Limite e Continuidade de Funções

Prof.^{o} Ricardo Reis
Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

7 de Dezembro de 2020

1 Noção de Limite

Estudar ou calcular o **limite** de uma função $f(x)$ nas *proximidades* do número a significa tentar determinar um número real L para o qual a imagem de $f(x)$ *tende* quando x no domínio se aproxima de a. Se L não existe então diz-se que o *limite não existe*. A notação para representar o limite de $f(x)$ nas proximidades de um número a é,

$$\lim_{x \to a} f(x) \tag{1}$$

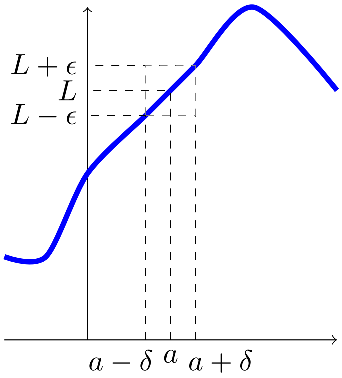
Lê-se *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* a. Se o limite de f existe nas proximidades de $x = a$ e é igual a L então,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Mais formalmente,

Proposição 1. Seja $f(x)$ uma função real, I um intervalo aberto e a um número real tal que $a \in I$. Se I está contido no domínio de f exceto possivelmente em a então um número real L é limite de f quando x tende a a, ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, quando para todo número $\epsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

A interpretação gráfica da Proposição 1 pode ser feita a partir da figura a seguir. Os números δ e ϵ referem-se aos respectivos tamanhos de vizinhanças nas proximidades de a no domínio e L na imagem. Se o número L de fato existe então por menor que seja ϵ, sempre existirá um valor δ também pequeno e não nulo.



2 Proposições Básicas

Proposição 2. Se $P(x)$ é uma função polinomial então $\lim_{x\to b} P(x) = P(b)$ para todo b pertencente aos reais.

ILUSTRAÇÃO 1 Determinar $\lim_{x\to -2} (2 - 11x)$.

SOLUÇÃO

Da Proposição 2,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} (2 - 11x) &= 2 - 11(-2)\\ &= 24\end{aligned}$$

ILUSTRAÇÃO 2 Determinar $\lim_{x\to 5} \left(x^2 - 4x + 1\right)$

SOLUÇÃO

Da Proposição 2,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5} \left(x^2 - 4x + 1\right) &= (5)^2 - 4(5) + 1\\ &= 6\end{aligned}$$

ILUSTRAÇÃO 3 Determinar $\lim_{x\to 1} \left(x^{100} - 4x^{50}\right)$

SOLUÇÃO

Da Proposição 2,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \left(x^{100} - 4x^{50}\right) &= (1)^{100} - 4(1)^{50}\\ &= -3\end{aligned}$$

Proposição 3. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais e b um número real. Se $f(x) = g(x)$ exceto possivelmente em $x = b$ então se $\lim_{x\to b} g(x) = L$ temos que também $\lim_{x\to b} f(x) = L$.

ILUSTRAÇÃO 4 Determinar $\lim_{x\to 2} f(x)$ onde,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

SOLUÇÃO

Sendo f uma função racional então seu domínio equivale aos números reais exceto aqueles que anulam o denominador, neste caso apenas $x = 2$. Matematicamente,

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

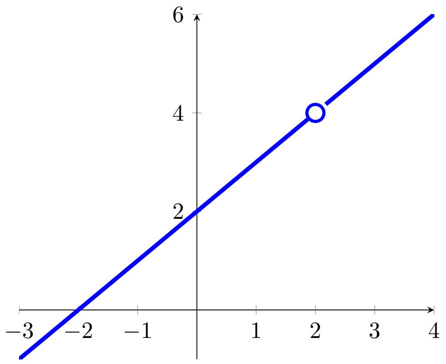
Note que numerador e denominador se anulam em $x = 2$ o que indica que ambos são divisíveis por $x - 2$. Então dividindo-se numerador e denominador por $x - 2$ obtemos uma nova função g que se distingue de f apenas em $x = 2$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4}{x-2} &= \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \\ g(x) &= x+2 \end{aligned}$$

o domínio de g é então $D(g) = \mathbb{R}$. Da Proposição 3 temos que,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2} g(x) \\ &= g(2) \\ &= (2)+2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Note que como $f = g$ enceto em $x = 2$ então como f não define $x = 2$ e g é uma reta (função do primeiro grau) então f é uma reta com um *buraco* em $x = 2$ conforme gráfico seguinte,



Neste gráfico é fácil perceber que para valores de x próximos a 2 (mas nunca $x = 2$) os valores de imagem se aproximam de $y = 4$. Vale ainda ressaltar que, apesar de $x = 2$ não pertencer ao domínio e consequentemente $y = 4$ não pertencer a imagem de f, o limite $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe.

ILUSTRAÇÃO 5 Determinar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ onde,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

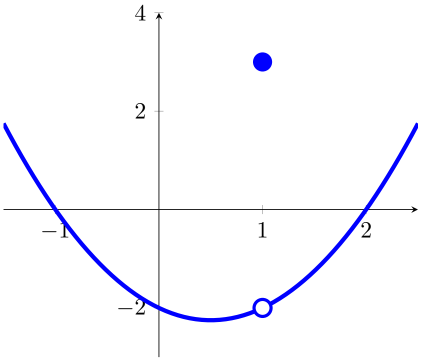
SOLUÇÃO

Tomando $g(x) = x^2 - x - 2$ (igual a primeira parte de f) percebemos que $f = g$ para todo x real exceto em $x = 1$. De fato $g(1) = (1)^2 - (1) - 2 = -2$, mas $f(1) = 3$ (segunda parte da função f). Da Proposição 3,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} g(x) \\ &= \lim_{x\to 1} \left[x^2 - x - 2\right] \\ &= (1)^2 - (1) - 2 \end{aligned}$$

$$= -2$$

Assim, nas proximidades de $x = 1$, a imagem tende a $y = -2$ apesar de termos que $f(1) = 3$. O gráfico de f é dado por,



Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe e é diferente de $f(1)$ então o gráfico de f apresenta um *buraco* em $x = 1$. A parte parabólica contendo o buraco indica a primeira parte da função e o ponto isolado indica a segunda parte. Como todo x real tem uma imagem então $D(f) = \mathbb{R}$. Note que de fato nas proximidades de $x = 1$ a imagem tende a $y = -2$.

3 Inexistência de Limite

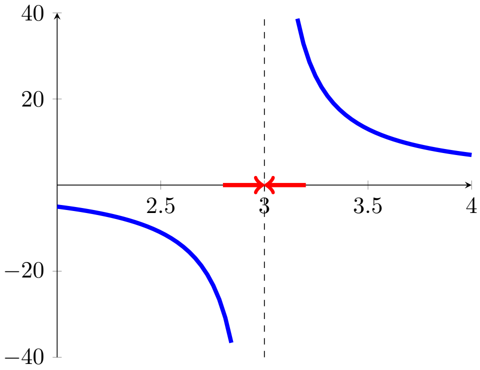
Nesta sessão mostramos, através de ilustrações, os dois casos mais comuns de inexistência de limite.

ILUSTRAÇÃO 6 Determinar $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ onde,

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}$$

SOLUÇÃO

Quando $x = 3$ o numerador de f vale $x + 3 = (3) + 3 = 6$ e o denominador vale $x - 3 = (3) - 3 = 0$. Sendo o numerador não nulo e o denominador nulo então, além de $x = 3$ não pertencer ao domínio de f, ainda representa uma assíntota vertical. O domínio de f, neste caso, é então $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. O gráfico de f é mostrado a seguir,



Da própria definição de assíntota temos que a reta tracejada na figura anterior *nunca é tocada* pela função. À proporção que se aproxima de $x = 3$ por valores menores ou maiores que 3 (sem nunca atingir de fato $x = 3$), conforme indicam as setas na figura, então a tendência dos valores de imagem é crescer *em módulo* como indicam as tabelas a seguir,

$x < 3$	$f(x)$
2	-5.00
2.9	-59.00
2.99	-599.00
2.999	-5999.00
2.9999	-59999.00
2.99999	-599999.00
2.999999	-5999999.00
2.9999999	-59999999.10
2.99999999	-600000002.65
2.999999999	-5999999502.56

$x > 3$	$f(x)$
4	7.00
3.1	61.00
3.01	601.00
3.001	6001.00
3.0001	60001.00
3.00001	600001.00
3.000001	6000001.00
3.0000001	60000001.10
3.00000001	600000004.65
3.000000001	5999999504.56

Logo não existe um número L para o qual a imagem converge quando x tende a 3, ou seja, $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existe.

A inexistência de um limite nem sempre está associada à presença de uma assíntota como na Ilustração-6. A ilustração seguinte mostra um caso de inexistência de limite conhecido como *inexistência por oscilação.*

Ilustração 7 Determinar $\lim_{x \to 0} f(x)$ onde,

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

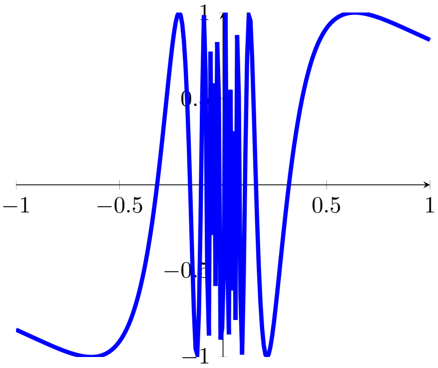
Solução

Neste exemplo a função, apesar de o operador $\sin$ operar todos os números reais, a fração operada não admite $x = 0$ pois anula seu denominador. Logo

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Utilizando-se f, ao operar-se quaisquer valores de x não-nulos, naturalmente deve-se obter valores de imagem no intervalo $[-1, 1]$ (o seno de todo valor real está nesta faixa).

Os valores de ângulos operados, ou seja, $1/x$, por sua vez tornam-se cada vez maiores em módulo à proporção que x se aproxima do zero (exatamente como no problema das assíntotas). Pensando em termos de círculo trigonométrico um angulo grande pode *cair* em quaisquer um dos quatro quadrantes, independente de sua magnitude. Dessa forma o valor de $\sin(1/x)$ flutua ou oscila entre -1 e 1 como indica o gráfico de f a seguir,



Como existe a flutuação então não existe um número L para onde f possa convergir quando x tende a zero e logo $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe.

A presença de uma função trigonométrica, como na ilustração-7, não condiciona que o limite não exista nem muito menos que seja por oscilação. A ilustração a seguir mostra um caso que envolve função trigonométrica e que o limite existe.

Ilustração 8 Determinar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ onde.

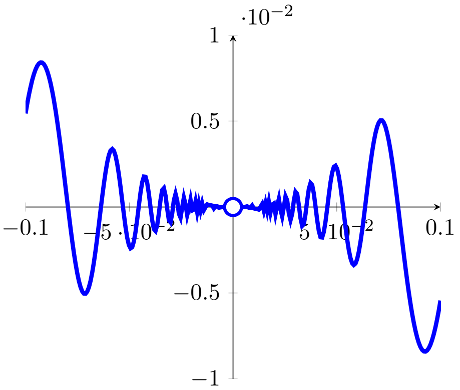
$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$$

Solução

O domínio de f é $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ pois 0 não é operável pela parte fracional da função. Apesar de não existir $f(0)$ os valores da parcela $\sin\frac{1}{x}$ nas proximidades de $x = 0$ possuem valor na faixa $[-1, 1]$. Ora, mas essa parcela está multiplicada por x^2 que nas proximidades de $x = 0$ é naturalmente próximo de zero. Como qualquer valor entre -1 e 1 multiplicado por um valor próximo a zero é também próximo de zero então pode-se concluir que,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Este resultado é evidenciado pelo gráfico de f mostrado a seguir,



Note que apesar da oscilação natural da função trigonométrica, a amplitude do gráfico diminui quando x se aproxima de zero caracterizando um valor L de convergência.

4 Limites Laterais

O estudo do limite de uma função $f(x)$ em torno de um valor a pode revelar valores distintos, L_1 e L_2, dependendo do *lado* pelo qual se aproxima de a. São os chamados **limites laterais**. Quando nos aproximamos de a por valores *maiores que* a dizemos estar fazendo um *limite pela direita de* a. Neste caso a notação utilizada é,

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

onde lê-se *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* a *pela direita*. Quando nos aproximamos de a por valores *menores* que a dizemos estar fazendo um *limite pela esquerda de* a. Neste caso a notação utilizada é,

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

onde lê-se *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* a *pela esquerda*.

Proposição 4. Seja $f(x)$ uma função real definida num intervalo aberto (a, b). Se uma função real $g(x)$ é definida num intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente em a, e $f = g$ quando $a < x \in I$ então,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

Similarmente se $g(x)$ é definida num intervalo aberto I contendo b, exceto possivelmente em b, e $f = g$ quando $b > x \in I$ então,

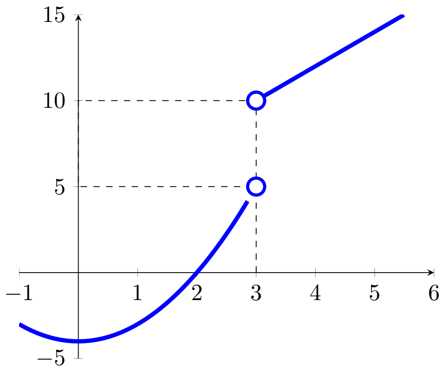
$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b} g(x)$$

ILUSTRAÇÃO 9 Determinar $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ onde,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 3 \\ 2x + 4 & x > 3 \end{cases}$$

Solução

Nenhuma das partes de f define $x = 3$ de forma que este valor fica fora do domínio. Logo tem-se que $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. O gráfico de $f(x)$ possui aspecto,



No intervalo $(-\infty, 3)$ a função $g(x) = x^2 - 4$ (tomada da primeira parte de f) é igual a f. Logo da Proposição 4 temos que,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3} g(x)\\ &= \lim_{x\to 3} \left[x^2 - 4\right]\\ &= (3)^2 - 4\\ &= 5\end{aligned}$$

Similarmente no intervalo $(3, +\infty)$ a função $h(x) = 2x + 4$ (tomada da segunda parte de f) é igual a f. Logo da Proposição 4 temos que,

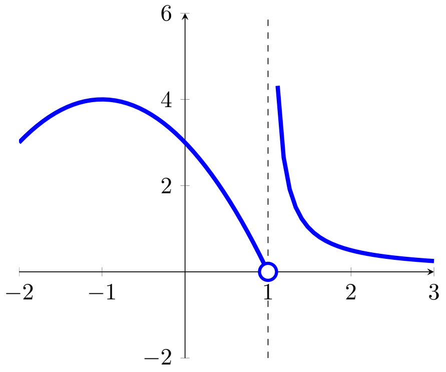
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3} h(x)\\ &= \lim_{x\to 3} [2x + 4]\\ &= 2(3) + 4\\ &= 10\end{aligned}$$

Ilustração 10 Determinar $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ onde,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & x < 1\\ \dfrac{1}{2x - 2} & x > 1\end{cases}$$

Solução

Nenhuma das partes de f define $x = 1$ de forma que o domínio da função é dada por $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$. O gráfico de f possui aspecto,



A parábola no intervalo $(-\infty, 1)$ é idêntica a função $g(x) = -x^2 - 2x + 3$ quando $x < 1$. Logo da Proposição 4,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1} g(x)\\ &= \lim_{x\to 1}\left(-x^2 - 2x + 3\right)\\ &= -(1)^2 - 2(1) + 3\\ &= 0\end{aligned}$$

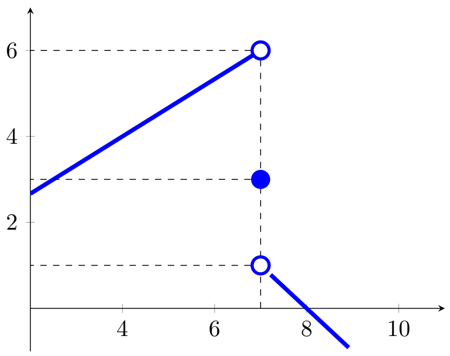
De forma similar o limite de f à direita de $x = 1$ deve ser dado pelo limite da função $h(x) = \frac{1}{2x-2}$. Entretanto não existe $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{2x-2}$ (há uma assíntota vertical em $x = 1$). Logo o limite de f pela direita de $x = 1$ também não existe.

ILUSTRAÇÃO 11 Determinar $f(7)$, $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)$ onde,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+4}{3} & x < 7\\ 3 & x = 7\\ 8 - x & x > 7\end{cases}$$

SOLUÇÃO

As três partes que compreendem f conjuntamente operam quaisquer números reais, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$. O gráfico de f tem aspecto,



No intervalo $(-\infty, 7)$ a reta $g(x) = \frac{2x+4}{3}$ é igual a função $g(x) = \frac{2x+4}{3}$ e logo, da Proposição 4 temos que,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 7^-} f(x) &= \lim_{x\to 7} g(x)\\ &= \lim_{x\to 7}\frac{2x+4}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2(7)+4}{3} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Similarmente no intervalo $(7, +\infty)$ a reta $h(x) = 8-x$ é igual a f e logo da Proposição 4 temos que,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 7^+} f(x) &= \lim_{x\to 7} h(x) \\ &= \lim_{x\to 7} (8-x) \\ &= 8-(7) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Da segunda parte tem-se que $f(7) = 3$. Note que,

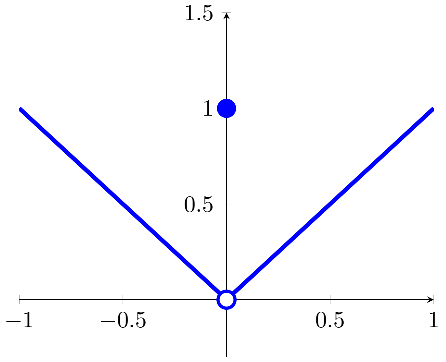
$$\lim_{x\to 7^-} f(x) \neq \lim_{x\to 7^+} f(x) \neq f(7)$$

Ilustração 12 Determinar $f(0)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ onde,

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Solução

A união das faixas das partes de f compreendem todos os números reais e logo $D(f) = \mathbb{R}$. O gráfico de f tem aspecto,



No intervalo $(-\infty, 0)$ a função $g(x) = -x$ é igual a f e logo da Proposição 4,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0} g(x) \\ &= \lim_{x\to 0} (-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

No intervalo $(0, +\infty)$ a função $h(x) = x$ é igual a f e logo da Proposição 4,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0} h(x) \\ &= \lim_{x\to 0} (x) \end{aligned}$$

$$= 0$$

Da segunda parte de f temos que $f(0) = 1$. Chegamos a conclusão que,

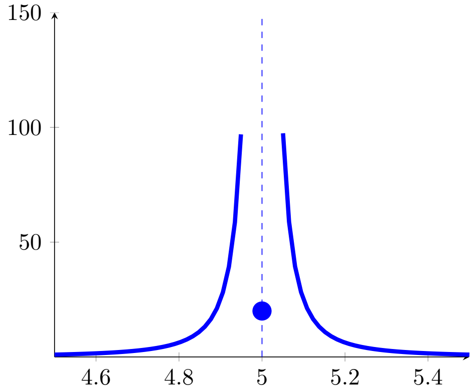
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$$

Ilustração 13 Determinar $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ onde,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4(x-5)^2} & x \neq 5 \\ 20 & x = 5 \end{cases}$$

Solução

A primeira parte de f opera todos os números reais exceto $x = 5$ e a segunda parte define $x = 5$, e ainda, $f(5) = 20$. Dessa forma $D(f) = \mathbb{R}$. O gráfico de f revela que,

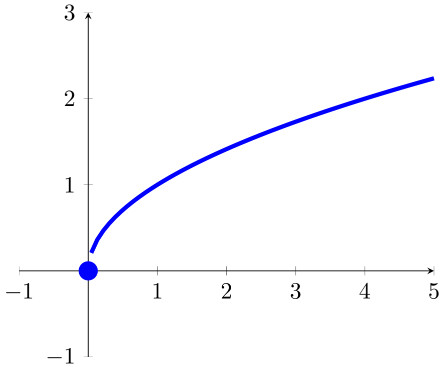


A reta vertical tracejada é uma assíntota para ambas as partes de f de forma que a imagem desta função, tanto pela esquerda quanto pela direita de $x = 5$, tende a valores grandes, ou seja, não existem números L_1 e L_2 para os quais a imagem converge. Logo os limites laterais não existem mas $f(5)$ existe.

Ilustração 14 Determinar $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$.

Solução

O domínio da função $f(x) = \sqrt{x}$ é o conjunto de todos os números reais não negativos ($x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0$). Logo, nas vizinhanças de $x = 0$, f só define valores à direita de forma que não há sentido falar em limite à esquerda, mas somente à direita. Dado o gráfico de f a seguir,



temos que a imagem de f tende a $y = 0$ quando a imagem se aproxima de $x = 0$ pela direita e logo,

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$$

Proposição 5. Seja uma função real $f(x)$ e um intervalo I contendo um número real b. A função f é definida em I exceto possivelmente em b. Então diz-se que o $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ **existe** se e somente se existem ambos limites laterais $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to b^+} f(x)$ e ainda,

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^+} f(x) = L$$

onde L é um número real.

ILUSTRAÇÃO 15 Mostrar que o $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ existe, dado que,

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x & x < 4 \\ 2 & x = 4 \\ x^2 - 2x - 7 & x > 4 \end{cases}$$

SOLUÇÃO

Da Proposição 4,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4^-} f(x) &= \lim_{x \to 4} (5 - x) \\ &= 5 - (4) \\ &= 1 \\ \lim_{x \to 4^+} f(x) &= \lim_{x \to 4} \left(x^2 - 2x - 7\right) \\ &= (4)^2 - 2(4) - 7 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Os limites laterais existem e possuem valor igual a 1, logo, mesmo tendo $f(4) = 2$, da Proposição 5, o limite exista.

5 Limites Infinitos

Quando uma função se aproxima de uma assíntota vertical então os valores de imagem crescem em módulo. Este tipo de indeterminação é normalmente manipulada pelas notações $+\infty$ e $-\infty$ que denotam valores indeterminados de módulo elevado respectivamente de sinal positivo e negativo. O estudo deste comportamento caracteriza uma família de limites denotados por **limites infinitos**.

Assim, em uma função real $f(x)$, ao aproximar-se de uma assíntota vertical $x = a$, se a imagem cresce indiscriminadamente em módulo e com sinal positivo então diz-se que *o limite de f quando x tende a a é $+\infty$*, ou ainda,

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

De forma similar se os valores de imagem de f nas proximidades de $x = a$ crescem em módulo, mas por valores negativos então diz-se que *o limite de* f *quando* x *tende a* a *é* $-\infty$, ou ainda,

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Os limite em *ambas* as vizinhanças de $x = a$ precisam tender a $+\infty$ ou $-\infty$ *ao mesmo tempo* para que as duas equações anteriores façam sentido. Entretanto pode ocorrer situações em que o limite pela esquerda tende a $+\infty$ e pela direita a $-\infty$ (ou vice-versa). Nestes casos é feito o uso de *limites laterais infinitos* para caracterizar cada lado de $x = a$. Por exemplo, $\lim\limits_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$ ao passo que $\lim\limits_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$.

Proposição 6. Seja $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ uma função real e I um intervalo contendo o número b. Seja f definida em I exceto possivelmente em $x = b$. Se $g(b) \neq 0$ e $h(b) = 0$ então pelo menos um dos limites laterais (podem ser ambos) nas vizinhanças de $x = b$ é infinito e ainda $x = b$ constitui uma assíntota vertical.

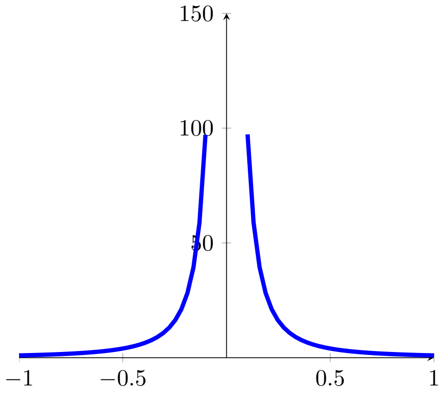
ILUSTRAÇÃO 16 Determinar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

SOLUÇÃO

A função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ define todos os números reais, exceto $x = 0$, ou seja, o domínio da função é $\mathbb{R}-\{0\}$. Da Proposição 6 como $g(0) = 1 \neq 0$ e $h(0) = 0^2 = 0$ temos que $x = 0$ é uma assíntota vertical e nas proximidades de $x = 0$ o limite é infinito. Em f, como o numerador é positivo e o denominador é uma potência de 2 então para todo valor de x diferente de $x = 0$ então o valor $\frac{1}{x^2}$ é positivo. Logo ambas as vizinhanças de $x = 0$ devem tender a $+\infty$, ou sinda,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Isso é facilmente percebido no gráfico da função a seguir,



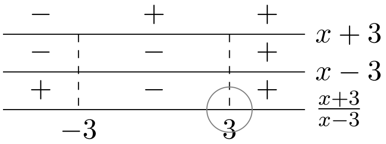
Note que ambas as abas da função aproximam-se de $x = 0$ *subindo* em direção a $+\infty$.

ILUSTRAÇÃO 17 Determinar $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ onde,

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}$$

SOLUÇÃO

Esta é a mesma função da Ilustração-6 onde se determinou a inexistência de limite nas vizinhanças de $x = 3$. Da Proposição 6 temos que $f(3) = (3) + 3 = 6 \neq 0$ e $h(3) = (3) - 3 = 0$ e logo existe uma assíntota vertical em $x = 3$ e o valor do limite nas proximidades de $x = 3$ é infinito. Para determinar se é $+\infty$ ou $-\infty$ e ainda se os resultados dos limites laterais são diferentes deve-se fazer uma análise de sinal da imagem de f conforme esquema a seguir,



Note que nas proximidades de $x = 3$ (marcado com um círculo) o sinal à esquerda é negativo e à direita é positivo. Logo, sendo o limite nessas vizinhanças infinito, então o limite lateral pela esquerda deve ser $-\infty$ e pela direita $+\infty$. Matematicamente,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$$

ILUSTRAÇÃO 18 Determinar os limites $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ onde,

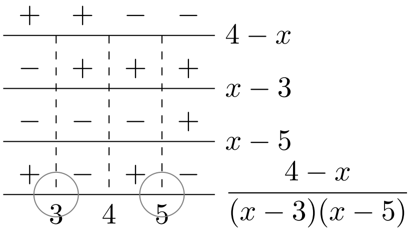
$$f(x) = \frac{4-x}{x^2 - 8x + 15}$$

SOLUÇÃO

Da Proposição 6 temos que,

$$\begin{aligned} f(3) &= 4 - (3) = 1 \\ f(5) &= 4 - (5) = -1 \\ h(3) &= (3)^2 - 8(3) + 15 = 0 \\ h(5) &= (5)^2 - 8(5) + 15 = 0 \end{aligned}$$

e logo em $x = 3$ e $x = 5$ existem assíntotas verticais e os limites em suas vizinhanças é infinito. Para decidir os sinais corretos nas quatro vizinhanças fazemos o estudo de sinal da imagem de f,



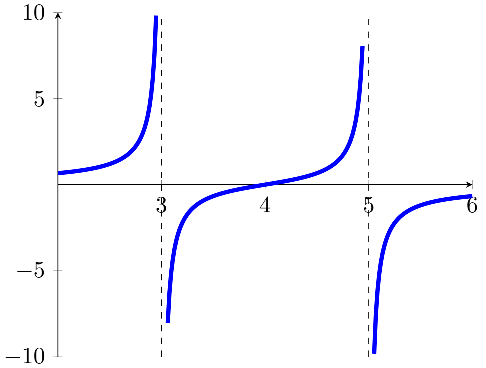
Note que à esquerda de $x = 3$ (primeiro círculo) o sinal é positivo e a direita é negativo. Logo o limite lateral esquerdo é $+\infty$ e o limite lateral direito é $-\infty$. Matematicamente,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

No caso do segundo círculo a situação é idêntica. O sinal à esquerda de $x = 5$ é positivo e à direita é negativo e logo o limite lateral esquerdo é $+\infty$ e o limite lateral direito é $-\infty$. Matematicamente,

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 5^+} f(x) = -\infty$$

O gráfica de f confirma os resultados encontrados,



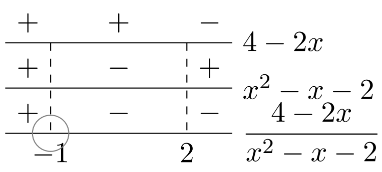
As quatro abas da função aproximam-se de uma das duas assíntotas (tracejadas) descendo ($-\infty$) ou subindo ($+\infty$) conforme indica sinal da imagem.

Ilustração 19 Determinar $\lim_{x\to -1} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$ onde,

$$f(x) = \frac{4-2x}{x^2-x-2}$$

Solução

Quando $x \to -1$ pode-se aplicar a Proposição 6 pois $g(-1) = 4-2(-1) = 6 \neq 0$ e $h(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0$. Logo existe uma assíntota vertical em $x = -1$ e o limite em suas proximidades é infinito. Para avaliar os limites laterais neste valor de abcissa fazemos o estudo de sinal da função como mostrado a seguir,



À esquerda de $x = -1$ o sinal da imagem é positivo e à direita é negativo. Logo o limite lateral pela esquerda vale $+\infty$ e o limite lateral pela direita vale $-\infty$. Matematicamente,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$$

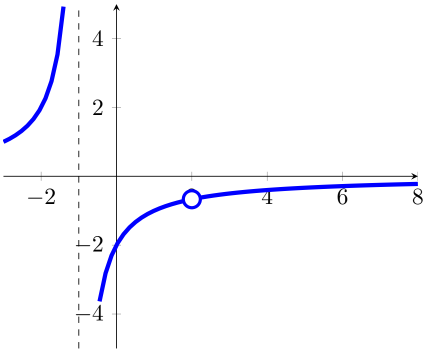
Quando $x \to 2$ a Proposição 6 não poderá ser utilizada pois $f(2) = 4-2(2) = 0$ e $h(2) = (2)^2-(2)-2 = 0$ (ambas são nulas). Em contrapartida a equação de f pode ser reduzida para,

$$\begin{aligned}\frac{4-2x}{x^2-x-2} &= \frac{(-2)(x-2)}{(x-2)(x+1)}\\ &= \frac{-2}{x+1}\end{aligned}$$

e a função $F(x) = \dfrac{-2}{x+1}$ obtida é igual a $f(x)$ exceto em $x = 2$. Logo da Proposição 3 temos que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} F(x)$ e assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{-2}{x+1}\\ &= \frac{-2}{(2)+1}\\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

O gráfico de f é mostrado a seguir,



Note que em $x = 2$ existe um *buraco*.

Ilustração 20 Dada a função $f(x)$ a seguir, determine os limites laterais nas vizinhanças de $x = 5$ além do valor $f(5)$,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+3x+10 & x < 5\\ 3 & x = 5\\ \dfrac{-1}{7x-35} & x > 5\end{cases}$$

Solução

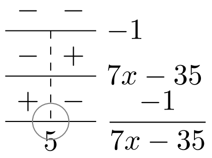
Tomando $F(x) = -x^2+3x+10$ (primeira parte de f) temos que $f(x) = F(x)$ em todo $x < 5$ e logo, da Proposição 4, temos que,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5^-} f(x) &= \lim_{x\to 5} F(x)\\ &= \lim_{x\to 5} \left(-x^2+3x+10\right)\\ &= -(5)^2+3(5)+10\\ &= 0\end{aligned}$$

Da segunda parte de f, quando $x = 5$, o valor de imagem é 3, ou seja, $f(5) = 3$. Tomando $G(x) = \dfrac{-1}{7x - 35}$ (terceira parte de f) temos que $f(x) = G(x)$ em todo $x > 5$ e logo, da Proposição 4, temos que,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5^+} f(x) &= \lim_{x\to 5} G(x)\\ &= \lim_{x\to 5}\left(\frac{-1}{7x-35}\right)\end{aligned}$$

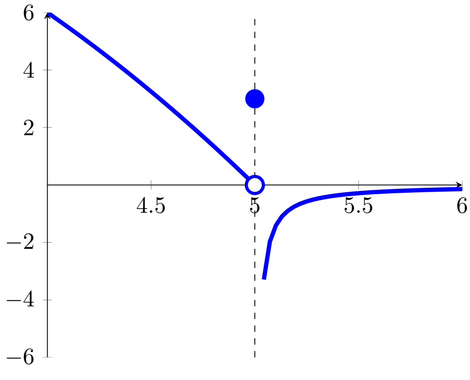
Este último valor de limite pode ser determinado pela Proposição 6 pois, da função numerador $g(x)$, temos que $g(5) = -1 \neq 0$ e, da função denominador $h(x)$, temos que $h(5) = 7(5) - 35 = 0$. Logo o limite é infinito cujo sinal é obtido por estudo de sinal da imagem, conforme mostrado a seguir,



O valor de sinal à direita de $x = 5$ é negativo então o limite lateral de f à direita de $x = 5$ tende a $-\infty$, ou matematicamente,

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = -\infty$$

O gráfico de f é mostrado a seguir,



6 Limites no Infinito

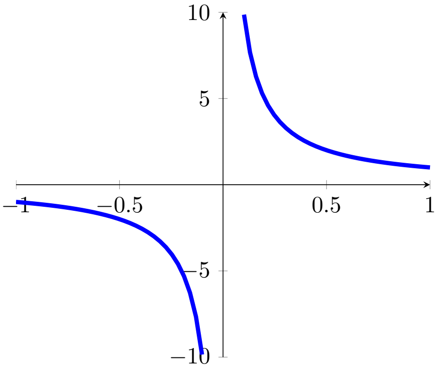
Uma outra variedade de cálculo de limites são os **limites no infinito**. Trata-se da análise da imagem de uma função $f(x)$ quando os valores x de domínio tendem a valores elevados em módulo. Se estes valores são positivos diz-se que o *limite tende a* $+\infty$, ou seja,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)$$

e quando são negativos diz-se que *o limite tende a* $-\infty$, ou seja,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Tomando a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e desenhando seu gráfico obtemos,



notamos que a proporção que x progride (tende a $+\infty$ indo da esquerda para a direita) ou regride (tende a $-\infty$ indo da direita para a esquerda) então a imagem se aproxima de zero. Este resultado é facilmente visualizado pelas tabelas,

x	$1/x$
1	1
10	0.1
100	0.01
1000	0.001
10000	0.0001
100000	0.00001
1000000	0.000001

x	$1/x$
-1	-1
-10	-0.1
-100	-0.01
-1000	-0.001
-10000	-0.0001
-100000	-0.00001
-1000000	-0.000001

Proposição 7. Seja n um numero real positivo. Então,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Para determinar o valor do limite no infinito em uma dada função real $f(x)$, deve-se rearranjar, quando possível, f de forma a conter termos $1/x^n$ e então substituí-los por zero conforme Proposição 7. O valor de n em geral é ajustado de forma que as componentes de maior grau tornem-se constantes independentes de x. Esta técnica é utilizada nas ilustrações a seguir.

ILUSTRAÇÃO 21 Determinar $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+5}$

SOLUÇÃO

O componente de maior grau neste caso é x de forma que devemos dividir numerador e denominador por ele, ou seja,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+5\frac{1}{x}}$$

Da Proposição 7 fazemos a substituição dos termos $1/x$ por zero e obtemos,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+5} = \frac{1-(0)}{1+5(0)} = 1$$

Uma **assíntota horizontal** de uma função $f(x)$ é uma reta abstrata paralela ao eixo x da qual f se aproxima continuamente sem nunca tocá-la.

Proposição 8. Seja $f(x)$ uma função real. Se existe o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e ainda,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L_1$$

então $y = L_1$ é uma assíntota horizontal de f. Analogicamente se existe o limite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e ainda,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$$

então $y = L_2$ é uma assíntota horizontal de f.

ILUSTRAÇÃO 22 Determine assíntotas verticais e horizontais na função,

$$f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 11}{x^2 - 16}$$

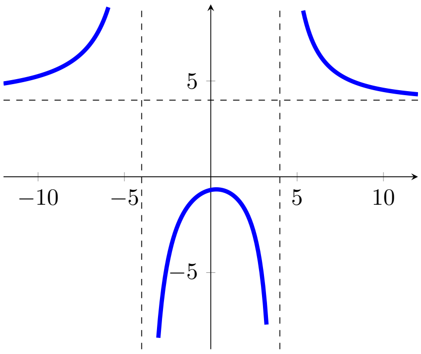
SOLUÇÃO

As raízes do polinômio denominador de f são $\{-4, 4\}$ e logo $D(f) = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$. Como o polinômio numerador não possui raízes ($\Delta = -7 < 0$) então $x = -4$ e $x = 4$ representam assíntotas verticais.

Para identificar assíntotas horizontais calculamos, segundo a Proposição 8, os limites no infinito. Fazendo tender primeiramente para $+\infty$ temos,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 3x + 11}{x^2 - 16} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - 3\frac{1}{x} + 11\frac{1}{x^2}}{1 - 16\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{4 - 3(0) + 11(0)}{1 - 16(0)} \\ &= 4 \end{aligned}$$

logo $y = 4$ é uma assíntota horizontal. Note que neste exemplo numerador e denominador são divididos por x^2 haja vista x^2 ser o monômio de maior grau entre os dois polinômios que formam a fração racional. Note também que aparece a fração $\frac{1}{x^2}$ que, da Proposição 7, também tende a zero quando x tende a $+\infty$. O limite para $-\infty$ de f é exatamente igual obtendo naturalmente a mesma assíntota. O gráfico de f a seguir enfatiza as três assíntotas identificadas,



7 Limites de Funções Racionais

Proposição 9. Se $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e b é um número real então,

i. Se $Q(b) \neq 0$ então $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$

ii. Se $P(b) = Q(b) = 0$ então $\lim_{x \to b} f(x) = \dfrac{R(b)}{S(b)}$ onde $R(x)$ e $S(x)$ são respectivamente os quocientes entre de $P(x)$ e $Q(x)$ por $x - b$ (note que a nulidade do numerador e denominador garantem a divisibilidade de ambos por $x - b$).

iii. Se $P(b) \neq 0$ e $Q(b) = 0$ então os limites laterais de f nas vizinhanças de $x = b$ são infinitos ($\pm\infty$) e o sinal é determinado pelo estudo de sinal da imagem nestas vizinhanças.

iv. Se c_m e d_n são respectivamente os coeficientes dos monômios de maiores graus de $P(x)$ e $Q(x)$ e ainda m e n os graus respectivos destes monômios então,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \pm\infty & m > n \\ \dfrac{c_m}{d_n} & m = n \\ 0 & m < n \end{cases}$$

(Note que a primeira parte desta equação requer estudo de sinal de imagem).

ILUSTRAÇÃO 23 Dado que,

$$f(x) = \frac{x^2 - 14x + 40}{x^2 - 16}$$

determinar $\lim_{x \to 1} f(x)$, $\lim_{x \to 4} f(x)$, $\lim_{x \to -4} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

SOLUÇÃO

Sendo f uma função racional utilizamos a Proposição 9. Quando $x = 1$ o denominador não anula de forma que, quando $x \to 1$, o limite pode ser calculado por substituição direta,

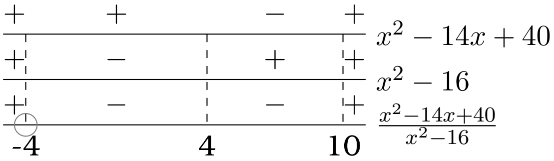
$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{(1)^2 - 14(1) + 40}{(1)^2 - 16}$$

$$= -\frac{9}{5}$$

Quando $x = 4$ tanto numerador quanto denominador se anulam e logo, para determinar o limite quando $x \to 4$, deve-se dividir ambos por $x - 4$ e em seguida efetuar a substituição,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} f(x) &= \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 14x + 40}{x^2 - 16} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x-10)}{(x-4)(x+4)} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{x - 10}{x + 4} \\
&= \frac{(4) - 10}{(4) + 4} \\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Quando $x = -4$ o denominador se anula mas o numerador não. Logo o limite quando $x \to -4$ é infinito. Fazemos então o estudo de sinal da imagem,



Note que o sinal à esquerda de $x = -4$ é positivo e à direita é negativo. Logo o limite lateral à esquerda de $x = -4$ é $+\infty$ e à direita é $-\infty$. Matematicamente,

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = -\infty$$

Quando o limite é no infinito tomamos os graus dos polinômios numerador e denominador que neste caso são idênticos e logo o limite é dado pela razão dos coeficientes dos monômios de maior grau. Matematicamente,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$$

ILUSTRAÇÃO 24 Determinar $\lim_{x \to -\infty} \frac{-4x^3 - 32}{5x^2 + 2x}$.

SOLUÇÃO

Na função racional dada o grau do polinômio numerador é maior que do polinômio denominador e logo o limite, que é *no infinito*, também é *infinito* (Proposição 9). Neste caso devemos então recorrer a análise de sinal da imagem. No caso do numerador devemos por -4 em evidência e depois utilizar a relação matemática $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$ para tornar o polinômio de grau 3 num produto de um polinômio de primeiro grau por um de segundo grau. Ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{-4x^3-32}{5x^2+2x} &= \frac{(-4)(x^3+8)}{5x^2+2x}\\ &= \frac{(-4)(x+2)(x^2-2x+4)}{5x^2+2x}\\ &= \frac{(-4x-8)(x^2-2x+4)}{5x^2+2x}\end{aligned}$$

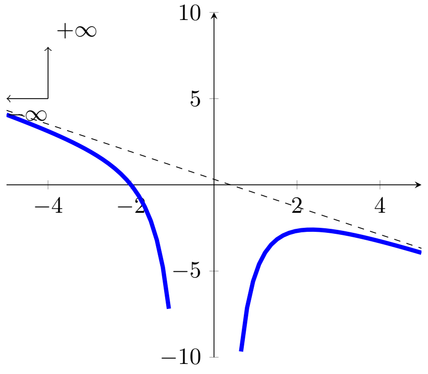
Utilizando esta última equação fazemos o estudo de sinal mostrado a seguir,

+	−	−	−	$-4x-8$
+	+	+	+	x^2-2x+4
+	+	−	+	$5x^2+2x$
+	−	+	−	$\frac{(-4x-8)(x^2-2x+4)}{5x^2+2x}$
	-2	$-\frac{2}{5}$	0	

Note que para todo valor real menor que $x=-2$ o sinal da imagem é positivo e logo, se o limite vai para $-\infty$, então a imagem tende a $+\infty$. Matematicamente,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^3-32}{5x^2+2x}=+\infty$$

Em contrapartida, como o grau do polinômio numerador é maior que o do polinômio denominador em exatamente uma unidade, então existe uma *assíntota inclinada*. O comportamento gráfico da função estudada é dado por,



8 Propriedades dos Limites

Proposição 10. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais e b um número real. Se existem os limites $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to b} g(x)$ então,

- i. $\lim\limits_{x\to b} [\alpha \cdot f(x)] = \alpha \cdot \lim\limits_{x\to b} f(x)$
- ii. $\lim\limits_{x\to b} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \lim\limits_{x\to b} f(x) + \beta \lim\limits_{x\to b} g(x)$
- iii. $\lim\limits_{x\to b} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to b} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to b} g(x)$
- iv. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to b} f(x)}{\lim\limits_{x\to b} g(x)}$ se $\lim\limits_{x\to b} g(x) \neq 0$
- v. $\lim\limits_{x\to b} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to b} f(x)]^n$ se $n \in \mathbb{N}$
- vi. $\lim\limits_{x\to b} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to b} f(x)}$ se $n \in \mathbb{N}$ e ainda se n é par então é necessário que $\lim\limits_{x\to b} f(x) \geq 0$
- vii. $\lim\limits_{x\to b} [\ln f(x)] = \ln [\lim\limits_{x\to b} f(x)]$ se $\lim\limits_{x\to b} f(x) \geq 0$

onde α e β são números reais.

ILUSTRAÇÃO 25 Calcular $\lim\limits_{x\to -2} \left[x^2 + \dfrac{8}{x}\right]$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} \left[x^2 + \frac{8}{x}\right] &= \lim_{x\to -2} x^2 + \frac{\lim\limits_{x\to -2} 8}{\lim\limits_{x\to -2} x}\\ &= 4 + \frac{8}{-2}\\ &= 0\end{aligned}$$

ILUSTRAÇÃO 26 Calcular $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \ln \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}}$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \frac{1}{2}} \ln \left[\sqrt{x^2 + \frac{3}{4}}\right] &= \ln \left[\lim_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}}\right]\\ &= \ln \left[\sqrt{\lim_{x\to \frac{1}{2}} \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)}\right]\\ &= \ln \left[\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}\right]\\ &= \ln \left[\sqrt{1}\right]\\ &= \ln 1\\ &= 0\end{aligned}$$

ILUSTRAÇÃO 27 Calcular $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 7}}$

SOLUÇÃO

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-7}} = \frac{\lim\limits_{x\to 16}(\sqrt{x}-1)}{\lim\limits_{x\to 16}\sqrt{x-7}}$$
$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 16} x}-1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 16} x-7}}$$
$$= \frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16-7}}$$
$$= \frac{3}{3}$$
$$= 1$$

ILUSTRAÇÃO 28 Calcular $\lim\limits_{x\to 7}\frac{(x-5)^3}{x+1}$

SOLUÇÃO

$$\lim_{x\to 7}\frac{(x-5)^3}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 7}(x-5)^3}{\lim\limits_{x\to 7}(x+1)}$$
$$= \frac{\left[\lim\limits_{x\to 7}(x-5)\right]^3}{\lim\limits_{x\to 7}(x+1)}$$
$$= \frac{2^3}{8}$$
$$= 1$$

ILUSTRAÇÃO 29 Determinar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}+1}{x}$.

SOLUÇÃO

Utiliza-se neste caso a técnica dos **conjugados** que consiste em multiplicar numerador e denominador pelo conjugado de um deles [1],

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]\left[\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x+1)}+\lim\limits_{x\to 0}1}$$

---

[1] O conjugado do binômio $A+B$ é $A-B$ e vice-versa. O produto de um binômio pelo seu conjugado é um produto notável na forma, $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{(0)+1}+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

é importante observar que a conversão de $\frac{\sqrt{x+1}+1}{x}$ em $\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$, pela técnica de conjugados, é nada mais que o processo de determinação de uma função similar a de entrada e cujo limite é equivalente de acordo com a Proposição 3.

ILUSTRAÇÃO 30 Determinar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

SOLUÇÃO

Utilizaremos neste exemplo a técnica da **mudança de variáveis**. Se fizermos $t = \sqrt{x}$ então, como $x \to 1$, tem-se que $t \to \sqrt{1} = 1$. Fazendo a substituição,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{t\to 1} \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2}-1} \\ &= \lim_{t\to 1} \frac{t^2-1}{t-1} \\ &= \lim_{t\to 1} \frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)} \\ &= \lim_{t\to 1} (t+1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

note que a equivalência de limites de $\frac{t^2-1}{t-1}$ e $t+1$ é garantida pela Proposição 3.

ILUSTRAÇÃO 31 Determinar assíntotas verticais e horizontais da função,

$$f(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$$

SOLUÇÃO

Determinemos inicialmente as assíntotas horizontais. A componente de maior grau em f é x^2, mas como ela está dentro de um operador raiz-quadrada então o termo pelo qual numerador e denominador devem ser divididos é x. Obtemos assim,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2-5}}{x}}$$

Para resolver este limite é necessário introduzir x dentro da raiz quadrada. Quando $x \to +\infty$ significa que x é intrinsecamente positivo e logo $x = \sqrt{x^2}$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2-5}}{x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2-5}{x^2}}} \\ &= \frac{3+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}}{\sqrt{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

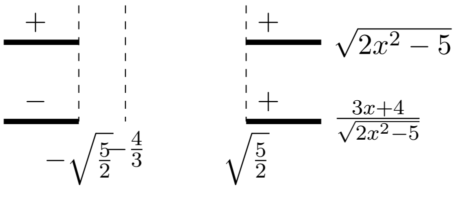
Quando $x \to -\infty$ então x é intrinsecamente negativo e logo $x = -\sqrt{x^2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2-5}}{x}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{-\sqrt{\frac{2x^2-5}{x^2}}} \\
&= -\frac{3+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}}{\sqrt{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}}} \\
&= -\frac{3}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Logo há duas assíntotas horizontais, $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$ e $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$. Para determinarmos as assíntotas verticais identifiquemos primeiramente o domínio de f. Como o denominador contém um operador raiz-quadrada então seu operando além de não nulo (pois trata-se de um denominador) deve ser também positivo. Matematicamente,

$$\begin{aligned}
2x^2 - 5 &> 0 \\
x^2 &> \frac{5}{2} \\
D(f) &= \{x < -\sqrt{\frac{5}{2}} \cup x > \sqrt{\frac{5}{2}} \mid x \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Deste domínio temos que os únicos candidatos a assíntotas verticais são justamente $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. No que diz respeito às vizinhanças destes valores, a função só é definida à esquerda de $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ e à direita de $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ e logo devemos estudar $\lim\limits_{x\to-\sqrt{\frac{5}{2}}^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to\sqrt{\frac{5}{2}}^+} f(x)$. Em ambos limites os denominadores se anulam mas os numeradores não e logo os limites são infinitos (e logo existem também duas assíntotas verticais). Por fim para determinar se são $\pm\infty$ façamos a análise de sinal da imagem. Ora, o denominador é uma raiz-quadrada e logo, em qualquer parte do domínio, é positivo. Daí o sinal de f depende unicamente do sinal do numerador como indicado no esquema a seguir,

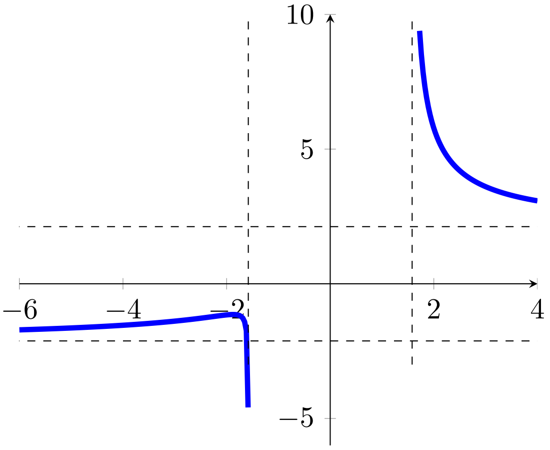


desta análise temos que,

$$\lim_{x\to\sqrt{-\frac{5}{2}}^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{5}{2}}^+} f(x) = +\infty$$

O gráfico de $f(x)$ é mostrado a seguir enfatizando as quatro assíntotas encontradas (linhas tracejadas),



9 Limites Fundamentais

Alguns limites de difícil dedução, mas de resultados conhecidos, podem ser utilizados como arquétipos na resolução de outros limites. São os chamados **limites fundamentais**. Dado um conjunto de limites fundamentais a resolução de outros limites pode ser feita rearranjando-se a equação original de forma a conter uma ou mais *partes fundamentais* às quais são resolvidas pontualmente e depois integradas à resolução global.

Nos parágrafos a seguir são apresentados os três principais limites fundamentais difundidos em literaturas de cálculo,

Proposição 11. O primeiro limite fundamental é dado pela equação,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

Onde x representa um valor de ângulo em radianos.

A tabela e o gráfico de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ mostrados a seguir demostram que de fato a imagem nas proximidades de $x = 0$ tende a $y = 1$,

x	$\sin(x)/x$
±1.00000	0.841470984808
±0.10000	0.998334166468
±0.01000	0.999983333417
±0.00100	0.999999833333
±0.00010	0.999999998333
±0.00001	0.999999999983

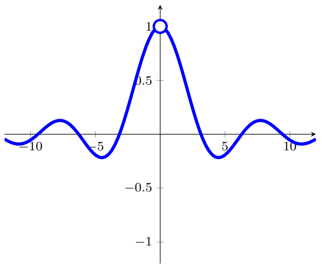


Ilustração 32 Determinar $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$.

SOLUÇÃO

Fazendo a expansão da tangente temos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right]\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\\ &= 1\cdot\frac{1}{cos(0)}\\ &= 1\end{aligned}$$

ILUSTRAÇÃO 33 Determinar $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$.

SOLUÇÃO

Dado que $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ então $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$. Logo temos,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{x}$$

Para prosseguir note que é necessário introduzir x dentro do radicando acrescentando-lhe uma potência de 2. Entretanto, apesar de $x=\sqrt{x^2}$, quando $x\geq 0$, ocorre que $x=-\sqrt{x^2}$ quando $x<0$. Isso implica no uso de limites laterais, e logo temos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\left[\frac{\sin x}{x}\right]^2}\\ &= \sqrt{+\infty+1^2}\\ &= +\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}-\sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to 0}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\left[\frac{\sin x}{x}\right]^2}\\ &= -\sqrt{+\infty+1^2}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

O cálculo de $\sqrt{+\infty+1}$, apesar de estranha é coerente. De fato um valor infinitamente grande somado a 1 continua infinitamente grande e a raiz quadrada de um valor infinitamente grande é também infinitamente grande.

ILUSTRAÇÃO 34 Determinar $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

SOLUÇÃO

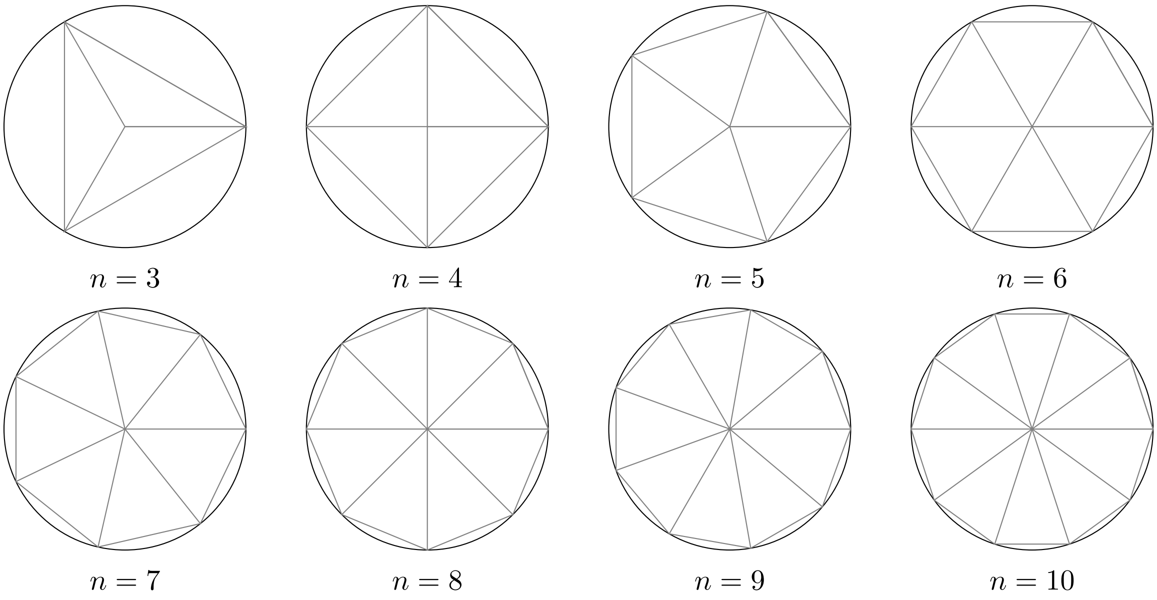
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\cdot\frac{2x}{2x}\cdot\frac{3x}{3x}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x}{3x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}}\right]\\
&= \frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}\\
&= \frac{2}{3}\cdot(1)\cdot\frac{1}{1}\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

ILUSTRAÇÃO 35 Mostrar que a área de um círculo de raio r é dada por πr^2.

SOLUÇÃO

Suponhamos um polígono regular interno de n lados inscrito numa circunferência de raio r. Quando os vértices deste polígono são ligados ao centro do círculo formam-se n triângulos isósceles idênticos cuja soma das áreas é uma aproximação da área do círculo (ver Figura-1). De fato quando $n \to +\infty$ a área do polígono tende a área do círculo.



$n = 3$ $n = 4$ $n = 5$ $n = 6$

$n = 7$ $n = 8$ $n = 9$ $n = 10$

Figura 1: Polígonos regulares de n lados inscritos numa circunferência. Quando $n \to +\infty$ então a área do polígono tende a do círculo.

Seja θ o ângulo de cada triângulo que se opõe a um lado do polígono. Então,

$$\theta = \frac{2\pi}{n}$$

Note que quando $n \to +\infty$ então $\theta \to 0$. Matematicamente a área A_t de um triângulo é dada por,

$$A_t = \frac{r^2}{2}\cdot\sin\theta$$

Como n triângulos compõem o polígono então sua área completa A vale,

$$A = n \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \sin\theta$$

Como $\theta = 2\pi/n$ então $n = 2\pi/\theta$ e logo,

$$A = \frac{2\pi}{\theta} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \sin\theta$$

Por fim a área A_c da circunferência deve ser dada pelo limite de A quando θ tende para zero, ou matematicamente,

$$\begin{aligned} A_c &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{2\pi}{\theta} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \sin\theta\right) \\ &= \lim_{\theta\to 0}\left(\pi \cdot r^2 \frac{\sin\theta}{\theta}\right) \\ &= \pi \cdot r^2 \cdot \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

Proposição 12. O segundo limite fundamental é dado pela equação,

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left[1 + \frac{1}{x}\right]^x = e}$$

Onde e é o número de Euler ($e = 2.71828182$).

Este limite consiste na própria definição de e e pode ser inclusive utilizado para estimá-lo computacionalmente. Nas tabelas a seguir são mostrados as duas convergências, para $+\infty$ e para $-\infty$, da função $f(x) = \left[1 + \frac{1}{x}\right]^x$. Note que, independentemente do lado, os valores de imagem tendem de fato ao valor irracional e. O mesmo comportamento é percebido no gráfico de $f(x)$ abaixo das tabelas. A linha tracejada refere-se ao valor $y = e$.

x	$[1+1/x]^x$
10^1	2.593742460100
10^2	2.704813829422
10^3	2.716923932236
10^4	2.718145926825
10^5	2.718268237192
10^6	2.718280469096
10^7	2.718281694133
10^8	2.718281798339
10^9	2.718282051996
10^{10}	2.718282052691

x	$[1+1/x]^x$
-10^1	2.867971990792
-10^2	2.731999026429
-10^3	2.719642216443
-10^4	2.718417755010
-10^5	2.718295419980
-10^6	2.718283187679
-10^7	2.718281962943
-10^8	2.718281855691
-10^9	2.718281752859
-10^{10}	2.718282052691

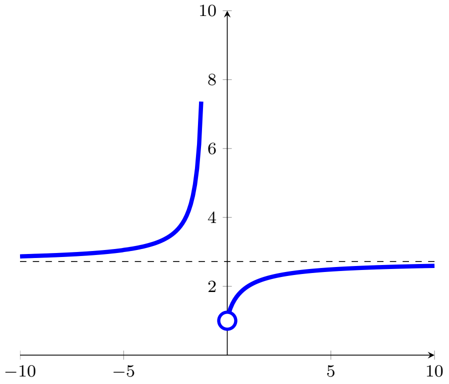


ILUSTRAÇÃO 36 Determinar $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

SOLUÇÃO

Fazendo a mudança de variável $t=\frac{1}{x}$ obtemos consequentemente que $t\to+\infty$. O limite se torna então,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\\ &= e\end{aligned}$$

ILUSTRAÇÃO 37 Determinar $\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{b}{x}\right]^{x}$ onde $b\in\mathbb{R}$.

SOLUÇÃO

Fazendo $\frac{b}{x}=\frac{1}{t}$ obtemos que $t=\frac{x}{b}$ e logo, como x e t são proporcionais, e ainda $x\to+\infty$ então $t\to+\infty$ também. Note que ainda $x=bt$ e a substituição fica,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{b}{x}\right]^{x} &= \lim_{t\to+\infty}\left[1+\frac{1}{t}\right]^{bt}\\ &= \left[\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{b}\\ &= e^{b}\end{aligned}$$

ILUSTRAÇÃO 38 Determinar $\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\frac{1}{x+b}\right]^{x}$ onde $b\in\mathbb{R}$.

SOLUÇÃO

Fazemos neste caso $t=x+b$ de onde obtemos que $x=t-b$. Consequentemente se $x\to\pm\infty$ então $t\to\pm\infty$. Fazendo a substituição encontrados,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\frac{1}{x+b}\right]^{x} &= \lim_{t\to\pm\infty}\left[1+\frac{1}{t}\right]^{t-b}\\ &= \frac{\lim_{t\to\pm\infty}\left[1+\frac{1}{t}\right]^{t}}{\lim_{t\to\pm\infty}\left[1+\frac{1}{t}\right]^{b}}\\ &= \frac{e}{\left[\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]^{b}}\\ &= \frac{e}{\left[1+\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{b}}\\ &= \frac{e}{[1+0]^{b}}\\ &= e\end{aligned}$$

Proposição 13. O terceiro limite fundamental é dado pwla equação,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)=\ln a}$$

onde $a\in\mathbb{R}^+$. No caso particular em que $a=e$ temos que,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\ln e=1}$$

As tabelas seguintes ilustram o comportamento da imagem de $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ nas proximidades de $x=0$. O gráfico de $f(x)$ é também mostrado abaixo das tabelas.

$x>0$	$(e^x-1)/x$
10^{-1}	1.051709180756
10^{-2}	1.005016708417
10^{-3}	1.000500166708
10^{-4}	1.000050001667
10^{-5}	1.000005000007
10^{-6}	1.000000499962
10^{-7}	1.000000049434
10^{-8}	0.999999993923
10^{-9}	1.000000082740

$x<0$	$(e^x-1)/x$
-10^{-1}	0.951625819640
-10^{-2}	0.995016625083
-10^{-3}	0.999500166625
-10^{-4}	0.999950001667
-10^{-5}	0.999995000017
-10^{-6}	0.999999499984
-10^{-7}	0.999999949514
-10^{-8}	0.999999993923
-10^{-9}	0.999999971718

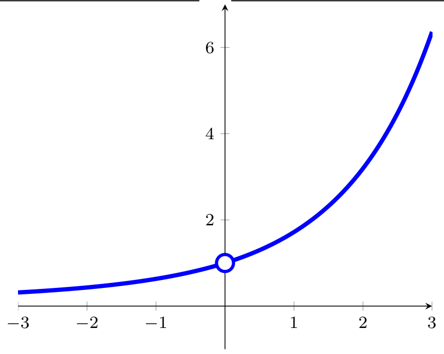


Ilustração 39 Determinar $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$ onde a, $b>0$.

Solução

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{a^x+1-1-b^x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1-(b^x-1)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}\\ &= \ln a-\ln b\\ &= \ln\frac{a}{b}\end{aligned}$$

Ilustração 40 Mostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ dado que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[1+x\right]^{\frac{1}{x}}=e$ (ver Ilustração-36).

Solução

Efetuamos neste exemplo uma mudança de variável. Escolhemos $t=a^x-1$ de forma que quando $x\to 0$ temos que $t \to a^0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Isolando x da definição de t encontramos,

$$\begin{aligned} a^x - 1 &= t \\ a^x &= t + 1 \\ x &= \log_a[t+1] \\ x &= \frac{\ln[t+1]}{\ln a} \end{aligned}$$

E fazemos então a substituição,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{\ln[t+1]}{\ln a}} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{t}\ln[t+1]} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\ln a}{\ln[t+1]^{\frac{1}{t}}} \\ &= \frac{\ln a}{\ln\left[\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]} \\ &= \frac{\ln a}{\ln e} \\ &= \ln a \end{aligned}$$

10 Continuidade

Proposição 14. Seja $f(x)$ uma função real e b um número real pertencente ao domínio de f. Então f é *contínua* em $x = b$ quando existem ambos limites laterais $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)$ e ainda,

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^+} f(x) = f(b)$$

ILUSTRAÇÃO 41 Verificar quais funções a seguir são contínuas e quais são descontínuas em $x = a$, dado a,

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} \qquad a = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & x \neq 4 \\ \frac{1}{4} & x = 4 \end{cases} \qquad a = 4$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & x < -2 \\ 5 & x = -2 \\ 3+x & x > -2 \end{cases} \qquad a = -2$

SOLUÇÃO

a) Da Proposição 4,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x+3) = 2(1)+3 = 5$$

entretanto $f(1) = 2$ e logo, da Proposição 14, $f(x)$ é descontínua em $x = 1$.

b) Da Proposição 9,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

ou seja, nenhum limite lateral existe. Também não existe $f(2)$. logo, da Proposição 14, $f(x)$ é descontínua em $x = 2$.

c) Da Proposição 4,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) &= \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}\\ &= \frac{1}{(2)+2}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Dado que $f(4) = \frac{1}{4}$ então, pela Proposição 14, $f(x)$ é contínua em $x = 4$.

d) Utilizando a Proposição 4 e Proposição 3,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2}\left(x^2-3\right)\\ &= (-2)^2-3\\ &= 1\\ \lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2}(3+x)\\ &= 3+(-2)\\ &= 1\end{aligned}$$

ou seja, os limites laterais existem e possuem valor 1. Da segunda parte de f temos que $f(-2) = 5$. Logo, da Proposição 14, a função não é contínua em $x = -2$.

Em uma função $f(x)$, quando os limites laterais em um ponto $x = b$ existem e valem ambos um número L, mas não existe $f(b)$ ou $f(b) \neq L$ então tem-se um caso de **descontinuidade removível**. A descontinuidade removível é aquela que pode ser transformada em continuidade definindo-se ou alterando-se o valor de $f(b)$. Quando a descontinuidade não é removível é dita **descontinuidade essencial**.

ILUSTRAÇÃO 42 Mostrar que a função,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x < -2 \\ 5 & x = -2 \\ 3 + x & x > -2 \end{cases}$$

(ver Ilustração-41) possui continuidade removível. Redefina $f(x)$ de forma a se tornar contínua.

SOLUÇÃO

Da Ilustração-41,

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 1$$

Entretanto $f(-2) = 5$ e assim $f(x)$ é descontínua em $x = -2$. Dado que os limites laterais existem e são idênticos então esta descontinuidade é removível bastando então redefinir $f(-2)$ de 5 para 1. A versão contínua de $f(x)$ é então,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x < -2 \\ 1 & x = -2 \\ 3 + x & x > -2 \end{cases}$$

ILUSTRAÇÃO 43 Mostrar que a função,

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 11 & x \leq 7 \\ x^2 - 10x & x > 7 \end{cases}$$

possui descontinuidade essencial em $x = 7$.

SOLUÇÃO

Da Proposição 4,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 7^-} f(x) &= \lim_{x \to 7} (5x - 11) \\ &= 5(7) - 11 \\ &= 24 \\ \lim_{x \to 7^+} f(x) &= \lim_{x \to 7} \left(x^2 - 10x\right) \\ &= (7)^2 - 10(7) \\ &= -21 \end{aligned}$$

De onde se conclui que ocorre descontinuidade (Proposição 14) e, pelo fato de os limites laterais serem distintos, que se trata de uma descontinuidade essencial.

ILUSTRAÇÃO 44 Dada a função,

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx & x < 3 \\ a + 3b - 1 & x = 3 \\ 2ax + 4b + 4 & x > 3 \end{cases}$$

determinar a e b de forma que $f(x)$ seja contínua em $x = 3$.

SOLUÇÃO

Da Proposição 4 temos que.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = a(3)^2 + 2b(3) = 9a + 6b$$

e pela mesma proposição,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2a(3) + 4b + 4 = 6a + 4b + 4$$

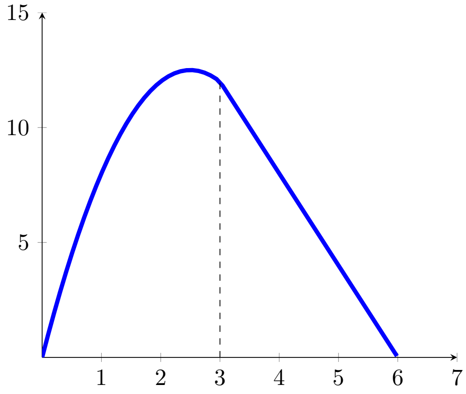
da Proposição 14 ambas expressões encontradas devem ser iguais a $f(3) = a + 3b - 1$ (segunda parte de f). Assim obtemos um sistemas,

$$\begin{cases} 9a + 6b = a + 3b - 1 \\ 6a + 4b + 4 = a + 3b - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 3b = -1 \\ 5a + b = -5 \end{cases}$$

de onde obtemos $a = -2$ e $b = 5$. Logo $f(x)$ se define como,

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 10x & x < 3 \\ 12 & x = 3 \\ -4x + 24 & x > 3 \end{cases}$$

O gráfico de $f(x)$ é mostrado adiante,



Proposição 15. Uma função real $f(x)$ é **contínua à esquerda de** $x = b$ se e somente se existem $f(b)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$ e ainda $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.
Similarmente uma função real $f(x)$ é **contínua à direita de** $x = b$ se e somente se existem $f(b)$ e $\lim_{x\to b^+} f(x)$ e ainda $\lim_{x\to b^+} f(x) = f(b)$.

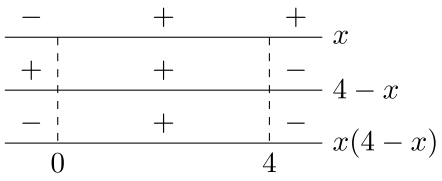
ILUSTRAÇÃO 45 Mostrar que a função $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ é contínua a direita de $x = 0$ e contínua a esquerda de $x = 2$.

SOLUÇÃO

O domínio de $f(x)$ é dado pelos valores de x que tornam o operando da raiz-quadrada positivo ou nulo. Matematicamente,

$$4x - x^2 \geq 0$$
$$x(4 - x) \geq 0$$

cuja análise de sinal mostra que,



e logo $D(f) = \{0 \leq x \leq 4 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$. Logo não há sentido em operar limites à esquerda de $x = 0$ ou à direita de $x = 4$. Mas,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \sqrt{4x - x^2} &= \sqrt{\lim_{x\to 0} (4x - x^2)} \\
&= \sqrt{4(0) - (0)^2} \qquad\qquad = \sqrt{0} \\
&= 0 \\
\lim_{x\to 4^-} \sqrt{4x - x^2} &= \sqrt{\lim_{x\to 4} (4x - x^2)} \\
&= \sqrt{4(4) - (4)^2} \\
&= \sqrt{0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

como $f(0) = 0$ e $f(4) = 0$ então, da Proposição 15, $f(x)$ é contínua à direita de $x = 0$ e contínua à esquerda de $x = 4$.

11 Exercícios

Calcule os limites a seguir,

1. $\lim_{x\to 1} (3x - 8)$

2. $\lim_{x\to 1} (3x - 2)$

3. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-1}{\sqrt{x} - 1}$

4. $\lim_{x\to 4} \dfrac{5x+2}{2x+3}$

5. $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2 + 1}$

6. $\lim_{x\to 0} \left(x^2 - \dfrac{2^x}{1000}\right)$

7. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\tan 4x}{x}$

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x+2)^2}{x}$

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}}{x^2 + 1}$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{x^2 + x + 2}$

11. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Calcule os limites a seguir,

12. $\lim_{x \to 1} \dfrac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}$

13. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$

14. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

15. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

16. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}$

17. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^6 + 2}{10x^7 - 2}$

18. $\lim_{x \to 2} \dfrac{2 - x}{2 - \sqrt{2x}}$

19. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(t + h)^2 - t^2}{h}$

20. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{3x^2 - 4x + 1}$

21. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x - 4}{x - 1}$

22. $\lim_{x \to 2} \dfrac{8 - x^3}{x^2 - 2x}$

23. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x}$

24. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9 + 5x + 4x^2} - 3}{x}$

25. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

26. $\lim_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

27. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^2 - 1}$

28. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{\sqrt{x + 2}}$

29. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{\sin^2 x + 1} - 1}$

30. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

31. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

32. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7}$

33. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{\sqrt{x + 2}}$

Para as funções dadas a seguir determine, no valor de a dado, $f(a)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. Esboce um gráfico da função,

34. $f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ -1 & x = 1 \\ -3 & x > 1 \end{cases} \qquad a = 1$

35. $f(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases} \qquad a = 0$

36. $f(x) = \begin{cases} x + 4 & x \leq -4 \\ 4 - x & x > -4 \end{cases} \qquad a = -4$

37. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ 8 - 2x & x > 2 \end{cases} \qquad a = 2$

38. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 3 \\ 10 - x & x \geq 3 \end{cases} \qquad a = 3$

39. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 7 - 2x & x > 1 \end{cases} \qquad a = 1$

40. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 2 \\ 4 & x = 2 \\ 4 - x^2 & x > 2 \end{cases} \qquad a = 2$

41. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 1 \\ 4 & x = 1 \\ x^2 + 2 & x > 1 \end{cases} \qquad a = 1$

Verifique a existência dos limites seguintes,

42. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

43. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 6x - 5}{x^2 - 5x}$

44. $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 - 3x - 12}$

45. $\lim_{x \to 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$

Calcule os limites no infinito a seguir,

46. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 5x + 1}{x^4 + 5x^3 + 3}$

47. $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}}$

48. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$

49. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 3x + 1}$

50. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$

51. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$

52. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$

53. $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right)$

54. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 + 3}}$

55. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

56. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 3}\right)$

57. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + 1}{x^6 + 1}$

58. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x + 1}{\sqrt[3]{x^9 + 1}}$

59. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{x^6 + x^3 + 1}$

Calcule os limites laterais a seguir,

60. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4}$

61. $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

62. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2x+1}{x}$

63. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+3}{x^2-1}$

64. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

65. $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$

66. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^3-x^2}$

67. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Utilizando limites fundamentais, calcule os limites a seguir,

68. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

69. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x}$

70. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 4x}$

71. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{2x-\pi}$

72. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$

73. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \sin \frac{1}{x}$

74. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x+\tan x}$

75. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left[1+\frac{2}{x}\right]^{x+1}$

76. $\displaystyle\lim_{x\to 0} [1+2x]^{\frac{1}{x}}$

77. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

78. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$

79. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5^x-1}{x}$

80. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3^x-1}{x^2}$

81. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx} \quad a,\, b \neq 0$

Determine assíntotas verticais e horizontais e construa um esboço do gráfico para as funções a seguir,

82. $f(x) = \dfrac{x-1}{x-5}$

83. $f(x) = \dfrac{x-4}{(x-5)(11-x)}$

84. $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x+5}$

85. $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$

86. $f(x) = \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$

87. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

88. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Determine se as funções seguintes são contínuas ou descontínuas em $x = b$. Caso sejam descontínuas determine se a descontinuidade é removível ou essencial. Caso seja removível redefina a função de forma a se tornar contínua,

89. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x - 1 & x < 1 \\ 4x + 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad b = 1$

90. $f(x) = \begin{cases} 1 - 7x & x < -3 \\ 11 & x = -3 \\ 3x^2 - 5 & x > -3 \end{cases} \quad b = -3$

91. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-6} & x < 6 \\ 0 & x = 6 \\ \dfrac{1}{x^2} & x > 6 \end{cases} \quad b = 6$

92. $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < \pi \\ 1 + \cos(x) & x \geq \pi \end{cases} \quad b =$

93. $f(x) = \begin{cases} e^{2x-4} & x < 2 \\ 2 & x \geq 2 \end{cases} \quad b =$

94. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} \quad b = 2$

95. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad b = 0$

96. $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{\sqrt{x - 7}} \quad b = 7$

Determine L *nas funções a seguir de forma que se tornem contínuas em* $x = a$*,*

97. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x} & x \neq 0 \\ L & x = 0 \end{cases} \quad a = 0$

98. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ L & x = 3 \end{cases} \quad a = 3$

99. $f(x) = \begin{cases} x + 2L & x \geq -1 \\ L^2 & x < -1 \end{cases} \quad a = -1$

100. $f(x) = \begin{cases} 3^x & x < 0 \\ 2L + x & x \geq 0 \end{cases} \quad a = 0$

101. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ L & x = 0 \end{cases} \quad a = 0$

102. $f(x) = \begin{cases} 4 - x + x^3 & x \leq 1 \\ 9 - Lx^2 & x > 1 \end{cases} \quad a = 1$

103. $f(x) = \begin{cases} Lx - 11 & x > 5 \\ \dfrac{Lx^2 - 6}{5} & x \leq 5 \end{cases}$

Determine A *e* B *nas funções a seguir de forma que se tornem contímuas nos reais,*

104. $f(x) = \begin{cases} A^2x - A & x \geq 3 \\ 4 & x < 3 \end{cases}$

105. $f(x) = \begin{cases} Ax - B & x \leq -1 \\ 2x^2 + 3Ax + B & -1 < x \leq 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases}$

106. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$

107. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ B & x = 0 \end{cases}$

Determine para que valores de x *as funções a seguir são contínuas,*

108. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3x - 4}$

109. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

110. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$

111. $f(x) = \dfrac{e^{\sin x}}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$

112. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x > 1 \\ 5 - 3x & -2 \le x \le 1 \\ \dfrac{6}{x-4} & x < -2 \end{cases}$

Dado que $g(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ *então determine* $g(x)$ *para cada* $f(x)$ *a seguir,*

113. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 1$

114. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

115. $f(x) = \sqrt{x-1}$

116. $f(x) = \ln(x^n)$

117. $f(x) = \cos x$

118. $f(x) = e^{2x}$

119. $f(x) = \sin 2x$

120. $f(x) = 2^x$

Resolva os limites seguintes,

121. $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{3x-1}$

122. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 7x}{x^3}$

123. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 + 5x - 3}{2 - \sqrt{x^2 + 4}}$

124. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{4 + 5e^{3x}}$

125. $\lim\limits_{x \to -\infty} x - \sqrt{x^2 + 7}$

126. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5^x}{3^x + 2^x}$

127. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\cos x - 1} - 1}{\sin x}$

128. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{\sin x}}$

129. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}$

130. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sqrt{4-x}-2}{\sqrt{x+1}-1}$

131. $\lim_{x\to0} \dfrac{\cos(2x)-1}{\cos x-1}$

132. $\lim_{x\to+\infty} \left(3^x+3^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$

12 Respostas dos Exercícios

1. -5

2. 1

3. 3

4. 2

5. $\sqrt{2}$

6. -0.001

7. 0

8. 9

9. 1

10. 0

11. 3

12. 4

13. $\frac{15}{11}$

14. 2

15. 1

16. -1

17. -1

18. 2

19. $2t$

20. 2

21. 4

22. -6

23. 1

24. $\frac{5}{6}$

25. $\frac{1}{4}$

26. $-\frac{1}{56}$

27. 2

28. 0

29. 2

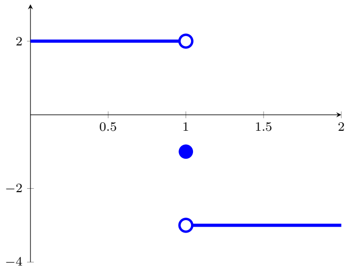
30. 0

31. $\frac{1}{\sqrt{2a}}$

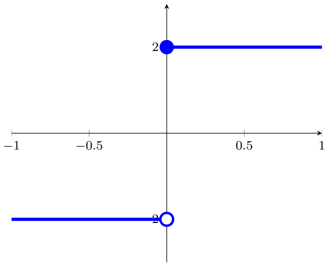
32. $\frac{1}{9}$

33. 0

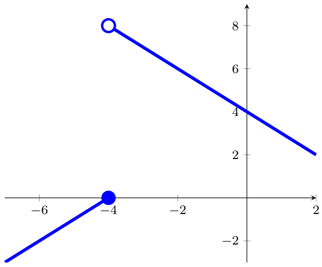
34.
$$f(1) = -1 \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = -3$$



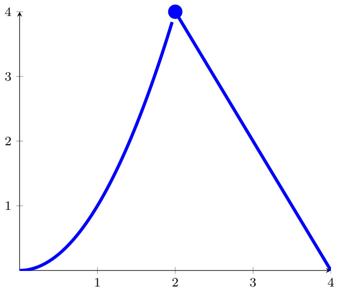
35.
$$f(0) = 2 \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = -2 \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = 2$$



36.
$$f(-4) = 0 \qquad \lim_{x\to-4^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-4^+} f(x) = 8$$



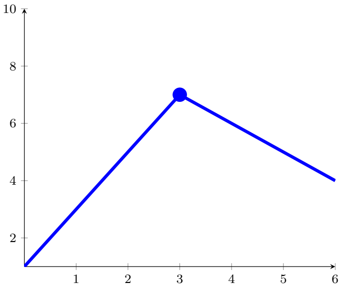
37.
$$f(2) = 4 \qquad \lim_{x\to2^-} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = 4$$



38. $f(3) = 7$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 7$

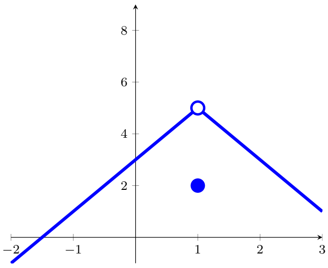
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 7$



39. $f(1) = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 5$

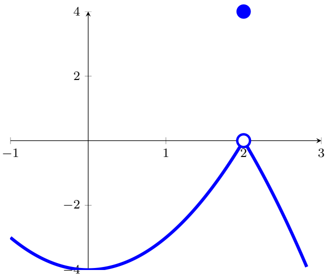
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 5$



40. $f(2) = 4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$

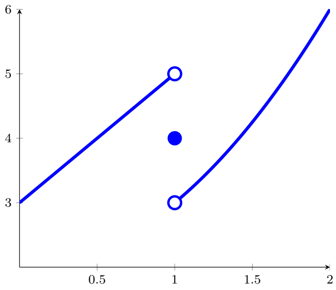
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$



41. $f(1) = 4$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 5$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$



42. Existe, vale -1

43. Existe, vale $\frac{21}{5}$

44. Existe, vale $\frac{5}{4}$

45. Existe, vale 12

46. 0

47. 3

48. $\frac{1}{3}$

49. 0

50. $\frac{1}{3}$

51. $-\frac{1}{3}$

52. 0

53. 0

54. 0

55. 1

56. 0

57. 0

58. 1

59. 0

60. $+\infty$

61. $+\infty$

62. $+\infty$

63. $-\infty$

64. $-\infty$

65. $-\infty$

66. $-\infty$

67. $-\infty$

68. 3

69. 0

70. $\frac{3}{4}$

71. 0

72. -1

73. 1

74. 0

75. e^2

76. e^2

77. 2

78. 0

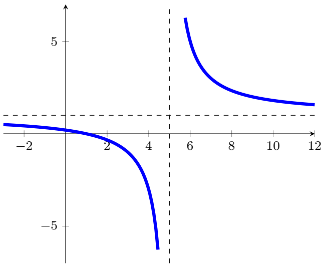
79. $\ln 5$

80. $x \to 0^+$: $+\infty$
$x \to 0^-$: $-\infty$

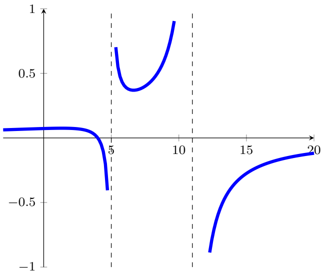
81. 1

82.

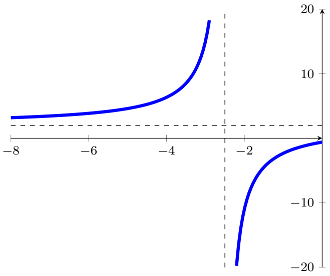
a. v.: $x = 5$
a. h.: $y = 1$



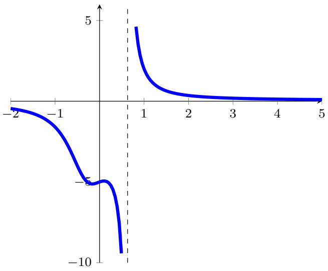
83. a. v.: $x = 5$
$x = 11$
a. h.: $y = 0$



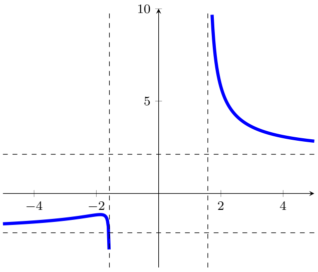
84. a. v.: $x = -\frac{5}{2}$
a. h.: $y = 2$



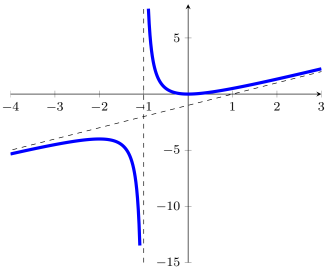
85. a. v.: $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$
a. h.: $y = 0$



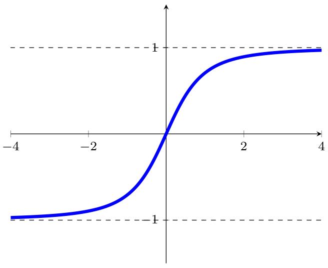
86. a. v.: $x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$
a. h.: $y = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$



87. a. v.: $x = -1$
a. i.: $y = x - 1$



88. a. h.: $y = \pm 1$



89. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -5 \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 5 \quad f(1) = 5$, Descontínua, essencial

90. $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = 22 \quad \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 22 \quad f(-3) = 11$, Descontínua, removível, $f(x) = \begin{cases} 1-7x & x \leq -3 \\ 3x^2-5 & x > -3 \end{cases}$

91. $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = +\infty \quad f(6) = 0$, Descontínua, essencial

92. $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) = 0 \quad f(\pi) = 0$, Contínua

93. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1 \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2 \quad f(2) = 2$, Desontínua, essencial

94. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4 \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4 \quad 2 \notin D(f)$, Descontínua, removível, $f(x) = x+2$

95. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \quad 1 \notin D(f)$, Descontínua, removível, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

96. $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 14 \quad \lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 14 \quad 7 \notin D(f)$, Descontínua, removível, $f(x) = x+7$

97. $L = -1$

98. $L = 6$

99. $L = 1$

100. $L = \frac{1}{2}$

101. $L = 1$

102. $L = 5$

103. Não existe

104. $A = \{-1, , \frac{4}{3}\}$

105. $A = \frac{3}{4}$ $B = -\frac{1}{4}$

106. $A = 0$

107. $B = 0$

108. $\mathbb{R} - \{-4, 1\}$

109. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0 \cup x > 2\}$

110. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -2 \cup x > 1\}$

111. $-3 > x \neq -5 \cup 5 \neq x > 3$

112. $\mathbb{R} - \{-2\}$

113. $g(x) = 4x^3 - 6x$

114. $g(x) = -\frac{1}{x^2}$

115. $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

116. $g(x) = \dfrac{n}{x}$

117. $g(x) = -\sin x$

118. $g(x) = 2e^{2x}$

119. $g(x) = 2\cos 2x$

120. $g(x) = 2^x \ln 2$

121. 0

122. $-\infty$

123. $+\infty$

124. 0

125. $-\infty$

126. $+\infty$

127. 0

128. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$

129. 1

130. $-\frac{1}{2}$

131. 4

132. 9

13 Bibliografia

1. **O Cálculo com Geometria Analítica**, Louis Leithold, Volume 1, 3. Edição, Editora HARBRA ltda.
2. **Cálculo**, Maurício A. Vilches, Maria Luiza Correêa, Volume 1, Departamento de Análise do IME-UERJ.
3. **Fundamentos de Matemática Elementar**, Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Milson José Machado, Volume 8, Atual Editora.