

Notas de Aula

Cálculo Diferencial e Integral II - CT
Departamento de Matemática – UFPI

Estas notas de aula foram elaboradas para apoiar a disciplina Cálculo Diferencial e Integral II - CT da Universidade Federal do Piauí. Trata-se de um material de apoio, e não de um livro didático. Algumas definições, demonstrações e exemplos não estão aqui incluídos, pois serão discutidos diretamente em sala de aula. Este material encontra-se em constante desenvolvimento e poderá ser aprimorado em futuras edições.

A versão mais atualizada deste material pode ser encontrada em: <https://vitalianoamaral.github.io>
No menu, clique em **Ensino**, depois em **Graduação** e, em seguida, em **Disciplinas Ministradas**. Localize a disciplina **Cálculo diferencial e integral II-CT** e clique no link **Notas de Aula**.

Prof. Vitaliano de Sousa Amaral
Departamento de Matemática – UFPI

24 de agosto de 2025

Sumário

Sumário	3
1 Integral Imprópria	5
1.1 Revisão: Integral Definida	5
1.1.1 Principais propriedades	6
1.2 Integrais Impróprias	7
1.2.1 Integrais em Intervalos Infinitos	7
1.2.2 Integrais com Descontinuidade	9

Capítulo 1

Integral Imprópria

1.1 Revisão: Integral Definida

Consideramos um intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Uma partição de $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos de $[a, b]$, $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ tais que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. A partição P divide o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]$, como podemos ver na Figura 1.1.

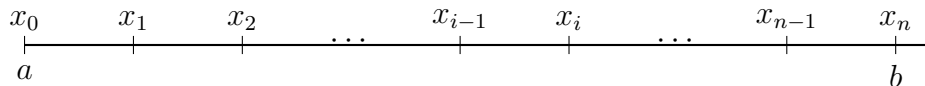


Figura 1.1

O i -ésimo subintervalo da partição P é $[x_{i-1}, x_i]$ e seu comprimento é representado por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 1.1.1. *Uma partição do intervalo fechado $[0, 10]$ é o conjunto $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Observamos que a partição P divide o intervalo $[0, 10]$ em 5 subintervalos $[0, 2], [2, 4], [4, 6], [6, 8]$ e $[8, 10]$. Veja ilustração geométrica na Figura 1.2.*

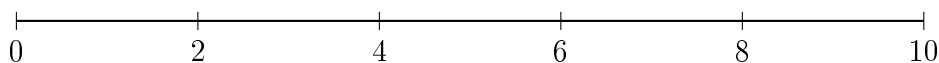


Figura 1.2

Seja uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ escolhamos c_i , $i = 1, \dots, n$. Denotamos por $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$.

Veja ilustração geométrica na Figura 1.3 a seguir.

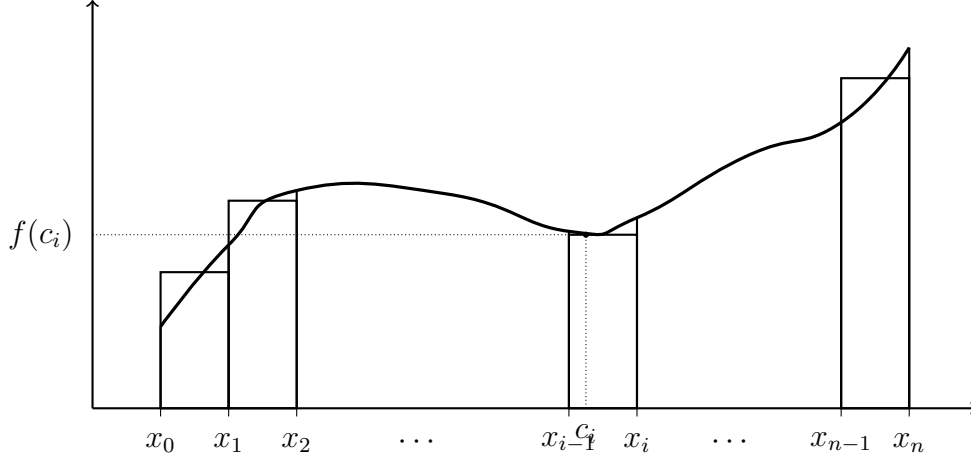


Figura 1.3

Consideremos o retângulo de base medindo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$ onde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (Veja Figura 1.3).

Na ilustração geométrica, consideramos uma função positiva no intervalo $[a, b]$. Observe que a soma das áreas dos retângulos aproxima a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo x . Alguns retângulos possuem parte de sua área acima do gráfico e outros possuem parte abaixo, de forma que a aproximação pode não ser exata quando temos um número finito de partições. No entanto, quando fazemos o comprimento de todos os subintervalos da partição tender a zero, isto é, quando tomamos infinitas partições cada vez mais finas, a soma infinita das áreas desses retângulos coincide exatamente com a área entre o gráfico de f e o eixo x .

Essa é apenas uma noção intuitiva do que chamamos de **integral definida**; a seguir apresentamos sua definição formal.

Definição 1.1.1. Considere uma partição P e $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Dizemos que f integrável em $[a, b]$ se $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ existe, e denotamos por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

A seguir apresentamos as principais propriedades da integral definida.

1.1.1 Principais propriedades

Sejam f e g funções possuindo integral definida em $[a, b]$ e $k \in \mathbb{R}$ um constante. As integrais definidas possuem as seguintes propriedades:

$$1. \int_a^b [kf(x) + g(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

2. Para $c \in [a, b]$, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

3. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

4. Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

5. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então: $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

O **Teorema Fundamental do Cálculo** estabelece a conexão entre derivação e integração.

Theorem 1.1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se f é contínua em $[a, b]$ e F é uma primitiva de f (isto é, $F'(x) = f(x)$), então:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Este teorema fornece um método prático para calcular integrais definidas, evitando o uso direto da Soma de Riemann.

Outras propriedades serão apresentadas na seção sobre Integrais Impróprias.

1.2 Integrais Impróprias

Na definição de integral definida, consideramos a função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Agora, vamos estender essa definição para duas situações importantes:

1. Quando a função está definida em intervalos infinitos, como:

$$[a, +\infty), \quad (-\infty, b] \quad \text{ou} \quad (-\infty, +\infty).$$

2. Quando a função apresenta descontinuidade em algum ponto do intervalo de integração.

Nesses casos especiais usamos as **integrais impróprias**.

1.2.1 Integrais em Intervalos Infinitos

Para motivar a definição, vamos considerar um exemplo.

Exemplo 1.2.1. Calcular a área da região R limitada pelo gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$, com $x \geq 1$, e o eixo x .

Primeiro, observamos que a região é ilimitada no sentido horizontal. Se definirmos R_b como a parte da região R entre $x = 1$ e $x = b$ ($b > 1$), temos:

$$A(R_b) = \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Ver Figura 1.4.

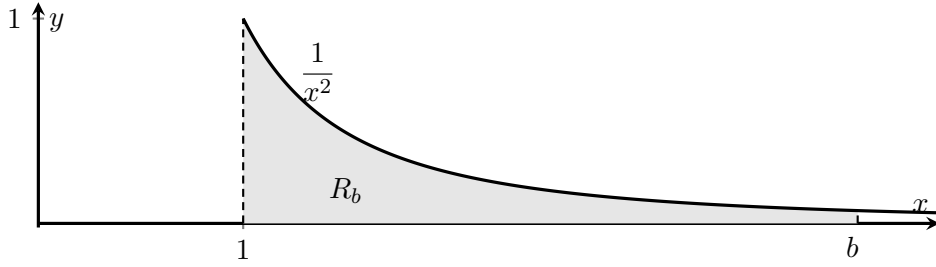


Figura 1.4: Área R_b sob $y = \frac{1}{x^2}$ de $x = 1$ a $x = b$.

À medida que $b \rightarrow +\infty$, essa área se aproxima da área total da região R :

$$A(R) = \lim_{b \rightarrow +\infty} A(R_b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Ver Figura 1.5.

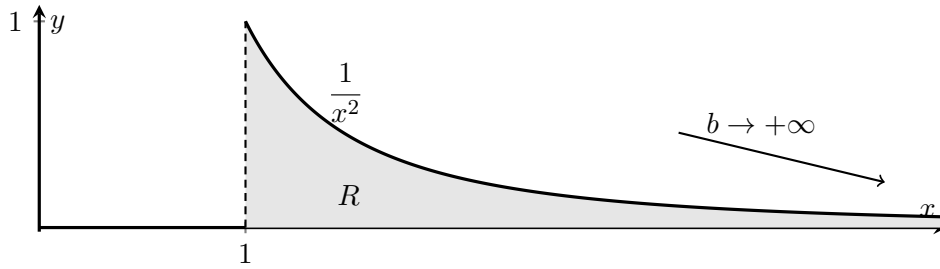


Figura 1.5: Limite $b \rightarrow +\infty$ resultando em $A(R) = 1$.

Esse exemplo motiva a seguinte definição.

Definição 1.2.1. Seja f uma função integrável em $[a, +\infty)$. Definimos:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Se f é uma função integrável em $(-\infty, b]$. Definimos:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Se f é uma função integrável em \mathbb{R} . Definimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx.$$

Se o limite existir, dizemos que a integral imprópria **converge**. Caso contrário, dizemos que ela **diverge**.

1.2.2 Integrais com Descontinuidade

Agora, consideremos o caso em que a função apresenta descontinuidade em um ponto do intervalo de integração.

Exemplo 1.2.2. Calcular a área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no intervalo $(0, 9]$.

Como a função não está definida em $x = 0$, definimos:

$$A(R_\varepsilon) = \int_\varepsilon^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_\varepsilon^9 = 6 - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, obtemos:

$$A(R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A(R_\varepsilon) = 6.$$

De forma geral:

Definição 1.2.2. Se f for integrável em $(a, b]$, definimos:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_\varepsilon^b f(x) dx.$$

Se f for integrável em $[a, b)$:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow b^-} \int_a^\varepsilon f(x) dx.$$

Se f tiver descontinuidade em $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow c^-} \int_a^\varepsilon f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow c^+} \int_\varepsilon^b f(x) dx.$$