

FENOMENI DI RISONANZA

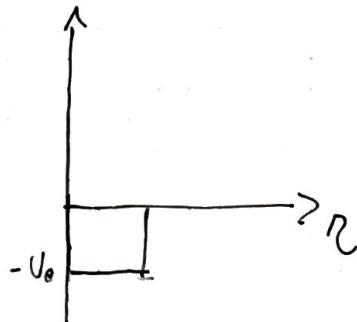
Abbiamo trovato per l'ampiezza di scattering:

$$f(p; \delta) = \frac{h}{p} \sum_l (2l+1) e^{i\delta e(p)} \sin \delta e(p) P_l(\cos \delta)$$

$$\hbar l \leq pb$$

Vogliamo ora trattare il problema della **bucia quadrata** di potenziale:

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$



Le autofunz. saranno del tipo:

$$\tilde{\Psi}_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \text{con:}$$

$$\frac{d^2 R_{nl}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_{nl}}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R_{nl} = 0$$

$$\alpha = \begin{cases} \bar{\kappa} & r < b \\ K & r > b \end{cases} \quad \begin{aligned} \bar{\kappa} &= \frac{2m}{\hbar^2} (W + U_0) \\ K &= \frac{2mW}{\hbar^2} \quad \underline{W > 0} \end{aligned}$$

Definiamo le coord. radiali adimensionale: $\rho = \begin{cases} \bar{\kappa} r & r < b \\ Kr & r > b \end{cases}$

Ottieniamo:

$$R'' + \frac{\ell}{\rho} R' + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right) R = 0$$

Le sol. di questa eq. sono le **frazioni di Bessel sferiche**

$$\left\{ \begin{array}{l} J_\ell(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^\ell}{(\ell\ell+1)!} \text{ I specie} \rightarrow \text{regolari nell'origine} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\ell(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \frac{(\ell\ell-1)!!}{\rho^{\ell+1}} \text{ II specie} \rightarrow \text{singolari} \end{array} \right. \quad \text{"}$$

La forma generale delle soluz. sarà:

$$R(\rho) = \begin{cases} A J_\ell(K_2) & r < b \\ C J_\ell(K_2) + D M_\ell(K_2) & r > b \end{cases} \quad (W > 0)$$

$$C = E \cos \delta_E \quad D = -E \sin \delta_E$$

Gli fondamentali orientazioni delle funz. di Bessel sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_\ell(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \cos \left[\rho - (\ell+1) \frac{\pi}{2} \right] \\ M_\ell(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \sin \left[\rho - (\ell+1) \frac{\pi}{2} \right] \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow E(0) J_\ell - E \sin \delta_E M_\ell \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{E}{K_2} \cos \left[K_2 - \frac{\ell+1}{2} \pi + \delta_E \right]$$

Imponiamo le cond. di 2^o grado:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \beta_e(\bar{k}b) = E [c_0 \beta_e(\bar{k}b) - \sin \beta_e M_e(\bar{k}b)] \\ \bar{k} A \beta'_e(\bar{k}b) = E_k [c_0 \beta'_e(\bar{k}b) - \sin \beta_e M'_e(\bar{k}b)] \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan \beta_e = \frac{K \beta_e(\bar{k}b) \beta'_e(\bar{k}b) - \bar{k} \beta'_e(\bar{k}b) \beta_e(\bar{k}b)}{K \beta_e(\bar{k}b) M'_e(\bar{k}b) - \bar{k} M_e(\bar{k}b) \beta'_e(\bar{k}b)}} \quad \text{SFASAMENTI}$$

$$\text{Faccendo il lim per } p \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow \infty \text{ si ha:}$$

$\lim_{p \rightarrow 0} \tan \beta_e(p) \propto (k b)^{l+1} \rightarrow 0 \rightarrow$ Al crescere di l gli sfasamenti $\rightarrow 0$ più velocemente.
invece:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \tan \beta_e(p) = \frac{m U_0}{h} \frac{b}{p} \rightarrow 0$$

Perche' le tangenti degli sfasamenti tendono a 0 per $p \rightarrow 0$ e $p \rightarrow \infty$ allora $\beta_e(0) = m \bar{u}$ e $\beta_e(\infty) = m \bar{u}$.

Fissiamo per convenzione $\beta_e(\infty) = 0$. \rightarrow IN QUESTO MODO
 $\beta_e \xrightarrow{U_0 \rightarrow 0} 0$

TEOREMA DI LEVINSON:

Se poniamo $\beta_e(0) = M_e \bar{u}$ allora M_e è pari al n° di stati legati per il considerato valore di l .

\Rightarrow C'è un legame tra stati legati ed autofunz. improprie!

In conclusione: $S_{\ell}(P) = M \pi - Q_0 K^{2\ell+1} - \frac{Q_0}{2} K^{2\ell+3} - \dots$

Per piccoli valori di P .

Sostituendo in $f(P; \theta)$ si ha:

$$\frac{1}{2iK} (e^{i\delta_0} - 1) = \frac{2^{i\delta_0} \sin \delta_0(P)}{K} = -Q_0 K^{2\ell} + \dots$$

NEL LIMITE $P \rightarrow 0$ SOLO $\ell=0$ CONTRIBUISCE A $f(P; \theta)$.

Queste conclusioni sono qualitativamente esatte per generiche potenziali a corto range.

Come sapere per quanto troncare la serie?

- $\ell=0 \rightarrow f(P; \theta) = \frac{\hbar}{P} e^{i\delta_0} \sin \delta_0(P) = f_0(P)$
- $\Rightarrow \sigma(\theta) = |f(P; \theta)|^2 = \frac{\hbar^2}{P^2} \sin^2 \delta_0 \equiv \sigma_0(P) \xrightarrow{\text{UGUALE PROB. DI DIFFUSIONE IN TUTTE LE DIREZIONI!}}$

- $\ell=1 \rightarrow f(P; \theta) = \frac{\hbar}{P} [e^{i\delta_0} \sin \delta_0(P) + 3e^{i\delta_0} \sin \delta_0 \cos \theta]$
- $\Rightarrow \sigma_1(\theta) = \frac{\hbar^2}{P^2} [2 \sin^2 \delta_0 + 6 \sin \delta_0 \sin \theta, \cos(\delta_1 - \delta_0) \cos \theta + 9 \sin^2 \delta_0 \cos^2 \theta]$

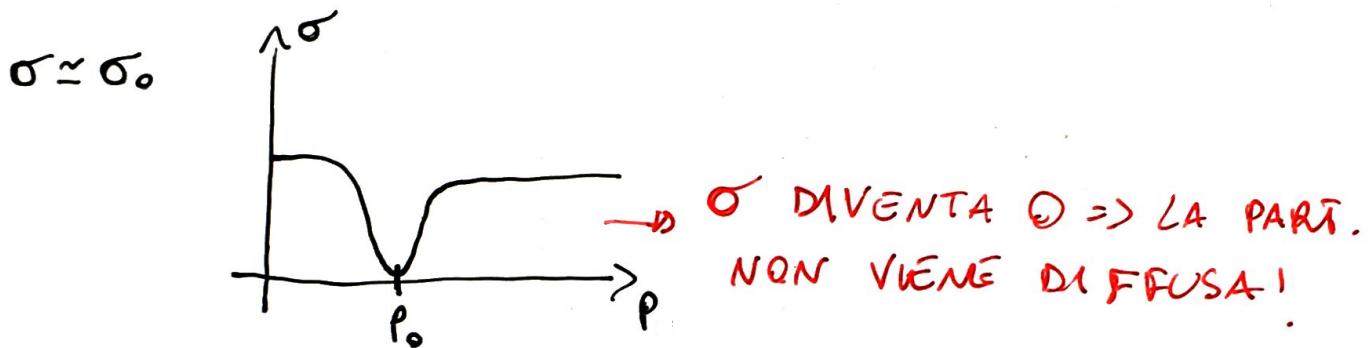
In base ai dati sugli spostamenti è possibile costruire un modello per il potenziale.

RISONANZE

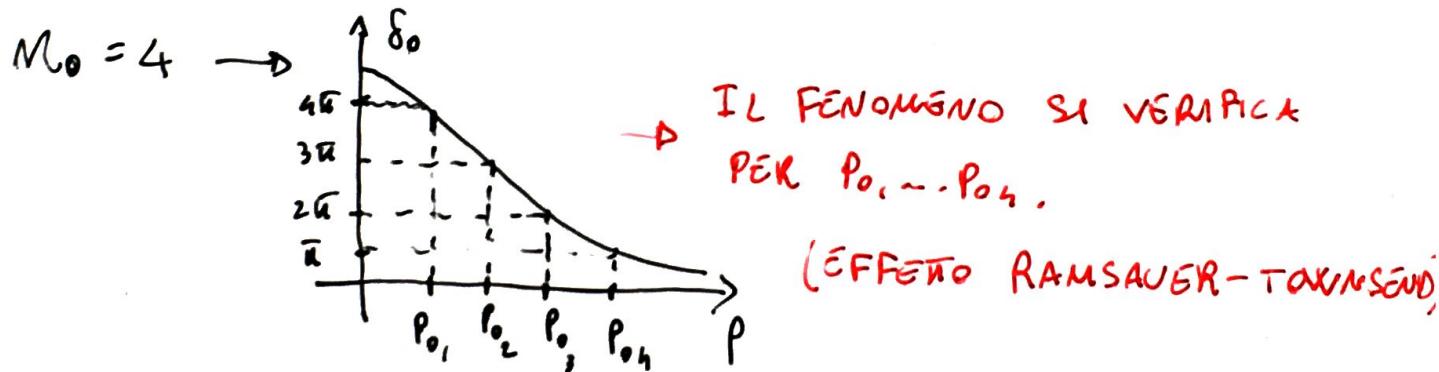
Sulla base di quanto troughto, è possibile prevedere due fenomeni interessanti:

- 1) $\delta_e \approx \pi$ per $p = p_0$ { PER QUALCHE
- 2) δ_e varia di π nell'intorno di p_0 } VALORE DI ϵ

Se 1) si verifica in onda s ($l=0$), per p_0 piccolo abbastanza avremo:

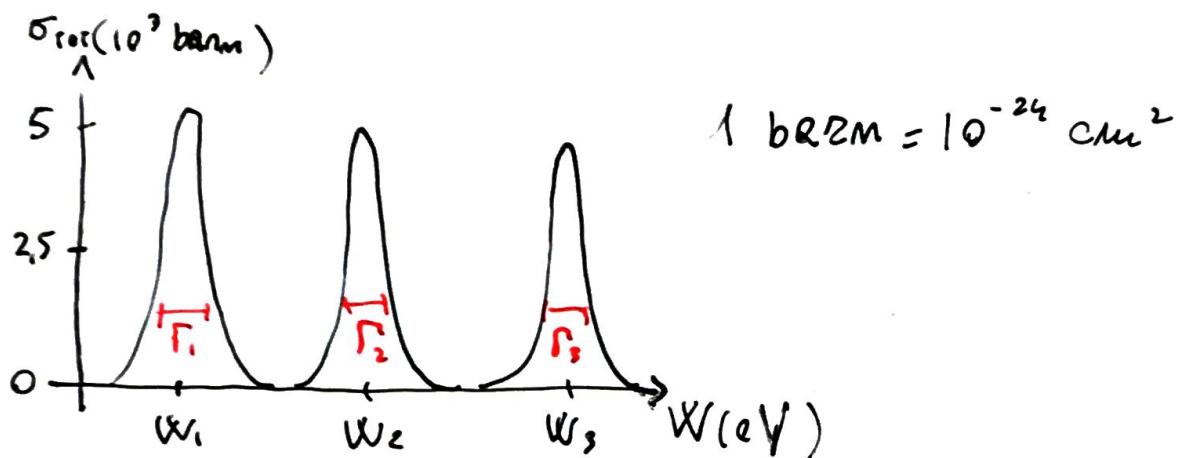


Per il teorema di Levinson:



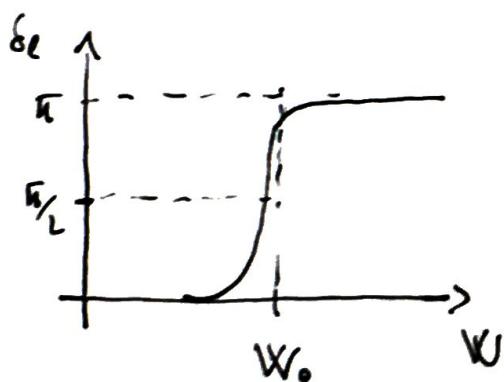
Fisicamente si ha che a basse energie le autofunzioni di particella libera in onda s ($l=0$) e quelle di una particella soggetta ad un potenziale differiscono di multipli interi di $\lambda/2 \Rightarrow$ interferenza distruttiva.

Inoltriamo ora il fenomeno delle resonanze, consideriamo l'urto tra neutrini ed atomi di Iridio:



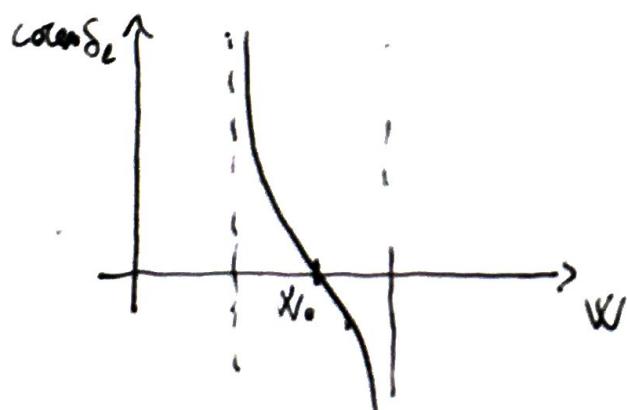
Ci si aspetta una $\sigma_{\text{tot}} \approx 0,1 \text{ barn}$ in accordo con il caggio d'interat. forte. Come si spiega il disaccordo con i dati?

Siamo nel caso 2)



$$\sigma_{\text{tot}}^{(l)} = 4\pi(l(l+1)\frac{\hbar^2}{e^2} n^2 \sin^2 S_l)$$

Nella regione intorno a W_0 si puoi appross. se:



Definiamo :

$$\Gamma = \frac{\lambda}{|(\frac{d\delta_e}{d\omega})|_{\omega=\omega_0}} \longrightarrow \text{LARGHEZZA DI RISONANZA}$$

e svilupperemo la cotangente nell'intorno di ω_0 :

$$\begin{aligned} \cot \delta_e(\omega) &\simeq \cot \delta_e(\omega_0) + \frac{d \cot \delta_e}{d \delta_e} \Big|_{\delta_e=0} \frac{d \delta_e}{d \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) = \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma} (\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

Vediamo ora che:

$$e^{i\delta_e} \sin \delta_e = \frac{\sin \delta_e}{e^{-i\delta_e}} = \frac{\sin \delta_e}{\cos \delta_e - i \sin \delta_e} = \frac{1}{\cot \delta_e - i} \simeq \frac{1}{\frac{\lambda(\omega - \omega_0)}{\Gamma}} - i$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{\text{tot}}^{(l)} \simeq 4\pi(l+1) \frac{\hbar^2}{\rho^2} \frac{(\Gamma/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2}}$$

FORMULA DI
BREIT-WIGNER
(LORENTZIANA)

ω_0 = energia di risonanza; $\sin^2 \delta_e$

Γ = ampiezza della risonanza;

$[0; 2\pi]$

Se, più in generale, si ha $\delta(\omega_0) = \bar{\delta}_0 + \frac{\pi}{2}$:

$\delta_e(\omega) = \bar{\delta}_0 + \delta_e^{res}(\omega) \rightarrow$ Situaz. precedente tralascia di $\bar{\delta}_e$.

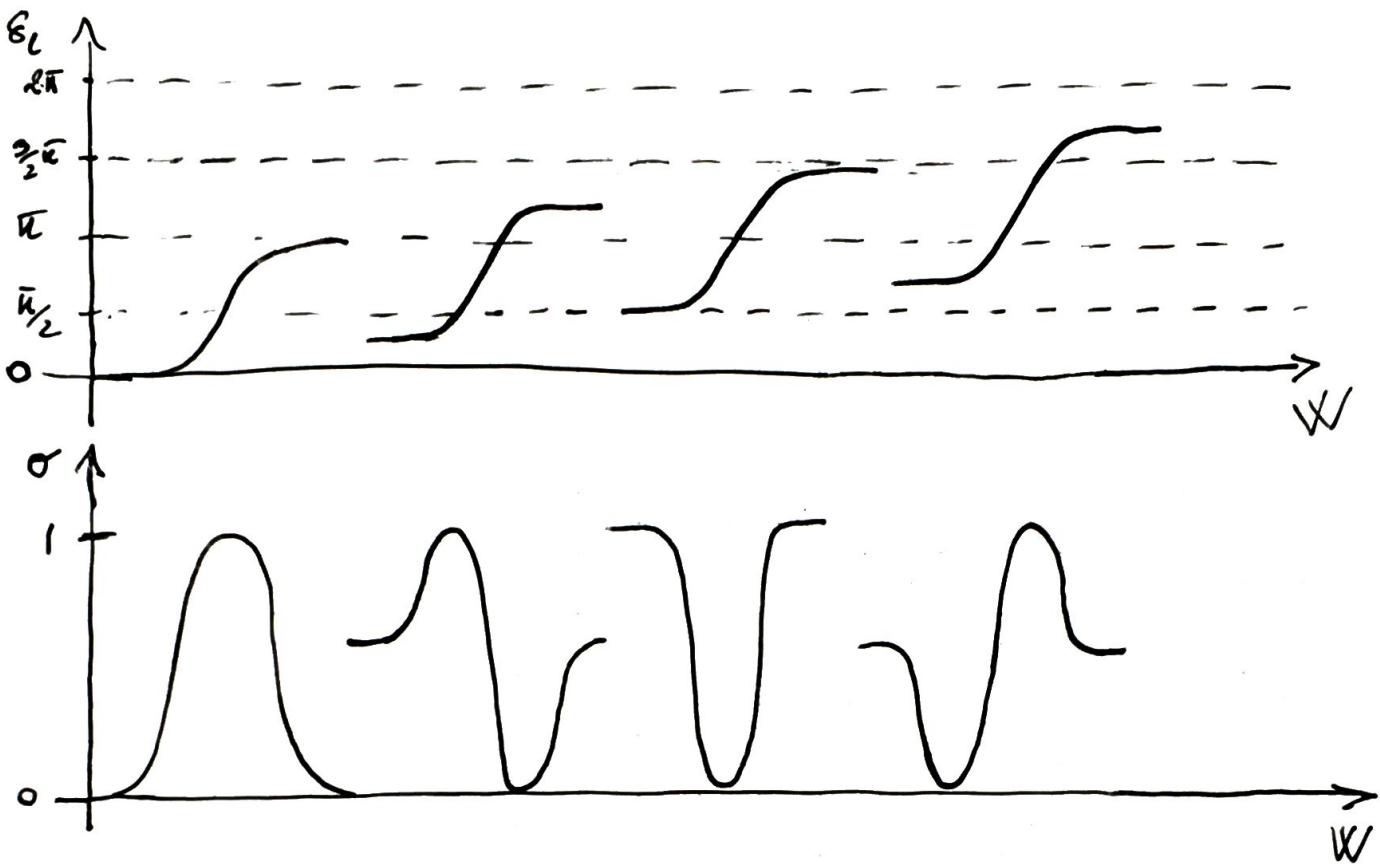
$$\Rightarrow \sigma_{\text{tot}}^{(l)}(\omega) = i\pi(l+1) \frac{\hbar^2}{\rho^2} [\sin \delta_e(0) \delta_e^{res}(\omega) + \cos \bar{\delta}_e \sin \delta_e^{res}(\omega)]^2$$

Anzemo infine:

$$\Theta_{\text{tot}}^{(e)}(\omega) \approx 4\pi(2l+1) \frac{\hbar^2}{P^2} \frac{[(\omega - \omega_0) \Delta m \delta_e - \Gamma/2 \cos \delta_e]^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

A1

Per $\delta_e = 0$ trasiamo l'espressione precedente.



Dimostriamo che per ottenere questi fenomeni deve valere $\Delta\omega \ll \Gamma$:

$$dN_{\text{scar}} = n_{\text{in}} d\Omega \int d^3p |C(p)|^2 \frac{p}{|p_i|} |\mathcal{f}(p; \theta)|^2$$

Se $\Delta\omega$ è troppo grande, non potremo tirare $|\mathcal{f}(p; \theta)|^2$ fuori dall'integrale \Rightarrow molto una media su $C(p)$.

Per spiegare il comportamento debole abbiamo studiato la funz. d'onda del proiettile nella zona del potenziale.

Nelle zone di risonanza si ha $\frac{d\psi}{dR}$ molto grande, la condizione effettiva questo avvenza è che la funz. d'onda abbia un'ampiezza molto magg. nella zona del potenziale.

Consideriamo l'espressione: Coincide con g_{pe} per grandi R

$$W_{pe} = \sqrt{\frac{e}{\pi h}} \cos \left[\frac{p}{\pi} R - (l+1) \frac{\pi}{2} + \delta_e \right] \quad R \geq 0$$

che soddisfa: $-W''_{pe} = \frac{p^2}{\pi^2} W_{pe}$

Consideriamo anche $W_{p'e} = -W''_{p'e} = \frac{p_1^2}{\pi^2} W_{pe}$

Potremo scrivere:

$$\begin{cases} -W_{pe} W''_{pe} = \frac{p^2}{\pi^2} W_{p'e} W_{pe} \\ -W_{pe} W''_{p'e} = \frac{p_1^2}{\pi^2} W_{pe} W_{p'e} \end{cases} \rightarrow \text{Sottraggo m. a. m.}$$

$$\Rightarrow W_{pe} W''_{p'e} - W_{p'e} W''_{pe} = \frac{p_1^2 - p^2}{\pi^2} W_{pe} W_{p'e}$$

Integrando: $\int_0^R (W_{pe} W''_{p'e} - W_{p'e} W''_{pe}) dR = \frac{p_1^2 - p^2}{\pi^2} \int_0^R W_{pe} W_{p'e} dR$

$$\Rightarrow W_{pe} W_{pe}' - W_{pe} W_{pe}' \Big|_0^2 = \frac{p_1^2 - p_2^2}{\pi^2} \int_0^2 W_{pe} W_{pe}' d\theta'$$

$$\Rightarrow \int_0^2 W_{pe} W_{pe}' d\theta' = \frac{\pi^2}{p_1^2 - p_2^2} \left[W_{pe} W_{pe}' - W_{pe} W_{pe}' \right]_0^2$$

Per la parte radiale della funz. d'onda:

$$\left\{ \begin{array}{l} -q_{pe}'' + \frac{2m\chi(\ell)}{\pi^2} q_{pe} + \frac{\ell(\ell+1)}{\ell^2} q_{pe} = \frac{p_1^2}{\pi^2} y_{pe} \\ -q_{pe}'' + \frac{2m\chi(\ell)}{\pi^2} q_{pe}' + \frac{\ell(\ell+1)}{\ell^2} q_{pe}' = \frac{p_2^2}{\pi^2} y_{pe}' \end{array} \right. \text{ molt. per } Y_{p'1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -q_{pe}'' + \frac{2m\chi(\ell)}{\pi^2} q_{pe} + \frac{\ell(\ell+1)}{\ell^2} q_{pe} = \frac{p_1^2}{\pi^2} y_{pe} \\ -q_{pe}'' + \frac{2m\chi(\ell)}{\pi^2} q_{pe}' + \frac{\ell(\ell+1)}{\ell^2} q_{pe}' = \frac{p_2^2}{\pi^2} y_{pe}' \end{array} \right. \text{ molt. per } Y_{p'1}$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell d\theta \left(q_{pe}'' q_{pe}' - q_{pe}''' q_{pe} \right) = \frac{p_1^2 - p_2^2}{\pi^2} \int_0^\ell d\theta q_{pe}' q_{pe}$$

$$y_{pe}(\ell) \xrightarrow{\ell \rightarrow 0} 2^{e+i}$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell d\theta q_{pe}(\ell) q_{pe}'(\ell) = \frac{\pi^2}{p_1^2 - p_2^2} \left[y_{pe}(\ell) q_{pe}'(\ell) - q_{pe}(\ell) y_{pe}'(\ell) \right]_0^\ell$$

Sottraendo m.a.m. l'espressione per W_{pe} si ha:

$$\int_0^\ell d\theta (q_{pe} y_{pe} - W_{pe} W_{pe}') = \frac{\pi^2}{p_1^2 - p_2^2} (W_{pe} W_{pe}' - W_{pe} W_{pe}')_{\ell=0}$$

dove si è considerato che $W_{pe}(0) \neq 0$ e $q_{pe}(0) = 0$

Per $\rho \rightarrow \infty$ abbiamo:

\rightarrow REGOLE D'AZIONE DGL POTENZIALE

$$\int_0^a d\zeta' [q_{pe} q_{pe} - W_{pe} W_{pe}] = \frac{\hbar^2}{\rho_1^2 - \rho^2} [W_{pe} W_{pe}' - W_{pe}' W_{pe}]_{z=0}$$

Facciamo ora il lim per $\rho' \rightarrow \rho$: $\xrightarrow{\text{De l'Hopital}}$

$$\int_0^a d\zeta' [|q_{pe}(\zeta')|^2 - |W_{pe}(\zeta')|^2] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{d\delta_e}{d\rho} - \frac{1}{2\rho} (-1)^e \sin(\hbar\delta_e) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d\delta_e}{d\rho} \approx \pi \int_0^a d\zeta (|q_{pe}|^2 - |W_{pe}|^2) + \frac{1}{2\rho} (-1)^e \sin(\hbar\delta_e)$$

$$\Rightarrow \frac{d\delta_e}{d\rho} > -\frac{1}{2\rho} - \bar{u} \int_0^a |W_{pe}|^2 = -\left(\frac{1}{2\rho} + \frac{2}{\pi} \int_0^a d\zeta \cos^2 \left(\frac{\rho e}{\hbar} - (l+1) \frac{\pi}{2} + \delta_e \right) \right)$$

$\geq -\left(\frac{1}{2\rho} + \frac{2}{\pi} a \right)$ \rightarrow NON È POSSIBILE CHE LA FASE
DECRESCA VELOCEMENTE ($\frac{d\delta_e}{d\rho}$ HA UN
LIMITE INFERIORE).

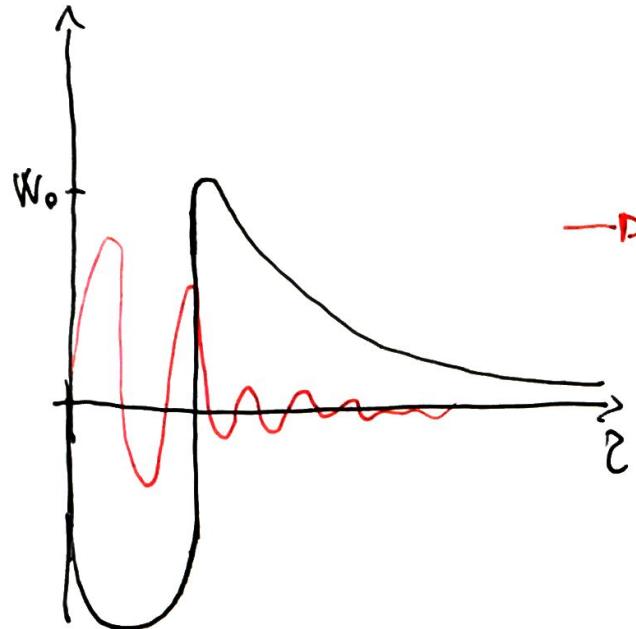
Per $\rho = \rho_0$ invece a crescere è $|q_{pe}|^2$:

$$\boxed{\int_0^a d\zeta |q_{pe}(\zeta)|^2 \Rightarrow \int_0^a d\zeta |W_{pe}|^2 \approx \frac{ea}{\pi \hbar}} \quad \begin{array}{l} \text{CONDIZ.} \\ \text{NECESSARIA PER} \\ \text{LA RISONANZA} \end{array}$$



Per quali tipi di pot. ci aspettiamo risonanze?

Consideriamo una buca di pot. di questo tipo:



→ IN POTENZIALE SIMILE A
QUELLO PRESENTE NEI NUCLEI
⇒ ATTRATTIVO A PICCOLE DIST.
E REPULSIVO A GRANDI DIST.

Il fenomeno della risonanza puo' anche riguardare il decadimento α , schematizzando il problema con la particella α intrappolata nel nucleo in uno stato metastabile che corre per effetto tunnel.

Consideriamo ora un fascio di particelle incidenti con energia $\approx V_0$:

$$\Psi(x, t) = \int d^3\vec{p} C(\vec{p}) M_{\vec{p}}^{(+)}(x) e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\vec{p}^2}{2m} t}$$

con $C(\vec{p}) \neq 0$ per $\vec{p} = \vec{p}'$.

Supponiamo ora $\Delta W \gg \Gamma$, vogliamo studiare l'andamento di $\Psi(x, t)$ per tempi finiti ma non grandi.

$$U_{\vec{p}}^{(+)}(\vec{x}) = \sum_{l,m} \frac{i^l}{p} Y_{lm}^*(\alpha, \beta) e^{i\delta\epsilon} M_{plm}(\vec{x})$$

$$M_{plm}(\vec{x}) = \frac{Y_{pl}(z)}{2} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \text{integrandi su } d\Omega_{(\alpha, \beta)}$$

Una volta calcolata $\Psi(x, t)$, proiettiamola sul valore di l per il quale c'è risonanza:

$$\Psi_{plm}(\vec{x}, t) = \int_0^\infty dp \tilde{C}(p) e^{i\delta\epsilon} M_{plm}(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\pi} \frac{p^2}{2m} t}$$

per $2 >> a \Rightarrow Y_{pl}(z) \approx W_{pl}(z)$

($p \rightarrow \infty$)

$$\Psi_{plm}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{l+1}{2}}} \int_0^\infty dp \tilde{C}(p) \frac{1}{2} \left[e^{i\left(\frac{p^2}{\hbar} - \frac{l+1}{2}\pi\right)} + e^{-i\left(\frac{p^2}{\hbar} - \frac{l+1}{2}\pi\right)} + \right. \\ \left. + (e^{2i\delta\epsilon} - 1) e^{i\left(\frac{p^2}{\hbar} - \frac{l+1}{2}\pi\right)} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-\frac{i}{\pi} \frac{p^2}{2m} t}$$

Sostituendo $(e^{2i\delta\epsilon} - 1) e^{i\left(\frac{p^2}{\hbar} - \frac{l+1}{2}\pi\right)}$:

$$\Psi_{plm}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^\infty dp \tilde{C}(p) \frac{1}{2} \left[e^{i\left(\frac{p^2}{\hbar} - \frac{l+1}{2}\pi\right)} + e^{-i\left(\frac{p^2}{\hbar} - \frac{l+1}{2}\pi\right)} \right] e^{-\frac{i}{\pi} \frac{p^2}{2m} t} Y_{lm}(\theta, \varphi) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^\infty dp \tilde{C}(p) \frac{-i\Gamma}{W - W_0 + i\Gamma} \frac{1}{2} e^{i\left(\frac{p^2}{\hbar} - \frac{l+1}{2}\pi\right)} Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-\frac{i}{\pi} \frac{p^2}{2m} t} :$$

$$= \Psi_{lm}(\vec{x}, t) + \Psi_{\text{scar}}(\vec{x}, t)$$

↳ ONDA SFERICA ENTRATA SULLA SUPERFICIE DI RAGGIO $\frac{P_0}{m} |t|$

Per il metodo della fase stat., considerando che Ψ_{in} è centrato nella sfera di raggio $2 \approx \frac{P_0}{m}|t|$:

$$-\varphi = -\frac{P}{\hbar} 2 - \frac{P^2}{\hbar^2 m} t \quad \frac{d\varphi}{dP} \Big|_{P=P_0}^{=0} = -\frac{1}{\hbar} \left(2 + \frac{P_0}{m} t \right) \Rightarrow t = -\frac{m P}{P_0}$$

$$-\varphi = \frac{P_0}{\hbar} 2 - \frac{P^2}{\hbar^2 m} t \quad \frac{d\varphi}{dP} \Big|_{P=P_0}^{=0} = \frac{1}{\hbar} \left(2 - \frac{P_0}{m} t \right) \Rightarrow t = \frac{m P}{P_0}$$

La durata dell'attraversamento della sfera di raggio R sarà:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\pi}{\Delta W}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Tempo in cui } \Psi_{\text{in}} \neq 0 \\ \text{per } t > 0. \end{array}$$

Vediamo ora come evolve nel tempo Ψ_{SCAT} .

Essendo $\Delta W \gg \Gamma$ possiamo scrivere $\tilde{C}(P) \approx \tilde{C}(P_0)$,

$$dP = d\sqrt{2mW} = \frac{m}{\sqrt{2mW}} dW \quad dW = \frac{m}{\sqrt{2mW_0}} dW = \frac{m}{P_0} dW$$

$$\frac{P^2}{\hbar^2} \approx \frac{P_0}{\hbar} 2 + \frac{dP}{\hbar} 2 = \frac{P_0}{\hbar} 2 + \frac{m}{\hbar P_0} dW = \frac{P_0}{\hbar} + \frac{m}{\hbar P_0} (W - W_0)$$

Potremmo allora scrivere:

$$\Psi_{\text{SCAT}} \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \frac{(1-i)^e}{\sqrt{2m\hbar}} \tilde{C}(P_0) \frac{m}{P_0 2} e^{-\frac{i}{\hbar} (P_0 2 - W_0 t)} Y_{\text{em}}(\theta, \varphi) \propto$$

$$\times \int_0^\infty dW \frac{-i\Gamma}{W - W_0 + i\Gamma_2} e^{-\frac{i}{\hbar} (W - W_0)(t - \frac{m}{P_0} 2)} \longrightarrow \text{A3}$$

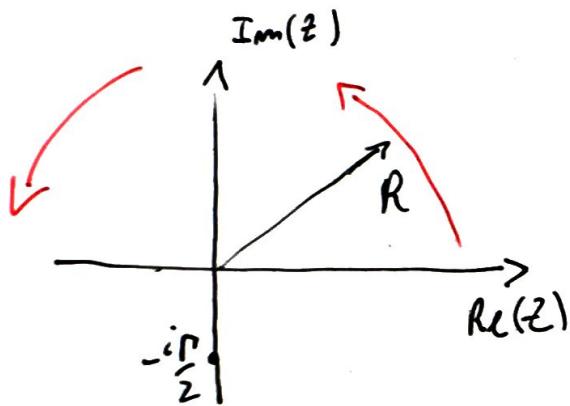
Poiché per W lontano da W_0 i termini Γ non contribuiscono

possiamo estendere l'integrale in \mathcal{W} $t = \infty$ e
calcolarlo con il metodo dei residui:

$$z = W - W_0$$

- $t - \frac{m^2}{P_0} < 0 \Leftrightarrow t < \frac{m^2}{P_0}$

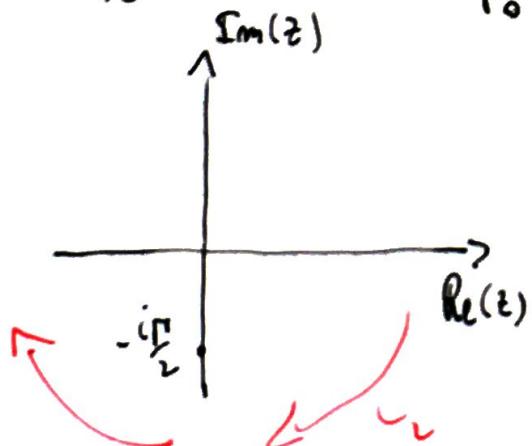
$$f(z) = -\frac{i\Gamma}{z + i\frac{\Gamma}{2}} e^{-\frac{i}{\lambda} z(t - \frac{m^2}{P_0})} \rightarrow \text{POLO IN } -i\frac{\Gamma}{2}$$



$$\lim_{R \rightarrow \infty} f(z) \Big|_{\substack{z=R \\ \operatorname{Im}(z) > 0}} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \Psi_{\text{SCAT}} = 0 \text{ per } t < \frac{m^2}{P_0}$$

- $t - \frac{m^2}{P_0} > 0 \Leftrightarrow t > \frac{m^2}{P_0}$

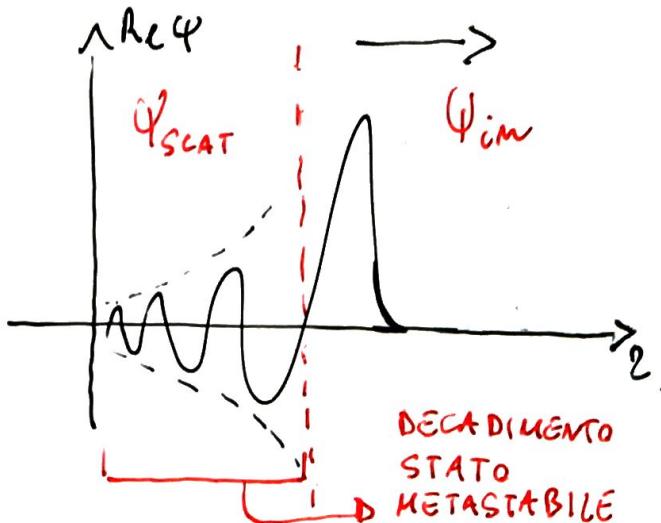


Per il th. dei residui:

$$\begin{aligned} \oint_{C_R} dz f(z) &= -i\bar{a} \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=-i\frac{\Gamma}{2}} = \\ &= -i\bar{a} \pi (-i\Gamma) e^{-\frac{\Gamma}{2}(t - \frac{m^2}{P_0})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Psi_{\text{SCAT}} = (-i)^e \sqrt{\frac{8\pi}{\hbar}} \frac{m}{P_0} \Gamma^2 \tilde{C}(P_0) e^{-\frac{i}{\hbar} (P_0 t - \frac{P_0^2}{2m} t)} Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar} (t - \frac{m^2}{P_0^2})}$$

L'onda diffusa decade con un tempo $T \approx \frac{2}{\Gamma}$:



→ QUANDO LA PARTICELLA RAGGIUNGE IL CENTRO DI FORTE C'È UNA PROB. CHE PASSI INDISTURBIATA ED UNA → HE FORMI UNO STATO METASTABILE.

La prob. che la particella attraversi la sfera di raggio R nell'intervallo $[t, t + dt]$ è data dal flusso della corrente di probabilità attraverso la sfera:

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{4\pi R^2} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*)$$

$$\hat{m} \cdot \vec{\nabla} = \frac{e}{\delta z}$$

$$\Rightarrow d\bar{n} = dt \oint_{S_2} d\sigma \hat{m} \cdot \vec{S} \approx dt \oint d\sigma \left[\Psi_{\text{scat}}^* \frac{\partial \Psi_{\text{scat}}}{\partial z} - \Psi_{\text{scat}} \frac{\partial \Psi_{\text{scat}}^*}{\partial z} \right] =$$

$$= dt \frac{m}{\hbar P_0} \Gamma^2 |\tilde{C}(P_0)|^2 e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} (t - \frac{m^2}{P_0^2})} \propto dt e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t}$$

←
← ESSI DECADIMENTI
RADIAZIVI!

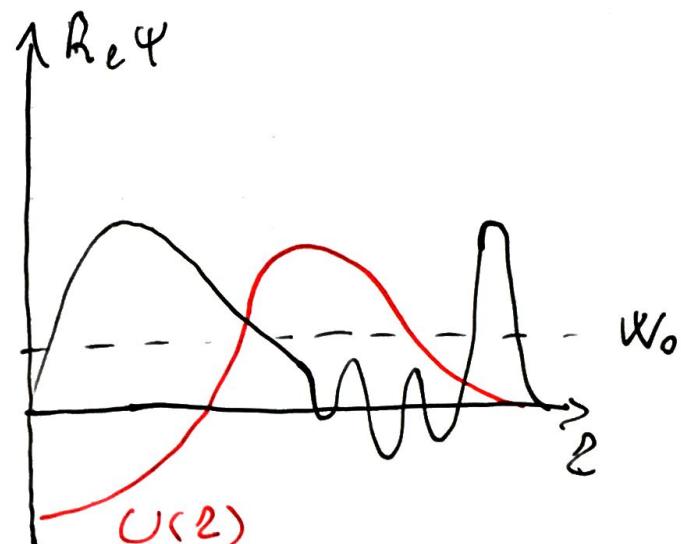
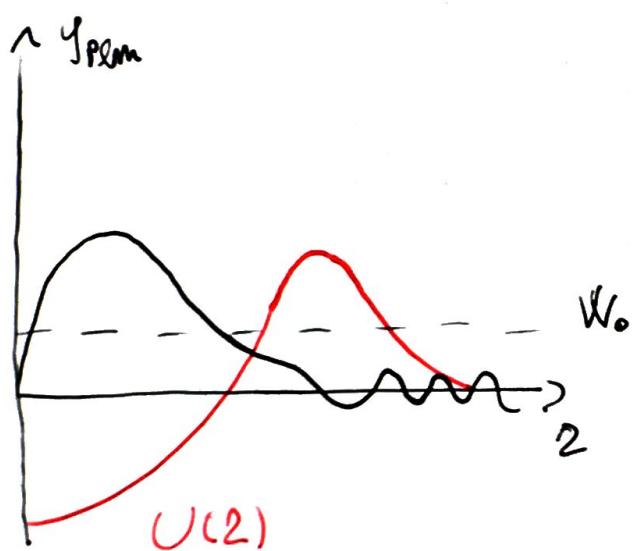
La vita media dello stato è:

$$\boxed{\gamma = \frac{\hbar}{\Gamma}} \quad \begin{array}{l} \text{VITA MEDIA} \\ \text{STATO METASTABILE} \end{array}$$

Consideriamo ora $t < 0$, quando l'onda non ha ancora incontrato il potenziale, ci sarà un'interferenza DISTRUTTIVA che annullerà la ψ nel campo di forza.

Per $\frac{l}{\Gamma} \gg t > 0$ invece avremo interferenza COSTRUTTIVA che mi dà una funz. d'onda simile ad uno stato legato: stato metastabile. $\rightarrow \psi_{p.e}(r)$

Per $t \gg \frac{l}{\Gamma}$ dominerà l'interferenza distruttiva e resterà la particella che si allontana dal campo.



Perché ciò venga: la risonanza deve esistere una regione dello spazio nella quale si obbietta:

$$W \leq U(r) + \hbar^2 \frac{l(l+1)}{2mr^2}$$

\Rightarrow IN POTENZIALE PURAMENTE ATTRATTIVO NON PUÒ DARE RISONANZA.

APPENDICE RISONANZE

- A1: Calcolo di $\sigma_{\text{TOT}}^{(e)}$ per $\delta_e = \bar{\delta}_e + \bar{\delta}_e^{\text{res}}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{TOT}}^{(e)}(W) &= 4\pi (ll+1) \frac{\hbar^2}{p^2} \Delta m^2 (\bar{\delta}_e + \bar{\delta}_e^{\text{res}}) = \\ &= 4\pi (ll+1) \frac{\hbar^2}{p^2} [\sin \bar{\delta}_e \cos \bar{\delta}_e^{\text{res}} + \cos \bar{\delta}_e \sin \bar{\delta}_e^{\text{res}}]^2 \\ \cdot e^{i\bar{\delta}_e} \sin \bar{\delta}_e^{\text{res}} &\approx \frac{\Gamma_2}{W - W_0 + i\frac{\Gamma_2}{2}} \\ \cdot e^{i\bar{\delta}_e} \cos \bar{\delta}_e^{\text{res}} &= \frac{\cos \bar{\delta}_e^{\text{res}}}{\cos \bar{\delta}_e^{\text{res}} - i \sin \bar{\delta}_e^{\text{res}}} = \frac{1}{1 - i \tan \bar{\delta}_e^{\text{res}}} = \frac{W - W_0}{(W - W_0) + i\frac{\Gamma_2}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{TOT}}^{(e)}(W) = 4\pi (ll+1) \frac{\hbar^2}{p^2} \frac{[(W - W_0) \sin \bar{\delta}_e - \frac{\Gamma_2}{2} \cos \bar{\delta}_e]^2}{(W - W_0)^2 + (\frac{\Gamma_2}{2})^2}$$

- A2: calcolo del limite per $P' \rightarrow P$ con De l'Hopital.

$$\bullet W_{pe} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cos\left(\frac{P'^2}{n} - (l+1)\frac{\pi}{2} + \delta_e\right)$$

$$\bullet W'_{pe} = -\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sin\left(\frac{P'^2}{n} - (l+1)\frac{\pi}{2} + \delta_e\right) \frac{P'}{n}$$

$$\bullet \frac{dW_{pe}}{dP'} = -\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sin\left(\frac{P'^2}{n} - (l+1)\frac{\pi}{2} + \delta_e\right) \left(\frac{2}{n} + \frac{d\delta_e}{dP'}\right)$$

$$\bullet \frac{dW'_{pe}}{dP'} = -\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left[\cos\left(\frac{P'^2}{n} - (l+1)\frac{\pi}{2} + \delta_e\right) \left(\frac{P}{n} + \frac{d\delta_e}{dP'}\right) \frac{P'}{n} + \sin\left(\frac{P'^2}{n} - (l+1)\frac{\pi}{2} + \delta_e\right) \frac{1}{n} \right]$$

$$\lim_{P' \rightarrow P} \frac{t^2}{2P'} \left[\frac{dW'_{pe}}{dP'} W'_{pe} - \frac{dW_{pe}}{dP'} W_{pe} \right]_{P=0} =$$

$$= \frac{t^2}{2P} \cdot \frac{2}{\pi n} \left[\sin\left(-(l+1)\frac{\pi}{2} + \delta_e\right) \frac{d\delta_e}{dP} \frac{P}{n} + \cos\left(-(l+1)\frac{\pi}{2} + \delta_e\right) \frac{d\delta_e}{dP} \frac{P}{n} + \right.$$

$$- \left. \sin\left(-(l+1)\frac{\pi}{2} + \delta_e\right) \cos\left(-(l+1)\frac{\pi}{2} + \delta_e\right) \frac{1}{n} \right] =$$

$$= \frac{1}{2P} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\frac{d\delta_e}{dP} P - \frac{1}{2} \sin\left(-(l+1)\pi + 2\delta_e\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2P} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\frac{d\delta_e}{dP} P - \frac{1}{2} \left(\sin(2\delta_e) \cos((l+1)\pi) - \sin(l+1)\pi \cos(2\delta_e) \right) \right]$$

$$\text{Lim cos d} = \frac{1}{2} \sin 2d$$

$$\sin(d-B) = \sin d \cos B + -\sin B \cos d$$

$$= \frac{1}{2P} \frac{2}{\pi} \left[\frac{d\delta e}{dP} - \frac{1}{2} (-1)^e \sin(\ell \delta e) \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{d\delta e}{dP} - \frac{1}{2P} (-1)^e \sin(\ell \delta e) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d\delta e}{dP} \approx \pi \int_0^a d\Omega (|q_{pe}|^2 - |W_{pe}|^2) + \frac{1}{2P} (-1)^e \sin(\ell \delta e)$$

$$\Rightarrow \frac{d\delta e}{dP} > -\frac{1}{2P} - \pi \int_0^a |W_{pe}|^2 d\Omega \rightarrow \Delta m \delta e = -1 \quad |q_{pe}|^2 = 0$$

$$= -\left(\frac{1}{2P} + \frac{\pi}{2} \int_0^a (\cos^2 \left(\frac{P\Omega}{\pi} - (\ell+1) \frac{\pi}{2} + \delta e \right) \geq -\left(\frac{1}{2P} + \frac{\ell}{2} \alpha \right) \rightarrow \cos^2 = 1 \right)$$

Dove si è preso il $\cos^2 = 1$ per ottenere il valore "più negativo".

A3: Calcolo di $\Psi_{\text{scat}}(\vec{x}, t)$:

$$\Psi_{\text{scat}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^\infty dP \tilde{C}(P) \frac{-i\Gamma}{W - W_0 + \frac{i}{2}\Gamma} \frac{1}{2} e^{i\left(\frac{Px}{\hbar} - \frac{\ell+1}{2}\pi\right)} Y_{\ell m} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} t}$$

- $P \approx P_0 + dP$; $\tilde{C}(P) \approx \tilde{C}(P_0)$; $dP = \frac{m}{P_0} dW$; trascuriamo dP^2
- $\frac{P^2}{\hbar} \approx \frac{P_0^2}{\hbar} + \frac{m}{\hbar P_0} (W - W_0)^2$; $P^2 \approx P_0^2 + 2m(W - W_0)$.

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{scat}} &= \frac{(-i)^{\ell+1}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{m}{P_0^2} \tilde{C}(P_0) Y_{\ell m} e^{\frac{i}{\hbar} P_0^2 \int_0^\infty dW \frac{-i\Gamma}{W - W_0 + \frac{i}{2}\Gamma}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{P_0} (W - W_0)^2} \\ &\times e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} [P_0^2 + 2m(W - W_0)] t} \\ \Rightarrow \Psi_{\text{scat}} &= \frac{(-i)^{\ell+1}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{m}{P_0^2} \tilde{C}(P_0) Y_{\ell m} e^{\frac{i}{\hbar} (P_0^2 - W_0 t)} \int_0^\infty dW \frac{-i\Gamma}{W - W_0 + \frac{i}{2}\Gamma} e^{-\frac{i}{\hbar} (W - W_0)(t - \frac{m}{P_0} t)} \end{aligned}$$