

Séance 4.2: Mesures de tendance centrale

Discussion en classe

Visseho Adjiwanou, PhD.

30 January 2023

A quoi ça sert?

- Une mesure de tendance centrale est une valeur **typique** ou **représentative** d'un ensemble de scores

Résumé : Mesure de tendance centrale (paramètres de position)

Symbole	Définition	Formules
Moyenne	Somme des valeurs divisée par l'effectif de la série	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
Médiane	Valeur qui divise la distribution en deux parties égales	
Mode	Valeur observée de fréquence maximum	
Percentile	Valeurs qui divisent la distribution en 100 parties égales	

Résumé : Mesure de dispersion

Symbole	Définition	Formules
Étendue	Différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la variable	$G - P$
EIQ	3ème quartile - 1er quartile	$Q3 - Q1$
Déviations	La distance d'une valeur à la moyenne	$X - \bar{X}$
Sommes des carrés	Somme des carrés des déviations	$SC = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
Variance	Moyenne des carrés des déviations	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
Écart-type	Racine carrée de la variance	$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

Résumé : Quel type de résumé pour quel type de variable?

Type de variable	Fréquence	Pourcentage	Commentaire
Nominale	Oui	Oui	Toujours
Ordinale	Oui	Oui	Toujours
Ratio/Intervalle	Pas souhaité	Pas souhaité	Oui si peu de modalités
Ratio/Intervalle (données groupées)	Oui	Oui	Toujours

Résumé : Quel type de résumé pour quel type de variable?

Type de variable	Moyenne	Mode	Médiane	Variance	Écart-type
Nominale	Non	Oui	Non	Non	Non
Ordinale	Possible	Oui	Oui	Possible	Possible
Ratio/Intervalle	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Ratio/Intervalle (données groupées)	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui

Exemple de calcul

Distribution de revenu

Voici les revenus (en millier) d'un échantillon de 15 hommes et de 16 femmes

ind	Revenus	ind	Revenus	ind	Revenus	ind	Revenus
1	2	9	3.1	1	3.1	9	0.5
2	2.5	10	1.4	2	2.7	10	1.3
3	1.7	11	7.1	3	1.2	11	2.9
4	3	12	6.0	4	4.2	12	2.7
5	5	13	3.3	5	5.5	13	5.1
6	4.1	14	4.3	6	4.3	14	3.0
7	8.1	15	6.1	7	2.0	15	6.3
8	5.2			8	1.5	16	4.2

Distribution du revenu des hommes

	Freq	% Valid	% Valid Cum.	% Total	% Total Cum.
1.4	1	6.67	6.67	6.67	6.67
1.7	1	6.67	13.33	6.67	13.33
2	1	6.67	20.00	6.67	20.00
2.5	1	6.67	26.67	6.67	26.67
3	1	6.67	33.33	6.67	33.33
3.1	1	6.67	40.00	6.67	40.00
3.3	1	6.67	46.67	6.67	46.67
4.1	1	6.67	53.33	6.67	53.33
4.3	1	6.67	60.00	6.67	60.00
5	1	6.67	66.67	6.67	66.67
5.2	1	6.67	73.33	6.67	73.33
6	1	6.67	80.00	6.67	80.00
6.1	1	6.67	86.67	6.67	86.67
7.1	1	6.67	93.33	6.67	93.33
8.1	1	6.67	100.00	6.67	100.00
<NA>	0			0.00	100.00
Total	15	100.00	100.00	100.00	100.00

Moyenne

- Revenu moyen des hommes

- $= (2 + 2.5 + 1.7 + 3 + 5 + 4.1 + 8.1 + 5.2 + 3.1 + 1.4 + 7.1 + 6.0 + 3.3 + 4.3 + 6.1) / 15$

- revenu moyen des hommes = 4.19

- Revenu moyen des femmes

$$= (3.1 + 2.7 + 1.2 + 4.2 + 5.5 + 4.3 + 2.0 + 1.5 + 0.5 + 1.3 + 2.9 + 2.7 + 5.1 + 3.0 + 6.3 + 4.2) / 16$$

- Revenu moyen des femmes = 3.16

Médiane du revenu des hommes

- **La Médiane** = valeur telle que la moitié des observations lui sont inférieures et donc la moitié lui sont supérieures.
- C'est donc assez facile à calculer, il suffit juste d'ordonner les cas.
- Milieu de la distribution = $(15 + 1)/2 = 8$

Médiane du revenu des hommes

	Freq	% Valid	% Valid Cum.	% Total	% Total Cum.
1.4	1	6.67	6.67	6.67	6.67
1.7	1	6.67	13.33	6.67	13.33
2	1	6.67	20.00	6.67	20.00
2.5	1	6.67	26.67	6.67	26.67
3	1	6.67	33.33	6.67	33.33
3.1	1	6.67	40.00	6.67	40.00
3.3	1	6.67	46.67	6.67	46.67
4.1	1	6.67	53.33	6.67	53.33
4.3	1	6.67	60.00	6.67	60.00
5	1	6.67	66.67	6.67	66.67
5.2	1	6.67	73.33	6.67	73.33
6	1	6.67	80.00	6.67	80.00
6.1	1	6.67	86.67	6.67	86.67
7.1	1	6.67	93.33	6.67	93.33
8.1	1	6.67	100.00	6.67	100.00
<NA>	0			0.00	100.00
Total	15	100.00	100.00	100.00	100.00

Médiane du revenu des hommes

- **Utilisation des pourcentages cumulés**
- 46.67% des participants ont un revenu de 3.3 ou moins et
- 53.33% des participants ont un revenu de 4.1 ou moins
- donc la médiane vaut 4.1
- Médiane Homme = 4.1

Médiane des femmes

- Milieu de la distribution : $(16 + 1)/2 = 8.5$ entre la 8 et la 9e valeur

	Freq	% Valid	% Valid Cum.	% Total	% Total Cum.
0.5	1	6.25	6.25	6.25	6.25
1.2	1	6.25	12.50	6.25	12.50
1.3	1	6.25	18.75	6.25	18.75
1.5	1	6.25	25.00	6.25	25.00
2	1	6.25	31.25	6.25	31.25
2.7	2	12.50	43.75	12.50	43.75
2.9	1	6.25	50.00	6.25	50.00
3	1	6.25	56.25	6.25	56.25
3.1	1	6.25	62.50	6.25	62.50
4.2	2	12.50	75.00	12.50	75.00
4.3	1	6.25	81.25	6.25	81.25
5.1	1	6.25	87.50	6.25	87.50
5.5	1	6.25	93.75	6.25	93.75
6.6	1	6.25	100.00	6.25	100.00

Médiane des femmes

- Médiane se situe entre la 8e et la 9e valeur
- Médiane = $(2.9 + 3)/2 = 2.95$

Mode

- Homme = il n'y a pas de mode
- Femme = deux modes, 2.7 et 4.2

Premier quartile

Quelle est la localisation du premier quartile?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	17
1.4	1.7	2	2.5	3	3.1	3.3	4.1	4.3	5	5.2	6	6.1	7.1

Premier quartile

Quelle est la localisation du premier quartile?

$$L_k = k/100 * (n + 1)$$

k = 25 si premier quartile n = 15

donc $l_{25} = 25/100 * (15+1) = 4$ Le premier quartile se trouve donc à la 4e position

premier quartile (Q1) = 2.5

Troisième quartile

$$I_{75} = 75/100 * (15+1) = 12$$

$$\text{donc } Q3 = 6$$

Et pour les femmes?

$$Q1 = ? \quad Q3 = ?$$

Et pour les femmes

1	2		3	4		5	6	7	8		9	10	11	12	
.5	1	.2	1.3	1.5		2	2.7	2.7	2.9		3.	3.1	4.2	4.2	

Et pour les femmes?

- $L_{25} = 25/100*(16+1) = 4.25$ (entre 4 et 5)

Et pour les femmes?

- $L_{25} = 25/100*(16+1) = 4.25$ (entre 4 et 5)
- $L_{75} = 75/100*(16+1) = 12.75$ (entre 12 et 13)

Et pour les femmes?

- $L_{25} = 25/100*(16+1) = 4.25$ (entre 4 et 5)
- $L_{75} = 75/100*(16+1) = 12.75$ (entre 12 et 13)
- $Q1 = (1.5 + 2)/2 = 1.75$

Et pour les femmes?

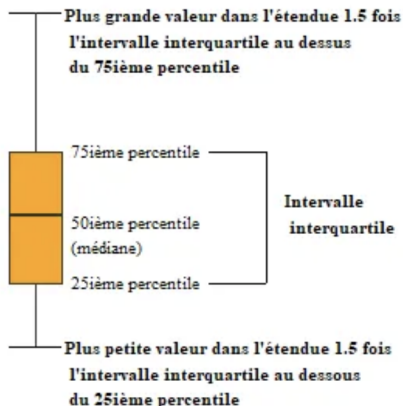
- $L_{25} = 25/100*(16+1) = 4.25$ (entre 4 et 5)
- $L_{75} = 75/100*(16+1) = 12.75$ (entre 12 et 13)
- $Q1 = (1.5 + 2)/2 = 1.75$
- $Q3 = (4.2 + 4.3)/2 = 4.25$

Et pour les femmes?

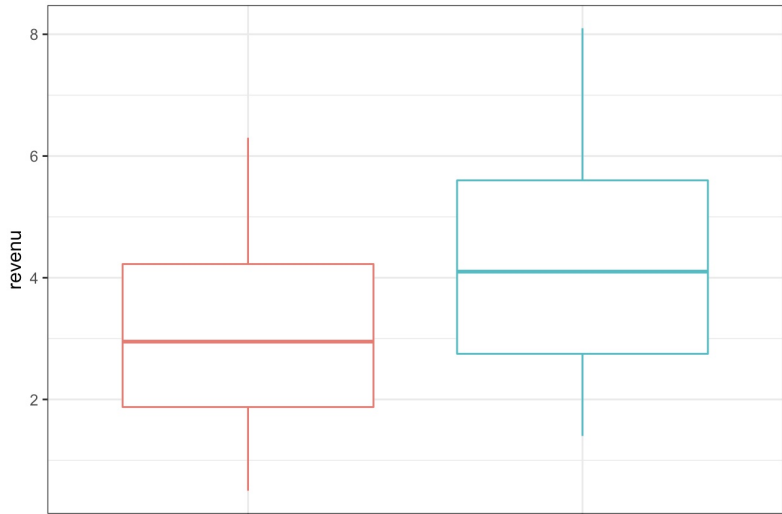
- $L_{25} = 25/100*(16+1) = 4.25$ (entre 4 et 5)
- $L_{75} = 75/100*(16+1) = 12.75$ (entre 12 et 13)
- $Q1 = (1.5 + 2)/2 = 1.75$
- $Q3 = (4.2 + 4.3)/2 = 4.25$
- Une difficulté arrive avec les variables ordinales

Représentation

- Boxplot



Représentation



Médiane des variables ordinales

Exemple: Attitude envers les immigrants et les emplois

- Q1: Sur une échelle de 1 (totalement en désaccord) à 5 (totalement d'accord), que pensez-vous de l'affirmation suivante: "Les immigrants volent nos emplois"

Médiane des variables ordinales

Valeur	Fréquence	Fréq. cumulée	Pourcentage	Pourc. cumulé
1	170	170		
2	446	616		
3	299	915		
4	301	1216		
5	65	1281		
N	1281			

- Médiane va diviser la distribution en deux parties égales

Médiane des variables ordinales

Valeur	Fréquence	Fréq. cumulée	Pourcentage	Pourc. cumulé
1	170	170		
2	446	616		
3	299	915		
4	301	1216		
5	65	1281		
N	1281			

- Médiane va diviser la distribution en deux parties égales
- $(1281 + 1)/2 = 641$

Médiane des variables ordinales

Valeur	Fréquence	Fréq. cumulée	Pourcentage	Pourc. cumulé
1	170	170		
2	446	616		
3	299	915		
4	301	1216		
5	65	1281		
N	1281			

- Médiane va diviser la distribution en deux parties égales
- $(1281 + 1)/2 = 641$
- la médiane est la valeur du 641^e score, c'est-à-dire quelque part parmi les 299 scores 3

Médiane des variables ordinales

Valeur	Fréquence	Fréq. cumulée	Pourcentage	Pourc. cumulé
1	170	170		
2	446	616		
3	299	915		
4	301	1216		
5	65	1281		
N	1281			

- Médiane va diviser la distribution en deux parties égales
- $(1281 + 1)/2 = 641$
- la médiane est la valeur du 641^e score, c'est-à-dire quelque part parmi les 299 scores 3

Médiane des variables ordinales

- Convention: on va supposer que derrière les réponses à cette question, il y a une échelle (ratio) allant de 0.5 à 5.5.

Médiane des variables ordinales

- Convention: on va supposer que derrière les réponses à cette question, il y a une échelle (ratio) allant de 0.5 à 5.5.
- Autrement dit, ceux qui ont répondu 1, aurait répondu en réalité entre 0.5 et 1.5. On les ramène donc à la moyenne de l'intervalle qui vaut $(0.5 + 1.5)/2 = 1$

Médiane des variables ordinales

- Convention: on va supposer que derrière les réponses à cette question, il y a une échelle (ratio) allant de 0.5 à 5.5.
- Autrement dit, ceux qui ont répondu 1, aurait répondu en réalité entre 0.5 et 1.5. On les ramène donc à la moyenne de l'intervalle qui vaut $(0.5 + 1.5)/2 = 1$
- Ainsi, les 299 personnes qui ont répondu 3 ont en fait répondu entre 2.5 et 3.5

Médiane des variables ordinales

- Convention: on va supposer que derrière les réponses à cette question, il y a une échelle (ratio) allant de 0.5 à 5.5.
- Autrement dit, ceux qui ont répondu 1, aurait répondu en réalité entre 0.5 et 1.5. On les ramène donc à la moyenne de l'intervalle qui vaut $(0.5 + 1.5)/2 = 1$
- Ainsi, les 299 personnes qui ont répondu 3 ont en fait répondu entre 2.5 et 3.5
- Nous allons donc interpoler pour trouver à quel endroit se situe la médiane

Médiane des variables ordinales

$$617 \text{ ————— } 641 \text{ ————— } 617 + 299 = 916$$

$$2.5 \text{ ————— } M \text{ ————— } 3.5$$

Médiane des variables ordinales

- Interpolation
- Application de la règle de trois
- Si 3 pains coûtent 55\$, combien coûte 2 pains?

Médiane des variables ordinales

$$617 \text{ ————— } 641 \text{ ————— } 617 + 299 = 916$$

$$2.5 \text{ ————— } M \text{ ————— } 3.5$$

$$(M - 3.5)/(2.5 - 3.5) = (641 - 916)/(617 - 916)$$

$$M = [(641 - 916)/(617 - 916)]/(2.5 - 3.5) + 3.5$$

$$M = 2.6$$

Vous pouvez préférer utiliser la formule du livre

$$Md = L + \left(\frac{N/2 - F}{f} \right)(i)$$

- L = la limite inférieure de l'intervalle contenant la médiane (2.5)
- N = le nombre de cas (1281)
- F = la fréquence cumulative des scores inférieurs à l'intervalle contenant la médiane (616)
- f = le nombre de scores que comprend l'intervalle contenant la médiane (299)
- i = la largeur de l'intervalle contenant la médiane (1)
- $Md = 2.5 + (1281/2 - 616)/299 * 1 = 2.6$

Exemple d'application : mesurer l'inégalité

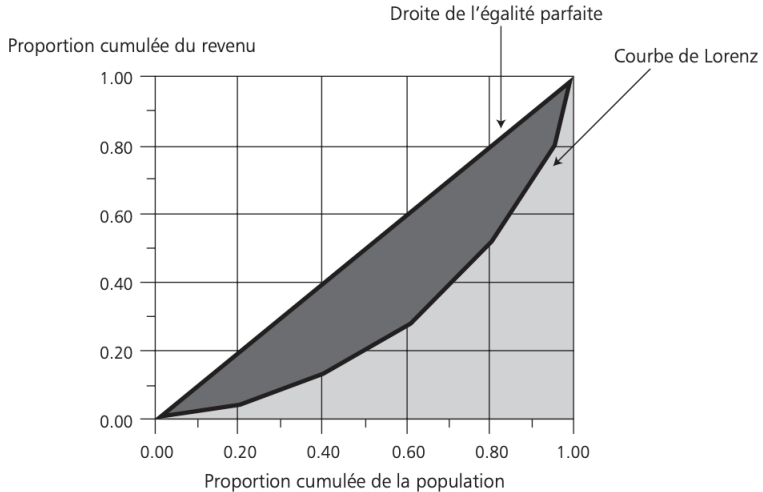
Mesure de l'inégalité

- Moyenne
- Médiane
- Coefficient de Gini
- Indice de Palma

Coefficient de Gini

- Le coefficient de Gini sert à mesurer le niveau d'inégalité de la répartition du revenu au sein de diverses populations ou au sein de la même population au fil du temps.
- Il peut être calculé pour d'autres indicateurs autre que le revenu.
- La courbe de Lorenz (figure) présente le rapport entre la proportion cumulée de la population, ordonnée selon le niveau de revenu, et la proportion cumulée du revenu total lui revenant.
- Le coefficient de Gini provient du calcul de l'aire entre la courbe de Lorenz et la droite de l'égalité parfaite.

Coefficient de Gini



Coefficient de Gini

- Plus cette aire est grande, plus l'inégalité est marquée. Les valeurs du coefficient de Gini varient entre 0 et 1.
- Une valeur de 0 indique que le revenu est également divisé entre tous les membres de la population, ceux-ci recevant exactement la même somme de revenu.

Coefficient de Gini

- Plus cette aire est grande, plus l'inégalité est marquée. Les valeurs du coefficient de Gini varient entre 0 et 1.
- Une valeur de 0 indique que le revenu est également divisé entre tous les membres de la population, ceux-ci recevant exactement la même somme de revenu.
- Par contre, une valeur de 1 dénote une distribution parfaitement inégale au sein de laquelle une seule unité possède l'ensemble du revenu de l'économie.

Coefficient de Gini

- Plus cette aire est grande, plus l'inégalité est marquée. Les valeurs du coefficient de Gini varient entre 0 et 1.
- Une valeur de 0 indique que le revenu est également divisé entre tous les membres de la population, ceux-ci recevant exactement la même somme de revenu.
- Par contre, une valeur de 1 dénote une distribution parfaitement inégale au sein de laquelle une seule unité possède l'ensemble du revenu de l'économie.
- Une diminution de la valeur du coefficient de Gini peut être interprétée comme une diminution de l'inégalité, et vice versa.

Indice de Palma

<https://jeanneemard.wordpress.com/2022/05/19/les-inegalites-au-quebec-de-1976-a-2020-selon-lindice-de-palma-et-le-coefficient-de-gini/>

10%	Décile 1	40% revenus les plus bas	<p>Palma = ratio entre les revenus détenus par ces deux groupes</p>	
10%	Décile 2			
10%	Décile 3			
10%	Décile 4			
10%	Décile 5	<i>Groupe généralement désigné comme «classe moyenne»</i>		
10%	Décile 6			
10%	Décile 7			
10%	Décile 8			
10%	Décile 9			
10%	Décile 10	10% revenus les plus élevés		

Indice de Palma

- IP est obtenu en divisant le revenu total des membres du 10e décile par le revenu total des membres des quatre premiers déciles (les plus pauvres)
- Un IP égal à 1 signifie que les ménages du décile le plus riche gagnent en moyenne quatre fois plus que ceux des quatre déciles les plus pauvres,
- Un IP égal à 2 équivaut à huit fois plus et ainsi de suite.

Quel revenu utilisé?

- Le **revenu ajusté** est obtenu en divisant le revenu total de tous les membres d'un ménage par la racine carrée de la taille de ce ménage.
- Par exemple, le revenu ajusté des membres d'un ménage de quatre personnes qui a un revenu total de 100 000\$ sera de 50 000 \$ ($100\,000\ \$ / \sqrt{4}$, soit 2, = 50 000 \$) et ce revenu sera accordé aux quatre membres de ce ménage.

Quel revenu utilisé?

- Le CG et l'IP peuvent être présentés en fonction de trois types de revenus :
 - selon le **revenu du marché** : somme des revenus d'emploi (travail salarié ou montant net de travail autonome), de placements, de retraite (régime privé de pension) et autres;

Quel revenu utilisé?

- Le CG et l'IP peuvent être présentés en fonction de trois types de revenus :
 - selon le **revenu du marché** : somme des revenus d'emploi (travail salarié ou montant net de travail autonome), de placements, de retraite (régime privé de pension) et autres;
 - selon le **revenu total** : revenu du marché plus les transferts gouvernementaux (aide sociale, assurance-emploi, pensions de la sécurité de la vieillesse, supplément de revenu garanti, prestations du Régime des rentes du Québec, etc.), avant impôt;

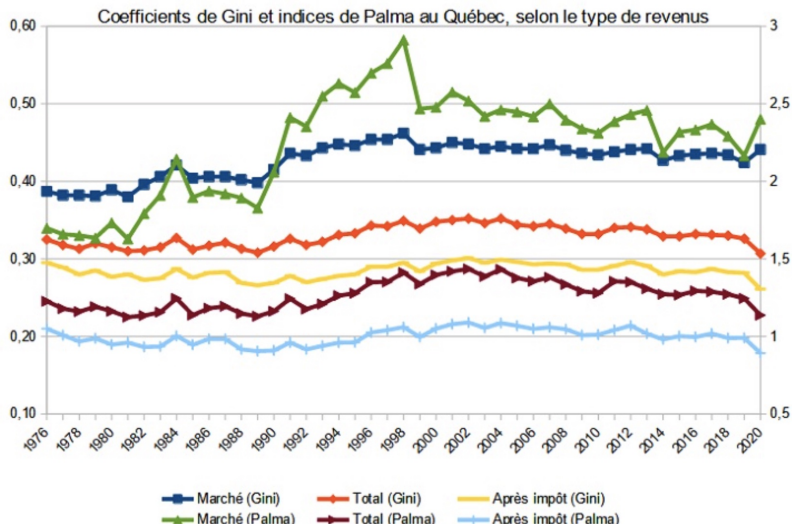
Quel revenu utilisé?

- Le CG et l'IP peuvent être présentés en fonction de trois types de revenus :
 - selon le **revenu du marché** : somme des revenus d'emploi (travail salarié ou montant net de travail autonome), de placements, de retraite (régime privé de pension) et autres;
 - selon le **revenu total** : revenu du marché plus les transferts gouvernementaux (aide sociale, assurance-emploi, pensions de la sécurité de la vieillesse, supplément de revenu garanti, prestations du Régime des rentes du Québec, etc.), avant impôt;
 - selon le **revenu après impôt** : revenu total moins l'impôt sur le revenu.

Quel revenu utilisé?

- Le CG et l'IP selon le revenu après impôt sont les plus couramment utilisés, car ils représentent les inégalités après intervention gouvernementale (transferts et impôt) et donc selon le revenu disponible sur lequel se manifestent les inégalités de revenu auxquelles font face les ménages

Évolution de l'inégalité au Québec



Visseho Adjwanou, PhD.

Séance 4.2: Mesures de tendance centrale

Pour la semaine prochaine

1 Lecture

- Paramètres de variation (ou de dispersion) - Fox : chapitre 4, pp.91-103
- Distribution d'échantillonnage - Fox : Chapitre 4, pp.103-120

2 Application

- <https://juba.github.io/tidyverse/01-presentation.html>
- https://juba.github.io/tidyverse/02-prise_en_main.html
- https://juba.github.io/tidyverse/03-premier_travail.html

```
ggplot(donnee_revenu) +  
  geom_boxplot(aes(x = sexe, y = revenu, color = sexe)) +  
  theme_bw()
```

