Seance 9.2: Test de chi-carré

Visseho Adjiwanou, PhD.

15 March 2022

Rappel des objectifs de l'analyse descriptive

1. Y a-t-il une relation entre deux variables ?
2. Quelle est l'intensité de cette relation?
3. Quelles sont la direction et la forme de cette relation?
4. Pouvons-nous **généraliser** la relation à la population de laquelle est tiré l'échantillon?

Plan de présentation

1. Rappel du calcul du chi-carré
2. Logique des tests statistiques
3. Test de chi-carré
4. Résumé
5. Exemples

Introduction: Le test du chi-carré

- Le chi-carré, χ^2, est un nombre qui compare les fréquences observées dans un tableau bivarié aux fréquences auxquelles on devrait s'attendre s'il n'y avait pas du tout de relation entre les deux variables dans la population (les fréquences anticipées).
- Sa formule est:

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_a)^2}{f_a}$$

où :

$$f_a = (\frac{\text{Total de la colonne}}{N}) * (\text{Total de la rangée})$$

- fréquence anticipée d'une cellule: f_a ;
- fréquence observée d'une cellule: f_o et
- N est le nombre total de cas.

Tests de signification statistique

- Jusque là, nous avons pu voir l'association au sein de nos données
- Mais ces données proviennent d'un échantillon unique
- Comment s'assurer que ce résultat ne change pas si nous changeons d'échantillon?
- C'est-à-dire que l'association ne soit dû uniquement qu'à l'erreur d'échantillonnage?
- Autrement, comment s'assurer que la relation est aussi vraie au sein de la population?

Rappel : Distribution d'échantillonnage et intervalle de confiance

Distribution d'échantillonnage

- Il est possible d'utiliser des distributions de données d'échantillon afin de décrire la population de laquelle fut tiré l'échantillon
- Une **distribution d'échantillonnage** (par exemple de la moyenne) est la distribution de l'ensemble des moyennes calculées sur l'ensemble des échantillons possibles de taille N qu'on peut tirer de cet échantillon

Distribution d'échantillonnage

- Exemple simple
  - Voici les âges de 4 personnes $\{10, 11, 13, 14\}$
  - Voici les échantillons possibles de 3 personnes qu'on peut tirer de cette population:
- (10, 11, 13) avec la moyenne de 11,3 ans

Distribution d'échantillonnage

- Exemple simple
  - Voici les âges de 4 personnes $\{10, 11, 13, 14\}$
  - Voici les échantillons possibles de 3 personnes qu'on peut tirer de cette population:
- (10, 11, 13) avec la moyenne de 11,3 ans
- (10, 11, 14) avec la moyenne de 11,7 ans

Distribution d'échantillonnage

- Exemple simple
  - Voici les âges de 4 personnes $\{10, 11, 13, 14\}$
  - Voici les échantillons possibles de 3 personnes qu'on peut tirer de cette population:
- (10, 11, 13) avec la moyenne de 11,3 ans
- (10, 11, 14) avec la moyenne de 11,7 ans
- (11, 13, 14) avec la moyenne de 12,7 ans

Distribution d'échantillonnage

- Exemple simple
  - Voici les âges de 4 personnes $\{10, 11, 13, 14\}$
  - Voici les échantillons possibles de 3 personnes qu'on peut tirer de cette population:
- (10, 11, 13) avec la moyenne de 11,3 ans
- (10, 11, 14) avec la moyenne de 11,7 ans
- (11, 13, 14) avec la moyenne de 12,7 ans
- 11,3; 11,7 et 12,7 est appellé la distribution d'échantillonnage

Distribution d'échantillonnage - propriété

- A mesure qu'augmente la taille N de l'échantillon, la distribution d'échantillonnage de la moyenne s'apparente de plus en plus à une distribution normale, dont la moyenne est semblable à celle de la **population** et dont l'écart-type est de $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
- On nomme cela le **théorème de limite centrale**

Distribution d'échantillonnage - propriété

- A mesure qu'augmente la taille N de l'échantillon, la distribution d'échantillonnage de la moyenne s'apparente de plus en plus à une distribution normale, dont la moyenne est semblable à celle de la **population** et dont l'écart-type est de $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
- On nomme cela le **théorème de limite centrale**
- L'écart-type de la distribution d'échantillonnage est appelé **erreur-type**

Distribution d'échantillonnage - propriété

- A mesure qu'augmente la taille N de l'échantillon, la distribution d'échantillonnage de la moyenne s'apparente de plus en plus à une distribution normale, dont la moyenne est semblable à celle de la **population** et dont l'écart-type est de $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$
- On nomme cela le **théorème de limite centrale**
- L'écart-type de la distribution d'échantillonnage est appelé **erreur-type**
- Il vaut: $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Intervalle de confiance

- La meilleure estimation que nous pouvons avoir de la moyenne de la population est la moyenne de l'échantillon
- Cependant, cette moyenne calculée à partir d'un seul échantillon peut être soit plus élevée, ou plus faible que la vraie moyenne de la population

Intervalle de confiance

- La meilleure estimation que nous pouvons avoir de la moyenne de la population est la moyenne de l'échantillon
- Cependant, cette moyenne calculée à partir d'un seul échantillon peut être soit plus élevée, ou plus faible que la vraie moyenne de la population
- Il parait donc extrêmement utile de déterminer l'intervalle, de part et d'autre de la moyenne, à l'intérieur duquel il est probable de trouver la moyenne de la population

Intervalle de confiance

- La meilleure estimation que nous pouvons avoir de la moyenne de la population est la moyenne de l'échantillon
- Cependant, cette moyenne calculée à partir d'un seul échantillon peut être soit plus élevée, ou plus faible que la vraie moyenne de la population
- Il parait donc extrêmement utile de déterminer l'intervalle, de part et d'autre de la moyenne, à l'intérieur duquel il est probable de trouver la moyenne de la population
- L'erreur-type va nous aider à trouver cela

Intervalle de confiance

Le théorème de la limite centrale nous permet de déterminer cette intervalle.

- On sait que plus N est grand, plus la distribution d'échantillonnge va suivre la distribution normale N(moyenne de l'échantillon, $\sigma/\sqrt{(N)}$)

Intervalle de confiance

Le théorème de la limite centrale nous permet de déterminer cette intervalle.

- On sait que plus N est grand, plus la distribution d'échantillonnge va suivre la distribution normale N(moyenne de l'échantillon, $\sigma/\sqrt{(N)}$)
- On sait aussi que dans une distribution normale, 95% de la distribution se trouve à plus ou moins 2 écart-types de la moyenne (plus précisément à 1.96 écart-type)

Intervalle de confiance

Le théorème de la limite centrale nous permet de déterminer cette intervalle.

- On sait que plus N est grand, plus la distribution d'échantillonnge va suivre la distribution normale N(moyenne de l'échantillon, $\sigma/\sqrt{(N)}$)
- On sait aussi que dans une distribution normale, 95% de la distribution se trouve à plus ou moins 2 écart-types de la moyenne (plus précisément à 1.96 écart-type)
- Ainsi, l'intervalle de confiance à 95% sera déterminée par:

Intervalle de confiance

$$[\bar{X} - 1.96\sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + 1.96\sigma_{\bar{X}}]$$

- Dans l'exemple précédent, on dira que dans 95% des cas, le salaire moyen de la population Québécoise va se trouver dans l'intervalle [65000 - 1.96x1012, 65000 + 1.96x1012], soit [63016, 66983]

Intervalle de confiance

$$[\bar{X} - 1.96\sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + 1.96\sigma_{\bar{X}}]$$

- Dans l'exemple précédent, on dira que dans 95% des cas, le salaire moyen de la population Québécoise va se trouver dans l'intervalle [65000 - 1.96x1012, 65000 + 1.96x1012], soit [63016, 66983]
- **Cela veut dire qu'il est très improbable que le salaire moyen de la population québécoise soit de 95000$ si notre seul source d'erreur est l'ereur d'échantillonnage.**

Intervalle de confiance

$$[\bar{X} - 1.96\sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + 1.96\sigma_{\bar{X}}]$$

- Dans l'exemple précédent, on dira que dans 95% des cas, le salaire moyen de la population Québécoise va se trouver dans l'intervalle [65000 - 1.96x1012, 65000 + 1.96x1012], soit [63016, 66983]
- **Cela veut dire qu'il est très improbable que le salaire moyen de la population québécoise soit de 95000$ si notre seul source d'erreur est l'ereur d'échantillonnage.**
- 1,96 est la valeur du score standardisé correspondant à l'intervalle de 95%

Logique des tests statistiques

Logique des tests statistiques

- Déterminer la probabilité de découvrir une relation dans notre échantillon quand il y en a au sein de la population.
- Si cette probabilité est petite (1/20 ou 5%, d'òu l'idée du seuil de 5%), et si nous découvrons une relation au sein de l'échantillon, nous pourrons conclure qu'il existe probablement une relation dans la population.
- Alors il s'agit de tester la supposition qu'il **n'existe pas de relation** dans la population.
- On appelle cela l'**hypothèse nulle**, notée H_0.
- Ainsi, rejeter l'hypothèse nulle, revient à dire qu'il existe une relation dans la population.
- On parle de relation **statistiquement significative**

Logique des tests statistiques

- A l'inverse, si les chances de trouver une relation dans l'échantillon alors qu'il n'y en a pas dans la population sont élevées (supérieures à 1 sur 20), nous NE pouvons croire en toute confiance à l'existence d'une relation dans la population.
- La relation trouvée au sein de l'échantillon est probablement due au hasard seul.
- Dans ce cas, nous disons que nous NE rejetons PAS l'hypothèse nulle
- La relation que nous obtenons dans l'échantillon est probablement factice
- Remarque: On dit **ne pas rejeter l'hypothèse nulle** et non **accepter l'hypothèse nulle**.

Logique des tests statistiques

- **Niveau de significativité** = probabilité de retrouver grâce au hasard une relation au sein d'un échantillon, en dépit de l'absence de relation dans la population. Il est noté α.
- On n'utilisera souvent les niveaux de significativité de 5%, 1% et 0.1%.
- Le fait que la signification statistique repose sur une probabilité implique que nous ne pouvons jamais être absolument certains de faire le bon choix.
- Pour le faire, il faut les données de la population directement.
- Ainsi, on peut commettre deux types d'erreurs.

Logique des tests statistiques

- Erreur de type I ou erreur **alpha** : rejet de l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie. La probabilité d'une erreur de type 1 est α
- Erreur de type II ou erreur **bêta** : Non rejet de l'hypothèse nulle alors qu'elle est fausse.
- Si les chances de l'erreur de type I augmentent, les chances de l'erreur de type II diminuent et vice versa

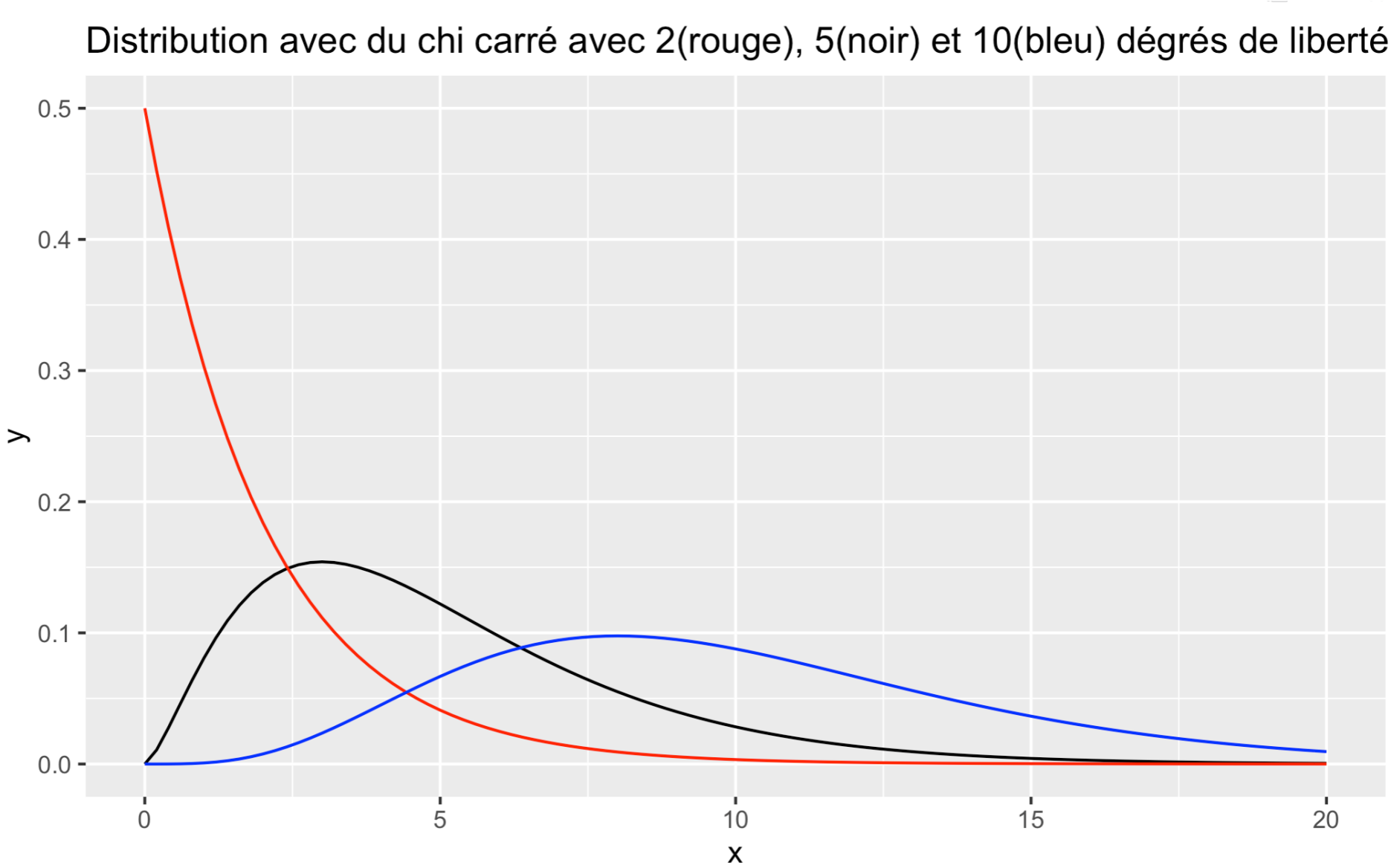
Décision concernant H_0	Si H_0 est vraie	Si H_0 est fausse
Rejeter H_0	Erreur de type I	Pas d'erreur
Conserver H_0	Pas d'erreur	Erreur de type II

Figure 1: Erreurs de type I et de type II

Logique des tests statistiques

- Comment trouver le niveau de significativité?
- A partir de la distribution d'échantillonnage (distribution d'une statistique quelconque - par exemple la moyenne- de tous les échantillons possibles d'une taille donnée)
- La distribution d'échantillonnage et la méthode pour déterminer la signification statistique dépendent de la nature des données que nous analysons.
- Pour les données disposées en tableau, le test du **chi-carré** est utilisé.
- Il repose sur la distribution d'échantillonnage du chi-carré.

Distribution du chi-carré



Test de signification de chi-carré

Le test de chi-carré

- Il existe une table de la distribution d'échantillonnage du χ^2, c'est-à-dire une table qui donne les probabilités d'obtenir un χ^2 au moins aussi grand qu'une certaine valeur si, dans la population de laquelle fut tiré l'échantillon, il n'y a pas de relation entre les deux variables.
- Cette probabilité dépend de ce qu'on appelle les **degrés de liberté (dl ou ddl)**.

Degré de liberté

- Supposons que je vous demande de trouver 3 chiffres dont la moyenne vaut 11.
- Quelles sont les réponses possibles?
- On peut avoir (11, 11, 11), (11, 12, 10), ...
- Vous vous rendez compte qu'il y a une infinité de solution

Degré de liberté

- Maintenant, supposez que je vous dise qu'un de ces chiffres vaut 10.
- Quelles sont les réponses possibles?
- On peut avoir (10, 11, 12), (10, 13, 10), ...
- Vous vous rendez compte à nouveau que vous avez une infinité de solutions.

Degré de liberté

- Maintenant, supposez que je vous donne deux chiffres, soit (9 et 12)
- Quelles sont les réponses possibles?
- On peut avoir (9, 12, 12), ou ...
- Vous vous rendez compte que c'est la seule réponse possible
- Ainsi, à travers cet exemple, on se rend compte que seuls deux chiffres sont "libres". Une fois qu'ils sont fixés, la dernière réponse est déterminée.
- Dans cette situation, nous disons qu'il y a 2 degrés de liberté.
- De manière générale, chaque fois que nous regardons la moyenne de N valeurs, le degré de liberté vaut toujours (N-1)

Degré de liberté dans un tableau bivarié

- On peut aussi déterminer le degré de liberté dans un tableau
- Maintenant, supposer que je vous donne ce tableau
- Quelles sont les valeurs possibles de A, B, C, et D?

Attitude envers l'avortement	Homme	Femme	Total
Approuve	A	C	300
Désapprouve	B	D	100
Total	200	200	400

Figure 2: dl1

- Ici aussi, vous avez plusieurs réponses possibles
- On peut avoir (100, 100, 200, 0), (110, 90, 190, 10)

Degré de liberté dans un tableau bivarié

- Maintenant, supposer que je vous donne A = 150
- Quelles sont les autres valeurs possibles?

Attitude envers l'avortement	Homme	Femme	Total
Approuve	150	C	300
Désapprouve	B	D	100
Total	200	200	400

Figure 3: dl2

- On se rend compte que les valeurs de (B, C, D) sont fixes
- (B = 50, C = 150, D = 50) est la seule réponse possible
- Ainsi, nous disons que le tableau a 1 degré de liberté

Degré de liberté dans un tableau bivarié

- Maintenant, réfléchis à un tableau de deux colonnes et trois rangés
- trouve le degré de liberté dans ce tableau si t connais les informations à la marge?

Degré de liberté dans un tableau bivarié

- En règle générale, le degré de liberté dans les tableaux bivariés vaut **(r-1)(c-1)**
- r étant le nombre de rangées et
- et c le nombre de colonnes dans le tableau.
- A partir de cette valeur, on peut lire dans le tableau de distribution du chi-carré :
  - la valeur minimale du chi-carré nécessaire pour obtenir un résultat statistiquement significatif au seuil (ou niveau de significativité) voulu (0.05, 0.02, 0.01 ou 0.001).

Tableau de distribution du chi-deux

- page 343 de votre livre de cours

	p					
v	**0.100**	**0.050**	**0.025**	**0.010**	**0.005**	**0.001**
1	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794	10.8276
2	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966	13.8155
3	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382	16.2662
4	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603	18.4668
5	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	20.5150
6	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	22.4577
7	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	24.3219
8	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550	26.1245
9	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	27.8772
10	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882	29.5883
11	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568	31.2641
12	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	32.9095
13	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195	34.5282
14	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193	36.1233
15	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	37.6973
16	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	39.2524
17	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	40.7902
18	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564	42.3124
19	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823	43.8202
20	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	45.3147
21	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011	46.7970
22	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957	48.2679
23	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813	49.7282
24	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585	51.1786

Tableau de distribution du chi-deux

Ce tableau nous donne :

- Sur la première ligne le niveau de significativité souhaité (par exemple 5%)

Tableau de distribution du chi-deux

Ce tableau nous donne :

- Sur la première ligne le niveau de significativité souhaité (par exemple 5%)
- Sur la première colonne le degré de liberté calculé (par exemple 9)

Tableau de distribution du chi-deux

Ce tableau nous donne :

- Sur la première ligne le niveau de significativité souhaité (par exemple 5%)
- Sur la première colonne le degré de liberté calculé (par exemple 9)
- L'intersection de la ligne et de cette colonne vous donne la **valeur minimale** du chi-deux pour obtenir un résultat significatif au seuil voulu.

Tableau de distribution du chi-deux

Ce tableau nous donne :

- Sur la première ligne le niveau de significativité souhaité (par exemple 5%)
- Sur la première colonne le degré de liberté calculé (par exemple 9)
- L'intersection de la ligne et de cette colonne vous donne la **valeur minimale** du chi-deux pour obtenir un résultat significatif au seuil voulu.
- Dans l'exemple ici, la valeur du chi-deux vaut : 16.9190

Tableau de distribution du chi-deux

Ce tableau nous donne :

- Sur la première ligne le niveau de significativité souhaité (par exemple 5%)
- Sur la première colonne le degré de liberté calculé (par exemple 9)
- L'intersection de la ligne et de cette colonne vous donne la **valeur minimale** du chi-deux pour obtenir un résultat significatif au seuil voulu.
- Dans l'exemple ici, la valeur du chi-deux vaut : 16.9190
- Cela signifie que que si nous devons prendre 100 échantillons (aléatoires) différents dans une population où il n'y a pas d'association entre les deux variables, dans 5% des cas, nous obtiendrons une valeur égale ou superieure à 16.9190.

Tableau de distribution du chi-deux

Ce tableau nous donne :

- Sur la première ligne le niveau de significativité souhaité (par exemple 5%)
- Sur la première colonne le degré de liberté calculé (par exemple 9)
- L'intersection de la ligne et de cette colonne vous donne la **valeur minimale** du chi-deux pour obtenir un résultat significatif au seuil voulu.
- Dans l'exemple ici, la valeur du chi-deux vaut : 16.9190
- Cela signifie que que si nous devons prendre 100 échantillons (aléatoires) différents dans une population où il n'y a pas d'association entre les deux variables, dans 5% des cas, nous obtiendrons une valeur égale ou superieure à 16.9190.
- Au seuil de 1%, on trouve la valeur du chi-carré égale à 21.66.

En conclusion

- Je me donne 5% de chance de me tromper (niveau de significativité ou erreur alpha)
- Avec ce niveau et le degré de liberté, je lis la valeur du chi-carré qui leur est associée
- Si le chi-carré que je calcule avec mon échantillon est **supérieur** à cette valeur, je suis bien en phase avec le risque que je me suis donné: je dis qu'il y a une association au sein de la population
- Autrement dit, il est peu probable que mon échantillon provienne d'une population dans laquelle il n'y a pas d'association

Décision

- Si votre **chi-deux calculé** est supérieur ou égal au **chi-deux lu** ==> Rejeter l'hypothèse nulle. Cela revient à dire qu'il existe une association significative (n'est pas du au hasard) entre vos deux variables (catégorielles)
- Si votre **chi-deux calculé** est inférieur au **chi-deux lu** ==> Vous ne pouvez pas rejeter l'hypothèse nulle. Vous ne pouvez pas conclure à l'existence d'une association non nulle entre vos deux variables.

En résumé

Pour faire un test d'association entre deux variables (catégorielles):

1. Posez votre hypothèse nulle (et alternative)
   - H_0 : Il **n'existe pas** d'association entre les deux variables
   - H_1 : Il **existe** une association non nulle entre les deux variables
2. Choisissez votre niveau de significativité (5%)
3. Trouvez votre degré de liberté
4. Trouvez la valeur du **chi-deux** pour rejeter l'hypothèse nulle
5. Calculez votre chi-deux à partir de votre échantillon
6. Prendre une décision:
   - Si votre **chi-deux calculé** est supérieur ou égale au **chi-deux lu** ==> Rejeter l'hypothèse nulle. Dans ce cas, nous disons que la relation est **statistiquement significative au seuil retenu**
   - Si votre **chi-deux calculé** calculé est inférieur au **chi-deux lu** ==> Vous ne pouvez pas rejeter l'hypothèse nulle

Remarques

1. Une relation qui est significative au seuil de 5% est **aussi significative** à tous les seuils supérieurs à 5%. >2. Une relation qui est significative au seuil de 5% n'est pas automatiquement significative au seuil plus faible (par exemple 1%)
3. Plus grande est la valeur du chi-carré calculée, peu probable est que cette valeur soit attribuée à une erreur d'échantillonnage

Remarques

1. Une relation qui est significative au seuil de 5% est **aussi significative** à tous les seuils supérieurs à 5%. >2. Une relation qui est significative au seuil de 5% n'est pas automatiquement significative au seuil plus faible (par exemple 1%)
3. Plus grande est la valeur du chi-carré calculée, peu probable est que cette valeur soit attribuée à une erreur d'échantillonnage
4. Une relation statistiquement significative n'est pas toujours une **signification substantielle**. Avec une grande taille d'échantillon, les très petites différences peuvent être significatives

Remarques

1. Une relation qui est significative au seuil de 5% est **aussi significative** à tous les seuils supérieurs à 5%. >2. Une relation qui est significative au seuil de 5% n'est pas automatiquement significative au seuil plus faible (par exemple 1%)
3. Plus grande est la valeur du chi-carré calculée, peu probable est que cette valeur soit attribuée à une erreur d'échantillonnage
4. Une relation statistiquement significative n'est pas toujours une **signification substantielle**. Avec une grande taille d'échantillon, les très petites différences peuvent être significatives
5. Le test de chi-deux est basé sur un échantillon issu d'une procédure d'échantillonnage probabilistique.

Remarques

6. Pour les autres tests que nous serons amenés à faire (test de Student de comparaison des moyennes, test de Fisher pour l'analyse de la variance), la seule différence serait le changement de la distribution de la statistique à consider.

   - Pour tous les autres tests, on suivra la même logique
   - Étape 1 à 3 est pareil
   - Étape 4, trouver la valeur de la statistique appropriée
   - Étape 5, calculer votre statistique
   - Étape 6: prendre une décision

7. Lisez le résumé du chapitre 6 de Fox.

Labo