

# Notas de Aula

Cálculo Diferencial e Integral II - CT  
Departamento de Matemática – UFPI

*Estas notas de aula foram elaboradas para apoiar a disciplina Cálculo Diferencial e Integral II - CT da Universidade Federal do Piauí. Trata-se de um material de apoio, e não de um livro didático. Algumas definições, demonstrações e exemplos não estão aqui incluídos, pois serão discutidos diretamente em sala de aula. Este material encontra-se em constante desenvolvimento e poderá ser aprimorado em futuras edições.*

**A versão mais atualizada deste material pode ser encontrada em:** <https://vitalianoamaral.github.io>  
No menu, clique em **Ensino**, depois em **Graduação** e, em seguida, em **Disciplinas Ministradas**. Localize a disciplina **Cálculo diferencial e integral II-CT** e clique no link **Notas de Aula**.

Prof. Vitaliano de Sousa Amaral  
Departamento de Matemática – UFPI

5 de outubro de 2025



# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>3</b>
<b>1 Integral Imprópria</b>	<b>5</b>
1.1 Revisão: Integral Definida . . . . .	5
1.1.1 Principais propriedades . . . . .	6
1.2 Integrais Impróprias . . . . .	7
1.2.1 Integrais em Intervalos Infinitos . . . . .	7
1.2.2 Integrais com Descontinuidade . . . . .	9
1.3 Critérios de convergência . . . . .	9
<b>2 Sequência e série de números reais</b>	<b>13</b>
2.1 Sequências de Números Reais . . . . .	13
2.1.1 Exercícios . . . . .	14
2.1.2 Limite de Sequências . . . . .	14
2.2 Séries de Números Reais . . . . .	15
2.2.1 Testes de Convergência de Séries . . . . .	18



# Capítulo 1

## Integral Imprópria

### 1.1 Revisão: Integral Definida

Consideramos um intervalo fechado e limitado  $[a, b]$ . Uma partição de  $[a, b]$  é um conjunto finito de pontos de  $[a, b]$ ,  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$  tais que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . A partição  $P$  divide o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ ,  $[x_{n-1}, x_n]$ , como podemos ver na Figura 1.1.

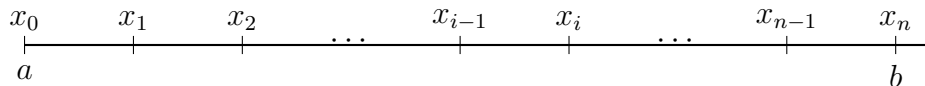


Figura 1.1

O  $i$ -ésimo subintervalo da partição  $P$  é  $[x_{i-1}, x_i]$  e seu comprimento é representado por  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Exemplo 1.1.1.** Uma partição do intervalo fechado  $[0, 10]$  é o conjunto  $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Observamos que a partição  $P$  divide o intervalo  $[0, 10]$  em 5 subintervalos  $[0, 2]$ ,  $[2, 4]$ ,  $[4, 6]$ ,  $[6, 8]$  e  $[8, 10]$ . Veja ilustração geométrica na Figura 1.2.

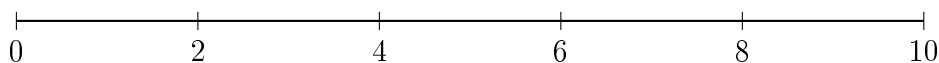


Figura 1.2

Seja uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e em cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  escolhamos  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Denotamos por  $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$ .

Veja ilustração geométrica na Figura 1.3 a seguir.

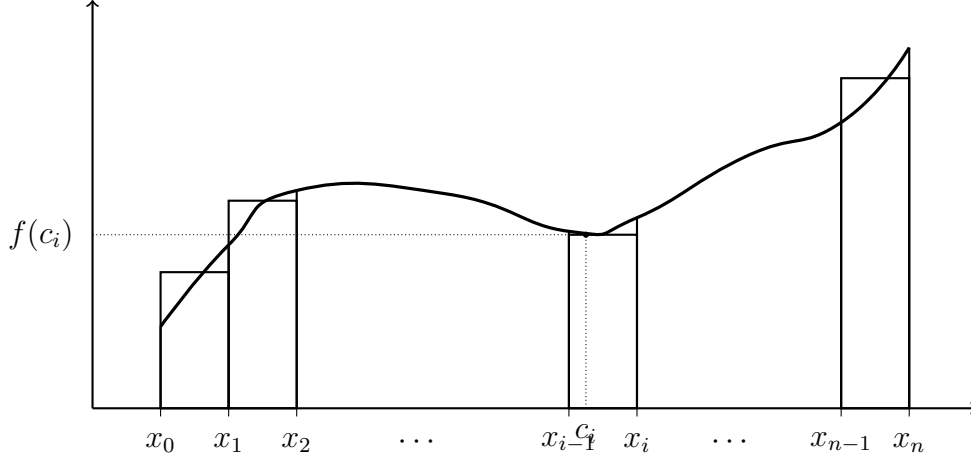


Figura 1.3

Consideremos o retângulo de base medindo  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  e altura  $f(c_i)$  onde  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  (Veja Figura 1.3).

Na ilustração geométrica, consideramos uma função positiva no intervalo  $[a, b]$ . Observe que a soma das áreas dos retângulos aproxima a área compreendida entre o gráfico de  $f$  e o eixo  $x$ . Alguns retângulos possuem parte de sua área acima do gráfico e outros possuem parte abaixo, de forma que a aproximação pode não ser exata quando temos um número finito de partições. No entanto, quando fazemos o comprimento de todos os subintervalos da partição tender a zero, isto é, quando tomamos infinitas partições cada vez mais finas, a soma infinita das áreas desses retângulos coincide exatamente com a área entre o gráfico de  $f$  e o eixo  $x$ .

Essa é apenas uma noção intuitiva do que chamamos de **integral definida**; a seguir apresentamos sua definição formal.

**Definição 1.1.1.** Considere uma partição  $P$  e  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Dizemos que  $f$  integrável em  $[a, b]$  se  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$  existe, e denotamos por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

A seguir apresentamos as principais propriedades da integral definida.

### 1.1.1 Principais propriedades

Sejam  $f$  e  $g$  funções possuindo integral definida em  $[a, b]$  e  $k \in \mathbb{R}$  um constante. As integrais definidas possuem as seguintes propriedades:

$$1. \int_a^b [kf(x) + g(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

2. Para  $c \in [a, b]$ ,  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

3.  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .

4. Se  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , então  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

5. Se  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , então:  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

O **Teorema Fundamental do Cálculo** estabelece a conexão entre derivação e integração.

**Theorem 1.1.1** (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e  $F$  é uma primitiva de  $f$  (isto é,  $F'(x) = f(x)$ ), então:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Este teorema fornece um método prático para calcular integrais definidas, evitando o uso direto da Soma de Riemann.

Outras propriedades serão apresentadas na seção sobre Integrais Impróprias.

## 1.2 Integrais Impróprias

Na definição de integral definida, consideramos a função contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ . Agora, vamos estender essa definição para duas situações importantes:

1. Quando a função está definida em intervalos infinitos, como:

$$[a, +\infty), \quad (-\infty, b] \quad \text{ou} \quad (-\infty, +\infty).$$

2. Quando a função apresenta descontinuidade em algum ponto do intervalo de integração.

Nesses casos especiais usamos as **integrais impróprias**.

### 1.2.1 Integrais em Intervalos Infinitos

Para motivar a definição, vamos considerar um exemplo.

**Exemplo 1.2.1.** Calcular a área da região  $R$  limitada pelo gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , com  $x \geq 1$ , e o eixo  $x$ .

Primeiro, observamos que a região é ilimitada no sentido horizontal. Se definirmos  $R_b$  como a parte da região  $R$  entre  $x = 1$  e  $x = b$  ( $b > 1$ ), temos:

$$A(R_b) = \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Ver Figura 1.4.

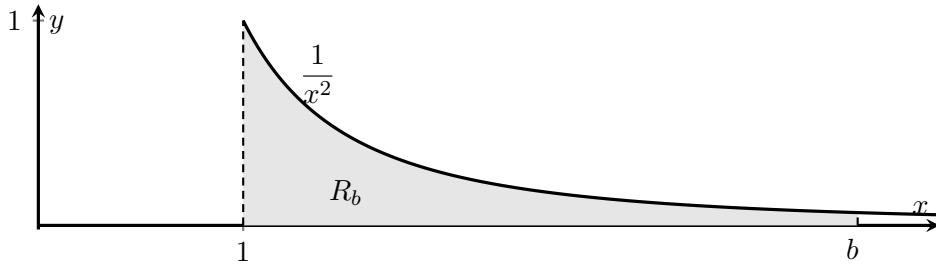


Figura 1.4: Área  $R_b$  sob  $y = \frac{1}{x^2}$  de  $x = 1$  a  $x = b$ .

À medida que  $b \rightarrow +\infty$ , essa área se aproxima da área total da região  $R$ :

$$A(R) = \lim_{b \rightarrow +\infty} A(R_b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Ver Figura 1.5.

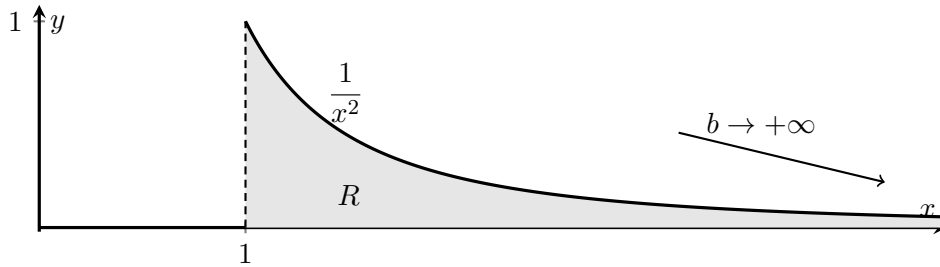


Figura 1.5: Limite  $b \rightarrow +\infty$  resultando em  $A(R) = 1$ .

Esse exemplo motiva a seguinte definição.

**Definição 1.2.1.** Seja  $f$  uma função integrável em  $[a, +\infty)$ . Definimos:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Se  $f$  é uma função integrável em  $(-\infty, b]$ . Definimos:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$



Se  $f$  é uma função integrável em  $\mathbb{R}$ . Definimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx.$$

Se o limite existir, dizemos que a integral imprópria **converge**. Caso contrário, dizemos que ela **diverge**.

## 1.2.2 Integrais com Descontinuidade

Agora, consideremos o caso em que a função apresenta descontinuidade em um ponto do intervalo de integração.

**Exemplo 1.2.2.** Calcular a área sob o gráfico de  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  no intervalo  $(0, 9]$ .

Como a função não está definida em  $x = 0$ , definimos:

$$A(R_\varepsilon) = \int_\varepsilon^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_\varepsilon^9 = 6 - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , obtemos:

$$A(R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A(R_\varepsilon) = 6.$$

De forma geral:

**Definição 1.2.2.** Se  $f$  for integrável em  $(a, b]$ , definimos:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_\varepsilon^b f(x) dx.$$

Se  $f$  for integrável em  $[a, b)$ :

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow b^-} \int_a^\varepsilon f(x) dx.$$

Se  $f$  tiver descontinuidade em  $c \in (a, b)$ :

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow c^-} \int_a^\varepsilon f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow c^+} \int_\varepsilon^b f(x) dx.$$

## 1.3 Critérios de convergência

**Teorema 1.3.1** (Critério de comparação). Sejam  $f$  e  $g$  funções integráveis em  $[a, t]$ , para todo  $t > a$ , tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \geq a.$$

Então, valem as seguintes propriedades:

- a) Se  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  converge, então  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  também converge.
- b) Se  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  diverge, então  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  também diverge.

**Exemplo 1.3.1.** Verifique que a integral imprópria

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx$$

é convergente.

*Solução.* Para  $x \geq 0$  vale  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ , portanto

$$0 \leq e^{-x} \sin^2 x \leq e^{-x}.$$

Agora,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx := \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-t}) = 1.$$

Assim,  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$  é convergente. Pelo critério de comparação, segue que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx \text{ é convergente e } 0 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx \leq 1.$$

**Proposição 1.3.1.** Seja  $f$  integrável em  $[a, t]$ , para todo  $t \geq a$ . Se

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ é convergente,}$$

então

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ também é convergente.}$$

*Demonstração.* Para todo  $x \geq a$  vale

$$0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|.$$

Como  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  é convergente, pelo critério de comparação segue que

$$\int_a^{+\infty} (|f(x)| + f(x)) dx$$

também converge. Além disso, para todo  $t > a$ , temos

$$\int_a^t f(x) dx = \int_a^t (|f(x)| + f(x)) dx - \int_a^t |f(x)| dx.$$

Ora, como os dois integrais do lado direito convergem quando  $t \rightarrow +\infty$ , conclui-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

também é convergente. □

**Exemplo 1.3.2.** *Determine se a integral imprópria*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^3 x \, dx$$

*é convergente ou divergente. Justifique.*

*Solução.* Para todo  $x \geq 0$ , tem-se

$$0 \leq |e^{-x} \sin^3 x| \leq e^{-x}.$$

Como  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$  é convergente, pelo critério de comparação segue que

$$\int_0^{+\infty} |e^{-x} \sin^3 x| \, dx$$

também converge. Aplicando a Proposição 1.3.1, conclui-se que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^3 x \, dx$$

é convergente.

□



# Capítulo 2

## Sequência e série de números reais

### 2.1 Sequências de Números Reais

**Definição 2.1.1.** Uma sequência de números reais é uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(n) = a_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Notação 2.1.1.** A sequência  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  é também denotada por  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ .

**Exemplo 2.1.1.** A função  $f(n) = (-1)^n$  determina a sequência  $\{1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$ .

**Definição 2.1.2.** Uma subsequência de uma sequência  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma restrição  $f_{\mathbb{N}'}$  de  $f$ ,  $f_{\mathbb{N}'} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ .

**Definição 2.1.3.** Dizemos que uma sequência de números reais  $\{a_n\}$  é:

- a) decrescente se  $a_n > a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- b) crescente se  $a_n < a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- c) não-decrescente se  $a_n \leq a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- d) não-crescente se  $a_n \geq a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 2.1.4.** Uma sequência que satisfaz um dos itens da Definição 2.1.3 é dita **monótona**.

**Exemplo 2.1.2.** As sequências  $\{\frac{1}{n}\}$ ,  $\{n+1\}$  e  $\{7-n\}$  são monótonas. Verifique.

**Definição 2.1.5.** Dizemos que uma sequência de números reais  $\{a_n\}$  é:

- a) limitada superiormente se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- b) limitada inferiormente se existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n \geq m$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- c) limitada se for limitada superiormente e inferiormente.

### 2.1.1 Exercícios

**Exercício 2.1.1.** *Mostre que as sequências abaixo são limitadas e monótonas. Descreva o tipo de monotonicidade de cada uma delas.*

$$a) \ x_n = \frac{2n-1}{n};$$

$$b) \ x_n = 1 + \frac{1}{3n};$$

$$c) \ x_n = \frac{1}{n^2};$$

$$d) \ x_n = \frac{n}{n+1};$$

$$e) \ x_n = \frac{n^2+1}{3n^2}.$$

**Exercício 2.1.2.** *Para cada uma das sequências do exercício anterior, exiba três subseqüências.*

### 2.1.2 Limite de Sequências

**Definição 2.1.6.** *Dizemos que um número real  $L$  é limite de uma sequência  $\{a_n\}$  se, dado  $\epsilon > 0$  arbitrário, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que*

$$|a_n - L| < \epsilon, \quad \forall n \geq N. \quad (2.1)$$

Denotamos:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ .

Se a sequência  $\{a_n\}$  possui limite, dizemos que a sequência é **convergente**. Caso contrário, dizemos que é **divergente**.

**Definição 2.1.7.** *Dizemos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  se, para cada  $M > 0$ , existir  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n > M$  para todo  $n \geq N$ . Neste caso, dizemos que a sequência diverge para  $+\infty$ .*

**Teorema 2.1.1.** *Sejam  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  duas sequências convergentes. Então:*

$$a) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n;$$

$$b) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} c = c, \text{ quando } a_n = c \text{ é constante};$$

$$c) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n;$$

$$d) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n}, \text{ se } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \neq 0.$$

**Teorema 2.1.2** (Teorema do Confronto). *Se as sequências  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  e  $\{c_n\}$  são tais que  $a_n \leq b_n \leq c_n$  para todo  $n > n_0$  e*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L,$$

*então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L$ .*

**Exemplo 2.1.3.** *Prove que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n^2 + 1} = 0$ .*

Uma das sequências mais importantes no mundo matemático é a sequência de Fibonacci, definida por

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1 \quad \text{e} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

**Proposição 2.1.1.** *Uma sequência  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $a \in \mathbb{R}$  se, e somente se, toda subsequência de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $a$ .*

**Proposição 2.1.2.** *Toda sequência convergente é limitada.*

**Teorema 2.1.3.** *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

**Teorema 2.1.4** (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada possui pelo menos uma subsequência convergente.*

**Exercício 2.1.3.** *Mostre que a recíproca do Teorema 2.1.3 não é verdadeira.*

## 2.2 Séries de Números Reais

Uma série de números reais é uma soma infinita de termos reais, escrita da seguinte forma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Nesta expressão, cada  $a_n$  representa o  $n$ -ésimo termo da sequência associada à série.

Dada uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , considera-se a sequência  $(S_n)$  definida por:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

A sequência  $(S_n)$  é chamada de **sequência das somas parciais** da série.

Se o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existe e é um número real  $S$ , dizemos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **converge** e sua soma é  $S$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad \text{se, e somente se,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Se o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  não existe, dizemos que a série **diverge**.

**Exemplo 2.2.1.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  converge.

*Solução: Temos:*

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Essa é uma série geométrica de razão  $r = \frac{1}{2}$ , cujo termo geral é  $a_n = \frac{1}{2^n}$ .

A soma parcial é:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

Logo, a série converge e sua soma é  $S = 1$ .

De modo geral, uma série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 r^n$$

converge se e somente se  $|r| < 1$ , e sua soma é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}.$$

Fica como exercício para o leitor fazer a demonstração.

**Exemplo 2.2.2.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  diverge.

*Solução: Temos:*

$$S_1 = -1, \quad S_2 = -1 + 1 = 0, \quad S_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \quad S_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0, \quad \text{e assim por diante.}$$

Portanto, a sequência das somas parciais  $(S_n)$  é:

$$S_n = \begin{cases} -1, & \text{se } n \text{ for ímpar,} \\ 0, & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Logo,  $(S_n)$  não converge (pois oscila entre  $-1$  e  $0$ ), e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

é divergente.



## Operações com Séries Convergentes

1. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge e  $c \in \mathbb{R}$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  também converge, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

*Demonstração:* Por hipótese, a sequência das somas parciais  $(S_n)$  converge, ou seja,  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \rightarrow S$ . Então,

$$cS_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n,$$

e a sequência  $(cS_n)$  também converge. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  convergem, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

também converge, e vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

*Demonstração:* Como  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  e  $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ , temos

$$S_n + T_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n).$$

Se  $S_n \rightarrow S$  e  $T_n \rightarrow T$ , então  $S_n + T_n \rightarrow S + T$ , logo a série também converge.

**Observação 2.2.1.** Se  $\sum a_n$  diverge e  $c \in \mathbb{R}$ , com  $c \neq 0$ , então  $\sum ca_n$  também diverge.

**Observação 2.2.2.** Se  $\sum a_n$  converge e  $\sum b_n$  diverge, então  $\sum (a_n + b_n)$  também diverge.

### 2.2.1 Testes de Convergência de Séries

A seguir, serão enunciados alguns testes e teoremas que são muito úteis para determinar se uma série converge ou não.

**Teorema 2.2.1.** *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . O inverso, entretanto, não é verdadeiro: se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , então a série diverge.*

*Demonstração:* Seja  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  a sequência das somas parciais. Temos:

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Como  $S_n$  converge, existem  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ . Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Portanto, se a série converge, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Mas o contrário não é garantido: o fato de  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  não assegura a convergência da série.

**Exemplo 2.2.3.** *A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n+1}$  diverge, pois*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = 1 \neq 0.$$

### Teste da Comparação

**Exemplo 2.2.4.** *Sejam as sequências  $(a_n)$  e  $(b_n)$  tais que  $0 \leq a_n \leq b_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então:*

(a) *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também converge.*

(b) *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge, então  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  também diverge.*

*Demonstração:* (a) Por hipótese, a sequência

$$b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, \dots$$

é convergente, logo limitada. Por outro lado, como  $a_n \geq 0$  e  $a_n \leq b_n$ , temos:

$$a_1 \leq b_1, \quad a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Portanto, a sequência  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  também é limitada e crescente. Como toda sequência crescente e limitada é convergente, concluímos que  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge.

(b) O item (b) é a contrapositiva de (a).

**Exemplo 2.2.5.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$  converge.

*Solução:* Como  $2^n + n > 2^n$  para todo  $n$ , temos:

$$0 < \frac{1}{2^n + n} < \frac{1}{2^n}.$$

Sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  é uma série convergente. Logo, pelo teste da comparação, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$  também converge.

## Teste da Integral

**Teorema 2.2.2.** Seja  $f$  uma função contínua, positiva e decrescente para todo  $x \geq 1$ . Então, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

converge se, e somente se, a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

converge.

**Exemplo 2.2.6.** Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Esta série é chamada de **série  $p$** . Temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge se, e somente se, } p > 1.$$

De fato, para  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ , temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1, \\ \infty, & \text{se } p \leq 1. \end{cases}$$

**Conclusão:** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge se  $p > 1$  e diverge se  $p \leq 1$ .

## Séries Alternadas

Uma série alternada é uma série da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

onde  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 2.2.7.** *As séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

*são séries alternadas.*

### Teste de Leibniz.

**Teorema 2.2.3.** *Se  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , então a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

*converge.*

**Exemplo 2.2.8.** *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

*converge.*

*Solução:* De fato,  $\frac{1}{n}$  é decrescente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Assim, o Teste de Leibniz se aplica.

**Exemplo 10.9.3.** A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

também converge.

*Solução:* De fato,  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  é decrescente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ . Logo, pelo Teste de Leibniz, a série converge.

## Convergência Absoluta

Uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge.

**Exemplo 2.2.9.** *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

*converge absolutamente, pois a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

*converge.*

**Teorema 2.2.4.** *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também converge.*

*Demonstração:* Como  $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , somando termo a termo, obtemos:

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$  converge por comparação com  $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ . Mas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - a_n) \right],$$

e ambas as séries do lado direito convergem. Logo,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também converge.

A recíproca desse fato, entretanto, não é verdadeira: há séries que convergem, mas não convergem absolutamente.

**Exemplo 2.2.10.** *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

*converge (série harmônica alternada), mas a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

*diverge. Logo, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  é condicionalmente convergente.*

## Teste da Razão

Suponha que  $a_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q.$$

Então:

(i) Se  $q < 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente.

(ii) Se  $q > 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

(iii) Se  $q = 1$ , nada podemos concluir.

**Exemplo 2.2.11.** A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$$

converge absolutamente.

*Solução:* De fato,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Portanto, a série converge absolutamente.

**Exemplo 2.2.12.** A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

diverge.

*Solução:* De fato,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 = 1.$$

Logo, como  $q = 1$ , o teste é inconclusivo. Mas como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$ , a série diverge.

**Exemplo 2.2.13.** Considere as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

*Solução:* Para ambas, temos  $q = 1$ . Neste caso, o teste da razão não fornece conclusão: sabemos, no entanto, que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge.

**Exemplo 2.2.14.** Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , onde

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

*Solução:* Usando a decomposição em frações parciais:

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

temos:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Observando que há cancelamentos sucessivos, resta:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

Assim,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$