

Афінні перетворення

Найпростіші двовимірні афінні перетворення:

Афінним називається перетворення, що має такі властивостями:

- будь-яке афінне перетворення може бути представлене як послідовність операцій з числа найпростіших: зсув, розтягнення/стиснення, поворот;
- зберігаються прямі лінії, паралельність прямих, відношення довжин відрізків, що лежать на одній прямій, і відношення площ фігур.

Афінні перетворення координат на площині:

(X, Y) – двовимірна система координат,

(x, y) – координати старої системи в новій системі координат.

$$\begin{cases} X = Ax + By + C \\ Y = Dx + Ey + F \end{cases}.$$

Загальний вигляд афінного перетворення:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

де A, B, C, D, E, F – константи.

Обернене перетворення теж є афінним:

$$\begin{cases} x = A'X + B'Y + C' \\ y = D'X + E'Y + F' \end{cases}.$$

Найпростіші афінні перетворення об'єкта на площині.

1. Здвиг об'єкта:

$$\begin{cases} X = x + dx \\ Y = y + dy \end{cases}$$

або матрицею:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

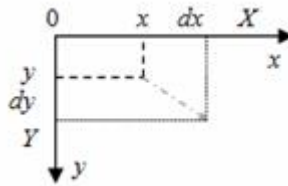


Рис. 1 Зсув об'єкта

Обернене перетворення задається формулами :

$$\begin{cases} x = X - dx \\ y = Y - dy \end{cases}$$

або відповідною матрицею:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Масштабування об'єкту:

$$\begin{cases} X = xk_x \\ Y = yk_y \end{cases},$$

а в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

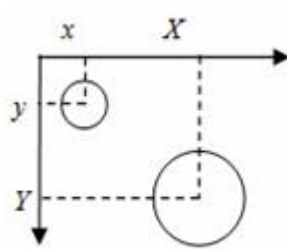


Рис. 2 Масштабування об'єкта

Обернене перетворення задане:

$$\begin{cases} x = X/k_x \\ y = Y/k_y \end{cases},$$

та відповідно матрицею

$$\begin{bmatrix} 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти можуть бути від'ємними. Наприклад, при $k_x = -1$ отримуємо дзеркальне відображення відносно осі Y .

Також варто зауважити, що у вище згаданих формулах йдеться про пропорційне зміщення всіх сторін об'єкту.

Примітка! У даних формулах йде мова про масштабування об'єкту та його переміщення. Якщо потрібно зробити чисте масштабування без ефекту переміщення, тоді варто об'єкт помістити в центр координат.

Поворот об'єкта:

3. Поворот об'єкта відносно центру координат на кут α відповідає системі рівнянь:

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha + Y \sin \alpha \\ y = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{cases}$$

або задається матрицею

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

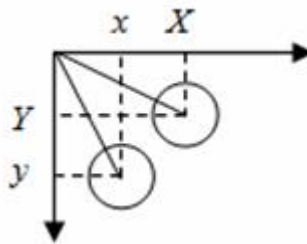


Рис. 3 Поворот об'єкта

Обернене перетворення – поворот на кут $(-\alpha)$ задане системою рівнянь:

$$\begin{cases} X = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ Y = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

та відповідною матрицею

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Увага! У всіх афінних перетвореннях, описаних вище, використовуються однорідні координати – це координати неоднорідного вектора $[x, y]$, що є

триєюю $[x', y', h']$, де $x = x'/h', y = y'/h', h$ деяке дійсне число. Зазвичай використовують вектор $[x, y, 1]$. При бажанні можна користуватись звичайними координатами, але формули матимуть наступний матричний вигляд:

зсув –

$$K^* = K \times \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix},$$

масштаб:

$$K^* = K \times \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & Sy \end{bmatrix},$$

поворот: ,

$$K^* = K \times \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

де K – матриця координат об'єкту до перетворення, K^* – після перетворення.