Algorithmique et structures de données

Julien BERNARD

Université de Franche-Comté – UFR Sciences et Technique

Licence Informatique – 2^e^ année

Première partie

Introduction et généralités

Plan de ce cours

Plan

1. Introduction
    - À propos de votre enseignant
    - À propos du cours Algorithmique
2. Complexité et Algorithmique
    - Définitions
    - Outils mathématiques
    - Rappels mathématiques

Votre enseignant

Qui suis-je ?

Qui suis-je ?

Julien BERNARD, Maître de Conférence (enseignant-chercheur)
`julien.bernard@univ-fcomte.fr`, Bureau 426C

Enseignement

- Responsable de la licence Informatique,
  Responsable du semestre 1 (Starter) de la licence Informatique
  Responsable intérimaire de la licence 3 Informatique
- Cours : Algorithmique et structures de données (L2), Théorie des Langages (L3), Analyse Syntaxique (L3), Programmation multi-paradigme (L3)

Recherche

Optimisation, ordonnancement

Plan

1. Introduction
   - À propos de votre enseignant
   - À propos du cours Algorithmique
2. Complexité et Algorithmique
   - Définitions
   - Outils mathématiques
   - Rappels mathématiques

UE Algorithmique

Organisation

Équipe pédagogique

- Julien Bernard : CM, TD (`julien.bernard@univ-fcomte.fr`)
- Éric Merlet, Éric Grux, Julien Bernard : TP

Volume

- Cours : 12 x 1h30
- TD : 14 x 1h30
- TP : 14 x 1h30

UE Algorithmique

Évaluation

Calendrier

- Bibliothèque `stringlib` : vendredi 23 septembre, 18h00
- Devoir surveillé #1 : jeudi 20 octobre, 11h00-12h30
- Devoir surveillé #2 : jeudi 15 décembre, 11h00-12h30
- QCM : jeudi 8 décembre, 9h30-11h00

Évaluation

- Deux devoirs surveillés : d_1, d_2
- Deux projet en TP : p_1, p_2
- Deux bibliothèques : b_1, b_2
- Un QCM (optionnel) : q
- Une bibliothèque supplémentaire (optionnelle) : b_3

UE Algorithmique

Calcul de la moyenne

Calcul de la moyenne

- Première chance :

$$B_1 = \frac{b_1 + b_2}{2}, T_1 = \frac{p_1 + p_2 + B_1}{3}, D_1 = \frac{d_1 + d_2}{2}, N_1 = \frac{2 \times D_1 + T_1}{3}$$

- Seconde chance :

$$B_2 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}, T_2 = \max\left(T_1, \frac{p_1 + p_2 + B_2}{3}\right),$$

$$D_2 = \max\left(D_1, \frac{2 \times d_1 + 2 \times d_2 + q}{5}\right), N_2 = \frac{2 \times D_2 + T_2}{3}$$

- Moyenne :

$$N = \max(N_1, N_2)$$

UE Algorithmique

Comment ça marche ?

Mode d'emploi

1. Prenez des notes ! Posez des questions ! N'attendez pas du tout-cuit !
2. Comprendre plutôt qu'apprendre
3. Le but de cette UE n'est pas d'avoir une note !

Niveau d'importance des transparents

	trivial	pour votre culture
⋆	intéressant	pour votre compréhension
⋆⋆	important	pour votre savoir
⋆⋆⋆	vital	pour votre survie

Note : les contrôles portent sur *tous* les transparents !

UE Algorithmique

Contenu pédagogique

Objectif

Acquérir les notions d'algorithmique liées aux structures de données récursives ainsi que les bases de l'analyse d'algorithmes

- Complexité algorithmique
- Pointeurs et tableaux
- Listes chaînées
- Tris
- Arbres
- Graphes

UE Algorithmique

Bibliographie

Thomas Cormen, Charles Leiserson, Ronald Rivest, Clifford Stein.
Algorithmique.
3è édition, 2010, Dunod

Donald Knuth.
The Art of Computer Programming.

Plan

1. Introduction
   - À propos de votre enseignant
   - À propos du cours Algorithmique
2. Complexité et Algorithmique
   - Définitions
   - Outils mathématiques
   - Rappels mathématiques

Historique

Qu'est-ce qui est calculable ?

- Première moitié du XX^e siècle : recherche de la définition de **calcul**
- K. Gödel, A. Church, A. Turing
- Existence d'une solution $\not\Rightarrow$ calcul effectif d'une solution

$\rightarrow$ Qu'est-ce qui est calculable ?

Exemple (Existence sans calcul effectif)

- Racines d'un polynôme quelconque

Qu'est-ce qu'un problème ?

Définition (Problème)

Un **problème** en informatique est constitué de données sous une certaine forme et d'une question portant sur ces données.

Exemples

Problème *Pâte à crêpes*

Données : 250g de farine, 0,5L de lait, 2 œufs, 2g de sel.

Question : Comment faire une pâte à crêpes ?

Problème *Divisibilité par 10*

Données : $n \in \mathbb{N}$

Question : n est-il divisible par 10 ?

Instance d'un problème

★★★

Définition (Instance d'un problème)

Une **instance d'un problème** est composée d'une valeur pour chaque donnée du problème.

Exemple

1. 10 est une instance du problème «Divisibilité»
2. $(5 \times 3 + 4)$ est une autre instance du même problème

Algorithme

Définition

Un **algorithme** est une méthode indiquant sans ambiguïté une suite finie d'actions mécaniques à effectuer pour trouver la réponse à un problème.

Précisions sur cette définition

- «sans ambiguïté» exprime le fait que tout le monde comprend la méthode de la même façon.
  - Contre-exemple : «Saler à votre convenance»
- «mécanique» signifie qu'il ne fait pas appel à l'intelligence ou à la réflexion.

Exemple (Un algorithme pour le problème «Divisibilité»)

1. Déterminer le reste r de la division de n par 10.
2. Si $r = 0$, n est divisible par 10 sinon n n'est pas divisible par 10.

Programme ★★★

Définition

Un **programme** désigne la traduction d'un algorithme dans un langage de programmation.

Exemple (Une fonction pour le problème «Divisibilité»)

```
public class DivisiblePar10 {
  public static void main(String[] args) {
    int n = Clavier.saisirInt();
    int r = n % 10;
    if (r == 0) {
      Ecran.afficher(n, " est divisible par 10\n");
    } else {
      Ecran.afficher(n, " n'est pas divisible par 10\n");
    }
  }
}
```

Existe-il un algorithme pour chaque problème ? ⋆⋆

Existe-il un algorithme pour chaque problème ?

La réponse est **non** ! Quelques exemples :

- Trouver les prochains numéros du Loto
- Trouver un pavage

Exemple (Définition du problème de pavage)

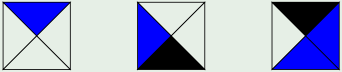
Problème *Pavage*

Données : un ensemble T fini de tuiles carrées dont les bords sont colorés et dont l'orientation est fixée.

Question : Peut-on paver n'importe quelle surface avec des tuiles ayant uniquement des motifs appartenant à T de façon à ce que les couleurs de deux arrêtes de tuiles qui se touchent soient les mêmes ?

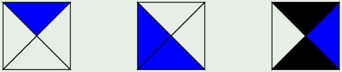
Problème de pavage

Exemple (Une instance avec une solution)



(1) (2) (3)

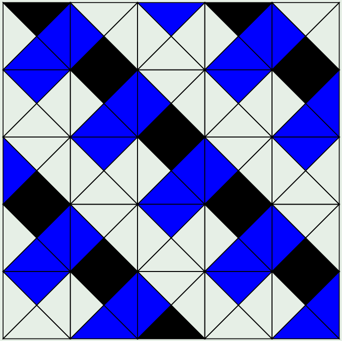
Exemple (Une instance sans solution)



(1) (2) (3)

Problème de pavage

Exemple (Solution pour la première instance)



Problème indécidable

★★★

Inexistence d'algorithme pour un problème

Que signifie exactement qu'aucun algorithme n'existe pour un problème donné ? Cela veut dire qu'il n'existe pas d'algorithme qui réponde à la question pour **n'importe quelle instance** du problème, c'est-à-dire que pour tout algorithme, il existe une donnée du problème telle que :

- soit l'algorithme ne s'arrête pas ;
- soit il donne une réponse fausse.

Définition (Indécidabilité)

Un problème pour lequel aucun algorithme n'existe est dit **indécidable**.

Tous les algorithmes sont-ils utilisables ? ⋆

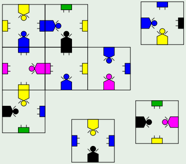
Exemple

Problème *Puzzle des singes*

Données : un ensemble de cartes carrées dont l'orientation est donnée et dont les cotés représentent le bas ou le haut d'un singe

Question : Peut-on arranger ces cartes afin de faire un grand carré tel que les moitiés se correspondent ?

Exemple (Une instance du problème des singes)



Tous les algorithmes sont-ils utilisables ? ⋆

Exemple (Algorithme naïf pour résoudre le puzzle des singes)

1. Tester toutes les combinaisons de cartes jusqu'à en trouver une qui convienne ou à avoir épuisé toutes les possibilités.

→ Étant donné que le nombre de combinaisons de cartes est fini, cet algorithme s'arrête.

Analyse de l'algorithme

Supposons qu'on ait 25 cartes (soit un carré de 5×5), on a donc $25!$ combinaisons possibles. Si un ordinateur teste un milliard de combinaisons à la seconde, il faudra 490 millions d'années !

→ Cet algorithme est inutilisable !

Problème traitable

★★★

Définition (Problème traitable)

Un problème est dit **traitable** s'il existe un algorithme utilisable pour le résoudre.

Traitable et non-traitable

Un problème peut être non-traitable si les algorithmes pour le résoudre :

- prennent trop de temps ;
- utilisent trop de mémoire.

Si un problème est non-traitable, on peut chercher des algorithmes :

- qui donnent une réponse approchée de la question ;
- qui ne répondent pas toujours.

Complexité et algorithmique ⋆⋆⋆

Définition (Complexité algorithmique)

La **complexité algorithmique** (ou **coût**) est la mesure de l'efficacité d'un algorithme, c'est-à-dire :

- son temps d'exécution ;
- la place mémoire utilisée.

La complexité algorithmique permet de comparer deux algorithmes qui résolvent le même problème.

Définition (Algorithmique)

L'**algorithmique** est l'étude des méthodes pour améliorer la complexité des algorithmes.

Plan

1. Introduction
   - À propos de votre enseignant
   - À propos du cours Algorithmique

2. Complexité et Algorithmique
   - Définitions
   - Outils mathématiques
   - Rappels mathématiques

Notations de Landau

Généralités

★★★

Notations de Landau

Les notations de Landau permettent de comparer des fonctions asymptotiquement, c'est-à-dire connaître leur comportement pour des n très grand.

Notation	Signification
$f = O(g)$	f est bornée par g
$f = \Theta(g)$	f est du même ordre que g
$f = o(g)$	f est dominée par g

Notations de Landau

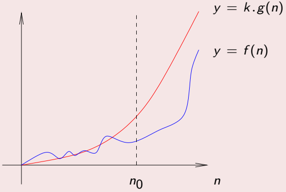
f est bornée par g

★★★

Définition (f est bornée par g)

On dit que f est **bornée** par g, et on note $f = O(g)$ si :

$$\exists k > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |f(n)| \leq k \cdot |g(n)|$$



Définition intuitive

Pour les grandes valeurs de n, $f(n)$ ne dépasse pas $k \cdot g(n)$.

Notations de Landau

f est bornée par g

Exemples

- $n = O(n)$ avec $n_0 = 0$ et $k = 1$
- $42n = O(n)$ avec $n_0 = 0$ et $k = 42$
- $n = O(n^2)$ avec $n_0 = 0$ et $k = 1$
- $4n^5 + 3n^2 + n = O(n^5)$
- $42 = O(1)$
- $sin(n) = O(1)$

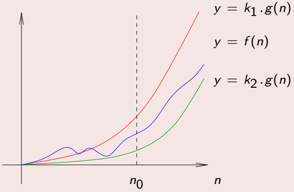
Notations de Landau

f est du même ordre que *g*

Définition (f est du même ordre que g)

On dit que f est **du même ordre** que g, et on note $f = \Theta(g)$ si :

$$\exists k_1, k_2 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, k_1 \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq k_2 \cdot |g(n)|$$



Définition intuitive

Pour les grandes valeurs de n, $f(n)$ est encadrée par $k_1 \cdot g(n)$ et $k_2 \cdot g(n)$. Ou dit autrement, $f = O(g)$ et $g = O(f)$.

Notations de Landau

f est du même ordre que g

Exemples

- $n = \Theta(n)$ avec $n_0 = 0$ et $k_1 = k_2 = 1$
- $42n = \Theta(n)$ avec $n_0 = 0$ et $k_1 = k_2 = 42$
- $4n^5 + 3n^2 + n = \Theta(n^5)$
- $42 = \Theta(1)$
- $2 + sin(n) = \Theta(1)$

Notations de Landau

f est dominée par g

★★★

Définition (f est dominée par g)

On dit que f est **dominée** par g, et on note $f = o(g)$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |f(n)| \leq \varepsilon \cdot |g(n)|$$

Définition intuitive

Pour ε aussi petit qu'on veut, et pour des grandes valeurs de n, $f(n)$ ne dépasse pas $\varepsilon \cdot g(n)$. Dit autrement, pour des grandes valeurs de n, $f(n)$ est tout petit par rapport à $g(n)$.

Définition équivalente

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Notations de Landau

f est dominée par g

Exemples

- $42 = o(\log n)$
- $\log n = o(n)$
- $n = o(n^2)$
- $42n = o(n^2)$
- $n^2 = o(2^n)$
- $2^n = o(n!)$

Notations de Landau

Notations alternatives

Définition (f borne g)

On dit que f borne g, et on note $f = \Omega(g)$, si g est bornée par f, c'est-à-dire si $g = O(f)$.

Définition (f domine g)

On dit que f domine g, et on note $f = \omega(g)$, si g est dominée par f, c'est-à-dire si $g = o(f)$.

Définition (f est équivalente à g)

On dit que f est équivalente à g, et on note $f \sim g$, si $f = g + o(g)$.

Notations de Landau ⋆⋆

Utilisation pratique

Utilisations pratiques

- Lorsqu'on aura une fonction f à étudier, on cherchera à trouver :
  1. une fonction simple g telle que $f = \Theta(g)$;
  2. à défaut, une fonction h telle que $f = O(h)$.
- Lorsqu'on aura à comparer deux fonctions f et g, on cherchera à montrer :
  - soit $f = o(g)$ (ou $f = \omega(g)$)
  - soit $f = \Theta(g)$

Échelle de comparaison

Échelle de comparaison

Fonction	Nom
$O(1)$	constante
$O(\log n)$	logarithmique
$O((\log n)^c)$	polylogarithmique
$O(n)$	linéaire
$O(n \log n)$	log-linéaire
$O(n^2)$	quadratique
$O(n^3)$	cubique
$O(n^c)$	polynomiale
$O(c^n)$	exponentielle
$O(n!)$	factorielle

Ordres de grandeur

Vitesse des ordinateurs

Les ordinateurs modernes (1 GHz $= 10^9$ Hz $\approx 2^{30}$ Hz) calculent à la **vitesse de la lumière** (3.10^8 $m.s^{-1}$).

Temps (secondes)

2^{10}	15 minutes	
2^{20}	10 jours	
2^{30}	30 ans	
2^{40}	30000 ans	découverte du feu
2^{50}	30M années	extinction des dinosaures[1]
2^{57}	4Md années	âge de la Terre
2^{59}	13Md années	âge de l'Univers

---

[1] 65M années

Plan

1. Introduction
   - À propos de votre enseignant
   - À propos du cours Algorithmique
2. Complexité et Algorithmique
   - Définitions
   - Outils mathématiques
   - Rappels mathématiques

Logarithme et exponentielle ⋆⋆

Logarithme et exponentielle

$$\begin{aligned}
a^{b+c} &= a^b \times a^c \\
a^{b\times c} &= \left(a^b\right)^c \\
\log\left(\frac{1}{a}\right) &= -\log a \\
\log(a \times b) &= \log a + \log b \\
\log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log a - \log b \\
\log(a^b) &= b \times \log a \\
\log_b a &= \frac{\ln a}{\ln b} \\
a^b &= e^{b \ln a}
\end{aligned}$$

Formules utiles ★★

Formules utiles

- Somme des premiers entiers

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$$

- Somme des premiers carrés

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} = O(n^3)$$

Formule de Stirling

★★

Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$$

Deuxième partie

Le langage C

Plan de ce cours

3 Bases du langage C
- Introduction
- Types
- Structures de contrôle
- Fonctions

4 Bibliothèque standard du C
- Généralités
- Entrée/Sortie simple
- Allocation mémoire
- Manipulation de chaînes de caractères
- Fonctions mathématiques

Plan

3 Bases du langage C
- Introduction
- Types
- Structures de contrôle
- Fonctions

4 Bibliothèque standard du C
- Généralités
- Entrée/Sortie simple
- Allocation mémoire
- Manipulation de chaînes de caractères
- Fonctions mathématiques

Histoire et normes

Historique

- 1973 : Création du langage C par B. Kernighan et D. Ritchie : C K&R
- 1989 : Normalisation par l'ANSI, puis par l'ISO : ANSI C ou C89
- 1999 : Mise à jour de la norme : C99
- 2011 : Mise à jour de la norme : C11
- 2017 : Mise à jour de la norme : C17 (corrections mineures)
- 202x : Prochaine mise à jour de la norme !

Caractéristique du langage

Caractéristiques

- Langage impératif : description des opérations en termes de séquences d'instructions pour modifier l'état du programme.
- Langage procédural : découpage du programme en terme de procédures (ou fonctions) qui peuvent être appelées n'importe où.
- Langage bas niveau : travail avec des adresses en mémoire.
- Gestion explicite de la mémoire.

Hello World ! ★★

Exemple (helloworld.c)

```
#include <stdio.h>

int main(int argc, char* argv[]) {
  printf("Hello World!\n");
  return 0;
}
```

Exemple (Compilation et exécution)

```
$ gcc -std=c99 -Wall -g -O2 -o helloworld helloworld.c
$ ./helloworld
Hello World!
```

Plan

3 Bases du langage C

- Introduction
- Types
- Structures de contrôle
- Fonctions

4 Bibliothèque standard du C

- Généralités
- Entrée/Sortie simple
- Allocation mémoire
- Manipulation de chaînes de caractères
- Fonctions mathématiques

Types de base

★★

Types de base en C

- `char` : entier (signé ou non-signé) sur 8 bits
- `short` : entier signé sur 16 bits
- `int` : entier signé sur 16 ou 32 ou 64 bits
- `long` : entier signé sur 32 ou 64 bits
- `unsigned` *type* : version non-signée des types entiers
- `float` : flottant simple précision (32 bits)
- `double` : flottant double précision (64 bits)
- `void` : type générique vide, sans valeur

Taille des types

`sizeof(`*type*`)` renvoie la taille du type

Opérateurs

Opérateurs en C

- opérateurs arithmétiques pour les types numériques :
  `+, -, /, *, %`
- opérateurs d'incrémentation/décrémentation (préfixés et postfixés) :
  `++, --`
- opérateurs relationnels :
  `==, !=, <, >, <=, >=`
- opérateurs logiques :
  `&&, ||, !`
- opérateurs bit à bit :
  `&, |, ~, <<, >>`

Booléen

★★★

Booléen en C

Depuis C99, il existe un type booléen `_Bool` (accessible via la macro `bool`), ainsi que les deux valeurs `true` (qui vaut 1) et `false` (qui vaut 0).
Auparavant, on pouvait utiliser un entier pour représenter un booléen. En effet, pour toute expression `expr`, on bénéficie en C de l'équivalence suivante :

`expr` vaut *vrai* si et seulement si `expr != 0`

Types structurés

★★

`struct`

struct *nom* {
  type1 nom1;
  type2 nom2;
  ...
};

Exemple (Déclaration)

```
struct date {
  int day;
  int month;
  int year;
};
```

Exemple (Utilisation)

```
struct date d1;
d1.day = 14;
d1.month = 7;
d1.year = 1789;

struct date d2 = { 14, 7, 1789 };
```

Types énumérés

★★

`enum`

```
enum nom {
  NOM1,
  NOM2,
  ...
};
```

Exemple (Déclaration)

```
enum color {
  RED,
  GREEN,
  BLUE
};
```

Exemple (Utilisation)

```
enum color c1, c2;
c1 = RED;
c2 = GREEN;
```

Variable `const` ⋆⋆

`const`

Le mot-clef `const` ajouté au début de la déclaration d'une variable de type simple, structuré ou énuméré signifie que la valeur de la variable ne peut pas changer. Il faut donc nécessairement attribuer une valeur à cette variable au moment de la déclaration.

Exemples

```
const int two = 2;
const struct date d = { 14, 7, 1789 };
const enum color c = RED;
```

Alias de type

★★

typedef

Il est possible de créer des alias de type à l'aide du mot-clef `typedef`, c'est-à-dire de substituer le nom d'un type par un autre. Il est fortement recommandé de choisir un nom finissant par `_t`. Déclaration de la forme :

`typedef` *type identifiant*;

Exemple (Déclaration)

```
typedef int integer_t;
typedef struct date date_t;
typedef enum color color_t;

typedef struct {
  double real;
  double imaginary;
} complex_t;
```

Exemple (Utilisation)

```
integer_t i = 3;
date_t d = { 14, 7, 1789 };
color_t c = RED;

complex_t j = { 0., 1. };
```

Tableaux

★★

Définition (Tableau)

Un **tableau** est un espace mémoire contenant plusieurs éléments contigus du même type. Il existe deux types de tableaux en C, les tableaux statiques dont la taille est connue à la compilation et les tableaux dynamiques dont la taille est connue à l'exécution. Les tableaux sont indicés à partir de 0.
«*type nom*[N]» = tableau statique de N élément de type *type*.

Déclaration et utilisation d'un tableau ⋆⋆

Exemples (Déclaration)

`struct color colors[3];`

colors est un tableau de 3 `struct color`

`char str[] = { 'a', 'b, 'c', 'd', 'e' };`

str est un tableau de 5 `char` (automatique).

`int array[10] = { 1, 2 };`

array est un tableau de 10 `int`.

Exemple (Accès aux éléments)

`array[0]`

Accès au premier élément du tableau `array`.

`str[10]`

Accès au 11è élément du tableau `str` ! Pas de vérification !

Pointeur

★★

Définition (Pointeur)

Un **pointeur** est une adresse vers un espace mémoire typé.
«*type* `*`» = pointeur vers *type*

Définition (`NULL`)

`NULL` représente l'adresse 0, c'est-à-dire l'adresse sur rien. Équivalent au `null` de Java.

Langage C

Déclaration d'un pointeur

★★

Exemples

`int *p;`

p est un pointeur vers un `int`. Ou plutôt `*p` est un `int`.

`int *p, q;`

q est un `int` !

`int *p, *q;`

`*p` et `*q` sont des `int`.

`struct date *birthday;`

`birthday` est un pointeur vers une structure `date`.

`void *buf;`

`buf` est un pointeur générique.

Opérateur ∗ et & ⋆⋆

Référencement

L'opérateur & permet de récupérer l'adresse d'une variable.

Exemple

```
int i = 3;
int *p = &i;
```

`p` contient l'adresse de `i`.

Déréférencement

L'opérateur ∗ permet de récupérer le contenu de la variable pointée.

Exemple

```
int j = *p;
```

`j` contient le contenu de ce qui est pointé par `p`.

Pointeurs et structures

★★

Accès aux membres d'une structure

L'opérateur `->` permet d'accéder aux membres d'une structure via un pointeur sur cette structure.

Exemples

```
struct date *birthday = ...;
birthday->month
```

Permet d'accéder au champ `month` de la structure `date`.

```
(*birthday).month
```

Idem.

Pointeurs et `const` ⋆⋆

Exemples

`const int *p;`

p est un pointeur vers un `const int`.

p pourra être modifié !

`*p` ne pourra pas être modifié !

`int * const q;`

q est un pointeur constant vers un `int`.

q ne pourra pas être modifié !

`*q` pourra être modifié !

`const int * const r;`

r est un pointeur constant vers un `const int`.

r ne pourra pas être modifié !

`*r` ne pourra pas être modifié !

Arithmétique sur les pointeurs : addition ⋆⋆

Addition d'un pointeur et d'un entier

Il est possible d'ajouter un entier signé n à un pointeur P de type $\mathcal{T}$. Le résultat $P + n$ est un pointeur du même type $\mathcal{T}$ qu'on a avancé de n fois la taille de $\mathcal{T}$.

Exemples

```
int array[10];
int *p = &array[0];
```

p pointe sur le premier élément du tableau array.

```
int *q = p + 1;
```

q pointe sur le deuxième élément du tableau array.

```
q++;
```

q pointe sur le troisième élément du tableau array.

Arithmétique sur les pointeurs : soustraction ★★

Soustraction de deux pointeurs

Il est possible de soustraire deux pointeurs P et Q de même type $\mathcal{T}$. Le résultat $P - Q$ est un entier signé de type `ptrdiff_t` qui contient le nombre d'objet de type $\mathcal{T}$ entre P et Q.

Exemples

```
int array[10];
int *p = &array[0];
int *q = p + 3;
ptrdiff_t diff1 = q - p;
```

`diff1` vaut 3.

```
ptrdiff_t diff2 = p - q;
```

`diff2` vaut -3.

Équivalence tableau/pointeur ⋆⋆

Équivalence tableau/pointeur

En C, un tableau est un pointeur vers le premier élément du tableau. Et inversement, un pointeur peut être vu comme un tableau.

Exemples

`int array[10];`
: array a pour type `int * const`.

`array[2]`
: Strictement équivalent à `*(array + 2)`.

`int *p = ...;`

`p[2]`
: Strictement équivalent à `*(p + 2)`.

`p[0]`
: Strictement équivalent à `*p`.

Chaîne de caractères ⋆⋆⋆

Définition (Chaîne de caractères)

Une **chaîne de caractère** est un tableau de `char` dont le dernier élément est le caractère `'\0'`.

Exemples

```
char str1[] = {'a', 'b', 'c', '\0' };
```

str1 est une chaîne de caractères.

```
char str2[] = "abc";
```

str2 est la même chaîne de caractères que `str1`.

```
char *str3 = "abc";
```

Idem. Mais `str3` ne sera pas modifiable.

```
""
```

Représente la chaîne vide. Équivalent à `{ '\0' }`.

Plan

Structures conditionnelles

`if`

if (*condition*) {
  intructions;
}

`if/else`

if (*condition*) {
  intructions;
} else {
  intructions;
}

Exemple

```
int x = 0;
if (!x) {
  printf("This will be printed.\n");
} else {
  printf("This will *not* be printed.\n");
}
```

Structure répétitive ⋆

while

`while` (*condition*) `{`
  intructions;
`}`

do . . . while

`do {`
  intructions;
`} while` (*condition*)`;`

Exemple

```
int i = 37;
while (i != 1) {
  if (i % 2 == 0) {
    i = i / 2;
  } else {
    i = 3 * i + 1;
  }
}
```

Structure répétitive

`for`

`for` (*initialisation*; *condition*; *mise à jour*) {
  intructions;
}

Exemple

```
int i, j;
for (i = 0; i < 10; i++) {
  for (j = 0; j < i; ++j) {
    printf("#");
  }
  printf("\n");
}
```

Structure de choix

`switch`

```
switch (valeur) {
  case valeur1 :
    intructions;
    break;
  case valeur2 :
    intructions;
    break;
  ...
  default:
    intructions;
    break;
}
```

Exemple

```
int i = ...;
switch (i) {
  case 0:
    printf("i vaut 0.\n");
    break;
  case 1:
    printf("i vaut 1.\n");
    break;
  default:
    printf("i vaut ?.\n");
}
```

Plan

3 Bases du langage C
- Introduction
- Types
- Structures de contrôle
- Fonctions

4 Bibliothèque standard du C
- Généralités
- Entrée/Sortie simple
- Allocation mémoire
- Manipulation de chaînes de caractères
- Fonctions mathématiques

Rappels sur les fonctions

Fonction, paramètre, argument

Définition (Fonction)

Une **fonction** est une séquence d'instructions encapsulée qui peut être appelée depuis d'autres séquences d'instructions. Elle comprend :

- Un nom unique au sein du programme qui identifie la fonction
- Un type de retour (éventuellement `void`)
- Une liste de paramètres avec leur nom et leur type
- Le corps de la fonction qui contient les instructions

Définition (Paramètre/Argument)

Un **paramètre** d'une fonction (aussi appelé paramètre formel) est un nom donné à la donnée que manipule la fonction.
Un **argument** d'une fonction (aussi appelé paramètre effectif) est la valeur donné à un paramètre à l'appel de la fonction.

Rappels sur les fonctions

Mode de passage des paramètres

★★

Mode de passage des paramètres

Il existe deux modes de passage des paramètres :

- **Par valeur** (ou par copie) : le paramètre contient une copie de l'argument, s'il est modifié, la valeur dans la fonction appelante n'est pas modifiée.
- **Par référence** (ou par adresse ou par variable) : le paramètre contient une référence sur l'argument, s'il est modifié, la valeur dans la fonction appelante est également modifiée.

Remarque importante

Le mode de passage des paramètres dépend des langages et des types :

- Java : type simple par valeur, objets par référence
- C : tout par valeur
- Python, Ruby : tout par référence
- C++, Ada : au choix

Rappels sur les fonctions

Fonctions récursives

★★

Définition (Fonction récursive)

Une **fonction récursive** est une fonction dont le corps contient un appel à la fonction elle-même.

Exemple (Fonction récursive)

```
int fact(int n) {
  if (n == 1) {
    return 1;
  }
  return n * fact(n - 1);
}
```

Rappels sur les fonctions ⋆⋆⋆

Appel de fonction

Appel de fonction

Un appel de fonction crée un contexte d'exécution qui est placé sur la *pile*. Le contexte d'exécution contient les arguments ainsi que l'adresse de retour. À la fin de l'exécution de la fonction, le contexte d'exécution est enlevé de la pile et le programme continue à l'adresse de retour indiquée.

Pile

La pile, aussi appelée pile d'appels ou pile d'exécution, est l'espace mémoire réservé pour stocker les contextes d'exécution. Outre les arguments et l'adresse de retour, elle contient toutes les variables locales à la fonction.

Définition et déclaration d'une fonction

★★

Définition d'une fonction

```
type nom(type1 par1, ..., typeN parN) {
  intructions;
  return something;
}
```

Exemple

```
int max(int i, int j) {
  if (i > j) {
    return i;
  }
  return j;
}
```

Définition et déclaration d'une fonction ★★

Déclaration d'une fonction

La déclaration d'une fonction est une description de la fonction sous forme de **prototype**, c'est-à-dire son type de retour, son nom et ses paramètres. Un prototype indique qu'une fonction existe et qu'on peut l'utiliser.

type nom`(`*type1* `par1, ...,` *typeN* `parN);`

Exemple

```
int max(int i, int j);
```

Exemple (Cas particulier d'une fonction sans paramètre)

```
int do_something(void);
```

Fonction principale ⋆⋆

Fonction principale

La fonction principale d'un programme en C est appelé `main` et a un des prototypes suivants :

```
int main(void);
int main(int argc, char *argv[]);
```

où `argc` est le nombre de paramètres et `argv` est un tableau de `argc` chaînes de caractères, chaque chaîne représentant un argument du programme. La valeur renvoyée par `main` est la valeur de retour du programme.

Remarque sur `argc` et `argv`

Il y a toujours au moins un argument (`argc` ≥ 1), `argv[0]` : le nom du programme.

Plan

3 Bases du langage C
- Introduction
- Types
- Structures de contrôle
- Fonctions

4 Bibliothèque standard du C
- Généralités
- Entrée/Sortie simple
- Allocation mémoire
- Manipulation de chaînes de caractères
- Fonctions mathématiques

Bibliothèque standard

Qu'est-ce que c'est ?

★★

Définition (Bibliothèque standard)

La **bibliothèque standard** est un ensemble de fonctions de base nécessaire dans la plupart des programmes. Pour pouvoir les utiliser, il est nécessaire d'inclure des en-têtes, c'est-à-dire des fichiers qui contiennent les prototypes des fonctions souhaitées. Il existe 24 fichiers d'en-têtes standard.

Exemples

```
#include <assert.h>
#include <math.h>
#include <stdbool.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <string.h>
```

Plan

3 Bases du langage C
- Introduction
- Types
- Structures de contrôle
- Fonctions

4 Bibliothèque standard du C
- Généralités
- Entrée/Sortie simple
- Allocation mémoire
- Manipulation de chaînes de caractères
- Fonctions mathématiques

Bibliothèque standard

Fonctions d'entrée/sortie basiques

Fonctions d'écriture sur le terminal : `printf(3)`

```
#include <stdio.h>
int printf(const char *format, ...);
```

La fonction `printf` permet d'écrire un texte formaté sur la sortie standard. Elle prend un nombre variable d'arguments qui dépend de la chaîne de format.

Fonctions de lecture d'un terminal : `scanf(3)`

```
#include <stdio.h>
int scanf(const char *format, ...);
```

La fonction `scanf` permet de lire un texte formaté sur l'entrée standard. Elle prend un nombre variable d'arguments qui dépend de la chaîne de format.
L'utilisation de cette fonction est à éviter au maximum !

Bibliothèque standard

Chaîne de format

★★

Définition (Chaîne de format)

Une **chaîne de format** est une chaîne de caractères qui contient des séquences de contrôle (commençant par %) permettant d'interpréter le type des arguments et de les insérer correctement dans la chaîne.

Séquences de contrôle

- %d ou %`i` pour les valeurs de types `int` ;
- %f pour les valeurs de types `double` ;
- %c pour les valeurs de types `char` ;
- %s pour les valeurs de types `char *` ;
- %p pour les valeurs de types `void *` ;
- %% pour afficher le caractère %.

RTFM : `printf(3)`

Bibliothèque standard

Exemples

Exemple (printf)

```
printf("Ceci est une chaîne sans séquence\n");
$ Ceci est une chaîne sans séquence

printf("%s a %i ans et mesure %f m\n", "Alice", 20, 1.70);
$ Alice a 20 ans et mesure 1.700000 m

char c = 'a';
printf("'%c' a pour code ascii %i\n", c, c);
$ 'a' a pour code ascii 97
```

Exemple (scanf)

```
int i;
scanf("%i", &i);
```

Plan

3 Bases du langage C
- Introduction
- Types
- Structures de contrôle
- Fonctions

4 Bibliothèque standard du C
- Généralités
- Entrée/Sortie simple
- Allocation mémoire
- Manipulation de chaînes de caractères
- Fonctions mathématiques

Bibliothèque standard

Mémoires

★★

Types de mémoires et allocation

Il existe trois grands types de mémoires en C :

Type	**Où**	**Quand**	**Comment**
statique	segment	compilation	implicite
automatique	pile (stack)	exécution	implicite
dynamique	tas (heap)	exécution	explicite

Allocation/Libération de la mémoire

Seule la mémoire dynamique a besoin d'une allocation et d'une libération explicite. Ce sont des fonctions de la librairie standard qui s'en chargent.

Bibliothèque standard

Allocation et libération dans le tas

★★

Allocation : `malloc(3)`

```
#include <stdlib.h>
void *malloc(size_t size);
```

La fonction `malloc` alloue `size` octets, et renvoie un pointeur sur la mémoire allouée. La mémoire allouée n'est pas initialisée. En cas d'échec, la fonction renvoie le pointeur `NULL`.

Libération : `free(3)`

```
#include <stdlib.h>
void free(void *ptr);
```

La fonction `free` libère l'espace mémoire pointé par `ptr`. Si `ptr` est `NULL`, aucune opération n'est effectuée.

Exemple d'allocation/libération dans le tas

Exemples

```
int *p = malloc(sizeof(int));
if (p != NULL) {
  *p = 42;
}
free(p);
p = NULL;

struct date *birthday = malloc(sizeof(struct date));
if (birthday != NULL) {
  do_something_with(birthday);
}
free(birthday);
birthday = NULL;
```

Bibliothèque standard

Allocation de tableau dynamique

★★

Allocation de tableau dynamique : `calloc(3)`

```
#include <stdlib.h>
void *calloc(size_t nmemb, size_t size);
```

La fonction `calloc` alloue la mémoire nécessaire pour un tableau de `nmemb` éléments de `size` octets, et renvoie un pointeur vers la mémoire allouée.

Équivalent à : `malloc(nmemb * size):`

Exemple

```
char *str = calloc(255, sizeof(char));
if (str != NULL) {
  bla_blah(str);
}
free(str);
str = NULL;
```

Erreurs classiques

★★

Erreurs classiques et règles pour les éviter

- Pointeur `NULL` : Non vérification de la réussite de `malloc`. Règle : toujours vérifier la valeur de retour des fonctions !
- Fuite mémoire (*memory leak*) : Pas de libération d'un espace mémoire alloué dynamiquement. Règle : à chaque `malloc`, un `free`.
- Pointeur invalide (*dangling pointer*) : Utilisation d'un pointeur après libération. Règle : affecter `NULL` au pointeur juste après le `free`.
- Double libération (*double free*) : Libération d'un pointeur déjà libéré. Règle : idem (c'est un cas particulier de pointeur invalide).

Plan

3 Bases du langage C
- Introduction
- Types
- Structures de contrôle
- Fonctions

4 Bibliothèque standard du C
- Généralités
- Entrée/Sortie simple
- Allocation mémoire
- Manipulation de chaînes de caractères
- Fonctions mathématiques

Bibliothèque standard

Fonctions sur les chaînes de caractères

★★

Longueur d'une chaîne de caractères : `strlen(3)`

```
#include <string.h>
size_t strlen(const char *s);
```

La fonction `strlen` calcule la longueur de la chaîne de caractères `s`, sans compter le caractère '\0' final.

Copie d'une chaîne de caractères : `strcpy(3)`

```
#include <string.h>
char *strcpy(char *dest, const char *src);
```

La fonction `strcpy` copie la chaîne pointée par `src`, y compris le caractère '\0' final dans la chaîne pointée par `dest`.

Bibliothèque standard

★★

Conversion depuis une chaîne de caractères

Conversion chaîne de caractères → entier : `atoi(3)`

```
#include <stdlib.h>
int atoi(const char *nptr);
```

La fonction `atoi` convertit le début de la chaîne pointée par `nptr` en entier de type `int`.

Exemple

```
int main(int argc, char *argv[]) {
  int n = 0;
  if(argc > 1) {
    n = atoi(argv[1]);
  }
  printf("n = %d\n", n);
  return 0;
}
```

Plan

3 Bases du langage C
- Introduction
- Types
- Structures de contrôle
- Fonctions

4 Bibliothèque standard du C
- Généralités
- Entrée/Sortie simple
- Allocation mémoire
- Manipulation de chaînes de caractères
- Fonctions mathématiques

Bibliothèque standard

Fonctions mathématiques

★★

Fonctions mathématiques

Les principales fonctions mathématiques sont définies dans l'en-tête `<math.h>` (attention, pas de s !). Parmi les fonctions qui prennent un `double` et qui renvoie un `double` : `cos`, `sin`, `tan`, `acos`, `asin`, `atan`, `sqrt`, `log`, `log2`, `log10`, `exp`, etc. Mais aussi : `fmod(double, double)`, `pow(double, double)`, etc.

Utilisation des fonctions mathématiques

Les fonctions mathématiques sont définies dans la `libm`, il est donc nécessaire de lier le programme avec l'option `-lm`.

Troisième partie

Complexité algorithmique

Plan de ce cours

5 Complexité algorithmique
- Définitions
- Calcul pratique
- Cas des fonctions récursives

Plan

5 Complexité algorithmique
- Définitions
- Calcul pratique
- Cas des fonctions récursives

Opération fondamentale

★★★

Définition (Opération fondamentale)

Une *opération fondamentale* pour un problème est une opération dont le temps d'exécution pour un algorithme résolvant ce problème est proportionnel au nombre de ces opérations.

Exemples (Opérations fondamentales)

- pour la recherche d'un élément dans un tableau, la *comparaison* entre cet élément et les éléments du tableau
- pour ajouter deux matrices, l'*addition*

Définition (Nombre d'opérations fondamentale)

Pour un algorithme A, une opération fondamentale o et une instance ω du problème, on définit $\mathcal{N}_o(A, \omega)$ comme le nombre d'opérations o lors de l'exécution de A sur ω. On omettra o et ω si le contexte est clair.

Complexité algorithmique

★★★

Définition (Complexité en pire cas)

La *complexité en pire cas* pour un algorithme A sur l'ensemble des instances ω de taille n est définie par :

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n) \overset{\text{def}}{=} \max_{|\omega|=n} \{\mathcal{N}(A, \omega)\}$$

Définition (Complexité en moyenne)

La *complexité en moyenne* pour un algorithme A sur l'ensemble des instances ω de taille n est définie par :

$$\mathcal{C}_{\text{avg}}(n) \overset{\text{def}}{=} \frac{\sum_{|\omega|=n} \mathcal{N}(A, \omega)}{\sum_{|\omega|=n} 1}$$

Plan

5 Complexité algorithmique
- Définitions
- Calcul pratique
- Cas des fonctions récursives

En pratique

★★

Comment calculer la complexité ?

Pour un algorithme ou un ensemble d'algorithmes qui résolvent le même problème, on va :

1. Choisir une opération fondamentale o
2. Déterminer ce que représente la taille n d'une instance ω
3. Compter le nombre $\mathcal{N}$ d'opérations fondamentales de l'algorithme

Exemple (Nombre d'opérations d'une expression simple)

Dans la suite de cette section, on prend comme opération fondamentale l'addition. Soit l'expression E simple :

$1 + 2$

Alors, le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(E) = 1 = O(1)$$

Cas d'une instruction

★★

Cas d'une instruction

Soit l'instruction I unique :

instruction

On compte le nombre d'opérations fondamentales autant de fois qu'elle apparaît dans l'instruction :

$$\mathcal{N}(I) = \mathcal{N}(\text{instruction})$$

Exemple (Nombre d'opérations d'une instruction)

Soit l'instruction I :

$x \leftarrow 1 + 2 + 3 + 4$

Alors, le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(I) = 3 = O(1)$$

Cas d'une séquence d'instructions ⋆⋆

Cas d'une séquence d'instructions

Soit la séquence S d'instructions :

instruction$_1$
instruction$_2$
...
instruction$_i$
...
instruction$_k$

Le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(S) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{N}(\text{instruction}_i)$$

Cas d'une séquence d'instructions ⋆

Exemple (Nombre d'opérations d'une séquence)

Soit la séquence S d'instructions :

$x \leftarrow 3$
$y \leftarrow 4 + x$
$z \leftarrow 5 + y + x$
$d \leftarrow x * x + y * y + z * z$

Alors, le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(S) = 0 + 1 + 2 + 2 = 5 = O(1)$$

Cas d'une condition

★★

Cas d'une condition

Soit la séquence S d'instructions :

```
if expression then
    séquence$_1$
else
    séquence$_2$
end if
```

Le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(S) \leq \mathcal{N}(\text{expression}) + \max\{\mathcal{N}(\text{séquence}_1), \mathcal{N}(\text{séquence}_2)\}$$

Cas d'une condition

Exemple (Nombre d'opérations d'une condition)

Soit la séquence S d'instructions :

```
if $a + b + c < 10$ then
    $b \leftarrow 5$
else
    $c \leftarrow a + b + 2$
end if
```

Alors, le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(S) \leq 2 + \max\{0, 2\} = 4 = O(1)$$

Cas d'une boucle

Cas d'une boucle `while`

Cas d'une boucle `while`

Soit la séquence S d'instructions :

```
**while** expression **do**
    séquence
**end while**
```

Si le nombre de passage dans la boucle est k, le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(S) = (k+1) * \mathcal{N}(\text{expression}) + k * \mathcal{N}(\text{séquence})$$

Attention ! Déterminer k peut être difficile. On essaiera alors de déterminer un majorant $k' \geq k$ de sorte que :

$$\mathcal{N}(S) \leq (k'+1) * \mathcal{N}(\text{expression}) + k' * \mathcal{N}(\text{séquence})$$

Cas d'une boucle

Cas d'une boucle `while`

Exemple (Nombre d'opérations d'une boucle `while` (1))

Soit la séquence S d'instructions :

```
$a \leftarrow 0$
while $a < 10$ do
    $a \leftarrow a + 2$
end while
```

Le nombre de boucle est 5 et le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(S) \leq 0 + 5 * 1 = 5 = O(1)$$

Cas d'une boucle

Cas d'une boucle `while`

Exemple (Nombre d'opérations d'une boucle `while` (2))

Soit la séquence S d'instructions :

```
$x \leftarrow 1$
$y \leftarrow x$
while $x < n$ do
    $x \leftarrow x + x$
    $y \leftarrow y + x$
end while
```

Le nombre de boucle est de $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ et le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(S) \leq 0 + \lfloor \log_2(n) \rfloor * 2 = O(\log n)$$

Cas d'une boucle ★★

Cas d'une boucle `for`

Cas d'une boucle `for`

Soit la séquence S d'instructions :

```
for $i$ from $a$ to $b$ do
    séquence
end for
```

Si le nombre de passage dans la boucle est $k = b - a + 1$, le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(S) = k * \mathcal{N}(\text{séquence})$$

Cas d'une boucle ⋆

Cas d'une boucle `for`

Exemple (Nombre d'opérations d'une boucle `for` (1))

Soit la séquence S d'instructions :

```
for $i$ from 1 to 4 do
    $x \leftarrow x + i$
end for
```

Le nombre de boucle est de $4 - 1 + 1 = 4$ et le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(S) = 4 * 1 = 4 = O(1)$$

Cas d'une boucle

Cas d'une boucle `for`

Exemple (Nombre d'opérations d'une boucle `for` (2))

Soit la séquence S d'instructions :

```
for $i$ from 1 to $n$ do
    $x \leftarrow x + i + 3$
end for
```

Le nombre de boucle est de $n - 1 + 1 = n$ et le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(S) = n * 2 = O(n)$$

Cas d'une boucle

Cas d'une boucle `for`

Exemple (Nombre d'opérations d'une boucle `for` (3))

Soit la séquence S d'instructions :

```
for $i$ from 1 to 4 do
    for $j$ from 1 to 3 do
        $x \leftarrow x + j$
    end for
end for
```

Le nombre d'opérations fondamentales de la séquence interne S' est :

$$\mathcal{N}(S') = 3 * 1 = 3$$

Le nombre d'opération fondamentales est :

$$\mathcal{N}(S) = 4 * \mathcal{N}(S') = 4 * 3 = 12 = O(1)$$

Cas d'une fonction non-récursive ⋆⋆

Cas d'une fonction non-récursive

Soit la fonction F :

```
function $\mathrm{F}$(paramètres)
    séquence
end function
```

Le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(\mathrm{F}) = \mathcal{N}(\text{séquence})$$

Cas d'une fonction non-récursive

Exemple (Nombre d'opération d'une fonction non-récursive)

Soit la fonction DOUBLE :

```
function DOUBLE($a$)
    return $a + a$
end function
```

Alors, le nombre d'opérations fondamentales est :

$$\mathcal{N}(\textsc{Double}) = 1 = O(1)$$

Plan

5 Complexité algorithmique
  - Définitions
  - Calcul pratique
  - Cas des fonctions récursives

Cas d'une fonction récursive simple ⋆⋆

Cas d'une fonction récursive simple

Soit la fonction F :

```
function F(n)
    if n = 0 then
        séq_1
        return
    end if
    séq_2
    F(n − 1)
    séq_3
end function
```

La complexité de F est définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{C}(0) = \mathcal{N}(\text{séq}_1) \\ \mathcal{C}(n) = \mathcal{N}(\text{séq}_2) + \mathcal{C}(n-1) + \mathcal{N}(\text{séq}_3) \end{cases}$$

On peut démontrer (par récurrence) que la complexité de F est :

$$\mathcal{C}(n) = \mathcal{N}(\text{séq}_1) + n \times (\mathcal{N}(\text{séq}_2) + \mathcal{N}(\text{séq}_3))$$

Cas d'une fonction récursive simple ⋆

Exemple (Complexité de factorielle (1/2))

Problème *Factorielle*

Données : $n \in \mathbb{N}$

Résultat : $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$

Soit l'algorithme suivant qui résout ce problème :

```
function FACTORIELLE($n$)
    if n = 0 then
        return 1
    end if
    return $n \times$ FACTORIELLE($n - 1$)
end function
```

Cas d'une fonction récursive simple

Exemple (Complexité de factorielle (2/2))

L'opération fondamentale est ici la multiplication ×. La complexité de cet algorithme est définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{C}(0) = 0 \\ \mathcal{C}(n) = 1 + \mathcal{C}(n-1) \end{cases}$$

Donc, la complexité de cet algorithme est :

$$\mathcal{C}(n) = n = \Theta(n)$$

Cas général d'une fonction récursive ⋆⋆⋆

Cas général d'une fonction récursive

Le cas général traite des fonctions récursives de la forme suivante :

```
function F($n$)
    if $n = 0$ then
        return
    end if
    séquence // division
    F($\frac{n}{b}$) // 1$^{\text{er}}$ appel récursif
    ...
    F($\frac{n}{b}$) // $a^{\text{e}}$ appel récursif
    séquence // fusion
end function
```

avec :

- $a \geq 1$, constante
- $b > 1$, constante
- $\mathcal{N}(\text{séquence}) = f(n)$

Alors, la complexité de cet algorithme est défini par :

$$\mathcal{C}(n) = a \times \mathcal{C}\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Le théorème suivant donne une mesure asymptotique de $\mathcal{C}(n)$.

Théorème Diviser pour régner (*Master Theorem*) ⋆⋆⋆⋆

Théorème (Théorème Diviser pour régner)

Si $\mathcal{C}(n) = a \times \mathcal{C}\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ *alors :*

1. *Si* $f(n) = O\left(n^c\right)$ *avec* $c < \log_b a$, *alors :*

$$\mathcal{C}(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

2. *Si* $f(n) = \Theta\left(n^c \log^k n\right)$ *avec* $c = \log_b a$, *alors :*

$$\mathcal{C}(n) = \Theta\left(n^c \log^{k+1} n\right)$$

3. *Si* $f(n) = \Omega\left(n^c\right)$ *avec* $c > \log_b a$,
et si $\exists k < 1, a \times f\left(\frac{n}{b}\right) \leq k \times f(n)$ *pour n assez grand, alors :*

$$\mathcal{C}(n) = \Theta(f(n))$$

Théorème Diviser pour régner ★★★

Cas où $f(n) = O(n)$

Théorème (Théorème Diviser pour régner dans le cas où $f(n) = O(n)$)

Si $\mathcal{C}(n) = a \times \mathcal{C}\left(\frac{n}{b}\right) + O(n)$ *alors :*

1. *Si* $a > b$, *alors* $\mathcal{C}(n) = O(n^{\log_b a})$
2. *Si* $a = b$, *alors* $\mathcal{C}(n) = O(n \log n)$
3. *Si* $a < b$, *alors* $\mathcal{C}(n) = O(n)$

Cas d'utilisation

Dans la pratique, c'est cette version du théorème qu'on utilisera le plus souvent. Elle découle immédiatement du théorème dans sa version générale.

Théorème Diviser pour régner

Cas où $a = 1$

★★★

Théorème (Théorème Diviser pour régner dans le cas où $a = 1$)

Si $\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ *alors :*

$$\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}(1) + \sum_{i=1}^{\log_b n} f\left(b^i\right)$$

Cas d'utilisation

C'est l'autre grand cas d'utilisation pratique du théorème général. En particulier, quand $f(n) = O(1)$, alors :

$$\mathcal{C}(n) = O(\log n)$$

Exemples classiques

★★

Exemples (Application du théorème Diviser pour régner)

1. Si $\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) + O(1)$ alors :

$$\mathcal{C}(n) = O(\log n)$$

2. Si $\mathcal{C}(n) = 2 \times \mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) + O(1)$ alors :

$$\mathcal{C}(n) = O(n)$$

3. Si $\mathcal{C}(n) = 2 \times \mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$ alors :

$$\mathcal{C}(n) = O(n \log n)$$

4. Si $\mathcal{C}(n) = 3 \times \mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$ alors :

$$\mathcal{C}(n) = O(n^{\log_2 3})$$

Quatrième partie

Pointeurs et tableaux

Plan de ce cours

Plan

6 Structures de données
- Introduction
- Implémentation

7 Pointeurs et tableaux
- Pointeurs
- Tableaux

8 Algorithmes sur les tableaux
- Algorithmes sur les tableaux de taille fixe
- Algorithmes sur les chaînes de caractères
- Tableaux dynamiques

Structures de données ★★

Définition (Structure de données)

Une **structure de données** est une structure logique destinée à recevoir des données, afin de leur donner une organisation permettant de simplifier leur traitement.

Exemples

- Structures linéaires : tableau, liste
- Structures arborescentes : arbre, graphe

Structures de données ⋆⋆

Niveaux de description

1. **structure mathématique** : structure définie mathématiquement, souvent récursivement
2. **structure abstraite** : ensemble d'opérations avec des garanties de complexité (interface) et axiomes pour décrire le comportement de ces opérations
3. **structure logique** : représentation logique de la structure, indépendemment d'un langage de programmation, manipulée par un langage algorithmique
4. **structure réelle** : implémentation concrète de la structure à l'aide d'un langage de programmation

Plan

Implémentation

Conventions

Dans ce cours, les structures de données seront données en langage C. Toutes les fonctions se rapportant à une structure auront un nom préfixé par le nom de la structure et prendront en *premier paramètre* un pointeur sur la structure appelé `self`.

Fonctions

Pour une structure nommée `foo`, on définira obligatoirement :

- `void foo_create(struct foo *self);`
  initialise une structure vide
- `void foo_destroy(struct foo *self);`
  libère toutes les ressources interne de la structure

Plan

Définition

★★

Définition (Pointeur)

Quel que soit le type $\mathcal{T}$, on peut définir un type «**pointeur** sur $\mathcal{T}$». Une variable de type «pointeur sur $\mathcal{T}$» peut contenir l'adresse d'une variable (ou plus généralement d'un objet en mémoire) de type $\mathcal{T}$.

Remarque

Le type «pointeur sur $\mathcal{T}$» étant un type comme les autres, il est également possible de définir un type «pointeur sur pointeur sur $\mathcal{T}$» et ainsi de suite.

Vocabulaire et représentation ★★

Vocabulaire

Si la valeur d'un pointeur *p* est l'adresse d'une variable *a*, alors :

- on dit que *p pointe* sur *a*
- la valeur de *a* est appelée le *contenu* de *p*

Représentation générique

Représentation

Code source

Exemple (Code source en C)

```
int *p;
int a;
a = 2;
p = &a;
```

Déclaration

- p est un pointeur sur un entier
- a est un entier

Représentation

Représentation générique

Exemple (Code source en C)

```
int *p;
int a;
a = 2;
p = &a;
```

Représentation générique

`int *p; int a;`

Représentation

Représentation générique

Exemple (Code source en C)

```
int *p;
int a;
a = 2;
p = &a;
```

Représentation générique

`a = 2;`

Représentation

Représentation générique

Exemple (Code source en C)

```
int *p;
int a;
a = 2;
p = &a;
```

Représentation générique

`p = &a;`

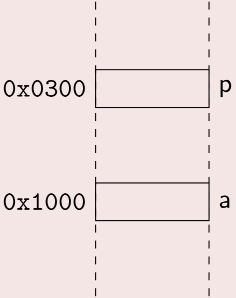
Représentation

Représentation mémoire

Exemple (Code source en C)

```
int *p;
int a;
a = 2;
p = &a;
```

Représentation mémoire



`int *p; int a;`

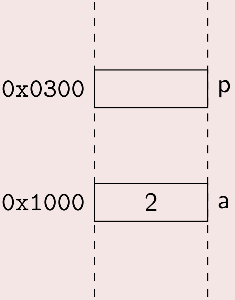
Représentation

Représentation mémoire

Exemple (Code source en C)

```
int *p;
int a;
a = 2;
p = &a;
```

Représentation mémoire



`a = 2;`

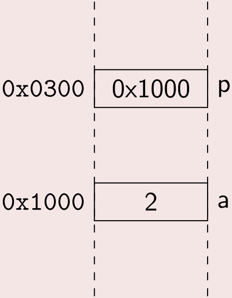
Représentation

Représentation mémoire

Exemple (Code source en C)

```c
int *p;
int a;
a = 2;
p = &a;
```

Représentation mémoire



`p = &a;`

Plan

Définition et représentation

★★

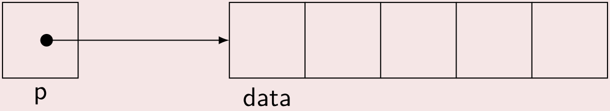
Définition (Tableau)

Quel que soit le type $\mathcal{T}$, on peut définir un type «**tableau** de $\mathcal{T}$». Une variable de type «tableau de $\mathcal{T}$» est un pointeur vers le premier élément parmi *n* qui sont rangés de manière contiguë en mémoire.

Exemple (Code source en C)

```
int *p;
int data[5];
p = data; // p = &data[0];
```

Représentation générique

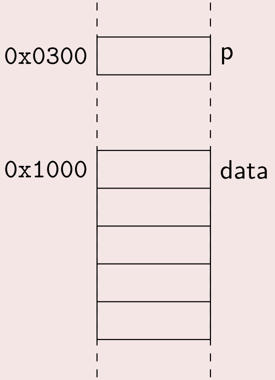


Représentation mémoire

Exemple (Code source en C)

```
int *p;
int data[5];
p = data; // p = &data[0];
```

Représentation mémoire



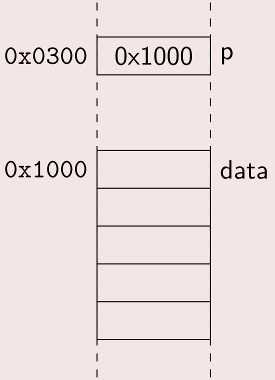
`int *p; int data[5];`

Représentation mémoire

Exemple (Code source en C)

```
int *p;
int data[5];
p = data; // p = &data[0];
```

Représentation mémoire



p = data;

Plan

6 Structures de données
- Introduction
- Implémentation

7 Pointeurs et tableaux
- Pointeurs
- Tableaux

8 Algorithmes sur les tableaux
- Algorithmes sur les tableaux de taille fixe
- Algorithmes sur les chaînes de caractères
- Tableaux dynamiques

Tableaux

★★

Suppositions

On considère ici des tableaux :

- dont la taille `n` est connue et constante
- indicé à partir de 0 jusqu'à $n - 1$

Opération élémentaire sur les tableaux

- *accès aléatoire* à l'élément d'indice i : `data[i]`
  Complexité : $O(1)$

Recherche dans un tableau

★★

Définition du problème

Problème *Recherche d'un élément dans un tableau*

Données : un tableau *data* de taille *n* et un élément *e*

Résultat : l'indice de l'élément *e* dans le tableau *data* ou *n* si l'élément n'est pas dans le tableau

Algorithme

```
size_t array_search(const int *data, size_t n, int e) {
  size_t i = 0;
  while (i < n && data[i] != e) {
    i++;
  }
  return i;
}
```

Recherche dans un tableau

★★★

Complexité

L'opération fondamentale est la comparaison ($\neq$). Plusieurs cas se présentent :

- Pire cas : l'élément n'est pas présent dans le tableau, dans ce cas, on effectue n comparaisons.

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n) = n = O(n)$$

- En moyenne : l'élément est dans le tableau, il se situe en moyenne à l'indice $\frac{n}{2}$, dans ce cas, on effectue $\frac{n}{2}$ comparaisons.

$$\mathcal{C}_{\text{avg}}(n) = \frac{n}{2} = O(n)$$

Recherche dans un tableau trié

★★

Définition du problème

Problème *Recherche d'un élément dans un tableau trié*

Données : un tableau *data* de taille n trié par ordre croissant et un élément e

Résultat : l'indice de l'élément e dans le tableau *data* ou n si l'élément n'est pas dans le tableau

Algorithme de recherche dichotomique

On va utiliser l'algorithme de *recherche dichotomique*. On introduit deux variables lo et hi qui sont les indices de début et de fin de la recherche, plus précisément l'indice de l'élément e se trouve dans l'intervalle $[lo; hi[$.

Recherche dans un tableau trié ★★★

Algorithme de recherche dichotomique

```
size_t array_binary_search(const int *data, size_t n,
                           int e, size_t lo, size_t hi) {
  if (lo == hi) {
    return n;
  }
  size_t mid = (lo + hi) / 2;
  if (e < data[mid]) {
    return array_binary_search(data, n, e, lo, mid);
  }
  if (data[mid] < e) {
    return array_binary_search(data, n, e, mid + 1, hi);
  }
  return mid;
}
```

Recherche dans un tableau trié ⋆⋆⋆

Algorithme général

```
size_t array_search_sorted(const int *data, size_t n,
                                                    int e) {
  return array_binary_search(data, n, e, 0, n);
}
```

Complexité

L'opération fondamentale est la comparaison ($<$ et $=$). Pour un tableau de taille n (c'est-à-dire $hi - lo = n$), on a :

$$\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) + O(1)$$

Grâce au Théorème Diviser pour Régner, on en déduit :

$$\mathcal{C}(n) = O(\log n)$$

Insertion d'un élément dans un tableau

Définition du problème

Problème *Insertion d'un élément dans un tableau*

Données : un tableau *data* de taille n occupé par $m < n$ éléments et un élément e à insérer à l'indice $j \in [0, m]$

Résultat : le tableau *data* avec $m + 1$ éléments et l'élément e à l'indice j

Il existe plusieurs variantes de ce problème :

- *Insertion en fin*, c'est-à-dire $j = m$. Dans ce cas, l'algorithme est trivial et sa complexité est en $O(1)$
- *Insertion sans conservation de l'ordre*. Dans ce cas, l'algorithme consiste à placer l'ancien élément d'indice j à l'indice m pour laisser la place à e à l'indice j. La complexité est en $O(1)$.
- *Insertion avec conservation de l'ordre*. C'est cet algorithme là que nous allons voir.

Insertion d'un élément dans un tableau ⋆⋆

Algorithme

```
void array_insert(int *data, size_t m, int e, size_t j) {
  for (size_t i = m; i > j; --i) {
    data[i] = data[i - 1];
  }
  data[j] = e;
}
```

Complexité

L'opération fondamentale est l'affectation ($\leftarrow$). La complexité de cet algorithme est de $m - j$ affectations. En moyenne, $j = \frac{m}{2}$, donc :

$$\mathcal{C}(m) = m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} = O(m)$$

Suppression d'un élément dans un tableau ⋆⋆

Définition du problème

Problème *Suppression d'un élément dans un tableau*

Données : un tableau *data* de taille n occupé par $m \leq n$ éléments et un élément à supprimer à l'indice $j \in [0, m[$

Résultat : le tableau *data* avec $m - 1$ éléments

Il existe plusieurs variantes de ce problème :

- *Suppression en fin*, c'est-à-dire $j = m - 1$. Dans ce cas, l'algorithme est trivial et sa complexité est en $O(1)$
- *Suppression sans conservation de l'ordre*. Dans ce cas, l'algorithme consiste à placer l'élément d'indice $m - 1$ à l'indice j. La complexité est en $O(1)$.
- *Suppression avec conservation de l'ordre*. C'est cet algorithme là que nous allons voir.

Suppression d'un élément dans un tableau ⋆⋆

Algorithme

```
void array_remove(int *data, size_t n, size_t j) {
  for (size_t i = j + 1; i < n; ++i) {
    data[i - 1] = data[i];
  }
}
```

Complexité

L'opération fondamentale est l'affectation ($\leftarrow$). La complexité de cet algorithme est de $m - j - 1$ affectations. En moyenne, $j = \frac{m}{2}$, donc :

$$\mathcal{C}(m) = m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} = O(m)$$

Plan

6 Structures de données
- Introduction
- Implémentation

7 Pointeurs et tableaux
- Pointeurs
- Tableaux

8 Algorithmes sur les tableaux
- Algorithmes sur les tableaux de taille fixe
- Algorithmes sur les chaînes de caractères
- Tableaux dynamiques

Chaînes de caractères

★★

Définition (Chaîne de caractères)

Une **chaîne de caractères** est un tableau de caractères dont le dernier élément est le caractère `'\0'` de code ASCII 0, également appelé `NUL`.

Supposition

Généralement, on ne connaît pas la taille de la chaîne à l'avance. Tous les algorithmes sur les tableaux s'appliquent également aux chaînes de caractères, en veillant à ce que le dernier caractère soit toujours 0.

Taille d'une chaîne de caractères ⋆⋆

Définition du problème

Problème *Taille d'une chaîne de caractères*

Données : une chaîne de caractères *str*

Résultat : la taille de la chaîne *str*, c'est-à-dire le nombre de caractères contenus dans la chaîne sans le 0 final

Remarque

La fonction C équivalente est `strlen(3)`

Taille d’une chaîne de caractères ★★

Algorithme

```
size_t str_length(const char *str) {
  size_t len = 0;
  while (str[len] != '\0') {
    len++;
  }
  return len;
}
```

Complexité

L’opération fondamentale est la comparaison ($\neq$). La complexité pour une chaîne de taille n est de n comparaisons. Donc :

$$\mathcal{C}(n) = n = O(n)$$

Comparaison de chaînes de caractères ⋆⋆

Définition du problème

Problème *Comparaison de chaînes de caractères*

Données : deux chaînes de caractères str_1 et str_2

Résultat : un entier strictement négatif/nul/strictement positif suivant que la chaîne str_1 est inférieure/égale/supérieure à la chaîne str_2 selon l'ordre lexicographique

Remarque

La fonction C équivalente est `strcmp(3)`

Comparaison de chaînes de caractères ★★

Algorithme

```
int str_compare(const char *str1, const char *str2) {
  size_t i = 0;
  while (str1[i] != '\0' && str2[i] != '\0') {
    if (str1[i] != str2[i]) {
      return str1[i] - str2[i];
    }
    i++;
  }
  return str1[i] - str2[i];
}
```

Comparaison de chaînes de caractères ⋆⋆

Complexité

L'opération fondamentale est la comparaison ($\neq$). La complexité pour une chaîne str_1 de taille n_1 et une chaîne str_2 de taille n_2 est :

- Pire cas : les chaînes sont presque égales, sauf le dernier caractère (par exemple : «aaaa» et «aaab»), on fait $\min(n_1, n_2)$ comparaisons.

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n_1, n_2) = \min(n_1, n_2) = O(\min(n_1, n_2))$$

- En moyenne : on échoue à la première lettre, et on fait une seule comparaison.

$$\mathcal{C}_{\text{avg}}(n_1, n_2) = 1 = O(1)$$

Recherche d'une sous-chaîne ⋆⋆

Définition du problème

Problème *Recherche d'une sous-chaîne*

Données : une chaîne de caractères *haystack* dans laquelle on va chercher et une chaine de caractère *needle* que l'on va chercher

Résultat : un pointeur sur le début de la sous-chaîne *needle* dans la chaîne de caractères *haystack* ou *NULL* en cas d'échec

Remarque

La fonction C équivalente est `strstr(3)`

Recherche d'une sous-chaîne ⋆⋆

Algorithme

```
const char *str_search(const char *h, const char *n) {
  size_t i = 0;
  while (h[i] != '\0') {
    size_t j = 0;
    while (n[j] && h[i + j] && n[j] == h[i + j]) {
      j++;
    }
    if (n[j] == '\0') {
      return h + i;
    }
    i++;
  }
  return NULL;
}
```

Recherche d'une sous-chaîne ★★★

Complexité

L'opération fondamentale est la comparaison (=). La complexité pour une chaîne *haystack* de taille n et une chaîne *needle* de taille m est :

- Pire cas : on échoue à la dernière lettre de *needle* à chaque fois (par exemple, si on cherche la chaîne «aaaab» dans la chaîne «aaaaaaaaab»), on fait alors $n \times m$ comparaisons.

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n, m) = nm = O(nm)$$

- En moyenne : on échoue à la première lettre de *needle* jusqu'à trouver la chaîne (en moyenne au milieu de la chaîne *haystack*), alors on fait $\frac{n}{2} + m$ comparaisons.

$$\mathcal{C}_{\text{avg}}(n, m) = \frac{n}{2} + m = O(n + m)$$

Plan

Tableau dynamique ★★

Définition

Un **tableau dynamique** est un tableau dont la taille varie suivant les besoins. On le représente par une structure de donnée comprenant trois champs :

```
struct array {
  int *data;         // tableau
  size_t capacity;   // nombre d’éléments maximum du tableau
  size_t size;       // nombre d’éléments du tableaux
};
```

Usage

Les tableaux dynamiques permettent d’abstraire la gestion de la mémoire des tableaux dans des fonctions. Ils font partie de la bibliothèque standard de nombreux langages. . . mais pas le C.

Insertion en fin d'un tableau dynamique ★★★

Définition du problème

Problème *Insertion en fin d'un tableau dynamique*

Données : un tableau dynamique *self* et un élément *e* à insérer

Résultat : le tableau dynamique *self* avec un élément *e* en plus à la fin

Remarque importante

Contrairement à l'insertion dans un tableau de taille fixe, il est toujours possible d'insérer un élément dans un tableau dynamique puisqu'au besoin, celui-ci peut grossir. La seule question intéressante est de savoir comment grossir.

Insertion en fin d'un tableau dynamique ★★

Algorithme naïf

```
void array_add(struct array *self, int e) {
  if (self->size == self->capacity) {
    self->capacity += 1;
    int *data = calloc(self->capacity, sizeof(int));
    memcpy(data, self->data, self->size * sizeof(int));
    free(self->data);
    self->data = data;
  }
  self->data[self->size] = e;
  self->size += 1;
}
```

Insertion en fin d'un tableau dynamique ⋆⋆⋆

Définition (Coût amorti)

On appelle **coût amorti** le coût moyen d'un algorithme sur un grand nombre d'appels successifs à l'algorithme. On utilise le coût amorti quand un algorithme se comporte bien dans la plupart des cas et mal dans quelques cas particuliers.

Complexité

L'opération fondamentale est l'affectation ($\leftarrow$). Dans ce cas, en admettant que la capacité originale soit de 1, à chaque insertion, on fait un appel à `memcpy` (qui est en $O(size)$), donc au bout de n appels, on a fait : $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ copies d'éléments du tableaux et n ajout de e d'où un coût total en $O(n^2)$. Si on divise par le nombre d'appels, le coût amorti d'une insertion est :

$$\mathcal{C}_{\text{amort}}(n) = O(n)$$

Insertion en fin d'un tableau dynamique ⋆⋆⋆

Algorithme

```
void array_add(struct array *self, int e) {
  if (self->size == self->capacity) {
    self->capacity *= A;
    int *data = calloc(self->capacity, sizeof(int));
    memcpy(data, self->data, self->size * sizeof(int));
    free(self->data);
    self->data = data;
  }
  self->data[self->size] = e;
  self->size += 1;
}
```

où A est une constante avec $A > 1$ (généralement $A = 2$)

Insertion en fin d'un tableau dynamique ★★★

Complexité

Dans ce cas, en admettant que la capacité originale soit de 1, quand on augmente la taille, on la multiplie par A. Donc, au bout de n appels avec $A^k \leq n < A^{k+1}$, on a fait k augmentation de taille, qui représente au total :
$1 + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^k = \frac{1-A^{k+1}}{1-A} = O(A^k)$ copies d'éléments du tableaux et n ajout de e. Or, $k = \lfloor \log_A n \rfloor$, donc $O(A^k) = O(n)$, donc, pour n éléments insérés, on fait au total $O(n) + n$ copies. Et donc, le coût amorti d'une insertion est :

$$\mathcal{C}_{\text{amort}}(n) = O(1)$$

Insertion en fin d'un tableau dynamique ⋆

Remarques

- Cette stratégie d'allocation s'appelle une *expansion géométrique*.
- L'espace non-utilisé est au maximum de $(A-1)n$ éléments de sorte qu'on peut choisir A proche de 1 pour minimiser l'espace non-utilisé.
- On peut aussi réduire la taille du tableau si l'occupation descend en dessous d'un certain seuil. Il faut alors choisir ce seuil inférieur à $\frac{1}{A}$ pour éviter d'avoir des allocations et désallocations successives.

Cinquième partie

Listes chaînées

Plan de ce cours

9 Listes chaînées
- Définitions
- Algorithmes sur les listes
- Résumé

10 Pile et File
- Pile
- File
- File à double entrée

Plan

9 Listes chaînées
- Définitions
- Algorithmes sur les listes
- Résumé

10 Pile et File
- Pile
- File
- File à double entrée

Liste

Définition

★★★

Définition (Liste)

Une **liste** est :

- soit la liste vide, noté $\varnothing$
- soit un couple $\langle e, l \rangle$ où e est un élément et l est une liste

Remarque

Une liste est un objet mathématique récursif

Exemple (Listes)

- $\langle 2, \langle 3, \varnothing \rangle \rangle$ est une liste avec les éléments 2 et 3
- $\varnothing$ est une liste, donc $\langle 3, \varnothing \rangle$ est une liste, donc $\langle 2, \langle 3, \varnothing \rangle \rangle$ est une liste
- $\langle 2, 3 \rangle$ n'est pas une liste

Liste

Opérations élémentaires

Opérations élémentaires

- *constructeur*, noté `cons`, définie par :

$$\texttt{cons}(e, l) = \langle e, l \rangle$$

- *test du vide*, noté `empty`, qui est définie par :

$$\texttt{empty}(l) = (l \stackrel{?}{=} \varnothing)$$

- *accès au premier élément*, noté `head`, définie par :

$$\texttt{head}(\langle e, l \rangle) = e$$

- *accès au reste de la liste*, noté `tail`, définie par :

$$\texttt{tail}(\langle e, l \rangle) = l$$

Liste chaînée ★★

Définition

Définition (Liste chaînée)

Une **liste chaînée** *(linked list)* est l'implémentation d'une liste. Elle est constituée de maillons ou nœuds *(node)* On distingue :

- les listes simplement chaînées, dans lesquelles chaque maillon est relié à son suivant
- les listes doublement chaînées, dans lesquelles chaque maillon est relié à son suivant et à son précédent

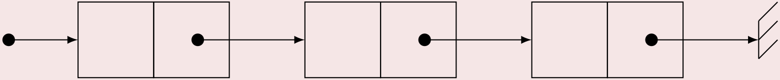
Remarque

La plupart des algorithmes sont valables pour les deux types de listes. Certains algorithmes sont plus efficaces avec des listes doublement chaînées, au prix d'une gestion de la liste plus difficile de manière générale.

Liste chaînée

Représentation et implémentation

Représentation



Implémentation

```
struct list {
  int data;
  struct list *next;
};
```

Plan

9 Listes chaînées
- Définitions
- Algorithmes sur les listes
- Résumé

10 Pile et File
- Pile
- File
- File à double entrée

Taille d'une liste ⋆⋆

Définition du problème

Problème *Taille d'une liste*

Données : une liste l

Résultat : la taille de la liste, c'est-à-dire le nombre d'éléments contenus dans la liste

Taille d'une liste (récursif) ⋆⋆

Algorithme récursif

```
size_t list_size(const struct list *node) {
  if (node == NULL) {
    return 0;
  }
  return 1 + list_size(node->next);
}
```

Complexité

L'opération fondamentale est l'addition $(+)$. La complexité pour une liste de taille n est définie par :

$$\mathcal{C}(0) = 0,\ \mathcal{C}(n) = 1 + \mathcal{C}(n-1)$$

Donc, la complexité de cet algorithme est :

$$\mathcal{C}(n) = n = O(n)$$

Taille d'une liste (itératif) ★★

Algorithme itératif

```
size_t list_size(const struct list *node) {
  size_t size = 0;
  while (node != NULL) {
    ++size;
    node = node->next;
  }
  return size;
}
```

Complexité

L'opération fondamentale est l'addition ($+$). On fait une incrémentation par nœud. La complexité pour une liste de taille n est :

$$\mathcal{C}(n) = n = O(n)$$

Accès au j^e élément d'une liste ⋆⋆

Définition du problème

Problème *Accès au j^e élément d'une liste*

Données : une liste l de taille $n \geq 1$ et un indice j, avec $j < n$

Résultat : la valeur de l'élément situé à l'indice j dans la liste

Accès au j^e élément d'une liste (récursif) ⋆⋆

Algorithme récursif

```
int list_access(const struct list *node, size_t j) {
  assert(node != NULL);
  if (j == 0) {
    return node->data;
  }
  return list_access(node->next, j - 1);
}
```

Complexité

L'opération fondamentale est l'appel à `->next`. La complexité de cet algorithme est de j appels. Donc, en moyenne, si on accède à l'élément d'indice $\frac{n}{2}$, la complexité est :

$$\mathcal{C}(n) = \frac{n}{2} = O(n)$$

Accès au j^e élément d'une liste (itératif) ★★

Algorithme itératif

```
int list_access(const struct list *node, size_t j) {
  const struct list *curr = node;
  for (size_t i = 0; i < j; ++i) {
    curr = curr->next;
  }
  return curr->data;
}
```

Complexité

L'opération fondamentale est l'appel à `->next`. La complexité de cet algorithme est de j appels. Donc, en moyenne, si on accède à l'élément d'indice $\frac{n}{2}$, la complexité est :

$$\mathcal{C}(n) = \frac{n}{2} = O(n)$$

Recherche d'un élément dans une liste ⋆⋆

Définition du problème

Problème *Recherche d'un élément dans une liste*

Données : une liste l de taille n et un élément e

Résultat : l'indice de l'élément e dans la liste l ou n si l'élément n'est pas dans la liste

Variantes

Il existe plusieurs variantes de cette fonction, suivant ce qu'on souhaite faire de l'élément recherché :

- on peut renvoyer un booléen qui indique si l'élément e est dans la liste l
- on peut renvoyer la sous-liste dont le premier élément est l'élément e recherché, ou $\varnothing$ si l'élément n'est pas dans la liste l

Recherche d'un élément dans une liste (récursif) ⋆⋆

Algorithme récursif

```
size_t list_search(const struct list *node, int e) {
  if (node == NULL) {
    return 0;
  }
  if (node->data == e) {
    return 0;
  }
  return 1 + list_search(node->next, e);
}
```

Recherche d'un élément dans une liste (itératif) ⋆⋆

Algorithme itératif

```
size_t list_search(const struct list *node, int e) {
  size_t index = 0;
  struct list *curr = node;
  while (curr != NULL && curr->data != e) {
    curr = curr->next;
    ++index;
  }
  return index;
}
```

Recherche d'un élément dans une liste ⋆⋆

Complexité

L'opération fondamentale est la comparaison $(=)$. Plusieurs cas se présentent :

- Pire cas : l'élément n'est pas présent dans la liste, dans ce cas, on effectue n comparaisons.

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n) = n = O(n)$$

- En moyenne : l'élément est dans la liste, il se situe en moyenne à l'indice $\frac{n}{2}$, dans ce cas, on effectue $\frac{n}{2}$ comparaisons.

$$\mathcal{C}_{\text{avg}}(n) = \frac{n}{2} = O(n)$$

Insertion d'un élément après l'élément courant ★★

Définition du problème

Problème *Insertion d'un élément après l'élément courant*

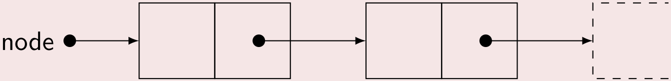
Données : une liste l de taille $n \geq 1$ et un élément e

Résultat : la liste l de taille $n + 1$ avec l'élément e placé après l'élément courant

Insertion d'un élément après l'élément courant ⋆⋆

Algorithme

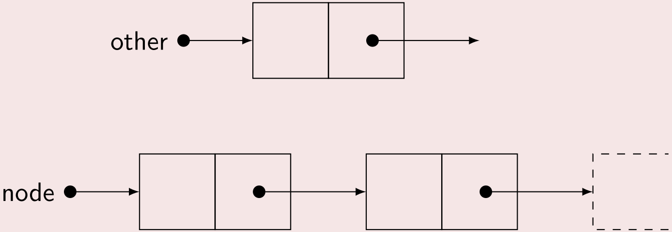
```
void list_insert_after(struct list *node, int e) {
  struct list *other = malloc(sizeof(struct list));
  other->data = e;
  other->next = node->next;
  node->next = other;
}
```



Insertion d'un élément après l'élément courant ⋆⋆

Algorithme

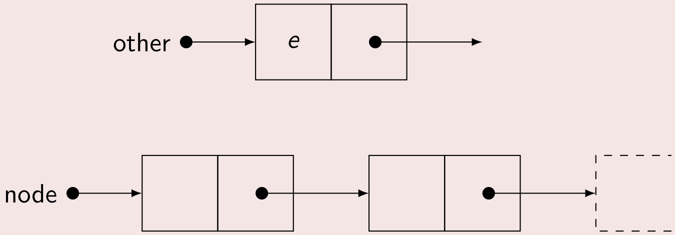
```
void list_insert_after(struct list *node, int e) {
  struct list *other = malloc(sizeof(struct list));
  other->data = e;
  other->next = node->next;
  node->next = other;
}
```



Insertion d'un élément après l'élément courant ⋆⋆

Algorithme

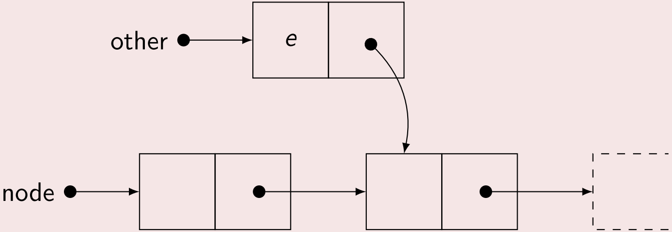
```
void list_insert_after(struct list *node, int e) {
  struct list *other = malloc(sizeof(struct list));
  other->data = e;
  other->next = node->next;
  node->next = other;
}
```



Insertion d'un élément après l'élément courant ★★

Algorithme

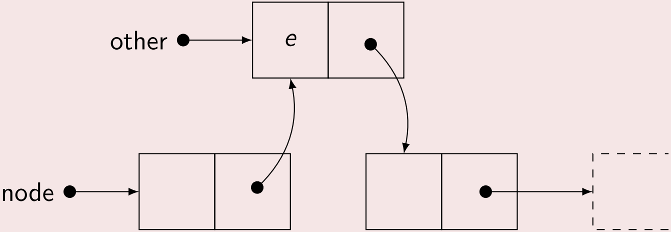
```
void list_insert_after(struct list *node, int e) {
  struct list *other = malloc(sizeof(struct list));
  other->data = e;
  other->next = node->next;
  node->next = other;
}
```



Insertion d'un élément après l'élément courant ★★

Algorithme

```
void list_insert_after(struct list *node, int e) {
  struct list *other = malloc(sizeof(struct list));
  other->data = e;
  other->next = node->next;
  node->next = other;
}
```



Suppression d'un élément après l'élément courant ⋆⋆

Définition du problème

Problème *Suppression d'un élément après l'élément courant*

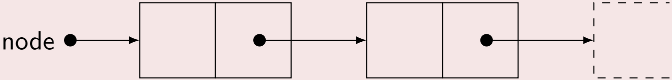
Données : une liste l de taille $n \geq 2$

Résultat : la liste l avec $n - 1$ éléments

Suppression d'un élément après l'élément courant ★★

Algorithme

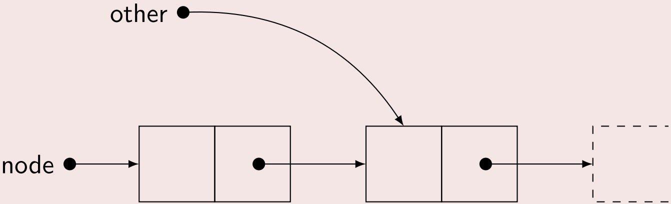
```
void list_remove_after(struct list *node) {
  struct list *other = node->next;
  node->next = other->next;
  free(other);
}
```



Suppression d'un élément après l'élément courant ⋆⋆

Algorithme

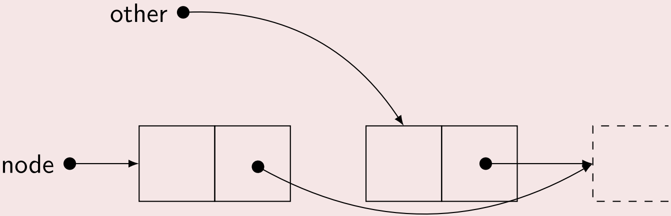
```
void list_remove_after(struct list *node) {
  struct list *other = node->next;
  node->next = other->next;
  free(other);
}
```



Suppression d'un élément après l'élément courant ★★

Algorithme

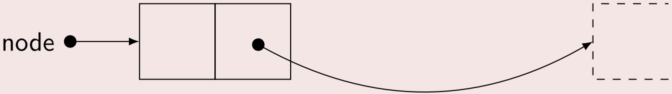
```
void list_remove_after(struct list *node) {
  struct list *other = node->next;
  node->next = other->next;
  free(other);
}
```



Suppression d'un élément après l'élément courant ⋆⋆

Algorithme

```
void list_remove_after(struct list *node) {
  struct list *other = node->next;
  node->next = other->next;
  free(other);
}
```



Insertion d'un élément en fin de liste ⋆⋆

Définition du problème

Problème *Insertion d'un élément en fin de liste*

Données : une liste l de taille n et un élément e

Résultat : la liste l de taille $n + 1$ avec l'élément e en dernière position

Remarque

Pour une liste doublement chaînée, cette opération est en temps constant. Nous allons voir un algorithme pour les listes simplement chaînées.

Insertion d'un élément en fin de liste (récursif) ⋆⋆

Algorithme récursif

```
struct list *list_insert_back(struct list *node, int e) {
  if (node == NULL) {
    struct list *last = malloc(sizeof(struct list));
    last->data = e;
    last->next = NULL;
    return last;
  }
  node->next = list_insert_back(node->next, e);
  return node;
}
```

Insertion d'un élément en fin de liste (itératif) ⋆⋆

Algorithme iteratif

```
struct list *list_insert_back(struct list *node, int e) {
  struct list *curr = node;
  while (curr != NULL && curr->next != NULL) {
    curr = curr->next;
  }
  struct list *last = malloc(sizeof(struct list));
  last->data = e;
  last->next = NULL;
  if (curr == NULL) {
    return last;
  }
  curr->next = last;
  return node;
}
```

Insertion d'un élément en fin de liste ★★

Complexité

L'opération fondamentale est l'appel à `->next`. La complexité pour une liste l de taille n est :

$$\mathcal{C}(n) = O(n)$$

Suppression d'un élément en fin de liste ⋆⋆

Définition du problème

Problème *Suppression d'un élément en fin de liste*

Données : une liste l de taille $n \geq 1$

Résultat : la liste l avec $n - 1$ éléments

Remarque

Pour une liste doublement chaînée, cette opération est en temps constant. Nous allons voir un algorithme pour les listes simplement chaînées.

Suppression d'un élément en fin de liste (récursif) ⋆⋆

Algorithme récursif

```
struct list *list_remove_back(struct list *node) {
  if (node->next == NULL) {
    free(node);
    return NULL;
  }
  node->next = list_remove_back(node->next);
  return node;
}
```

Suppression d'un élément en fin de liste (itératif) ⋆⋆

Algorithme itératif

```
struct list *list_remove_back(struct list *node) {
  struct list *curr = node;
  struct list *prev = NULL;
  assert(curr);
  while (curr->next != NULL) {
    prev = curr;
    curr = curr->next;
  }
  free(curr);
  if (prev == NULL) {
    return NULL;
  }
  prev->next = NULL;
  return node;
}
```

Suppression d'un élément en fin de liste ⋆⋆

Complexité

L'opération fondamentale est l'appel à `->next`. La complexité pour une liste l de taille n est :

$$\mathcal{C}(n) = O(n)$$

Plan

Résumé des complexités ★★★

Résumé des complexités

Opération	Tableaux dynamiques	Listes simplement chaînées	Listes doublement chaînées
Accès au i^{e} élément	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
Accès au premier élément	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
Accès au dernier élément	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$
Recherche	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
Recherche dans trié	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$
Insertion en début	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
Insertion en fin	$O(1)$ amorti	$O(n)$	$O(1)$
Suppression en début	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
Suppression en fin	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$

Plan

Pile

Définition

★★★

Définition (Pile)

Une **pile** *(stack)* est une structure de données dans laquelle on peut stocker des éléments en mode LIFO *(Last In, First Out)*, c'est-à-dire «dernier arrivé, premier sorti». On peut comparer le fonctionnement à une pile d'assiette.

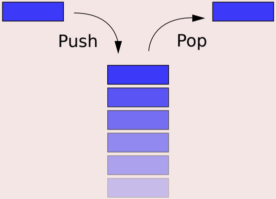
Pile

Opérations élémentaires

Opérations élémentaires

- ajout d'un élément sur la pile, noté `push`
- retrait de l'élément sur la pile, noté `pop`
- accès à l'élément sur la pile, noté `peek`
- test du vide de la pile, noté `empty`

LIFO



Pile

Implémentations

Implémentations d'une pile

On peut implémenter une pile de deux manières :

- en utilisant un tableau dynamique
- en utilisant une liste (simplement chaînée)

Opération	Tableau	Liste
`push`	$O(1)$	$O(1)$
`pop`	$O(1)$	$O(1)$
`peek`	$O(1)$	$O(1)$
`empty`	$O(1)$	$O(1)$

Plan

9 Listes chaînées
- Définitions
- Algorithmes sur les listes
- Résumé

10 Pile et File
- Pile
- File
- File à double entrée

File

Définition

⋆⋆⋆

Définition (File)

Une **file** *(queue)* est une structure de données dans laquelle on peut stocker des éléments en mode FIFO *(First In, First Out)*, c'est-à-dire «premier arrivé, premier sorti». On peut comparer le fonctionnement à une file d'attente.

Variantes

- File bornée : file avec un nombre d'élément maximum

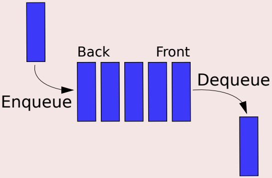
File

Opérations élémentaire

Opérations élémentaires

- ajout d'un élément en fin de file, noté `enqueue`
- retrait de l'élément en début de file, noté `dequeue`
- accès à l'élément en début de file, noté `peek`
- test du vide de la file, noté `empty`

FIFO



File

Implémentation

Implémentations d'une file

On peut implémenter une file de deux manières

- une liste doublement chaînée
- un tableau dynamique modifié pour fonctionner comme un tampon circulaire *(circular buffer)*

Opération	Liste	Tableau
`enqueue`	$O(1)$	$O(1)$
`dequeue`	$O(1)$	$O(1)$
`peek`	$O(1)$	$O(1)$
`empty`	$O(1)$	$O(1)$

Plan

9 Listes chaînées

- Définitions
- Algorithmes sur les listes
- Résumé

10 Pile et File

- Pile
- File
- File à double entrée

File à double entrée

Définition

★★★

Définition (File à double entrée)

Une **file à double entrée** *(double-ended queue* ou *deque)* est une structure de données dans laquelle on peut ajouter ou supprimer des éléments à la fois au début et à la fin.

Remarque

Une file à double entrée est une généralisation d'une pile et d'une file.

File à double entrée

Opérations élémentaires

Opérations élémentaires

- ajout d'un élément en début de file, noté `push`
- ajout d'un élément en fin de file, noté `inject`
- retrait d'un élément en début de file, noté `pop`
- retrait d'un élément en fin de file, noté `eject`
- accès à l'élément en début de file, noté `front`
- accès à l'élément en fin de file, noté `back`
- test du vide de la file, noté `empty`

File à double entrée ⋆⋆

Implémentations

Implémentations

On peut implémenter une file à double entrée de deux manières :

- une liste doublement chaînée
- un tableau dynamique modifié pour fonctionner comme un tampon circulaire *(circular buffer)*

Sixième partie

Algorithmes de tri

Plan de ce cours

Plan

Problème du tri par comparaisons

★★★

Problème du tri par comparaisons

Problème *Tri par comparaisons d'un tableau*

Données : Un tableau t de taille n

Résultat : le tableau t trié par ordre croissant de ses éléments

Remarque

Les éléments du tableau peuvent être de n'importe quel type, pourvu qu'on puisse les comparer les uns avec les autres. La comparaison de ces éléments peut éventuellement être une opération coûteuse (exemple : chaîne de caractères).

Problème du tri par comparaisons ★★★

Opérations fondamentales

Les deux opérations fondamentales que l'on va considérer ici sont :

- la comparaison
- l'affectation (ou l'échange)

Algorithme d'échange

```
void array_swap(int *data, size_t i, size_t j) {
  int tmp = data[i];
  data[i] = data[j];
  data[j] = tmp;
}
```

Borne inférieure de la complexité ⋆⋆

Théorème (Borne inférieure de la complexité)

La complexité algorithmique en moyenne et en pire cas d'un algorithme de tri par comparaisons est au moins $O(n \log n)$*. Les tris qui demandent* $O(n \log n)$ *opérations en moyenne sont dits optimaux.*

Remarque

Il existe des algorithmes optimaux de complexité $O(n \log n)$ en moyenne.

Théorème (Borne inférieur du nombre de comparaison)

Le nombre de comparaisons d'un algorithme de tri par comparaison est au moins de $\lceil \log_2(n!) \rceil$.

Propriétés des tris ⋆⋆

Tri stable

Définition (Tri stable)

On dit qu'un tri est *stable* s'il conserve l'ordre relatif des éléments égaux.

Exemple

Pour l'ensemble de paires suivantes qu'on trie par le premier élément de la paire :

$$[(4, 1); (3, 2); (3, 3); (5, 4)]$$

un algorithme de tri stable donnera toujours le résultat suivant :

$$[(3, 2); (3, 3); (4, 1); (5, 4)]$$

et jamais le résultat suivant :

$$[(3, 3); (3, 2); (4, 1); (5, 4)]$$

Propriétés des tris ★★

Tri en place

Définition (Tri en place)

On dit qu'un tri est *en place* ou *sur place* s'il modifie directement la structure de données à trier. Autrement dit, pour n éléments, la complexité en mémoire est en $O(1)$.

Cas d'un tableau déjà trié

Problématique

Cas d'un tableau déjà trié

Si un tableau est déjà trié, alors il n'est pas nécessaire d'appliquer un algorithme pour le trier.

- Comment faire pour savoir si un tableau est déjà trié ?
- Est-ce efficace de vérifier qu'un tableau est déjà trié ?

On s'intéresse donc au problème suivant :

Problème *Tabeau trié*

Données : Un tableau t de taille n

Question : Le tableau t est-il trié par ordre croissant ?

Cas d'un tableau déjà trié

Algorithme

★★

Algorithme

```
bool array_is_sorted(int *data, size_t n) {
  for (size_t i = 1; i < n; ++i) {
    if (data[i - 1] > data[i]) {
      return false;
    }
  }
  return true;
}
```

Cas d'un tableau déjà trié ⋆⋆

Complexité

Complexité

L'opération fondamentale est la comparaison ($>$). Plusieurs cas se présentent :

- Pire cas : quand le tableau est trié, on fait $n-1$ comparaisons.

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n) = n - 1 = O(n)$$

- En moyenne : le tableau n'est pas trié et on va échouer dès les premiers éléments.

$$\mathcal{C}_{\text{avg}}(n) = O(1)$$

Cas d'un tableau déjà trié

Conclusion

★★

Conclusion

- Si un tableau est déjà trié, appeler `array_is_sorted` va coûter $O(n)$ mais alors, on a fini.
- Si un tableau n'est pas trié, appeler `array_is_sorted` va coûter en moyenne $O(1)$ (et au pire $O(n)$) et on va le trier en $O(n \log n)$ au mieux donc la complexité globale sera au mieux de $O(n \log n)$

→ Donc, on peut toujours vérifier qu'un tableau est déjà trié avant de le trier sans pénalité sur la complexité globale (et avec un gain dans le cas où il est effectivement trié).

Cas des listes chaînées

★★

Cas des listes chaînées

Certains algorithmes s'adaptent bien aux listes chaînées et ont la même complexité. D'autres algorithmes s'adaptent mais ont une complexité supérieure, ou ne s'adapte pas du tout aux listes chaînées.

Plan

Tri par sélection

Principe

★★★

Principe

Le *tri par sélection* consiste à rechercher le plus petit élément du tableau et à le placer en première position puis de réitérer avec le sous-tableau commençant à la deuxième position. Et ainsi de suite.

Tri par sélection

Algorithme

★★

Algorithme

```
void array_selection_sort(int *data, size_t n) {
  for (size_t i = 0; i < n - 1; ++i) {
    size_t j = i;
    for (size_t k = j + 1; k < n; ++k) {
      if (data[k] < data[j]) {
        j = k;
      }
    }
    array_swap(data, i, j);
  }
}
```

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 0$

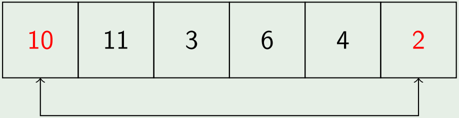
10	11	3	6	4	2

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 0$ $j = 5$



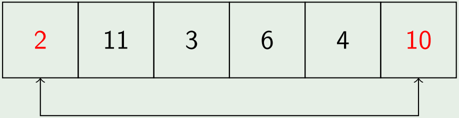
10	11	3	6	4	2

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 0$ $j = 5$



2	11	3	6	4	10

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 1$

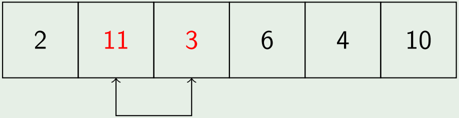
2	11	3	6	4	10

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 1$ $j = 2$



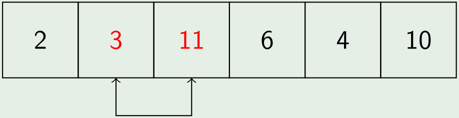
2	11	3	6	4	10

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 1$ $j = 2$



Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 2$

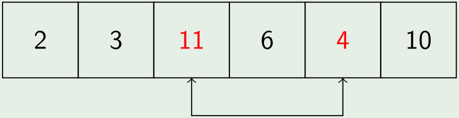
2	3	11	6	4	10

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 2$ $j = 4$



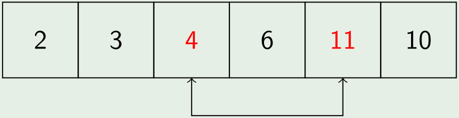
2	3	11	6	4	10

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 2$ $j = 4$



2	3	4	6	11	10

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 3$

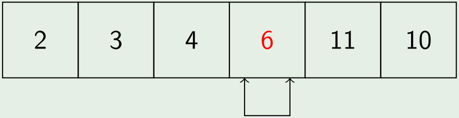
2	3	4	6	11	10

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 3$ $j = 3$



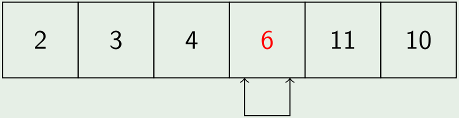
2	3	4	6	11	10

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 3$ $j = 3$



2	3	4	6	11	10

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 4$

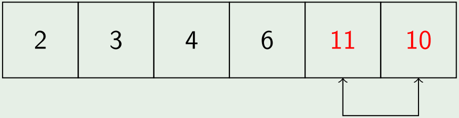
2	3	4	6	11	10

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 4$ $j = 5$



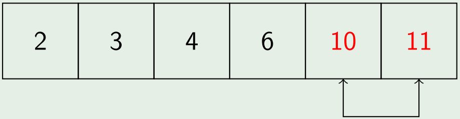
2	3	4	6	11	10

Tri par sélection

Exemple

Exemple

$i = 4$ $j = 5$



2	3	4	6	10	11

Tri par sélection

Exemple

Exemple

2	3	4	6	10	11

Tri par sélection

★★

Complexité en nombre de comparaisons

Remarque préliminaire

Pour un tableau de taille n, cet algorithme effectue le même nombre de comparaisons, quelle que soit la valeur des éléments du tableau. Donc la complexité en moyenne et en pire cas sont les mêmes.

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n) = \mathcal{C}_{\text{avg}}(n) = \mathcal{C}(n)$$

Tri par sélection

Complexité en nombre de comparaisons

★★

Complexité en nombre de comparaisons

L'algorithme effectue une comparaison pour chaque valeur de k dans la boucle interne. Cela représente $(n-1)-(i+1)+1 = n-(i+1)$ comparaisons dans la boucle interne. Il y a un appel à la boucle interne pour chaque valeur de i :

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} n-(i+1)$$

Avec un changement de variable $j = n-(i+1)$, on obtient :

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)$$

Tri par sélection

Complexité en nombre d'échanges

★★

Complexité en nombre d'échanges

Pour un tableau de taille n, cet algorithme effectue le même nombre d'échanges, quelle que soit la valeur des éléments du tableau. Donc la complexité en moyenne et en pire cas sont les mêmes.

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n) = \mathcal{C}_{\text{avg}}(n) = \mathcal{C}(n)$$

L'algorithme effectue un échange par valeur de i :

$$\mathcal{C}(n) = n - 1 = \Theta(n)$$

Plan

Tri à bulles

Principe

★★★

Principe

Le *tri à bulles* consiste à faire remonter les éléments les plus légers (c'est-à-dire les plus petits) au début du tableau.
On parcourt le tableau à l'envers et on échange deux éléments consécutifs chaque fois qu'ils ne sont pas dans le bon ordre. À la fin du premier passage, le plus petit élément se retrouve en première position. On réitère en s'arrêtant à la deuxième case. Et ainsi de suite.

Tri à bulles

Tri à bulles

Algorithme

★★

Algorithme

```
void array_bubble_sort(int *data, size_t n) {
  for (size_t i = 0; i < n - 1; ++i) {
    for (size_t j = n - 1; j > i; --j) {
      if (data[j] < data[j - 1]) {
        array_swap(data, j, j - 1);
      }
    }
  }
}
```

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 0$

10	11	3	6	4	2

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 0$

10	11	3	6	4	2

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 0$

10	11	3	6	2	4

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 0$

10	11	3	2	6	4

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 0$

10	11	2	3	6	4

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 0$

10	2	11	3	6	4

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 0$

2	10	11	3	6	4

Tri à bulles

Exemple

Exemple

2	10	11	3	6	4

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 1$

2	10	11	3	6	4

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 1$

2	10	11	3	4	6

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 1$

2	10	11	3	4	6

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 1$

2	10	3	11	4	6

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 1$

2	3	10	11	4	6

Tri à bulles

Exemple

Exemple

2	3	10	11	4	6

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 2$

2	3	10	11	4	6

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 2$

2	3	10	11	4	6

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 2$

2	3	10	4	11	6

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 2$

2	3	4	10	11	6

Tri à bulles

Exemple

Exemple

2	3	4	10	11	6

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 3$

2	3	4	10	11	6

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 3$

2	3	4	10	6	11

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 3$

2	3	4	6	10	11

Tri à bulles

Exemple

Exemple

2	3	4	6	10	11

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 4$

2	3	4	6	10	11

Tri à bulles

Exemple

Exemple

$i = 4$

2	3	4	6	10	11

Tri à bulles

Exemple

Exemple

2	3	4	6	10	11

Tri à bulles

Complexité en nombre de comparaisons

★★

Remarque préliminaire

Pour un tableau de taille n, cet algorithme effectue le même nombre de comparaisons, quelle que soit la valeur des éléments du tableau. Donc la complexité en moyenne et en pire cas sont les mêmes.

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n) = \mathcal{C}_{\text{avg}}(n) = \mathcal{C}(n)$$

Tri à bulles

Complexité en nombre de comparaisons

★★

Complexité en nombre de comparaisons

L'algorithme effectue une comparaison pour chaque valeur de j dans la boucle interne. Cela représente $(n-1)-(i+1)+1 = n-(i+1)$ comparaisons dans la boucle interne. Il y a un appel à la boucle interne pour chaque valeur de i :

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} n-(i+1)$$

Avec un changement de variable $k = n-(i+1)$, on obtient :

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)$$

Tri à bulles

Complexité en nombre d'échanges

★★

Remarque préliminaire

Contrairement au cas précédent, le nombre d'échanges lors de l'exécution de l'algorithme du tri à bulles dépend des éléments contenus dans le tableau. On analyse donc la complexité en pire cas et la complexité en moyenne séparément.

Complexité en pire cas

Dans le pire cas, il y a un échange à chaque tour de boucle, c'est-à-dire que la condition est toujours vraie. Ce cas est obtenu quand le tableau est trié dans l'ordre décroissant. On a alors :

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n) = \Theta(n^2)$$

Tri à bulles

Complexité en nombre d'échanges

★★

Complexité en moyenne

Intuitivement, sur l'ensemble des tableaux possibles, la comparaison va être vraie une fois sur deux. En effet, si on considère deux éléments quelconques, ils vont être dans le bon ordre dans la moitié des tableaux (et donc ils ne seront pas échangés) et dans le mauvais ordre dans l'autre moitié des tableaux (et donc ils seront échangés une seule fois).

$$\mathcal{C}_{\text{avg}}(n) = \Theta(n^2)$$

Plan

Tri par insertion

Principe

★★★

Principe

Le *tri par insertion* consiste à insérer au fur et à mesure les éléments dans la partie du tableau qui est déjà triée. C'est le tri utilisé par les joueurs de cartes.

Tri par insertion

Algorithme

Algorithme

```
void array_insertion_sort(int *data, size_t n) {
  for (size_t i = 1; i < n; ++i) {
    int x = data[i];
    size_t j = i;
    while (j > 0 && data[j - 1] > x) {
      data[j] = data[j - 1];
      j--;
    }
    data[j] = x;
  }
}
```

Tri par insertion

Exemple

Exemple

$i = 1$ $x = 11$

10	11	3	6	4	2

Tri par insertion

Exemple

Exemple

$i = 1$ $x = 11$

10	11	3	6	4	2

Tri par insertion

Exemple

Exemple

$i = 1$ $x = 11$

10	11	3	6	4	2

Tri par insertion

Exemple

Exemple

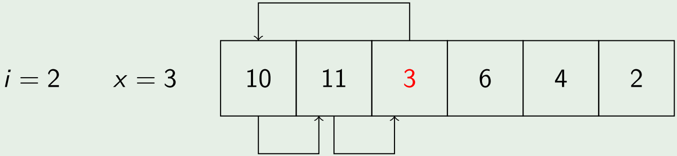
$i = 2$ $x = 3$

10	11	3	6	4	2

Tri par insertion

Exemple

Exemple



Tri par insertion

Exemple

Exemple

$i = 2$ $x = 3$

3	10	11	6	4	2

Tri par insertion

Exemple

Exemple

$i = 3$ $x = 6$

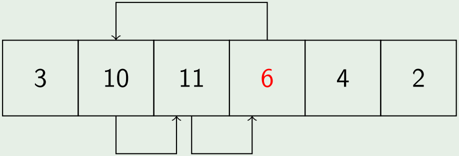
3	10	11	6	4	2

Tri par insertion

Exemple

Exemple

$i = 3$ $x = 6$



3	10	11	6	4	2

Tri par insertion

Exemple

Exemple

$i = 3$ $x = 6$

3	6	10	11	4	2

Tri par insertion

Exemple

Exemple

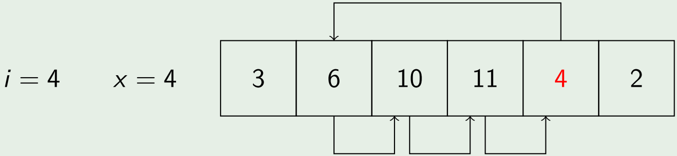
$i = 4$ $x = 4$

3	6	10	11	4	2

Tri par insertion

Exemple

Exemple



Tri par insertion

Exemple

Exemple

$i = 4$ $x = 4$

3	4	6	10	11	2

Tri par insertion

Exemple

Exemple

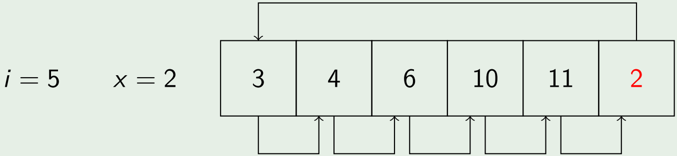
$i = 5$ $x = 2$

3	4	6	10	11	2

Tri par insertion

Exemple

Exemple



Tri par insertion

Exemple

Exemple

$i = 5$ $x = 2$

2	3	4	6	10	11

Tri par insertion

Exemple

Exemple

2	3	4	6	10	11

Tri par insertion

Complexité en nombre de comparaisons

★★

Remarque préliminaire

Contrairement aux cas précédents, le nombre de comparaisons lors de l'exécution de l'algorithme du tri par insertion dépend des éléments contenus dans le tableau. On analyse donc la complexité en pire cas et la complexité en moyenne séparément.

Tri par insertion

Complexité en nombre de comparaisons

★★

Complexité en pire cas

Le pire cas est obtenu quand le tableau est trié dans l'ordre décroissant. On a alors :

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n) = \Theta(n^2)$$

Complexité en moyenne

Par un raisonnement analogue au calcul de la complexité en moyenne pour le nombre d'affectations du tri à bulles, on obtient :

$$\mathcal{C}_{\text{avg}}(n) = \Theta(n^2)$$

Tri par insertion

Complexité nombre d'affectations

★★

Complexité en nombre d'affectations

Pour chaque valeur de i, le nombre d'affectations diffère au plus de 1 par rapport au nombre de comparaisons, d'où :

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n) = \Theta(n^2)$$
$$\mathcal{C}_{\text{avg}}(n) = \Theta(n^2)$$

Plan

Synthèse ★★

Synthèse

Algorithme	Comparaisons		Affectations		Stable ?	En place ?
	$\mathcal{C}_{\text{avg}}$	$\mathcal{C}_{\text{worst}}$	$\mathcal{C}_{\text{avg}}$	$\mathcal{C}_{\text{worst}}$		
Tri par sélection	$\Theta(n^2)$		$\Theta(n)$		☹	☺
Tri à bulles	$\Theta(n^2)$		$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	☺	☺
Tri par insertion	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	☺	☺

Plan

Tri rapide

Principe

Principe

Le **tri rapide** *(quicksort)* consiste à choisir un élément du tableau, appelé pivot, puis de séparer à gauche dans le tableau les éléments inférieurs au pivot et à droite dans le tableau les éléments supérieurs au pivot. Cette étape est appelée partitionnement. Puis on trie alors le sous-tableau gauche et le sous-tableau droit récursivement.

Tri rapide

Algorithme

★★

Algorithme

```
void array_quick_sort_partial(int *data,
                                    ptrdiff_t i, ptrdiff_t j) {
  if (i < j) {
    ptrdiff_t p = array_partition(data, i, j);
    array_quick_sort_partial(data, i, p - 1);
    array_quick_sort_partial(data, p + 1, j);
  }
}

void array_quick_sort(int *data, size_t n) {
  array_quick_sort_partial(data, 0, n - 1);
}
```

Tri rapide

Algorithme

Algorithme

```
ptrdiff_t array_partition(int *data, ptrdiff_t i, ptrdiff_t j) {
  ptrdiff_t pivot_index = i;
  const int pivot = data[pivot_index];
  array_swap(data, pivot_index, j);
  ptrdiff_t l = i;
  for (ptrdiff_t k = i; k < j; ++k) {
    if (data[k] < pivot) {
      array_swap(data, k, l);
      ++l;
    }
  }
  array_swap(data, l, j);
  return l;
}
```

Partition

Exemple

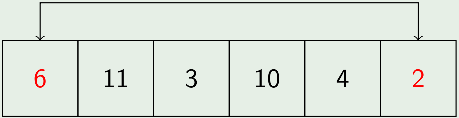
Exemple (Partition)

6	11	3	10	4	2

Partition

Exemple

Exemple (Partition)



6	11	3	10	4	2

pivot : 6

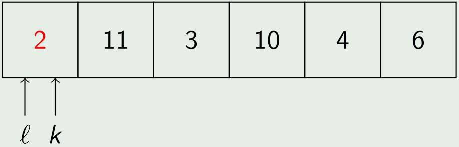
Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 0$

$\ell = 0$



2	11	3	10	4	6

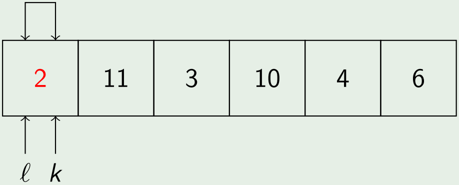
Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 0$

$\ell = 0$



2	11	3	10	4	6

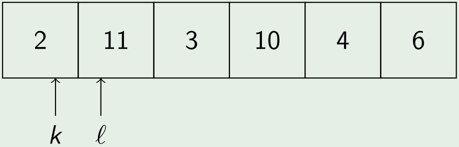
Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 0$

$\ell = 1$



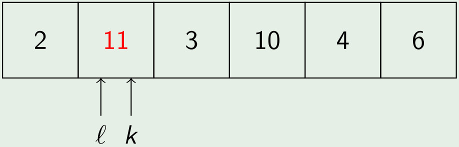
Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 1$

$\ell = 1$



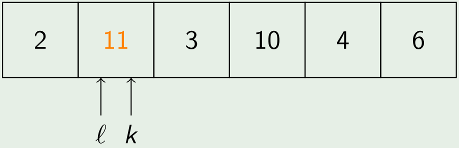
2	11	3	10	4	6

Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 1$
$\ell = 1$



2	11	3	10	4	6

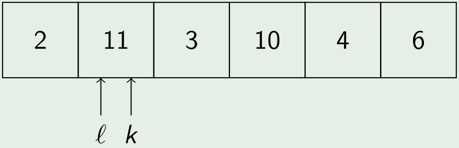
Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 1$

$\ell = 1$



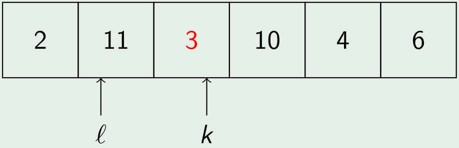
Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 2$

$\ell = 1$



2	11	3	10	4	6

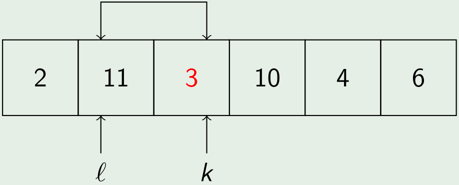
Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 2$

$\ell = 1$

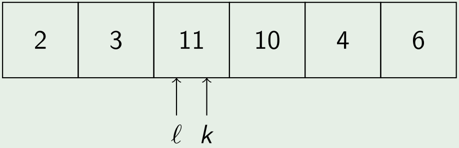


Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 2$
$\ell = 2$



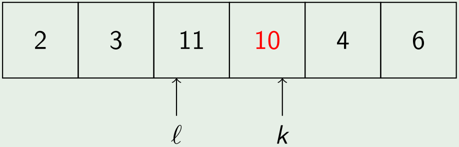
Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 3$

$\ell = 2$



2	3	11	10	4	6

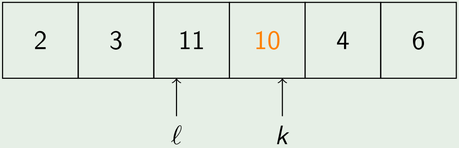
Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 3$

$\ell = 2$



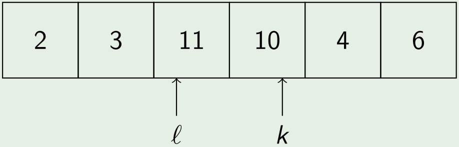
2	3	11	10	4	6

Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 3$
$\ell = 2$



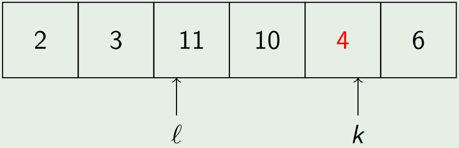
2	3	11	10	4	6

Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 4$
$\ell = 2$



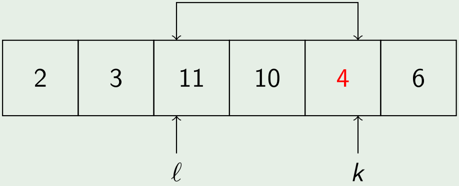
Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 4$

$\ell = 2$



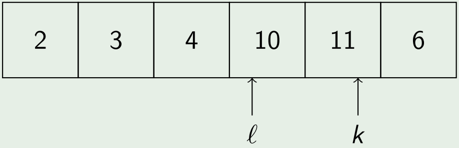
Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$k = 4$

$\ell = 3$



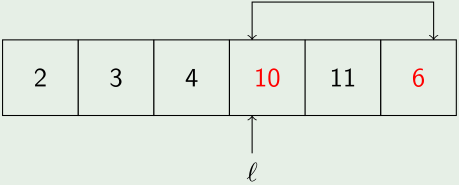
2	3	4	10	11	6

Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$\ell = 3$

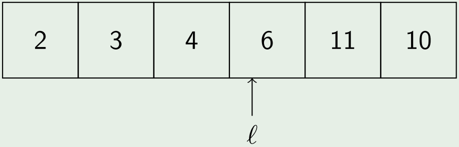


Partition

Exemple

Exemple (Partition)

$\ell = 3$



Tri rapide

Complexité en nombre de comparaisons

★★★

Complexité

On note $\mathcal{C}(n)$ la complexité en nombre de comparaisons pour un tableau de taille n. On appelle k le nombre d'éléments plus petits que le pivot, alors on effectue les opérations suivantes :

- le partitionnement en $\Theta(n)$
- le tri de la partie gauche en $\mathcal{C}(k)$
- le tri de la partie droite en $\mathcal{C}(n-k-1)$

Alors, la complexité est determinée par :

$$\mathcal{C}(n) = \Theta(n) + \mathcal{C}(k) + \mathcal{C}(n-k-1)$$

Tri rapide

Complexité en nombre de comparaisons

★★★

Complexité

On a alors deux situations :

- Pire cas : $k = 0$. Alors, $\mathcal{C}(n) = \Theta(n) + \mathcal{C}(n-1)$, donc :

$$\mathcal{C}_{\text{worst}}(n) = O(n^2)$$

  Le pire cas correspond à un tableau déjà trié.

- En moyenne : $k = \frac{n}{2}$. Alors, $\mathcal{C}(n) = \Theta(n) + 2 \times \mathcal{C}(\frac{n}{2})$, donc :

$$\mathcal{C}_{\text{avg}}(n) = O(n \log n)$$

  La complexité en moyenne est donc optimale.

Tri rapide

En pratique

Choix du pivot

Il y a plusieurs manières de choisir le pivot en pratique :

- le premier élément
- un élément au hasard
- l'élément médian entre le premier, celui du milieu et le dernier

Éléments égaux au pivot

On peut améliorer l'algorithme en prenant en compte les éléments égaux au pivot et en les plaçant à côté du pivot au milieu.

Plan

Tri fusion

Principe

★★★

Principe

Le **tri fusion** *(merge sort)* consiste à séparer le tableau en deux, puis de trier récursivement les deux moitiés, puis de fusionner les deux moitiés triées.

Remarque

Cet algorithme fonctionne mieux sur des listes que sur des tableaux. La version tableau nécessite un tableau temporaire de la taille du tableau en paramètre. Nous allons voir la version tableau.

Tri fusion

Algorithme

★★

Algorithme

```
void array_merge_sort(int *data, size_t n) {
  int *tmp = calloc(n, sizeof(int));
  array_merge_sort_partial(data, 0, n, tmp);
  free(tmp);
}
```

Tri fusion

Algorithme

★★

Algorithme

```
void array_merge_sort_partial(int *data,
                              size_t i, size_t j, int *tmp) {
  if (j - i < 2) {
    return;
  }
  size_t m = (i + j) / 2;
  array_merge_sort_partial(data, i, m, tmp);
  array_merge_sort_partial(data, m, j, tmp);
  array_merge(data, i, m, j, tmp);
  memcpy(data + i, tmp + i, (j - i) * sizeof(int));
}
```

Tri fusion

Algorithme

Algorithme

```
void array_merge(int *data, size_t i, size_t m, size_t j,
                                                  int *tmp) {
  size_t a = i;
  size_t b = m;
  for (size_t k = i; k < j; ++k) {
    if (a < m && (b == j || data[a] < data[b])) {
      tmp[k] = data[a];
      ++a;
    } else {
      tmp[k] = data[b];
      ++b;
    }
  }
}
```

Fusion

Exemple

Exemple (Fusion)

2	6	10	3	4	11

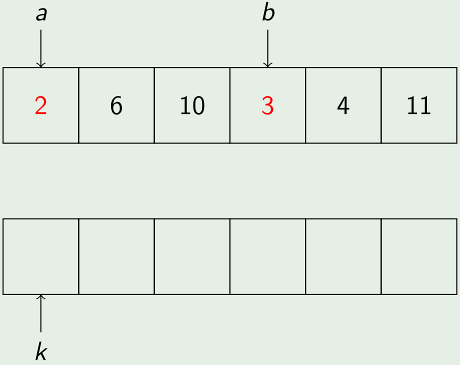
Fusion

Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 0$

$b = 3$



2	6	10	3	4	11

$k = 0$

Fusion

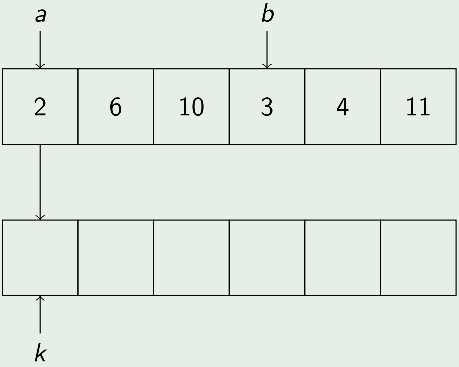
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 0$

$b = 3$

$k = 0$



Fusion

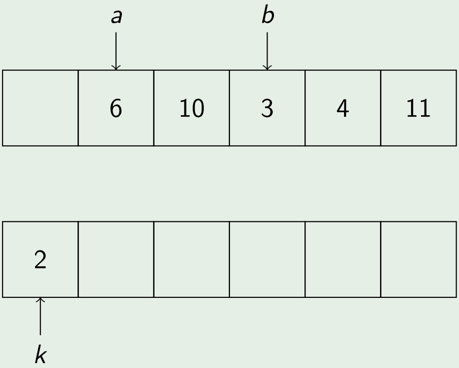
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 1$

$b = 3$

$k = 0$



Fusion

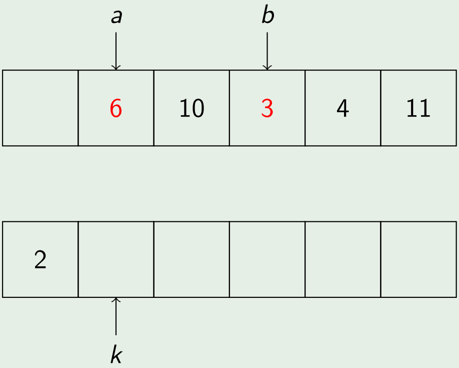
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 1$

$b = 3$

$k = 1$



Fusion

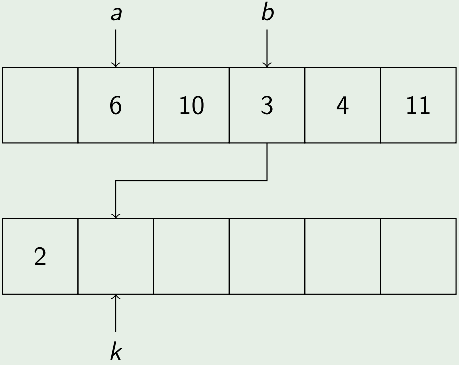
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 1$

$b = 3$

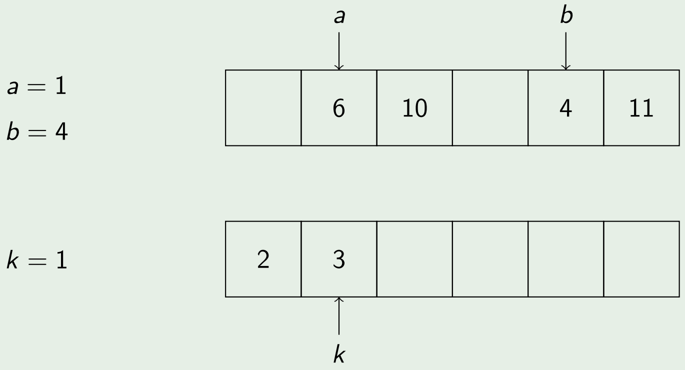
$k = 1$



Fusion

Exemple

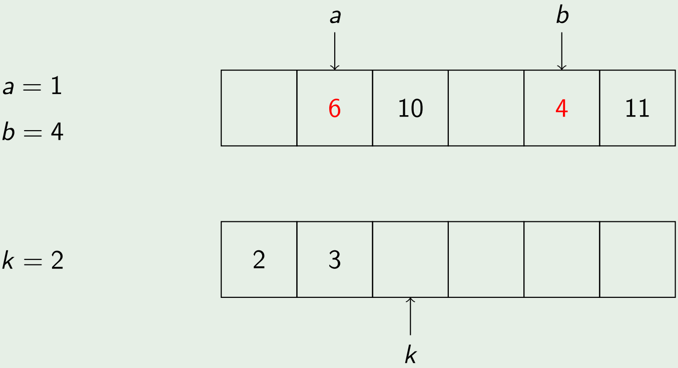
Exemple (Fusion)



Fusion

Exemple

Exemple (Fusion)



Fusion

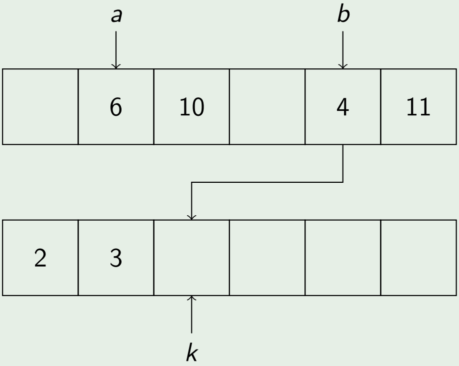
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 1$

$b = 4$

$k = 2$



Fusion

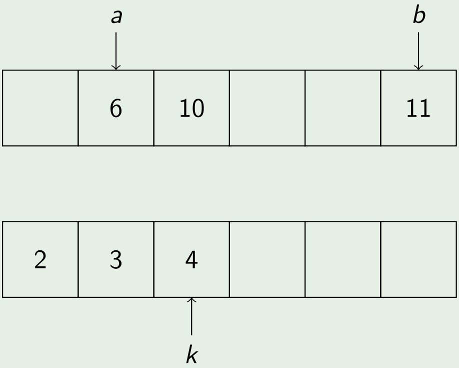
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 1$

$b = 5$

$k = 2$



Fusion

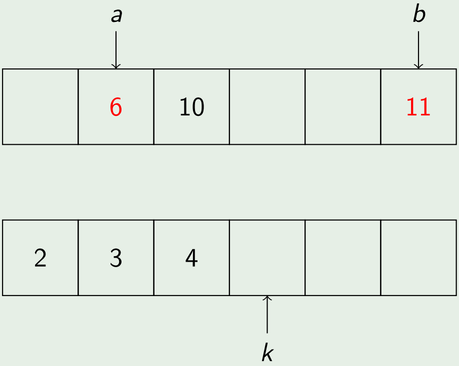
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 1$

$b = 5$

$k = 3$



Fusion

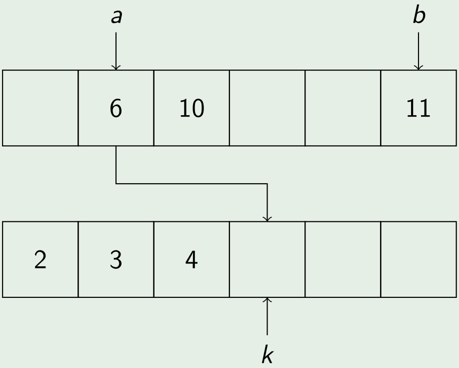
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 1$

$b = 5$

$k = 3$



Fusion

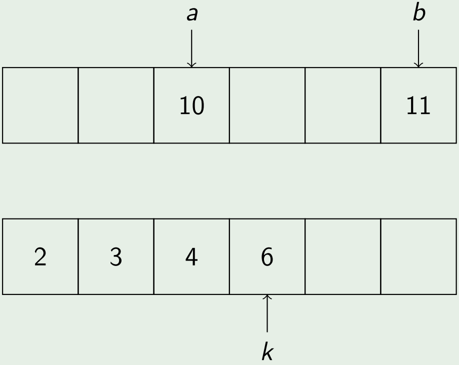
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 2$

$b = 5$

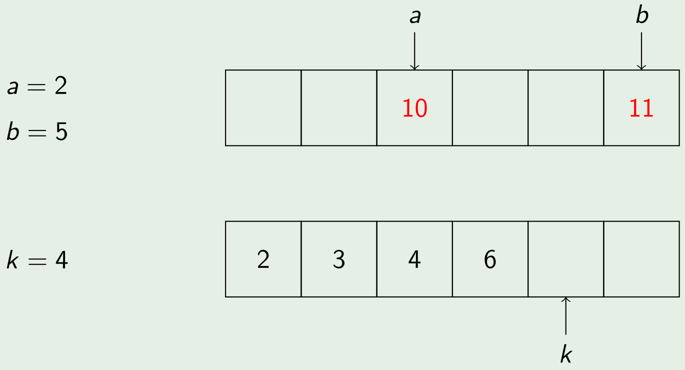
$k = 3$



Fusion

Exemple

Exemple (Fusion)



Fusion

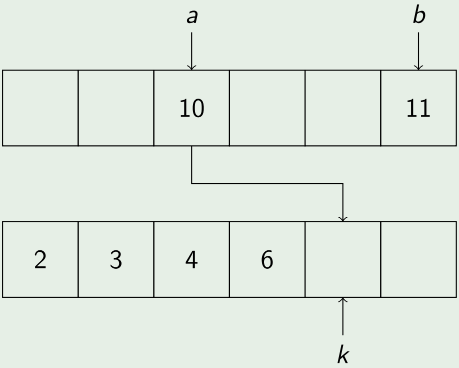
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 2$

$b = 5$

$k = 4$



Fusion

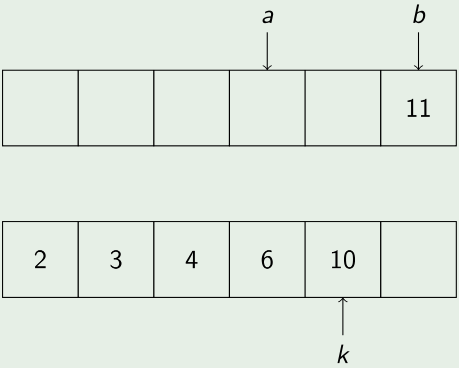
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 3$

$b = 5$

$k = 4$



Fusion

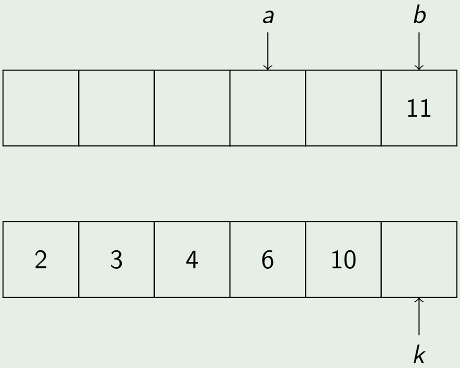
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 3$

$b = 5$

$k = 5$



					11

2	3	4	6	10	

Fusion

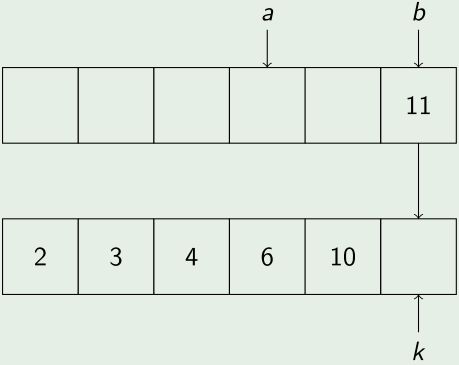
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 3$

$b = 5$

$k = 5$



Fusion

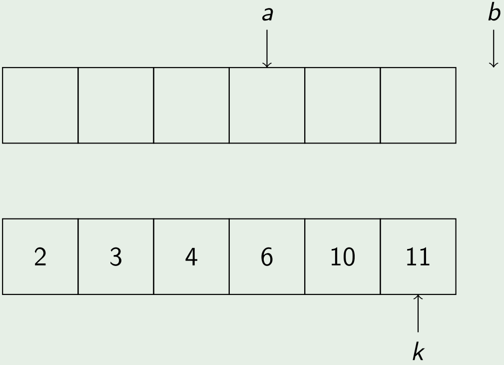
Exemple

Exemple (Fusion)

$a = 3$

$b = 6$

$k = 5$



Tri fusion

Complexité en nombre de comparaisons

★★★

Complexité

On note $\mathcal{C}(n)$ la complexité en nombre de comparaisons pour un tableau de taille n. On effectue les opérations suivantes :

- le tri de la partie gauche en $\mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right)$
- le tri de la partie droite en $\mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right)$
- la fusion en $\Theta(n)$

Alors, la complexité est determinée par :

$$\mathcal{C}(n) = 2 \times \mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

Et donc, en pire cas et en moyenne, la complexité est :

$$\mathcal{C}(n) = O(n \log n)$$

Tri fusion

En pratique

★

Tri en place

Il est possible d'avoir un tri fusion en place en remplaçant la fusion par une fusion en place. Toutefois, la complexité est alors en $O(n \log^2 n)$.

Listes

La version liste est toujours en $O(n \log n)$ puisqu'il n'y a pas de copie. Mais il faut prendre garde à l'implémentation pour conserver la stabilité.

Plan

Synthèse

Synthèse

Algorithme	Comparaisons		Stable ?	En place ?
	$\mathcal{C}_{\text{avg}}$	$\mathcal{C}_{\text{worst}}$		
Tri par sélection	$\Theta(n^2)$		☹	☺
Tri à bulles	$\Theta(n^2)$		☺	☺
Tri par insertion	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	☺	☺
Tri rapide	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	☹	☺
Tri fusion	$O(n \log n)$		☺	☹

Plan

En pratique

En pratique

En pratique, on utilise des combinaisons de tris. En effet, le tri par insertion est plus rapide que le tri rapide ou le tri fusion sur des tableaux jusqu'à 15–20 éléments. Donc :

- On applique un tri optimal au début (tri rapide ou tri fusion)
- Dès qu'on arrive sur des tableaux de taille inférieure à un seuil, on applique un tri par insertion

Tri rapide ou tri fusion ?

- Dans le cas de tableau, on utilisera plutôt le tri rapide qui est plus rapide que le tri fusion. Avec un choix judicieux de pivot, le pire cas arrivent suffisamment rarement.
- Dans le cas de listes chaînées, on utilise plutôt le tri fusion qui s'adapte naturellement aux listes chaînées.

Plan

Tri par dénombrement

Principe

★★★

Principe

Le **tri par dénombrement** ou **tri comptage** *(counting sort)* s'applique :

- quand les éléments sont des entiers indiscernables
- que l'intervalle des éléments $[0, m[$ est suffisamment petit.

Il consiste à compter les représentants de chaque valeur, comme dans un histogramme.

Tri par dénombrement

Algorithme

Algorithme

```
void array_counting_sort(int *data, size_t n, int m) {
  size_t *hist = calloc(m, sizeof(size_t));
  for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
    hist[data[i]] += 1;
  }
  size_t j = 0;
  for (int val = 0; val < m; ++val) {
    for (size_t k = 0; k < hist[val]; ++k) {
      data[j] = val;
      j++;
    }
  }
  free(hist);
}
```

Plan

Tri par dénombrement

Complexité

★★

Complexité

L'opération fondamentale est l'affectation (il n'y a aucune comparaison). Le nombre d'affectation pour tableau de taille n ne dépend pas du contenu du tableau. La complexité est donc de

$$\mathcal{C}(n) = O(n)$$

Remarque

La complexité en mémoire est de $O(m)$.

Septième partie

Arbres (1/2)

Plan de ce cours

15 Généralités

- Définitions
- Exemples concrets
- Parcours d'un arbre

16 Arbres binaires

- Définitions et propriétés
- Parcours préfixe, infixe, postfixe

Plan

Arbre

Définitions

Définition (Arbre)

Un **arbre** est :

- soit l'arbre vide, noté $\varnothing$
- soit un couple (e, c), appelé **nœud**, où e est un élément, appelée parfois **étiquette**, et c est une liste d'arbres non-vides, appelés **fils**

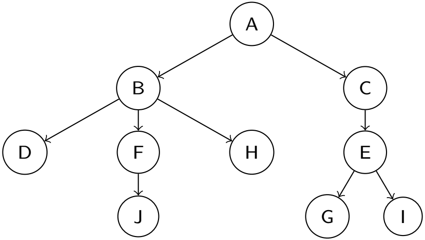
Définition (Feuille et nœud interne)

On distingue deux types de nœud :

- une **feuille** est un nœud qui n'a pas de fils
- un **nœud interne** est un nœud qui a au moins un fils

Arbre

Définitions



Exemple (Fils, feuilles, nœuds internes)

- B et C sont les fils de A
- D, H, G et I sont des feuilles
- A, B, C, E et F sont des nœuds internes

Arbre

Définitions

Définition (Père)

Le **père** d'un nœud *n* est le nœud dont *n* est le fils.

Définition (Frère)

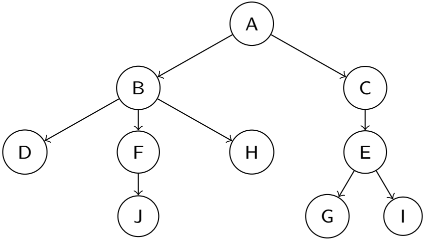
Les **frères** d'un nœud *n* sont les nœuds qui ont le même père que *n*.

Définition (Racine)

La **racine** de l'arbre est l'unique nœud qui n'a pas de père.

Arbre

Définitions



Exemple (Père, frères, racine)

- C est le père de E
- D et H sont les frères de F
- A est la racine de l'arbre

Arbre

Définitions

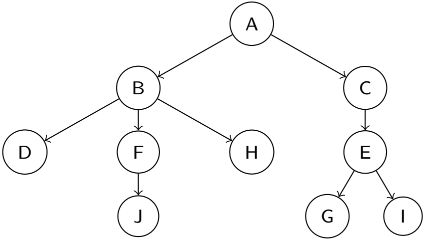
Définition (Chemin)

Le **chemin** jusqu'à un nœud n depuis la racine est la suite $[n_1, \ldots, n_p]$ où :

- n_1 est la racine
- $n_p = n$
- $\forall i \in [2, p]$, n_{i-1} est le père de n_i

Arbre

Définitions



Exemple (Chemin)

Le chemin jusqu'à G est :

$$[A, C, E, G]$$

Arbre

Définitions

★★★

Définition (Degré)

Le **degré** d'un nœud est le nombre de fils d'un nœud.

Définition (Profondeur d'un nœud)

La **profondeur** d'un nœud est le cardinal du chemin jusqu'à ce nœud.

Définition (Hauteur d'un arbre)

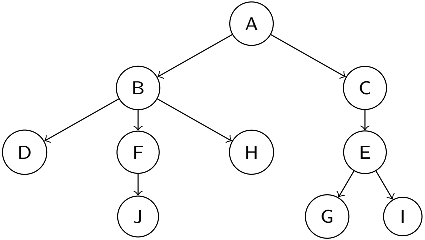
La **hauteur** d'un arbre est la profondeur maximale des feuilles de l'arbre.

Définition (Taille d'un arbre)

La **taille** d'un arbre est le nombre de nœuds d'un arbre.

Arbre

Définitions



Exemple (Profondeur, hauteur, taille)

- B est de degré 3.
- A a une profondeur de 1
- D et E ont une profondeur de 3
- la hauteur de l'arbre est 4
- la taille de l'arbre est 10

Arbre

Définitions

Définition (Arbre *n*-aire)

Un **arbre *n*-aire** est un arbre dont tous les nœuds sont de degré n au plus.

Définition (Cas particulier d'arbres *n*-aires)

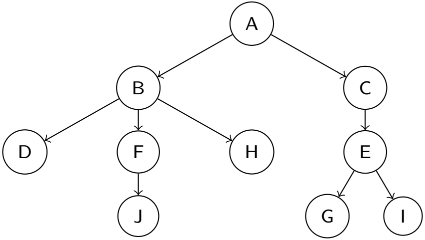
- Si $n = 2$, alors on parle d'**arbre binaire**
- Si $n = 3$, alors on parle d'**arbre ternaire**

Remarque

Une liste est un arbre unaire ($n = 1$).

Arbre

Définitions



Exemple (Arbre ternaire)

- l'arbre est ternaire

Arbre

Opérations élémentaires

Opérations élémentaires

- *constructeur*, noté `cons`, définie par :

$$\texttt{cons}(e, c) = (e, c)$$

- *test du vide*, noté `empty`, qui est définie par :

$$\texttt{empty}(t) = (t \overset{?}{=} \varnothing)$$

- *accès à l'étiquette*, noté `value`, qui est définie par :

$$\texttt{value}((e, c)) = e$$

- *accès aux fils*, noté `children`, qui est définie par :

$$\texttt{children}((e, c)) = c$$

Plan

15 Généralités

- Définitions
- Exemples concrets
- Parcours d'un arbre

16 Arbres binaires

- Définitions et propriétés
- Parcours préfixe, infixe, postfixe

Exemple d'arbre

Système de fichier

Exemple (Système de fichier)

- Un système de fichier est un arbre :
  - les nœuds internes sont les répertoires
  - les feuilles sont les autres fichiers
- Le nombre maximum de fils n'est pas limité, même s'il existe une limite physique.
- Dans un système Unix, la racine s'appelle /. La profondeur d'un fichier est le nombre de répertoire traversé depuis la racine plus deux (la racine et le fichier).

Exemple d'arbre

Document HTML

Exemple (Document HTML)

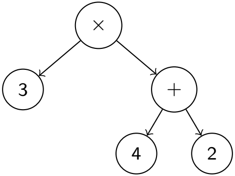
- Un document HTML est un arbre :
  - les nœuds internes sont les balises et/ou du texte
  - les feuilles sont les balises et/ou du texte
- Le nombre de fils dépend des balises.
- La racine est `<html>`

Exemple d'arbre

Expression arithmétique

Exemple (Expression arithmétique)

- Un expression arithmétique (utilisant $+$, $-$, $*$, $/$) est un arbre :
  - les nœuds internes sont les opérateurs
  - les feuilles sont les nombres
- Une expression est un arbre binaire.
- $3 \times (4 + 2)$ peut être représenté par :



Plan

15 Généralités

- Définitions
- Exemples concrets
- Parcours d'un arbre

16 Arbres binaires

- Définitions et propriétés
- Parcours préfixe, infixe, postfixe

Parcours d'un arbre

Définition

★★

Définition (Parcours)

Un **parcours** d'un arbre est la visite successive de tous les nœuds (feuilles et nœuds interne) dans un certain ordre et au cours duquel on effectue une opération. On distingue deux types de parcours :

- parcours en profondeur
- parcours en largeur

Parcours d'un arbre

Parcours en profondeur

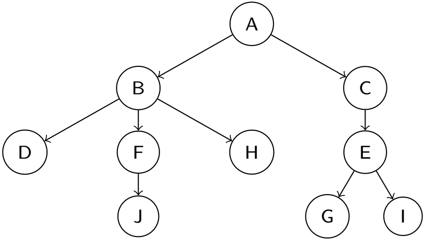
Parcours en profondeur

Le **parcours en profondeur** (*depth-first traversal*) d'un arbre permet de parcourir l'arbre de manière récursive en privilégiant les nœuds les plus profonds d'abord, c'est-à-dire qu'on va descendre dans l'arbre aussi profond que possible puis revenir et recommencer avec un autre fils, et ainsi de suite. On distingue :

- le **parcours en profondeur préfixe** où on traite l'étiquette du nœud avant de traiter les fils
- le **parcours en profondeur postfixe** où on traite l'étiquette du nœud après avoir traité les fils

Parcours d'un arbre

Parcours en profondeur



Exemple

Le parcours en profondeur préfixe de l'arbre est :

$$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow J \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow I$$

Le parcours en profondeur postfixe de l'arbre est :

$$D \rightarrow J \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$$

Parcours d'un arbre

Parcours en profondeur

★★

Parcours en profondeur

```
function DepthFirstTraversal($t$)
    if empty($t$) then
        return
    end if
    ComputePreOrder(value($t$))
    for $c$ in children($t$) do
        DepthFirstTraversal($c$)
    end for
    ComputePostOrder(value($t$))
end function
```

Parcours d'un arbre

Parcours en largeur

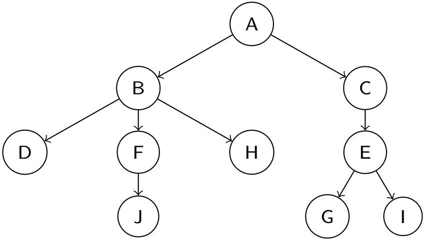
★★★

Parcours en largeur

Le **parcours en largeur** (*breadth-first traversal*) d'un arbre permet de parcourir l'arbre par ordre de profondeur croissant des nœuds, c'est-à-dire qu'on traite d'abord tous les nœuds de profondeur 1, puis tous les nœuds de profondeur 2, et ainsi de suite.

Parcours d'un arbre

Parcours en largeur



Exemple

Le parcours en largeur de l'arbre est :

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow E \rightarrow J \rightarrow G \rightarrow I$$

Parcours d'un arbre

Parcours en largeur

Parcours en largeur

```
function BreadthFirstTraversal($t$)
    if empty($t$) then
        return
    end if
    $q \leftarrow$ queue()
    enqueue($q, t$)
    while not empty($q$) do
        $u \leftarrow$ peek($q$)
        Compute(value($u$))
        for $c$ in children($u$) do
            enqueue($q, c$)
        end for
        dequeue($q$)
    end while
end function
```

Plan

15 Généralités
- Définitions
- Exemples concrets
- Parcours d'un arbre

16 Arbres binaires
- Définitions et propriétés
- Parcours préfixe, infixe, postfixe

Arbre binaire

★★★

Définition

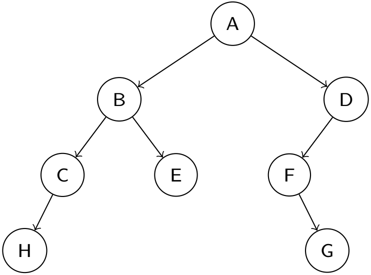
Définition (Arbre binaire)

Un **arbre binaire** est :

- soit l'arbre vide, noté $\varnothing$
- soit un triplet (e, l, r), appelé **nœud**, où e est un élément, appelée parfois **étiquette**, et l est un arbre binaire appelé **fils gauche** et r est un arbre binaire appelé **fils droit**.

Arbre binaire

Exemple



Exemple (Arbre binaire)

L'arbre ci-dessus peut être noté :

$$(A,(B,(C,(H,\varnothing,\varnothing),\varnothing),(E,\varnothing,\varnothing)),(D,(F,\varnothing,(G,\varnothing,\varnothing)),\varnothing))$$

Arbre binaire

Définitions

★★

Définition (Arbre binaire entier)

Un **arbre binaire entier** est un arbre binaire où chaque nœud a zéro ou deux fils.

Définition (Arbre binaire parfait)

Un **arbre binaire parfait** est un arbre binaire entier où toutes les feuilles ont la même profondeur.

Définition (Arbre binaire complet)

Un **arbre binaire complet** est un arbre binaire dans lequel tous les niveaux sont complets, excepté le dernier où toutes les feuilles sont rangées à gauche.

Taille et hauteur d'un arbre binaire ⋆⋆

Propriété d'un arbre binaire

Un arbre binaire de hauteur h et de taille n vérifie :

$$h \leq n \leq 2^h - 1$$

Remarques

- l'égalité à gauche a lieu pour un arbre binaire où tous les nœuds n'ont qu'un seul fils (sauf la feuille), c'est-à-dire une liste
- l'égalité à droite a lieu pour un arbre binaire parfait

Plan

15 Généralités
- Définitions
- Exemples concrets
- Parcours d'un arbre

16 Arbres binaires
- Définitions et propriétés
- Parcours préfixe, infixe, postfixe

Parcours dans un arbre binaire ⋆⋆⋆

Parcours dans un arbre binaire

Comme pour tout arbre, on peut effectuer des parcours en largeur et en profondeur sur un arbre binaire, où on traite les fils gauche et droit dans cet ordre. Toutefois, dans le cas d'un parcours en profondeur pour un arbre binaire, on distingue trois cas :

- le **parcours préfixe** où on traite l'étiquette du nœud avant de traiter le fils gauche
- le **parcours infixe** où on traite l'étiquette du nœud après avoir traité le fils gauche et avant de traiter le fils droit
- le **parcours postfixe** où on traite l'étiquette du nœud après avoir traité le fils droit

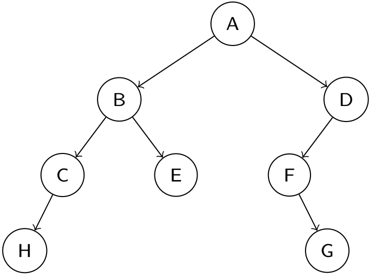
Parcours d’un arbre binaire ⋆⋆

Parcours d’un arbre binaire

```
function BinaryDepthFirstTraversal($t$)
    if empty($t$) then
        return
    end if
    ComputePreOrder(value($t$))
    DepthFirstTraversal(left($t$))
    ComputeInOrder(value($t$))
    DepthFirstTraversal(right($t$))
    ComputePostOrder(value($t$))
end function
```

Parcours d'un arbre binaire

Exemple



Exemple (Parcours préfixe, infixe, postfixe)

Le parcours préfixe est : $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow H \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G$
Le parcours infixe est : $H \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow D$
Le parcours postfixe est : $H \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow A$

Huitième partie

Arbres (2/2)

Plan de ce cours

Plan

17 Arbres binaires de recherche
- Définitions
- Opérations sur les arbres binaires de recherche

18 Tas
- Définition
- Opérations sur les tas
- Tri par tas

Arbre binaire de recherche

Définition

Définition (Arbre binaire de recherche)

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre. Un **arbre binaire de recherche** *(binary search tree)* d'éléments de E est un arbre binaire tel que :

- tous les nœuds de son sous-arbre gauche sont plus petits que sa racine, suivant la relation d'ordre ;
- tous les nœuds de son sous-arbre droit sont plus grands que sa racine, suivant la relation d'ordre ;
- son sous-arbre gauche et son sous-arbre droit sont des arbres binaires de recherche.

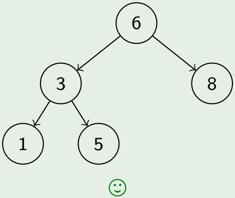
Arbre binaire de recherche

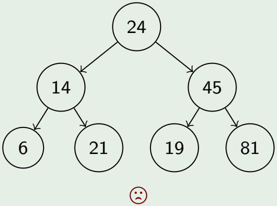
Exemples

Exemples (Ensembles E munis d'une relation d'ordre)

- l'ensemble des entiers, avec $<$ comme relation d'ordre
- l'ensemble des réels, avec $<$ comme relation d'ordre
- l'ensemble des chaînes de caractères, avec l'ordre lexicographique comme relation d'ordre

Exemples (Arbres binaires de recherche)





Arbre binaire de recherche

Remarque

★★

Remarque

Il existe deux types d'arbre binaire de recherche :

- les arbres binaires de recherche où on n'autorise pas les éléments égaux, ces arbres sont utilisés pour représenter des ensembles mathématiques *(set)* ;
- les arbres binaires de recherche où on autorise les éléments égaux, ces arbres sont utilisés pour représenter des multiensembles *(multiset)* ou sac *(bag)* ;

Parcours infixe

Le parcours infixe d'un arbre binaire de recherche rencontre l'ensemble des éléments dans l'ordre croissant.

Arbre binaire de recherche ⋆⋆

Implémentation

Implémentation

```
struct bst {
  int data;
  struct bst *left;
  struct bst *right;
};
```

Remarque

Chaque opération va devoir maintenir la structure en arbre binaire de recherche.

Plan

17 Arbres binaires de recherche

- Définitions
- Opérations sur les arbres binaires de recherche

18 Tas

- Définition
- Opérations sur les tas
- Tri par tas

Opérations sur les arbres binaires de recherche ⋆⋆

Opérations sur les arbres binaires de recherche

On définit trois opérations sur les arbres binaires de recherche

- la recherche d'un élément ;
- l'insertion d'un élément ;
- la suppression d'un élément.

Pour un arbre binaire de taille n et de hauteur h, on exprimera la complexité de ces opérations en fonction de n et h, en n'oubliant pas la relation :

$$h \leq n \leq 2^h - 1$$

Opérations sur les arbres binaires de recherche ★★★

Recherche d'un élément

Principe

Pour la *recherche* d'un élément e dans un arbre binaire de recherche, on utilise la propriété des arbres binaires de recherche et on va descendre dans l'arbre en comparant e à l'étiquette e' de chaque nœud.

- si $e = e'$, alors on a trouvé l'élément et la recherche a réussi ;
- si $e < e'$, alors e, s'il est présent, est dans le sous-arbre gauche ;
- si $e > e'$, alors e, s'il est présent, est dans le sous-arbre droit ;
- si on arrive sur un arbre vide, alors la recherche a échoué.

Opérations sur les arbres binaires de recherche ⋆⋆

Recherche d'un élément

Algorithme

```
bool bst_search(const struct bst *node, int data) {
  if (node == NULL) {
    return false;
  }
  if (data < node->data) {
    return bst_search(node->left, data);
  }
  if (data > node->data) {
    return bst_search(node->right, data);
  }
  return true;
}
```

Opérations sur les arbres binaires de recherche ⋆⋆

Recherche d'un élément

Complexité

L'opération fondamentale est la comparaison ($<$ et $>$). La fonction `bst_search` parcourt au plus une branche de l'arbre, donc au plus h nœuds. Elle fait au maximum deux comparaisons par nœud visité, c'est-à-dire $O(1)$. Donc, la complexité pour un arbre de taille n est :

$$\mathcal{C}(n) = O(h)$$

Deux cas se présentent :

- si l'arbre est équilibré, alors $\mathcal{C}(n) = O(\log n)$
- si l'arbre est déséquilibré, alors $\mathcal{C}(n) = O(n)$

Opérations sur les arbres binaires de recherche ★★★

Insertion d'un élément

Principe

Pour l'*insertion* d'un élément e dans un arbre binaire de recherche, on va descendre dans l'arbre pour insérer e dans une feuille (s'il n'est pas déjà présent dans l'abre). La descente dans l'arbre est quasi-identique à la recherche d'un élément dans un arbre binaire de recherche.

Opérations sur les arbres binaires de recherche ⋆⋆

Insertion d'un élément

Algorithme

```
struct bst *bst_insert(struct bst *node, int data) {
  if (node == NULL) {
    struct bst *tree = malloc(sizeof(struct bst));
    tree->left = tree->right = NULL; tree->data = data;
    return tree;
  }
  if (data < node->data) {
    node->left = bst_insert(node->left, data);
    return node;
  }
  if (data > node->data) {
    node->right = bst_insert(node->right, data);
    return node;
  }
  return node;
}
```

Opérations sur les arbres binaires de recherche ⋆⋆

Insertion d'un élément

Complexité

L'opération fondamentale est la comparaison ($<$ et $>$). La fonction `bst_insert` parcourt une branche de l'arbre, donc au plus h nœuds. Elle fait au maximum deux comparaisons par nœud visité, c'est-à-dire $O(1)$. Donc, la complexité pour un arbre de taille n est :

$$\mathcal{C}(n) = O(h)$$

Deux cas se présentent :

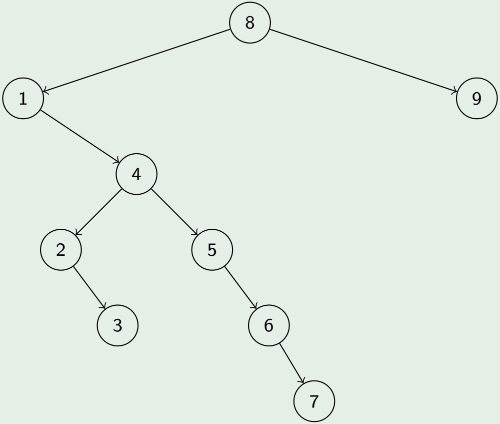
- si l'arbre est équilibré, alors $\mathcal{C}(n) = O(\log n)$
- si l'arbre est déséquilibré, alors $\mathcal{C}(n) = O(n)$

Opérations sur les arbres binaires de recherche ⋆

Insertion d'un élément

Exemple (Insertion dans un arbre binaire de recherche)

Arbre binaire de recherche après avoir inséré : $8, 1, 4, 2, 5, 9, 3, 6, 7$



Opérations sur les arbres binaires de recherche ★★★

Suppression d'un élément

Principe

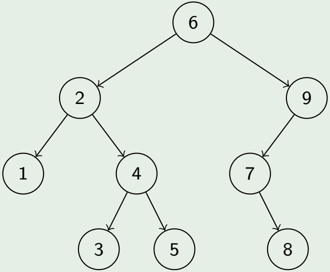
Pour la *suppression* d'un élément *e* dans un arbre binaire de recherche, on commence par chercher cet élément dans l'arbre, puis :

- si le nœud est une feuille, on supprime la feuille ;
- si le nœud a un fils unique, on remplace le nœud par ce fils ;
- si le nœud a deux fils, on remplace la valeur du nœud par le minimum du sous-arbre droit qu'on enlève du sous-arbre droit.

Opérations sur les arbres binaires de recherche

Suppression d'un élément

Exemple (Suppression dans un arbre binaire de recherche)



Opérations sur les arbres binaires de recherche ⋆⋆

Suppression d'un élément

Remarque

Le minimum du sous-arbre droit est toujours l'élément le plus à gauche, il n'a donc pas de fils gauche. Il se supprime donc facilement en le remplaçant par son fils droit (s'il existe).

Algorithme

```
struct bst *bst_delete_minimum(struct bst *node, struct bst **min) {
  if (node->left == NULL) {
    struct bst *right = node->right;
    node->right = NULL;
    *min = node;
    return right;
  }
  node->left = bst_delete_minimum(node->left, min);
  return node;
}
```

Opérations sur les arbres binaires de recherche ⋆⋆

Suppression d'un élément

Algorithme

```
struct bst *bst_delete(struct bst *node) {
  struct bst *left = node->left;
  struct bst *right = node->right;
  free(node); node = NULL;
  if (left == NULL && right == NULL) {
    return NULL;
  }
  if (left == NULL) {
    return right;
  }
  if (right == NULL) {
    return left;
  }
  right = bst_delete_minimum(right, &node);
  node->left = left; node->right = right;
  return node;
}
```

Opérations sur les arbres binaires de recherche ⋆⋆

Suppression d'un élément

Algorithme

```
struct bst *bst_remove(struct bst *node, int data) {
  if (node == NULL) {
    return NULL;
  }
  if (data < node->data) {
    node->left = bst_remove(node->left, data);
    return node;
  }
  if (data > node->data) {
    node->right = bst_remove(node->right, data);
    return node;
  }
  return bst_delete(node);
}
```

Opérations sur les arbres binaires de recherche ⋆⋆

Suppression d'un élément

Complexité

L'opération fondamentale est la comparaison ($<$ et $>$). Les fonctions `bst_remove`, `bst_delete`, `bst_delete_minimum` parcourent une branche de l'arbre, donc au plus h nœuds. Elles font au maximum deux comparaisons par nœud visité, c'est-à-dire $O(1)$. Donc, la complexité pour un arbre de taille n est :

$$\mathcal{C}(n) = O(h)$$

Deux cas se présentent :

- si l'arbre est équilibré, alors $\mathcal{C}(n) = O(\log n)$
- si l'arbre est déséquilibré, alors $\mathcal{C}(n) = O(n)$

Opérations sur les arbres binaires de recherche ⋆⋆

Synthèse

Synthèse

Opération	Arbre équilibré	Arbre déséquilibré
Recherche	$O(\log n)$	$O(n)$
Insertion	$O(\log n)$	$O(n)$
Suppression	$O(\log n)$	$O(n)$

Question

Peut-on s'assurer que les arbres binaires de recherche restent équilibrés ?

Remarque

La fonction de recherche ne modifie pas l'arbre donc, elle est identique pour tous les arbres binaires de recherche.

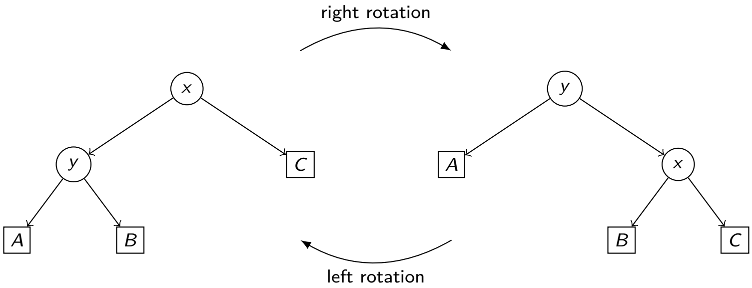
Arbres binaires équilibrés

Arbres binaires équilibrés

Il existe des variantes des arbres binaires de recherche qui permettent de conserver l'équilibre et donc d'assurer l'optimalité des opérations :

- les arbres AVL
- les arbres bicolores ou arbres rouge-noir

Dans les deux cas, pour chaque insertion ou suppression, on réalise des *rotations* pour conserver l'équilibre général de l'arbre.



Plan

Tas

Définitions

Définition (Arbre binaire complet)

Un **arbre binaire complet** est un arbre binaire dans lequel tous les niveaux sont complets, excepté le dernier où toutes les feuilles sont rangées à gauche.

Définition (Arbre partiellement ordonné)

Un **arbre partiellement ordonné** est un arbre dont l'étiquette de chaque nœud est supérieure ou égale à l'étiquette de ses fils.

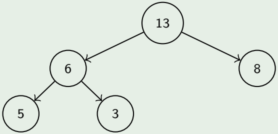
Définition (Tas)

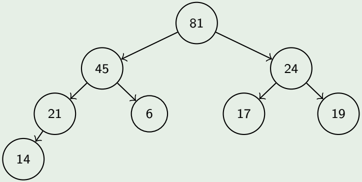
Un **tas** *(heap)* est un arbre binaire complet partiellement ordonné.

Tas

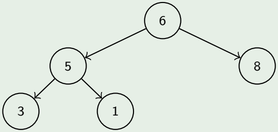
Exemples

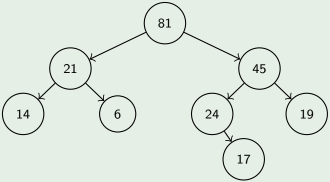
Exemples (Tas)





Exemples (Non-tas)





Tas

Représentation

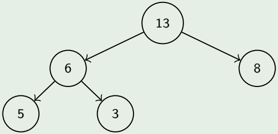
★★

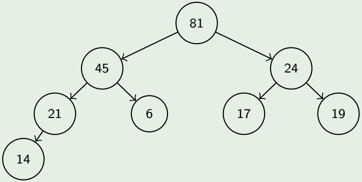
Représentation

On représente un tas à l'aide d'un tableau. Il suffit de lire les nœuds de haut en bas et de gauche à droite.

Exemples (Représentation d'un tas par un tableau)

Les tas suivants sont représentés respectivement par les tableaux $[13, 6, 8, 5, 3]$ et $[81, 45, 24, 21, 6, 17, 19, 14]$.





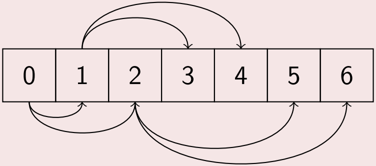
Tas

Représentation

Représentation

Si h est un tableau de taille p qui représente un tas :

- $h[0]$ est le **sommet** du tas, c'est-à-dire la racine de l'arbre
- $h[i]$ a pour père $h[\frac{i-1}{2}]$
- $h[i]$ a pour fils gauche $h[2 \times i + 1]$ (s'il existe)
- $h[i]$ a pour fils droit $h[2 \times i + 2]$ (s'il existe)
- si $i \geq \frac{p}{2}$ alors $h[i]$ est une feuille



Tas

Utilisation

Utilisation

Hormis le tri par tas, les tas sont utilisés pour représenter des **files de priorité** *(priority queue)*, c'est-à-dire des files dans laquelle on peut accéder à l'élement le plus prioritaire.

Plan

17 Arbres binaires de recherche
- Définitions
- Opérations sur les arbres binaires de recherche

18 Tas
- Définition
- Opérations sur les tas
- Tri par tas

Opérations sur les tas ⋆⋆

Opérations sur les tas

On définit deux opérations sur les tas :

- l'insertion d'un élément ;
- la suppression du sommet du tas.

Opérations sur les tas ⋆⋆⋆

Insertion d'un élément

Principe

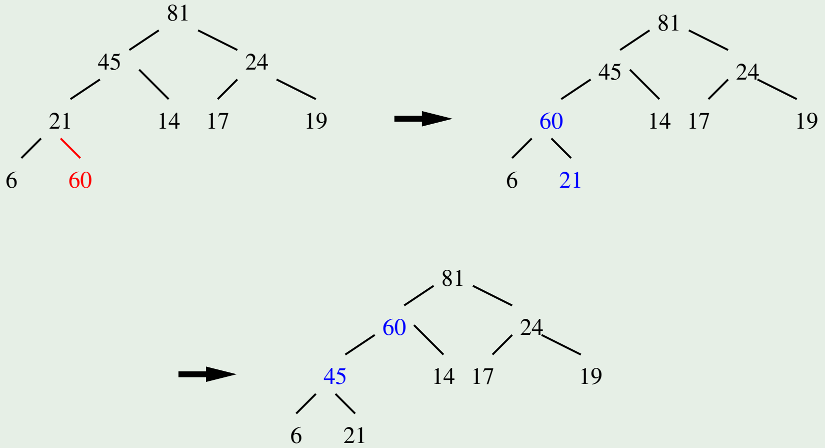
Pour l'*insertion* d'un élément e dans un tas :

1. on ajoute l'élément au dernier niveau de l'arbre ou au niveau suivant si celui-ci est complet, ce qui maintient l'arbre complet ;
2. on fait remonter la feuille en l'échangeant avec son père s'il est plus petit, puis à nouveau avec son père s'il est plus petit, et ainsi de suite, ce qui maintient l'arbre partiellement ordonné.

Opérations sur les tas

Insertion d'un élément

Exemples (Insertion d'un élément)



Opérations sur les tas

Insertion d'un élément

Algorithme

```
void heap_insert(int *heap, size_t n, int value) {
  size_t i = n;
  heap[i] = value;
  while (i > 0) {
    ssize_t j = (i - 1) / 2;
    if (heap[i] < heap[j]) {
      break;
    }
    array_swap(heap, i, j);
    i = j;
  }
}
```

Opérations sur les tas ⋆⋆

Insertion d'un élément

Complexité

L'opération fondamentale est la comparaison ($>$). La fonction `heap_insert` parcourt une branche de l'arbre, donc au plus h nœud. Elle fait une comparaison par nœud visité. Donc, la complexité pour un tas de taille n est :

$$\mathcal{C}(n) = O(h) = O(\log n)$$

Opérations sur les tas ⋆⋆⋆

Suppression du sommet

Principe

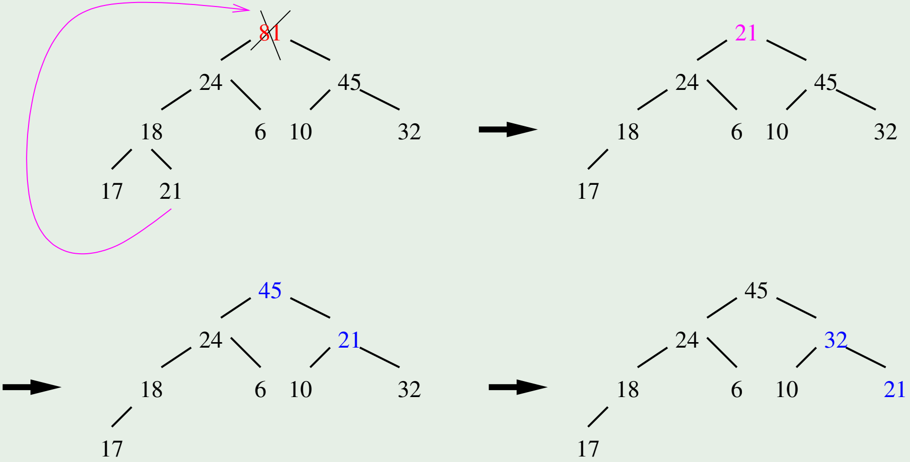
Pour la *suppression* du sommet dans un tas :

1. on supprime la racine et on la remplace par l'élément le plus en bas à droite, ce qui maintient l'arbre complet ;
2. on échange la racine avec le plus grand de ses fils si l'un d'entre eux est plus grand qu'elle, puis à nouveau avec son plus grand fils si l'un d'entre eux est plus grand qu'elle, et ainsi de suite, ce qui maintient l'arbre partiellement ordonné.

Opérations sur les tas

Suppression du sommet

Exemples (Suppression du sommet)



Opérations sur les tas

Suppression du sommet

★★★

Algorithme

```
void heap_remove_max(int *heap, size_t n) {
  heap[0] = heap[n - 1];
  size_t i = 0;
  while (i < (n - 1) / 2) {
    size_t lt = 2 * i + 1;
    size_t rt = 2 * i + 2;
    if (heap[i] > heap[lt] && heap[i] > heap[rt]) {
      break;
    }
    size_t j = (heap[lt] > heap[rt]) ? lt : rt;
    array_swap(heap, i, j);
    i = j;
  }
}
```

Opérations sur les tas ⋆⋆

Suppression du sommet

Complexité

L'opération fondamentale est la comparaison ($>$). La fonction `heap_remove_max` parcourt une branche de l'arbre, donc au plus h nœud. Elle fait au maximum deux comparaisons par nœud visité. Donc, la complexité pour un tas de taille n est :

$$\mathcal{C}(n) = O(h) = O(\log n)$$

Plan

17 Arbres binaires de recherche
- Définitions
- Opérations sur les arbres binaires de recherche

18 Tas
- Définition
- Opérations sur les tas
- Tri par tas

Tri par tas

Principe

★★★

Principe

Le *tri par tas* (*heapsort*) utilise le tableau comme un tas. Il s'effectue en deux étapes :

1. on transforme le tableau en tas par ajout successif des éléments
2. on retire les maximums sucessifs des éléments et on les place à la fin

Tri par tas

Algorithme

★★

Algorithme

```
void array_heap_sort(int *data, size_t n) {
  for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
    int value = data[i];
    heap_insert(data, i, value);
  }
  for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
    int value = data[0];
    heap_remove(data, n - i);
    data[n - i - 1] = value;
  }
}
```

Tri par tas

Complexité

Complexité

Pour chacune des étapes :

1. on fait n appel à `heap_insert` qui agit sur un tas d'au plus n éléments, pour un coût total de $O(n \log n)$;
2. on fait n appel à `heap_remove_max` qui agit sur un tas d'au plus n éléments, pour un coût total de $O(n \log n)$;

Le tri par tas a donc une complexité de :

$$\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}_{\text{worst}}(n) = \mathcal{C}_{\text{avg}}(n) = O(n \log n)$$

Le tri par tas est optimal.

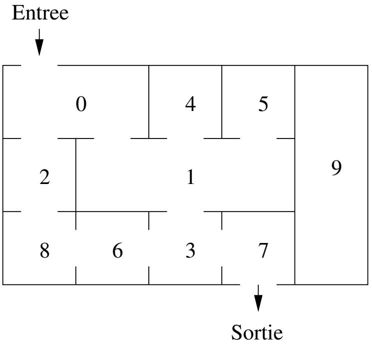
Neuvième partie

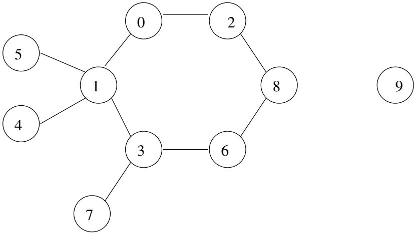
Graphes

Plan de ce cours

Plan

Exemple introductif





Exemple

On peut représenter le labyrinthe (à gauche) à l'aide d'un graphe (à droite)

Graphe, graphe orienté, graphe non-orienté ⋆⋆⋆

Définition (Graphe)

Un **graphe** est un ensemble de points *(vertex, vertices)*, égalements appelés sommets ou nœuds, reliés par des liens *(edge, edges)*. Plus précisément, on note le graphe $G = (V, E)$.

Définition (Graphe orienté et non-orienté)

- Un **graphe orienté** est un graphe dans lequel les liens sont unidirectionnels, on les appelle alors des **arcs**.
- Un **graphe non-orienté** est un graphe dans lequel les liens sont bidirectionnels, on les appelle alors **arêtes**.

Extrêmité, successeur, prédécesseur

Définitions (Extrêmité, degré)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté.

- Soit $e = [u, v] \in E$, u et v sont appelés les **extrêmités** de l'arête e, u et v sont dits **adjacents**
- Soit $u \in V$, on appelle **degré** de u, noté $d(u)$, le nombre d'arêtes ayant pour extrêmité u

Définitions (Sucesseur, prédécesseur, degré entrant, degré sortant)

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté.

- Soit $e = (u, v) \in E$, alors v est appelé le **successeur** de u et u est appelé le **prédécesseur** de v
- Soit $u \in V$, on appelle :
    - **degré entrant** de u, noté $d^{-}(u)$, le nombre de prédécesseurs de u
    - **degré sortant** de u, noté $d^{+}(u)$, le nombre de successeurs de u

Degré d'un graphe

Définition (Degré maximum d'un graphe)

Le **degré maximum d'un graphe** G, noté $\Delta(G)$ est le maximum des degrés des sommets du graphe.

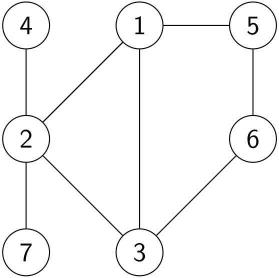
$$\Delta(G) = \max_{u \in V} d(u)$$

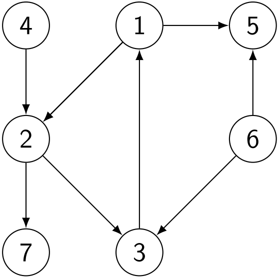
Définition (Degré minimum d'un graphe)

Le **degré minimum d'un graphe** G, noté $\delta(G)$ est le minimum des degrés des sommets du graphes.

$$\delta(G) = \min_{u \in V} d(u)$$

Exemples de graphes





Exemple (Graphe non-orienté)

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $E = \{[1, 2], [1, 3], [2, 3], [2, 4], [1, 5], [5, 6], [3, 6], [2, 7]\}$

Exemple (Graphe orienté)

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $E = \{(1, 2), (3, 1), (2, 3), (4, 2), (1, 5), (6, 5), (6, 3), (2, 7)\}$

Graphe simple

★★

Définition (Boucle)

Une **boucle** est une arête (ou un arc) ayant le même sommet comme extrêmités.

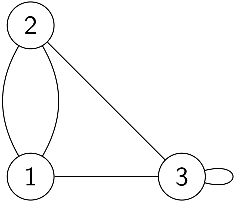
Définition (Arête multiple)

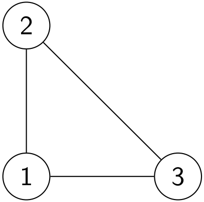
Une **arête multiple** est un ensemble d'arêtes parallèles, c'est-à-dire d'arêtes qui partagent les mêmes extrêmités.

Définition (Graphe simple)

Un **graphe simple** est un graphe sans boucle ni arête multiple.

Exemples de graphes





Exemple (Graphe non-simple)

- Arête multiple entre les sommets 1 et 2
- Boucle autour du sommet 3

Exemple (Graphe simple)

- Le graphe est simple : ni arête multiple, ni boucle

Chaîne, cycle, chemin, circuit ⋆⋆

Définition (Chaîne et cycle)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté.

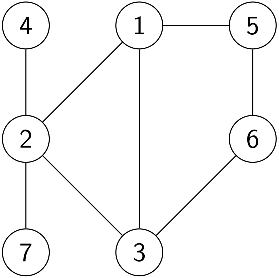
- Une **chaîne** de longueur l est une suite $(u_0, u_1, \dots, u_l)$ de $l + 1$ sommets tels que pour tout $k \in [0, l[$, (u_k, u_{k+1}) est une arête de G.
- Un **cycle** est une chaîne dont les sommets de départ et de fin sont identiques $(u_0 = u_l)$.

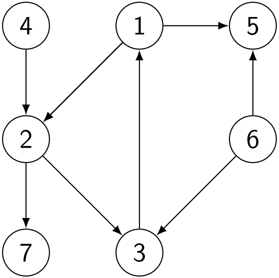
Définition (Chemin et circuit)

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté.

- Un **chemin** de longueur l est une suite $(u_0, u_1, \dots, u_l)$ de $l + 1$ sommets tels que pour tout $k \in [0, l[$, (u_k, u_{k+1}) est un arc de G.
- Un **circuit** est un chemin dont les sommets de départ et de fin sont identiques $(u_0 = u_l)$.

Exemples de graphes





Exemple (Chaîne et cycle)

- $(5, 1, 3, 2, 4)$ est un chaîne de longueur 4 entre 5 et 4
- $(3, 1, 5, 6, 3)$ est un cycle

Exemple (Chemin et circuit)

- $(6, 3, 1, 2, 7)$ est un chemin de longueur 4 entre 6 et 7
- $(1, 2, 3, 1)$ est un circuit

Connexité d'un graphe ⋆⋆

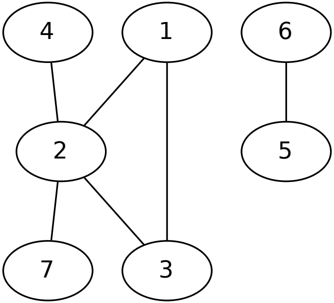
Définition (Graphe connexe)

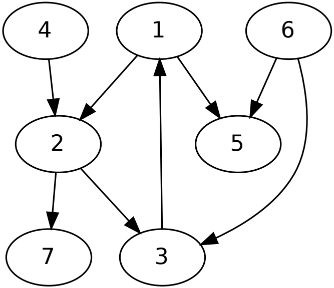
Un graphe non-orienté G est **connexe** si pour toute paire de sommets distincts (u, v), il existe une chaîne de u à v.

Définition (Graphe fortement connexe)

Un graphe orienté G est **fortement connexe** si pour toute paire de sommets distincts (u, v), il existe un chemin de u à v et un chemin de v à u.

Exemples de graphes





Exemple (Connexité)

- Le graphe n'est pas connexe

Exemple (Connexité)

- Le graphe est connexe
- Le graphe n'est pas fortement connexe

Graphe acyclique ou sans circuit

★★

Définition (DAG)

Un **DAG** *(Directed Acyclic Graph)* est un graphe connexe orienté sans circuit.

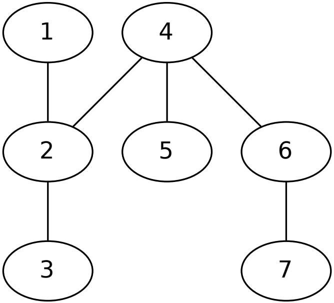
Définition (Arbre)

Un **arbre** est un graphe connexe non-orienté acyclique.

Remarque

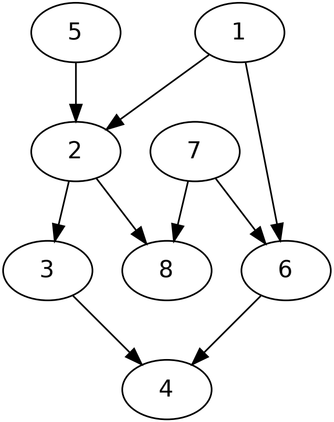
Si on choisit un sommet r quelconque dans un arbre, il est possible d'enraciner l'arbre en r, c'est-à-dire orienter toutes les arêtes de sorte qu'il existe un chemin de r à tous les autres nœuds. On obtient alors un **arbre enraciné** ou **arborescence**.

Exemples de graphes



Exemple (Arbre)

- Le graphe est un arbre



Exemple (DAG)

- Le graphe est un DAG

Graphe complet, densité

★★

Définition (Graphe complet)

Le **graphe complet** à n sommet, noté K_n, est le graphe dans lequel chaque sommet est relié à tous les autres sommets par une arête.

Lemme (Relation entre nombre de sommets et nombre d'arêtes)

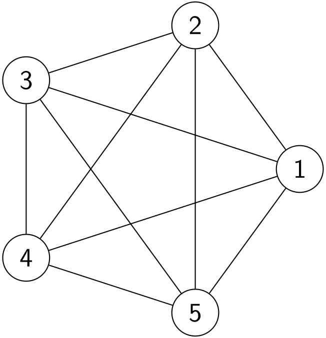
Pour un graphe simple connexe avec n sommets et m arêtes :

$$n - 1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Définition (Densité)

La densité d'un graphe avec n sommets et m arêtes est le rapport entre le nombre d'arêtes et le nombre d'arêtes possibles. C'est-à-dire : $\frac{2m}{n(n-1)}$

Exemples de graphes



Exemple (Graphe complet)

- K_5

Graphe valué

★★

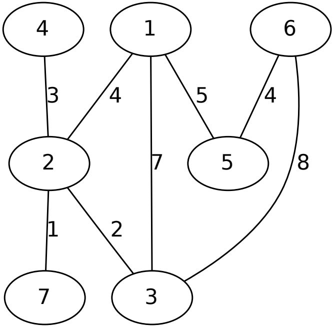
Définition (Graphe valué)

Un **graphe valué** ou graphe pondéré, est un graphe muni d'une fonction de valuation (ou fonction de coût) qui associe une valeur (ou coût ou poids) à chaque arête.

Remarque

Il est aussi possible de valuer les sommets.

Exemples de graphes



Exemple (Graphe valué)

- Le graphe est valué

Les graphes sont partout

Que peut-on modéliser avec un graphe ?

- Carte routière
- Relation sur un réseau social
- Réseau informatique
- Dépendances entre cibles dans un Makefile
- Automate à états fini
- . . .

Plan

Représentation d'un graphe

Généralités

Représentation d'un graphe

Il existe plusieurs manières de représenter un graphe :

- liste d'adjacence
- matrice d'adjacence
- matrice d'incidence

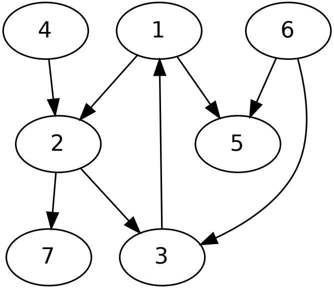
Représentation d'un graphe

Liste d'adjacence

★★

Liste d'adjacence

Pour un graphe $G = (V, E)$, la **liste d'adjacence** est un tableau A représentant l'ensemble des sommets, et où chaque case i du tableau donne la liste des sommets adjacents au sommet u_i.



Exemple (Liste d'adjacence)

- $A[1] = \{2, 5\}$
- $A[2] = \{3, 7\}$
- $A[3] = \{1\}$
- $A[4] = \{2\}$
- $A[5] = \varnothing$
- $A[6] = \{3, 5\}$
- $A[7] = \varnothing$

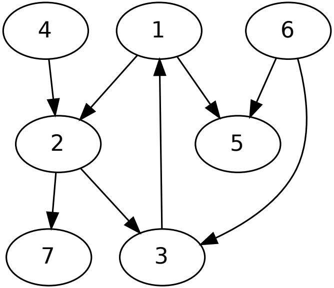
Représentation d'un graphe

★★

Matrice d'adjacence

Matrice d'adjacence

Pour un graphe $G = (V, E)$, la **matrice d'adjacence** M est une matrice de taille $|V| \times |V|$ telle que $M_{ij} = 1$ s'il existe un arc de u_i à u_j, c'est-à-dire si $(u_i, u_j) \in E$, et 0 sinon.



Exemple (Matrice d'adjacence)

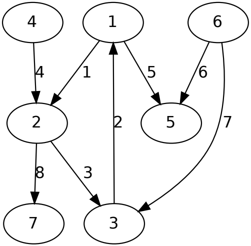
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Représentation d'un graphe ⋆⋆

Matrice d'incidence

Matrice d'incidence

Pour un graphe $G = (V, E)$, la **matrice d'incidence** M est une matrice de taille $|V| \times |E|$ telle que $M_{ij} = -1$ si l'arc e_j sort du sommet u_i, $M_{ij} = 1$ si l'arc e_j entre dans le sommet u_i, 0 sinon.



Exemple (Matrice d'incidence)

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plan

19 Généralités
- Définitions
- Représentations

20 Algorithmes
- Opérations
- Parcours d'un graphe
- Arbre couvrant

Opérations élémentaires sur un graphe ⋆⋆

Opérations élémentaires

- sommets adjacents, noté `adjacent`, défini par :

$$\texttt{adjacent}(G, u) = \{v \in V, [u, v] \in E\}$$

- sommets successeurs, noté `succ`, défini par :

$$\texttt{succ}(G, u) = \{v \in V, (u, v) \in E\}$$

- sommets prédécesseurs, noté `pred`, défini par :

$$\texttt{pred}(G, u) = \{v \in V, (v, u) \in E\}$$

Plan

19 Généralités
- Définitions
- Représentations

20 Algorithmes
- Opérations
- Parcours d'un graphe
- Arbre couvrant

Parcours d'un graphe

Définition

★★

Définition (Parcours)

Un **parcours** d'un graphe est la visite successive de tous les sommets dans un certain ordre et au cours duquel on effectue une opération. On distingue deux types de parcours :

- parcours en profondeur
- parcours en largeur

Remarques

- Contrairement aux arbres, un parcours de graphe nécessite de pouvoir marquer les sommets pour savoir s'ils ont déjà été visité ou pas, de manière à ne pas tourner en rond.
- Contrairement aux arbres, il n'y a pas un sommet particulier par lequel on commence le parcours, c'est pourquoi on indique toujours le sommet de départ du parcours

Parcours d'un graphe ★★

Parcours en profondeur

Parcours en profondeur

Le **parcours en profondeur** *(depth-first search, DFS)* d'un graphe permet de parcourir le graphe en privilégiant les sommets éloignés du départ. On parcoure le graphe de manière récursive.

Remarque

L'ordre dans lequel on parcoure les successeurs d'un sommet n'est pas défini a priori et va conditionner le parcours global.

Parcours d'un graphe

Parcours en profondeur

★★

Parcours en profondeur

```
function DepthFirstSearch($G$, $s$)
    Mark($s$)
    for $u$ in adjacent($G, s$) do
        if not IsMarked($u$) then
            DepthFirstSearch($G$, $u$)
        end if
    end for
end function
```

Parcours d'un graphe ★★

Parcours en largeur

Parcours en largeur

Le **parcours en largeur** *(breadth-first search, BFS)* d'un graphe permet de parcourir le graphe en privilégiant les sommets proche du départ. On parcoure le graphe de manière itérative.

Remarque

L'ordre dans lequel on parcoure les successeurs d'un sommet n'est pas défini a priori et va conditionner le parcours global.

Parcours d'un graphe

Parcours en largeur

★★

Parcours en largeur

```
function BreadthFirstSearch($G$, $s$)
    $q \leftarrow$ queue()
    Mark($s$) ; enqueue($q, s$)
    while not empty($q$) do
        $u \leftarrow$ peek($q$)
        for $v$ in adjacent($G, u$) do
            if not IsMarked($v$) then
                Mark($v$) ; enqueue($q, v$)
            end if
        end for
        dequeue($q$)
    end while
end function
```

Plan

19 Généralités
- Définitions
- Représentations

20 Algorithmes
- Opérations
- Parcours d'un graphe
- Arbre couvrant

Arbre couvrant

★★

Définition (Arbre couvrant)

Un arbre couvrant *(spanning tree)* A d'un graphe G est un graphe qui a les mêmes sommets que G, et dont les arêtes sont un sous-ensemble des arêtes de G et qui est un arbre, c'est-à-dire un graphe connexe sans cycle.

Remarques

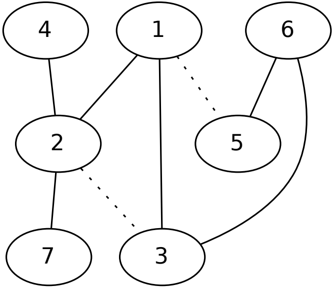
- On va voir ici comment construire un arbre couvrant dans le cas d'un graphe G non valué. Il existe des algorithmes qui permettent, pour un graphe G valué de contruire des arbres couvrants de poids minimal *(Minimum Spanning Tree)*.
- Les arbres couvrants sont utilisés notamment en réseau pour communiquer sur des réseaux locaux en évitant les boucles, grâce au Spanning Tree Protocol (STP).

Arbre couvrant

Principe

Arbre couvrant

L'idée pour construire un arbre couvrant est de parcourir le graphe en profondeur à partir d'un nœud r et de construire un tableau p dans lequel $p[i]$ est le père de i dans l'arbre.



Exemple (Arbre couvrant)

i	$p[i]$
4	-
2	4
1	2
3	1
6	3
5	6
7	2

Arbre couvrant

Algorithme

★★

Arbre couvrant

```
function SpanningTree($G$, $s$, $p$)
    Mark($s$)
    for $u$ in adjacent($G, s$) do
        if not IsMarked($u$) then
            $p[u] \leftarrow s$
            SpanningTree($G$, $u$, $p$)
        end if
    end for
end function
```

Dixième partie

Plus court chemin dans un graphe

Plan de ce cours

Plan

21 Problème
- Définition du problème

22 Algorithme de Bellman-Ford
- Présentation
- Analyse

23 Algorithme de Dijkstra
- Présentation
- Analyse

Plus court chemin dans un graphe ★★

Définition

Définition du problème

Problème *Plus court chemin dans un graphe*

Données : un graphe $G = (V, E)$ valué, un sommet initial s, et un sommet final f

Résultat : le plus court chemin depuis s jusqu'à f

Cette version du problème s'appelle *plus court chemin entre deux sommets (single-pair shortest path problem)*. Il existe des variantes :

- plus court chemin depuis une source *(single-source shortest path problem)* où on doit trouver le plus court chemin depuis une source vers tous les sommets du graphe
- plus court chemin entre tous les sommets *(all-pairs shortest path problem)* où on doit trouver le plus court chemin entre toutes les paires de sommets du graphe

Plus court chemin dans un graphe ★★

Court ?

Que signifie «court» ?

- Le graphe $G = (V, E)$ est valué, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $w : E \to \mathbb{R}$ qui donne la valuation de chaque arête. On l'appelle aussi le poids *(weight)*.
- Soit $P = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ un chemin dans G, on peut définir $w(P)$ par :

$$w(P) = \sum_{i=1}^{k-1} w(u_i, u_{i+1})$$

- Soit $\mathcal{P}_s^f$ l'ensemble des chemins entre les sommets s et f, le plus court chemin P^* entre s et f est défini par :

$$P^* = \arg \min_{P \in \mathcal{P}_s^f} w(P)$$

Plus court chemin dans un graphe

Considérations pratiques

Considérations pratiques

Nous allons voir deux algorithmes de plus court chemin (depuis une source) :

- l'algorithme de Bellman-Ford
- l'algorithme de Dijkstra

En pratique, ces algorithmes ne vont pas renvoyer un seul chemin mais tous les chemins depuis la source. De plus, on a souvent besoin de connaître les distances entre les sommets et la source. Donc, chaque algorithme calculera :

- un tableau π qui donne pour chaque sommet son prédecesseur dans le plus court chemin
- un tableau d qui donne pour chaque sommet sa distance depuis la source

Plus court chemin dans un graphe

Initialisation des résultats

Initialisation des résultats

```
function InitResults($d$, $\pi$)
    for $v \in V$ do
        $d[v] \leftarrow +\infty$
        $\pi[v] \leftarrow \varnothing$
    end for
end function
```

Plan

21 Problème
- Définition du problème

22 Algorithme de Bellman-Ford
- Présentation
- Analyse

23 Algorithme de Dijkstra
- Présentation
- Analyse

Algorithme de Bellman-Ford

Généralités

Généralités

- L'algorithme de Bellman-Ford a été inventé en 1956 par Lester Ford Jr, puis en 1958 par Richard Bellman.
- Il permet de trouver un plus court chemin depuis une source.
- Son grand avantage est qu'il s'applique à des graphes valué quelconque, et qu'il est capable de détecter des cycles négatifs.

Algorithme de Bellman-Ford

Algorithme

Algorithme

```
function $\textsc{BellmanFord}(G, s)$
    $\textsc{InitResults}(d, \pi)$
    $d[s] \leftarrow 0$
    for $i$ from $1$ to $|V| - 1$ do
        for $(u, v) \in E$ do
            if $d[v] > d[u] + w(u, v)$ then
                $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$ ; $\pi[v] \leftarrow u$
            end if
        end for
    end for
    return $\textsc{HasCycle}(G, d)$
end function
```

Algorithme de Bellman-Ford

Détection de cycle

★★

Détection de cycle

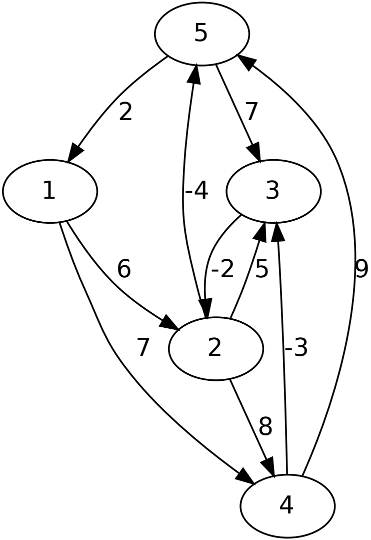
```
function HasCycle($G$, $d$)
    for $(u, v) \in E$ do
        if $d[v] > d[u] + w(u, v)$ then
            return true
        end if
    end for
    return false
end function
```

Remarque

Dans le cas où il n'y a pas de cycle, on peut arrêter la boucle principale s'il n'y a pas eu de mise à jour du tableau *d* au cours de la boucle précédente.

Algorithme de Bellman-Ford

Exemple



Plan

Algorithme de Bellman-Ford

Preuve

Idée de la preuve de l'algorithme

On prouve l'algorithme en montrant par récurrence qu'après la i^{e} boucle :

1. si $d[u]$ n'est pas $+\infty$, c'est la distance d'un chemin de s à u ;
2. s'il existe un chemin de s à u d'au plus i arêtes, alors $d[u]$ est au plus la distance du plus court chemin de s à u avec au plus i arêtes.

Algorithme de Bellman-Ford

Complexité

★★

Complexité

Pour un graphe $G = (V, E)$, l'algorithme effectue :

- $O(|V|)$ opérations pour l'initialisation
- $O(|V| \times |E|)$ opérations pour la partie principale
- $O(|E|)$ opérations pour la détection de cycle

Donc, la complexité de l'algorithme de Bellman-Ford est :

$$O(|V| \times |E|)$$

Pour un graphe dense, la complexité de Bellman-Ford est :

$$O(|V|^3)$$

Plan

21 Problème

- Définition du problème

22 Algorithme de Bellman-Ford

- Présentation
- Analyse

23 Algorithme de Dijkstra

- Présentation
- Analyse

Algorithme de Dijkstra

Généralités

Généralités

- L'algorithme de Dijkstra a été inventé en 1956, et publié en 1959 par Edsger Dijkstra.
- Il permet de trouver un plus court chemin depuis une source.
- Il a une meilleure complexité que l'algorithme de Bellman-Ford mais il ne s'applique qu'au graphe valué avec des valeurs positives.

Algorithme de Dijkstra

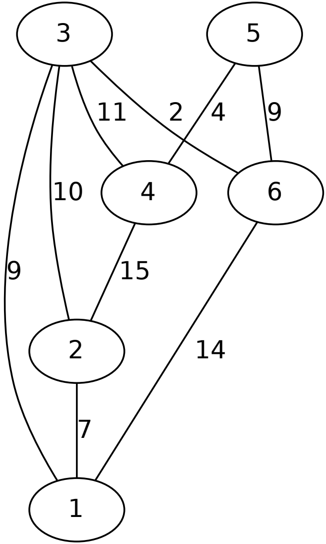
Algorithme

Algorithme

```
function $\textsc{Dijkstra}(G, s)$
    $\textsc{InitResults}(d, \pi)$
    $d[s] \leftarrow 0$ ; $\textsc{Init}(q, V)$
    while not $\texttt{empty}(q)$ do
        $u \leftarrow \textsc{ExtractMin}(q)$
        for $v \in \texttt{succ}(u)$ do
            if $d[v] > d[u] + w(u, v)$ then
                $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$ ; $\pi[v] \leftarrow u$
                $\textsc{DecreaseKey}(q, v)$
            end if
        end for
    end while
end function
```

Algorithme de Dijkstra

Exemple



Plan

Algorithme de Dijkstra

Complexité

Complexité

Pour un graphe $G = (V, E)$, l'algorithme parcoure chaque sommet une fois dans la boucle principale et parcoure au maximum une fois chaque arête dans la condition. Donc, l'algorithme effectue :

- $O(|V|)$ appels à ExtractMin
- $O(|E|)$ appels à DecreaseKey

Tout dépend donc de la manière dont on implémente la structure q. Il est possible d'utiliser :

- une liste chaînée
- un tas

Algorithme de Dijkstra

Complexité avec une liste chaînée

Complexité avec une liste chaînée

Avec une liste chaînée :

- la fonction ExtractMin a une complexité en $O(|V|)$
- la fonction DecreaseKey a une complexité en $O(1)$

Donc, la complexité de l'algorithme de Dijkstra est :

$$O(|V|^2 + |E|) = O(|V|^2)$$

Algorithme de Dijkstra ⋆⋆

Complexité avec un tas

Complexité avec un tas

Avec un tas :

- la fonction ExtractMin a une complexité en $O(\log|V|)$
- la fonction DecreaseKey a une complexité en $O(\log|V|)$

Donc, la complexité de l'algorithme de Dijkstra est :

$$O((|V| + |E|) \times \log|V|)$$

Remarque

Il existe des tas dont l'implémentation permet d'avoir une fonction DecreaseKey en $O(1)$ amorti, ce qui amène à une complexité de $O(|V|\log|V| + |E|)$.

Onzième partie

Le langage C++

Plan de ce cours

24 Le langage C++
- Généralités
- Éléments du langage
- Éléments de la bibliothèque standard

Plan

24 Le langage C++

- Généralités
- Éléments du langage
- Éléments de la bibliothèque standard

Historique du C++

Historique du C++

- 1979 : Création du «C with Classes», par Bjarne Stroustrup
- 1983 : «C with Classes» devient C++
- 1998 : Normalisation par l'ISO, C++98
- 2003 : Mise à jour de la norme : C++03
- 2007 : Ajout d'un rapport technique : C++ TR1
- 2011 : Mise à jour de la norme : C++11
- 2014 : Mise à jour mineure de la norme : C++14
- 2017 : Mise à jour de la norme : C++17
- 2020 : Mise à jour prévue de la norme : C++20

Langage C++

Langage C++

- Compatible avec C (largement)
- Programmation procédurale
- Programmation orienté objet
- Programmation générique
- Et bien plus !

Quelques pointeurs utiles

Quelques pointeurs utiles

- Le langage C++, Henri Garreta
  `http://henri.garreta.perso.luminy.univmed.fr/`
- C++ Reference
  `http://en.cppreference.com/w/cpp`
- C++ FAQ
  `http://isocpp.org/faq`

Plan

Éléments bas niveau du langage

Éléments bas niveau du langage

- Type `bool`
- Opérateurs `new` et `delete`

```
int *ptr = new int;
delete ptr;
```

- Valeurs par défaut pour les paramètres de fonctions

```
int myfunc(int a, float b = 3.14, bool c = false);
```

- Fonctions `inline`

```
inline int abs(int x) { return x > 0 ? x : -x; }
```

Espaces de noms

Espaces de noms

- Possibilité de définir des espaces de nom via `namespace`
  ```
  namespace foo { struct bar { int baz; }; }
  foo::bar var;
  ```
- La bibliothèque standard est dans l'espace de nom `std`

Remarque

- Ne pas utiliser `using namespace std;` comme on le voit dans beaucoup de tutoriels !
- Les espaces de noms ont une utilité !

Références

Références

- Pour tout type `T`, il est possible de définir une référence sur `T`, noté `T&`
- Une référence est une sorte de pointeur non-nul, mais s'utilise comme une variable normale
  ```
  int i = 1;
  int& j = i;
  j = 2;
  ```
- Utilisés dans les paramètres d'une fonction ou pour le type de retour
  ```
  void do(const BigType& obj);
  int& get(const char *name);
  get("toto") = 3;
  ```

Classes

Déclaration

Déclaration d'une classe

```
class Foo {
public:
  Foo(); // constructeur
  Foo(const Foo&); // constructeur par copie
  ~Foo(); // destructeur

  Foo& operator=(const Foo&); // affectation

  void public_method();
  void const_method() const;
private:
  void private_method();
};
```

Classes

Déclaration

Remarques

- `class` et `struct` sont synonymes. Seule différence : la visibilité par défaut est `public` pour `struct` et `private` pour `class`.
- Les méthodes ne sont pas polymorphes par défaut, nécessité de mettre le mot-clef `virtual`

```
class Bar {
public:
  void method(); // normale
  virtual void virtual_method(); // virtuelle
  virtual void pure_method() = 0; // virtuelle pure
}
```

Classes

Déclaration

Héritage

- Héritage simple

```
class Baz : public Bar {
public:
  void method();
  virtual void virtual_method();
  virtual void pure_method();
}
```

- Héritage multiple (à éviter)

```
class Qux : public Baz, public Foo {
}
```

Classes

Définition

Définition

```
Foo::Foo() { }

Foo::~Foo() { }

void Foo::public_method() { }

void Foo::const_method() const { }

void Foo::private_method() { }
```

Classes

Initialisation

Initialisation

```
class Toto {
public:
  Toto(int data);
private:
  int m_data;
}

Toto:Toto(int data) {
  m_data = data; // NON !
}

Toto:Toto(int data) : m_data(data) // OUI !
{ }
```

Classes

`this`

`this`

- Dans une méthode d'une classe `C`, `this` a le type `C*` pour les méthodes non-`const` et `const C*` pour les méthodes `const`
- Rarement utilisé

Templates

Templates

- Les templates permettent une programmation générique
- Template de fonctions

```
template<typename T>
T max(T a, T b) {
  if (a < b) {
    return b;
  }
  return a;
}
```

Templates

Templates

- Template de classes

```
template<typename T>
class Gruik {
  Gruik();
private:
  T m_data;
}
```

Exceptions

Exceptions

- Il existe des exceptions en C++
- `throw` pour envoyer une exception
- `try { ... } catch (...) { ... }`
- Pas de déclaration systématique pour les fonctions
- Des exceptions standards
- À éviter au maximum !

Run-time Type Information (RTTI)

Run-time Type Information (RTTI)

- Il est possible d'accéder à des informations sur les classes à l'exécution
- `typeid(expr)`
- Ajoute un surplus en terme de mémoire
- Peut être désactivé à la compilation avec `-fno-rtti`

Transtypage

Transtypage

- Plus sûr qu'en C
- `static_cast<T>(expr)` : à peu près l'équivalent du transtypage C `(T) expr`
- `dynamic_cast<T>(expr)` : transtype des types de classes filles avec vérification à l'exécution (en utilisant le RTTI)
- `const_cast<T>(expr)` : pour changer l'attribut `const` d'une expression
- `reinterpret_cast<T>(expr)` : pour des choses dangereuses (pointeur vers entier, etc)

Plan

24 Le langage C++

- Généralités
- Éléments du langage
- Éléments de la bibliothèque standard

`<string>`

`<string>`

- Un vrai type chaîne de caractère : `std::string`
- Avec toutes les opérations attendues :
  - copie
  - sous-chaîne
  - recherche
  - concaténation
- En fait, `std::basic_string<char>`

`<iostream>`

`<iostream>`

- Bibliothèque d'entrée/sortie à base de flux
- Types disponibles :
    - `std::ostream` : flux en écriture, en particulier `std::ofstream`
    - `std::istream` : flux en lecture, en particulier `std::ifstream`
- Fondée sur les opérateurs d'extraction (>>) et d'envoi (<<) dans le flux, définis pour tous les types de base et définissable pour les types utilisateurs `std::ostream& operator<<(std::ostream&, const Foo&);`
- `std::cin`, `std::cout`, `std::cerr` : flux standard

<iostream>

Hello World

```
#include <iostream>
int main() {
  std::cout << "Hello World!" << std::endl;
  return 0;
}
```

Hello World

```
#include <iostream>
int main() {
  std::cout << "Alice a " << 20 << " ans";
  std::cout << " et mesure " << 1.70 << "m" << std::endl;
  return 0;
}
```

Standard Template Library

Standard Template Library (STL)

- Bibliothèque avec
  - des conteneurs
  - des itérateurs
  - des algorithmes génériques
- Conçue par Alexander Stepanov en 1992–1993
- Fondée sur les templates
- Une brique de base essentielle à utiliser !

Standard Template Library

Conteneurs

Conteneurs séquentiels

- `std::vector<T>` dans `<vector>`
- `std::list<T>` dans `<list>`
- `std::deque<T>` dans `<deque>`

Conteneurs associatifs

- `std::set<T>` et `std::multiset<T>` dans `<set>`
- `std::map<K,V>` et `std::multimap<K,V>` dans `<map>`

Adaptateurs de conteneurs

- `std::stack<T>` dans `<stack>`
- `std::queue<T>` et `std::priority_queue<T>` dans `<queue>`

Standard Template Library

Itérateurs

Itérateurs

- Un itérateur est une abstration d'un pointeur
- Chaque conteneur `C<T>` définit un type itérateur `C<T>::iterator`
- Chaque conteneur a des méthodes `begin()` et `end()` qui renvoie respectivement un itérateur sur le début et la fin du conteneur
- Permet de parcourir les données d'un conteneur
  `for (C<T>::iterator it = c.begin(); it != c.end(); ++it)`
- L'accès à la donnée se fait par l'opérateur `*` (`*it`) ou par l'opérateur `->` (`it->field`) pour l'accès aux champs ou aux méthodes de la donnée de type `T`

Standard Template Library

Algorithmes génériques

Algorithmes génériques

- Algorithmes avec template prenant en paramètre des itérateurs
- Non-modifiant : `std::for_each`, `std::count`, `std::find`, etc.
- Modifiant : `std::copy`, `std::transform`, `std::reverse`, `std::unique`, etc.
- Partition et tri : `std::partition`, `std::sort`
- Recherche dichotomique : `std::lower_bound`, `std::upper_bound`, `std::binary_search`
- Ensemble ordonné : `std::merge`, `std::includes`, etc.
- Numérique : `std::accumulate`, `std::inner_product`, `std::partial_sum`

Bibliothèque standard du C

Bibliothèque standard du C

- Accès aux fonctions de la bibliothèque standard du C
- En-tête spéciaux : `<cstdio>`, `<cstdlib>`, `<cmath>`, `<cassert>`
- Plongé dans l'espace de nom `std`. Exemple : `std::printf`

C'est tout pour le moment. . .

Des questions ?