbar)^2 + \mu^2} =$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2}\, \frac{g}{4\frac{p^2}{\hbar^2}\sin^2\left(\frac{\theta_{\hat{px}}}{2}\right) + \mu^2}$$

Per il potenziale Coulombiano che non è a corto range, possiamo considerare il pot. di Yukawa per $\mu \rightarrow 0$ e $g = -Z_1 Z_2 e_0^2$, ottenendo:

$$f^{(1)}(p,\theta_{\hat{px}}) = -\frac{m Z_1 Z_2 e_0^2}{2p^2 \sin^2\left(\frac{\theta_{\hat{px}}}{2}\right)} \rightarrow \text{In accordo con Rutherford!}$$

Dal calcolo esatto si ottiene invece:

$$f_c(p,\theta_{pk}) = \left(-\frac{m z_1 z_2 e_0^2}{2p \sin^2(\frac{\theta}{2})}\right) \exp\left\{ i\left[-\frac{m z_1 z_2 e_0^2}{\hbar p} \log\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+2\eta_0\right]\right]\right\}$$

con $\eta_0 = \arg\Gamma\left(1 + i m \frac{z_1 z_2 e_0^2}{\hbar p}\right)$

che differisce dalla formula approx. solo per un fattore di fase $\Rightarrow$ σ è la stessa!

Analizz. adesso un'approx. che fa uso delle perturbazioni dipendenti dal tempo, di cui richiamiamo i risultati:

$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ con $H_0|m\rangle = W_m^{(0)}|m\rangle$ → Spettro di H_0 puramente discreto.

Consideriamo la transiz. $|m\rangle \to |k\rangle$:

$$P_k(t) = 4|(H_1)_{km}|^2 \frac{1}{(W_k^{(0)} - W_m^{(0)})^2} \sin^2\frac{(W_k^{(0)} - W_m^{(0)})\,t}{2\hbar}$$

con $(H_1)_{km} = \langle k|\hat{H}_1|m\rangle$.

Supp. di avere delle grandezze $\vec{K}$ tali che:

$[\hat{\vec{K}}, \hat{H}_0] = 0 \Rightarrow |m\rangle = |W_m^{(0)}, K_s\rangle$ → $\vec{K}$ costanti del moto imperturbato

...

Se per fissati valori di K_S gli autovalori di H_0 sono abbastanza fitti da poter essere considerati continui posso avere:

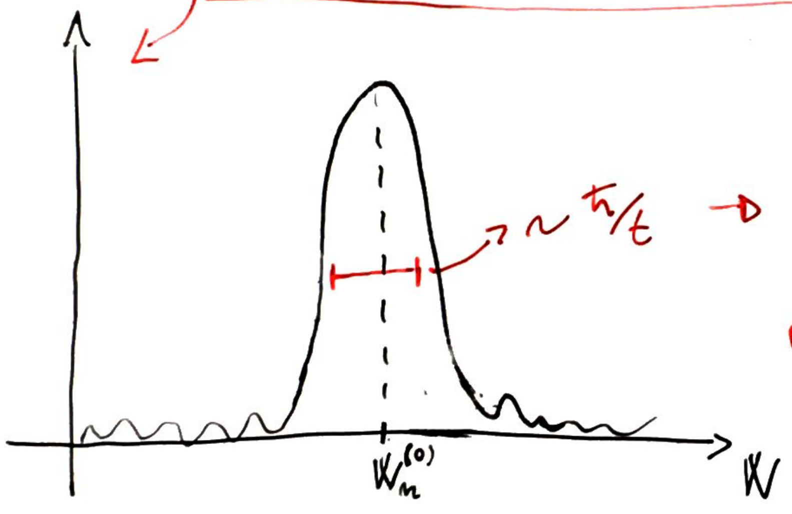
DENSITÀ DEGLI STATI

$$dW_0 \, \rho(W^0, K_S) = \left\{ \# \, |W_n^{(0)}, K_S\rangle : W^{(0)} < W_n^{(0)} < W^{(0)} + dW \right\}$$

La prob. di avere lo stato K_S' al tempo t sarà:

$$P(K_S'|t) = \int_{W_0}^{\infty} dW \, \rho(W, K_{S'}) \, 4 \left| \langle W, K_{S'} | \hat{H}_1 | W_n^{(0)}, K_S \rangle \right|^2 \times$$

$$\times \underbrace{\frac{1}{(W-W_n^{(0)})^2} \sin^2\left[\frac{(W-W_n^{(0)})t}{2\hbar}\right]}$$



Poiché l'ultimo termine presenta un picco, per $t \to \infty$ le variazioni dei primi 2 termini sono trascurabili $\Rightarrow$ escono dall'integrale.

$$P(K_S'|t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \rho(W_n^{(0)}, K_{S'}) \, 4 \left| \langle W_n^{(0)} | K_{S'} | \hat{H}_1 | W_n^{(0)}, K_S \rangle \right|^2 \times$$

$$\times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dW \, \frac{\sin^2[(W-W_n^{(0)})t/2\hbar]}{(W-W_n^{(0)})^2}}_{\to \frac{\pi}{2\hbar} t \, \delta(W - W_n^{(0)})} \longrightarrow \frac{2\pi t}{\hbar} \left| \langle W_n^{(0)}, K_{S'} | \hat{H}_1 | W_n^{(0)}, K_{S'} \rangle \right| \times \rho(W_n^{(0)}, K_{S'})$$

Si ottiene la regola d'oro di Fermi:

$$\frac{dP}{dt}(K_{g'}) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle W_m^{(0)}, K_{g'} | \hat{H}_1 | W_n^{(0)}, K_g \rangle|^2 \rho(W_m^{(0)}, K_g')$$

Applichiamo questi risultati allo scattering con pot. centrale, dove sostituiamo la particella libera con una part. che si propaga in una scatola cubica di lato L per avere spettro discreto per H_0:

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow C = \{\vec{x} : |x| < \frac{L}{2}, |y| < \frac{L}{2}, |z| < \frac{L}{2}\}$$

COND. PERIODICHE AL CONTORNO

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}^2(C) \qquad \Psi \in \mathcal{L}^2(C) : \Psi(-\tfrac{L}{2}, y, z) = \Psi(\tfrac{L}{2}, y, z)$$

anche per y e z

Le autofunz. di $\vec{P}$ e di H_0 saranno:

$$u_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad \text{con } \vec{p} = \left(n_x \frac{2\pi\hbar}{L}, n_y \frac{2\pi\hbar}{L}, n_z \frac{2\pi\hbar}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{H}_0 u_{\vec{p}}(\vec{x}) = W_m^{(0)} u_{\vec{p}}(\vec{x})$$

Lo stato iniziale sarà: $u_{\vec{p}_0}(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_0\cdot\vec{x}}$

Vogliamo determinare la prob. di transiz. in uno stato finale con direz. $\hat{p}_{g'}$.

Dobbiamo calcolare ρ.

$$d^3p = \Delta p_x \, \Delta p_y \, \Delta p_z = \left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3 \qquad d^3V = p^2 \, dp \, d\Omega$$

→ numero di punti nell' angolo $d\Omega$ con impulso tra p e $p+dp$

$$\#(d^3V) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 p^2 \, dp \, d\Omega = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 m p \, dW \, d\Omega = \rho(W, \hat{\ell}) \, dW \, d\Omega$$

↳ versore direz. di diffusione

$$\Rightarrow dP = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle u_{p_0 \hat{\ell}} | \hat{H}_1 | u_{p_0} \rangle \right|^2 \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 m p_0 \, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{L^3} \frac{m p_0}{(2\pi)^2 \hbar^4} \left| \int d^3x \, U(r) \, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_0 - p_0 \hat{\ell}) \cdot \vec{x}} \right|^2 d\Omega$$