

# Notas de Aula

Elementos de Matemática  
Departamento de Matemática – UFPI

*Estas notas de aula foram elaboradas para apoiar a disciplina Elementos de Matemática do curso de Matemática da Universidade Federal do Piauí. Trata-se de um material de apoio, e não de um livro didático. Algumas definições, demonstrações e exemplos não estão aqui incluídos, pois serão discutidos diretamente em sala de aula. Este material encontra-se em constante desenvolvimento e poderá ser aprimorado em futuras edições.*

**A versão mais atualizada deste material pode ser encontrada em:** <https://vitalianoamaral.github.io>

No menu, clique em **Ensino**, depois em **Graduação** e, em seguida, em **Disciplinas Ministradas**. Localize a disciplina **Elementos de Matemática I** e clique no link **Notas de Aula**.

Prof. Vitaliano de Sousa Amaral  
Departamento de Matemática – UFPI

15 de outubro de 2025



# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>3</b>
<b>1 Números Reais</b>	<b>5</b>
1.1 Um pouco sobre os números Naturais, Inteiros e Racionais . . . . .	5
1.2 O conjunto dos números Reais . . . . .	9
1.2.1 Relação de ordem em $\mathbb{R}$ . . . . .	9
1.2.2 Intervalos . . . . .	11
<b>2 Funções</b>	<b>13</b>
2.1 Conceitos básicos . . . . .	13
2.2 Exercícios . . . . .	23



# Capítulo 1

## Números Reais

### 1.1 Um pouco sobre os números Naturais, Inteiros e Racionais

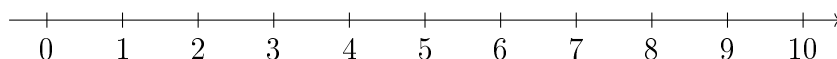
Ao longo da história, os números surgiram para atender a diferentes necessidades humanas. Os números naturais apareceram inicialmente como uma forma de contar objetos e registrar quantidades. Com o tempo, a necessidade de representar dívidas, perdas e posições relativas levou à introdução dos números inteiros, que incluem tanto os naturais quanto seus opostos negativos.

O conjunto dos números naturais é dado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Cada número natural pode ser representado sobre a reta real. Uma vez fixados os pontos correspondentes aos números 0 e 1, adotamos a distância entre eles como unidade de medida. A partir daí, todos os números naturais são representados como pontos igualmente espaçados, posicionados da esquerda para a direita a partir do zero.

Veja a seguir a ilustração do conjunto  $\mathbb{N}$  sobre a reta real:

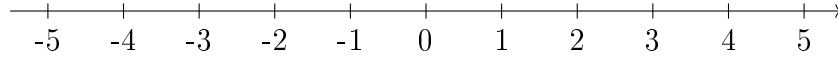


O conjunto dos números inteiros é representado da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

De maneira análoga, os números inteiros também podem ser representados sobre a reta real. Uma vez fixados os pontos 0 e 1, adotamos a distância entre eles como unidade de medida. A partir disso, os inteiros são posicionados igualmente espaçados, estendendo-se para a direita (inteiros positivos) e para a esquerda (inteiros negativos) a partir do zero.

Veja a seguir a ilustração do conjunto  $\mathbb{Z}$  sobre a reta real:



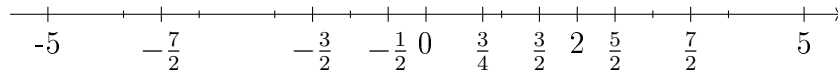
Observamos que os números inteiros consecutivos delimitam intervalos unitários (de comprimento 1).

O conjunto dos números racionais surge da necessidade de representar partes de um inteiro, aparecendo como subdivisões desses intervalos unitários. Por exemplo,  $\frac{1}{2}$  corresponde ao ponto situado exatamente no meio entre 0 e 1,  $\frac{3}{4}$  está localizado a três quartos da distância entre 0 e 1, e assim por diante. Os racionais negativos seguem a mesma lógica, mas posicionados à esquerda de 0.

Assim, o conjunto dos números racionais é representado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Essa construção nos permite associar um ponto da reta real a cada número racional. No entanto, como entre quaisquer dois números reais distintos existem infinitos racionais, não podemos representá-los todos graficamente. Em vez disso, destacamos apenas alguns exemplos para ilustrar a densidade dos números racionais sobre a reta real.



Admitiremos as seguintes operações (adição e multiplicação) no conjunto dos números racionais.

**Definição 1.1.1. (Adição)** Sejam  $a = \frac{m}{n}$  e  $b = \frac{r}{s}$  elementos de  $\mathbb{Q}$ , com  $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$  e  $n, s \neq 0$ . A soma de  $a$  com  $b$  é o elemento de  $\mathbb{Q}$  dado por

$$a + b = \frac{ms + nr}{ns}.$$

**Exemplo 1.1.1.** Sejam  $a = \frac{2}{3}$  e  $b = \frac{5}{4}$ . Então, a soma de  $a$  com  $b$  é:

$$a + b = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{8 + 15}{12} = \frac{23}{12}.$$

**Definição 1.1.2. (Multiplicação)** Sejam  $a = \frac{m}{n}$  e  $b = \frac{r}{s}$  elementos de  $\mathbb{Q}$ , com  $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$  e  $n, s \neq 0$ . A multiplicação (ou produto) de  $a$  com  $b$  é o elemento de  $\mathbb{Q}$  dado por

$$ab = \frac{mr}{ns}.$$

**Exemplo 1.1.2.** Sejam  $a = \frac{2}{3}$  e  $b = \frac{5}{4}$ . Então, o produto de  $a$  com  $b$  é:

$$ab = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

É fácil perceber que entre dois números racionais sempre existe outro número racional. De fato, dados dois números racionais  $a = \frac{m}{n}$  e  $b = \frac{r}{s}$  com  $a < b$ ,  $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$ . Considere o número racional da forma

$$c = a + \frac{b-a}{2}.$$

Podemos observar que  $c$  está entre  $a$  e  $b$ , pois  $c$  é obtido somando a  $a$  a metade da distância entre  $a$  e  $b$ . Veja a ilustração geométrica na Figura 1.1.

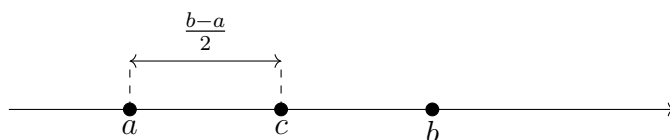


Figura 1.1: Ilustração do ponto médio  $c = a + \frac{b-a}{2}$  na reta real.

Agora, além da afirmação acima vamos mostrar que  $c$  é um número racional e está entre os racionais  $a$  e  $b$ . Veja que

$$\begin{aligned} c = a + \frac{1}{2}(b-a) &= \frac{2a + b - a}{2} = \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{r}{s} + \frac{m}{n} \right) = \left( \frac{rn + ms}{2ns} \right), \end{aligned}$$

como  $rn + ms$  e  $2ns$  são números inteiros, podemos garantir que  $c$  é um número racional, pois é a razão entre dois inteiros com denominador diferente de zero.

Além da explicação anterior, outra forma de garantir que  $c$  está entre  $a$  e  $b$  é observar que

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} = c \quad \text{e} \quad c = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b,$$

portanto, temos  $a < c < b$ .

Diante do exposto anteriormente, surge uma dúvida: como sempre existe um número racional entre dois números racionais, então seria possível preencher toda a reta numérica apenas com números racionais?

A seguir veremos que a resposta para a pergunta anterior é: não é possível.

Diz-se que Hipaso de Metaponto, um seguidor de Pitágoras, foi o primeiro a descobrir que existem números que não podem ser representados pela divisão de dois números inteiros. Ele teria demonstrado que  $\sqrt{2}$  não é racional, provavelmente por meio de uma prova geométrica.

Considere um triângulo retângulo desenhado sobre a reta numérica (veja Figura 1.2), com catetos medindo 1 unidade cada e hipotenusa sobre a reta numérica, indo do ponto 0 até o ponto marcado por  $x$ , ou seja, a hipotenusa tem comprimento medindo  $x$  unidades.

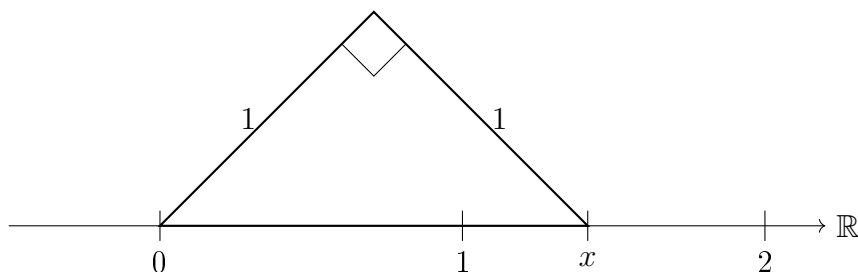


Figura 1.2:

Pelo **Teorema de Pitágoras**, temos:  $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ .

Suponha, por contradição, que  $x$  seja um número racional. Então podemos escrevê-lo como  $\frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  inteiros primos entre si. Substituindo em  $x^2 = 2$ :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

Isso implica que  $p^2$  é par, logo  $p$  é par. Seja  $p = 2k$ , assim temos

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 4k^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2k^2$$

Portanto,  $q^2$  também é par, o que implica que  $q$  é par.

Chegamos a uma contradição, pois  $p$  e  $q$  seriam ambos pares, contrariando a hipótese de que são primos entre si. Logo,  $x$  **não é um número racional**.

Como  $x$  é um ponto da reta numérica que não pertence ao conjunto dos racionais, concluímos que a reta real não pode ser preenchida completamente apenas por números racionais.

O conjunto dos números que não podem ser representados como a divisão de dois inteiros, ou seja, que não são números racionais, é denotado pela letra  $\mathbb{I}$  e chamado de *conjunto dos números irracionais*.

Da própria definição, temos que os conjuntos  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{I}$  não possuem elementos em comum, isto é,

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

**Exercício 1.1.1.** *Mostre que a soma de dois números racionais é também um número racional.*



**Exercício 1.1.2.** *A soma de um número racional com um número irracional é um número racional? Justifique sua resposta.*

**Exercício 1.1.3.** *A soma de dois números irracionais é um número irracional? Justifique sua resposta.*

**Exercício 1.1.4.** *Sejam  $a$  um número racional não nulo e  $b$  um número irracional. Mostre que o produto  $ab$  não pode ser representado como uma divisão de dois números inteiros. Conclua que o produto de um número racional não nulo por um irracional é um número irracional.*

## 1.2 O conjunto dos números Reais

Os elementos dos conjuntos  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{I}$ , juntos, formam o conjunto dos números reais, denotado por  $\mathbb{R}$ , ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Como vimos anteriormente, todo ponto da reta numérica pode representar um número real. Assim, a partir de agora, essa reta numérica será chamada de **reta real**, como mostra a Figura 1.3 a seguir.

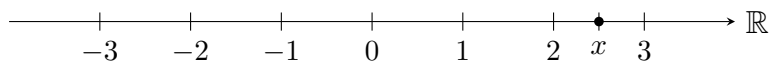


Figura 1.3: Representação da reta real.

Dizemos que um número real  $x$  é **positivo** se ele representa um ponto da reta real situado à direita da origem 0. Um número real  $x$  é dito negativo se  $-x$  é positivo.

Para um número real  $x$ , é satisfeita uma, e apenas uma, das seguintes propriedades:

- $x$  é positivo;
- $-x$  é positivo;
- $x = 0$ .

### 1.2.1 Relação de ordem em $\mathbb{R}$

Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , dizemos que:

1.  $x < y$  (lê-se:  $x$  menor que  $y$ ) se  $y - x$  for positivo;
2.  $x = y$  (lê-se:  $x$  igual a  $y$ ) se  $y - x = 0$ ;
3.  $x \leq y$  (lê-se:  $x$  menor ou igual a  $y$ ) se  $y - x$  for positivo ou  $x - y = 0$ .

## Comutatividade e Associatividade

**Comutatividade.** Dizemos que uma operação é comutativa quando a ordem dos elementos não altera o resultado. No conjunto dos números reais, isso ocorre com a adição e a multiplicação:

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad ab = ba, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo:

$$7 + 4 = 4 + 7 \quad \text{e} \quad 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3.$$

Já a subtração e a divisão não possuem essa propriedade, pois

$$8 - 2 \neq 2 - 8, \quad \text{e} \quad \frac{12}{3} \neq \frac{3}{12}.$$

**Associatividade.** Uma operação é associativa quando o modo de agrupar os elementos não altera o resultado. Também nos reais, a adição e a multiplicação possuem essa propriedade:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Isso significa que, ao somar ou multiplicar três ou mais números, podemos desprezar os parênteses e calcular livremente, por exemplo:

$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9, \quad (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24.$$

Por outro lado, a subtração não é associativa. De fato,

$$(10 - 6) - 2 = 2 \neq 10 - (6 - 2) = 6.$$

Assim, é importante ter atenção ao realizar operações que envolvem diferentes tipos de operadores e parênteses, pois o uso incorreto de um sinal ou a aplicação equivocada de uma propriedade pode levar a erros nos cálculos.

No conjunto dos números reais são satisfeitas as seguintes propriedades:

- i)  $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R};$
- ii)  $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{R};$
- iii) Existe o elemento neutro da adição, denotado por 0, tal que

$$a + 0 = a, \quad \forall a \in \mathbb{R};$$

- iv) Para todo  $a \in \mathbb{R}$  existe  $-a$  tal que  $a + (-a) = 0;$

$$\text{v) } (ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R};$$

$$\text{vi) } ab = ba, \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$$

vii) Existe o elemento neutro da multiplicação, denotado por 1, tal que  $a \cdot 1 = a$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ ;

viii)  $a(b + c) = ab + ac$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ;

ix) Para todo  $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{R}^*$  existe  $a^{-1}$  tal que  $aa^{-1} = 1$ .

**Proposição 1.2.1.** *Sejam  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Então valem as seguintes propriedades:*

- a)  $x \leq x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;
- b) Se  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , então  $x = y$ ;
- c) Se  $x \leq y$  e  $y \leq z$ , então  $x \leq z$ ;
- d) Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ , vale exatamente uma das afirmações:  $x = y$ ,  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ ;
- e) Se  $x \leq y$ , então  $x + z \leq y + z$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$ ;
- f) Se  $x > 0$  e  $y > 0$ , então  $xy > 0$ ;
- g) Se  $x < 0$  e  $y < 0$ , então  $xy > 0$ ;
- h) Se  $x > 0$  e  $y < 0$ , então  $xy < 0$ ;
- i) Se  $x \neq 0$ , então  $x^2 > 0$ ;
- j) Se  $x < y$  e  $z > 0$ , então  $xz < yz$ ;
- k) Se  $x < y$  e  $z < 0$ , então  $xz > yz$ ;
- l)  $x > 0$  implica  $x^{-1} > 0$ ;
- m)  $x < 0$  implica  $x^{-1} < 0$ ;
- n)  $0 < x < 1$  implica  $1 < x^{-1}$ ;
- o)  $1 < x$  implica  $0 < x^{-1} < 1$ ;
- p)  $0 < x < y$  implica  $0 < y^{-1} < x^{-1}$ ;
- q)  $x < y < 0$  implica  $y^{-1} < x^{-1} < 0$ .

### 1.2.2 Intervalos

Existem subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que são representados por partes da reta real, estes conjuntos são chamados de intervalos. A seguir, será apresentado vários tipos de intervalos.

Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ .

i) O conjunto dos números reais  $x \in \mathbb{R}$  tais que  $a < x < b$  é chamado de

intervalo aberto, e denotado por  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ .

ii) O conjunto dos números reais  $x$  tais que  $a \leq x \leq b$  é chamado de intervalo fechado, e denotado por  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ .

iii) O conjunto dos números reais  $x$  tais que  $a < x \leq b$  é chamado de intervalo semifechado à direita ou semiaberto à esquerda, e denotado por  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ .

iv) O conjunto dos números reais  $x$  tais que  $a \leq x < b$  é chamado de intervalo semifechado à esquerda ou semiaberto à direita, e denotado por  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ .

v) Existem ainda conjuntos que são ilimitados, e representados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R}; x < a\}; & (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}; \\ (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; x > a\}; & [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}; \\ (-\infty, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

## Valor absoluto ou módulo

**Definição 1.2.1.** *Dado um número real  $x$ , seu módulo ou valor absoluto é denotado por  $|x|$  e definido da seguinte forma:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

O valor absoluto de um número real  $x$  também pode ser representado por:

$$|x| = \max\{x, -x\} \quad \text{ou} \quad |x| = \sqrt{x^2}.$$

**Exercício 1.2.1.** *Dados  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , mostre que:*

- a)  $|xy| = |x| |y|$ ;
- b)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ;
- c)  $|x - y| \geq |x| - |y|$ ;
- d)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

# Capítulo 2

## Funções

### 2.1 Conceitos básicos

**Definição 2.1.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não vazios. Uma **função**  $f : A \rightarrow B$  é uma regra que atribui a cada  $x \in A$  um único elemento  $y \in B$ , chamado de valor de  $f$  em  $x$  e denotado por  $f(x)$ .*

**Definição 2.1.2.** *O conjunto  $A$  é chamado de domínio da função  $f$ . O conjunto  $B$  recebe o nome de **contradomínio**. A **imagem** de  $f$  é o subconjunto de  $B$  formado pelos valores assumidos por  $f$ :  $Im(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$ . O **gráfico** de  $f$  é o conjunto de pares ordenados:  $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$ .*

**Exemplo 2.1.1.** *Se  $A = \{1, 4, 7\}$  e  $B = \{0, 3, 12, 15, 21\}$ , a correspondência  $f(x) = 3x$  define uma função de  $A$  em  $B$ , pois cada elemento de  $A$  tem uma única imagem em  $B$ , conforme ilustrado na Figura 2.1.*

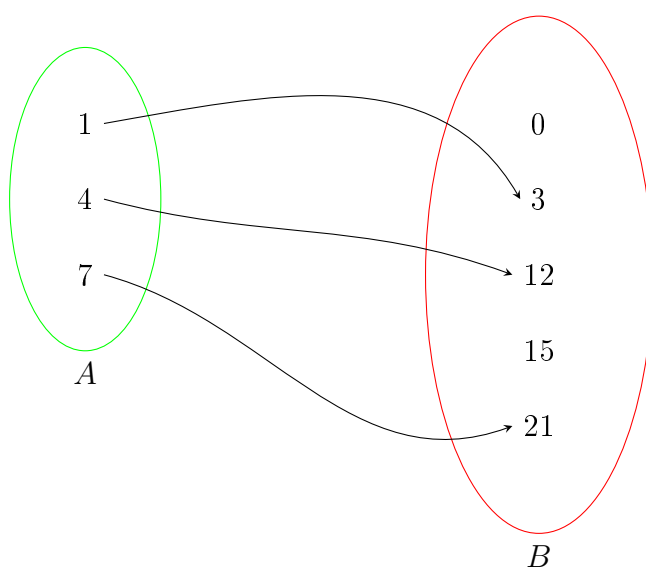


Figura 2.1: Função  $f(x) = 3x$  de  $A$  em  $B$

A seguir, apresentaremos o conceito de zeros de funções, ilustrando-o com definição formal, exemplo numérico e interpretação geométrica.

**Definição 2.1.3.** Dizemos que um número  $x \in \mathbb{R}$  é um **zero** (ou **raiz**) de uma função  $f$  quando  $f(x) = 0$ .

**Exemplo 2.1.2.** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = x^2 + 5x + 6.$$

Para determinar seus zeros, resolvemos a equação  $f(x) = 0$ :

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Fatorando, temos  $(x + 2)(x + 3) = 0$ , e portanto os zeros são  $x = -2$  e  $x = -3$ .

**Interpretação geométrica:** os zeros de uma função correspondem às abscissas dos pontos onde o gráfico de  $f$  intersecta o eixo  $OX$  (eixo das abscissas).

No geral, nem sempre é simples determinar os zeros de uma função, pois em muitos casos a equação  $f(x) = 0$  não pode ser resolvida de maneira imediata.

**Funções quadráticas.** Como primeiro estudo específico, vamos abordar um tipo importante de função: a **função quadrática**.

**Definição 2.1.4.** Chamamos de **Função do 2º grau** ou **Função quadrática**, toda função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , e  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.1.1.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ , é uma função quadrática.

Os zeros da função quadrática correspondem às soluções reais da equação do 2º grau associada.

**Exemplo 2.1.2.** Seja  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Os zeros de  $f$  são os valores de  $x$  para os quais  $f(x) = 0$ . Aplicando a Fórmula de Bháskara (que será apresentada a seguir), obtemos

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_2 = 1.$$

Portanto,  $x = 1$  e  $x = 2$  são os zeros de  $f$ .

A seguir, apresentaremos a **forma canônica** de uma função quadrática, que facilita a determinação de máximos, mínimos e também a dedução da Fórmula de Bháskara.

**Proposição 2.1.1.** Toda função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  pode ser escrita como

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac. \quad (2.1)$$

A fórmula (2.1) é chamada de **forma canônica** de  $f$ .

*Demonstração.* Usando o método de completar quadrados:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c \\
 &= a \left( x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
 &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.
 \end{aligned}$$

■

**Exemplo 2.1.3.** Escreva a função  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  na sua forma canônica.

*Solução.* Aplicando a forma canônica, temos:

$$f(x) = \left( x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}.$$

■

**Consequências da forma canônica.** - A partir dela, obtemos facilmente a **Fórmula de Bháskara**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Além disso, o gráfico de  $f$  é sempre uma **parábola**.

**Definição geométrica:** Uma parábola é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo, chamado *foco*, e de uma reta fixa, chamada *diretriz*.

A partir disso, mostra-se que o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é uma parábola com:

- foco  $F = \left( -\frac{b}{2a}, \frac{1+4ac-b^2}{4a} \right)$ ;
- diretriz  $y = -\frac{b^2-4ac+1}{4a}$ .

Clique aqui para ver uma ilustração geométrica no GeoGebra.

**Definição 2.1.5.** Seja  $f$  uma função com domínio  $D(f)$ . Dizemos que  $f$  atinge um **valor máximo** em  $A \subseteq D(f)$  quando existe  $x_0 \in A$  tal que

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in A.$$

Analogamente,  $f$  atinge um **valor mínimo** em  $A$  quando existe  $x_0 \in A$  tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in A.$$

Chamamos  $x_0$  de **ponto de máximo** em  $A$  ou **ponto de mínimo** em  $A$ , respectivamente.

Nosso objetivo agora é identificar esses extremos no caso particular da função quadrática, utilizando apenas a forma canônica, sem recorrer a ferramentas de cálculo diferencial.

**Theorem 2.1.1.** *Considere  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ . O gráfico de  $f$  possui um ponto extremo (máximo ou mínimo) na abscissa*

$$x_v = -\frac{b}{2a}.$$

*O valor da ordenada nesse ponto é*

$$y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

*Se  $a > 0$ , o extremo é um mínimo; se  $a < 0$ , o extremo é um máximo.*

*Demonstração.* Da forma canônica (Proposição 2.1.1), temos

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Observe que o termo quadrático  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  é sempre não negativo.

Se  $a > 0$ , multiplicando por  $a$  obtemos  $a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ . Logo,

$$f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a},$$

e o valor mínimo ocorre em  $x_v = -\frac{b}{2a}$ .

Se  $a < 0$ , então  $a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \leq 0$ , o que implica

$$f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a},$$

e o valor máximo ocorre em  $x_v = -\frac{b}{2a}$ .

Assim, em ambos os casos, o ponto extremo é  $(x_v, y_v) = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$ . ■

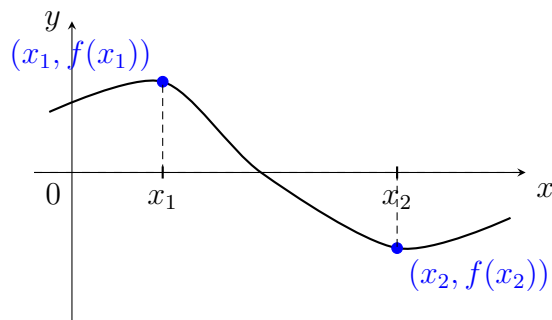
### Como saber se uma função, cujo gráfico não apresenta falhas, possui pelo menos uma raiz real?

Uma raiz real de uma função é um número onde o valor da função é igual a zero, ou seja, o ponto onde o gráfico cruza o eixo  $x$ .

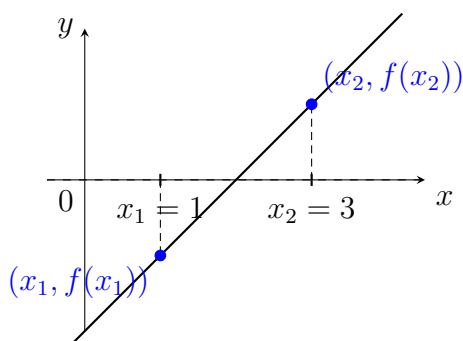
Se o gráfico da função não apresenta falhas (isto é, é contínuo, sem quebras ou saltos), para verificar se a função possui pelo menos uma raiz real podemos proceder da seguinte forma: escolha dois pontos distintos  $x_1$  e  $x_2$  tais que  $f(x_1) > 0$  e  $f(x_2) < 0$ . Como o gráfico liga os pontos  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$  sem interrupções, é necessário que ele **cruze o eixo  $x$**  em algum lugar entre esses dois pontos.

Assim, podemos concluir que  $f$  possui pelo menos uma raiz real no intervalo  $(x_1, x_2)$ .

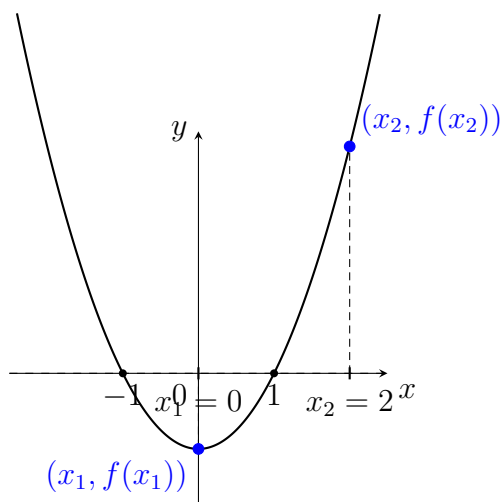




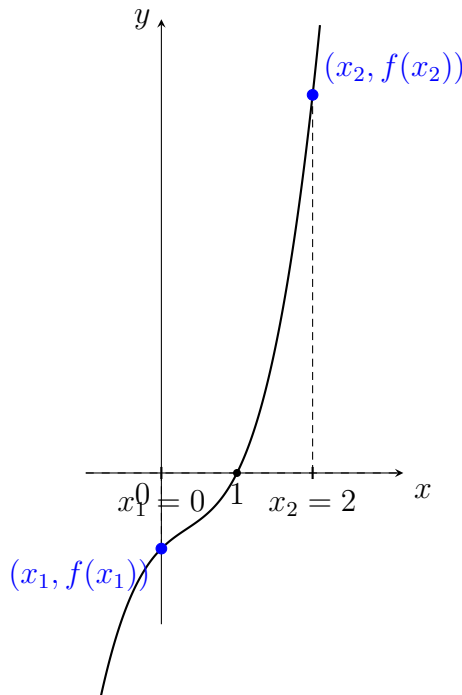
**Exemplo 2.1.3.** Considere  $f(x) = x - 2$ . Temos  $f(1) = -1 < 0$  e  $f(3) = 1 > 0$ . Como o gráfico não tem falhas, existe ao menos uma raiz no intervalo  $(1, 3)$ .



**Exemplo 2.1.4.** Considere  $f(x) = x^2 - 1$ . Temos  $f(0) = -1 < 0$  e  $f(2) = 3 > 0$ . Logo, existe ao menos uma raiz em  $(0, 2)$  (de fato, as raízes são  $x = -1$  e  $x = 1$ ).



**Exemplo 2.1.5.** Considere  $f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$ . Note que  $x^2 + 1 > 0$  para todo  $x$ , então o sinal de  $f$  é o mesmo de  $(x - 1)$ . Assim,  $f(0) = -1 < 0$  e  $f(2) = 5 > 0$ , garantindo uma raiz em  $(0, 2)$  (de fato, a única raiz real é  $x = 1$ ).



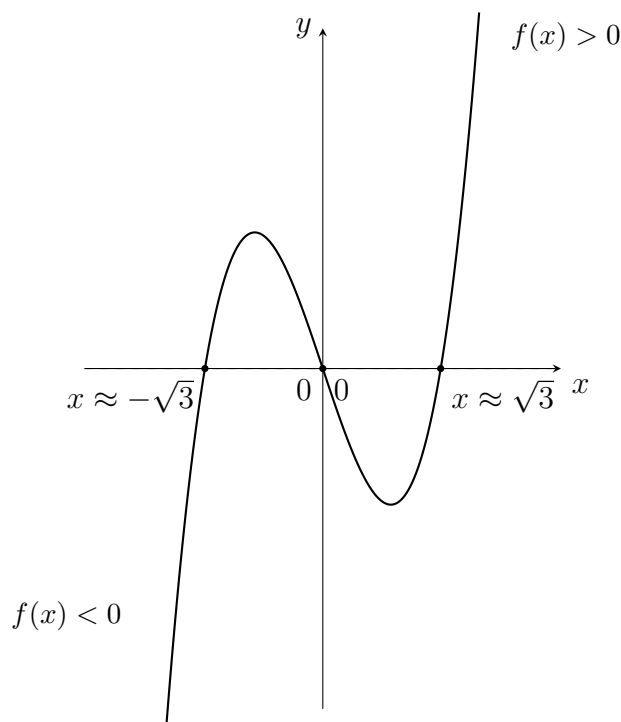
Aqui vamos assumir que o gráfico de um polinômio é sempre uma curva contínua, ou seja, não tem falhas, quebras nem saltos. Isso acontece porque o valor de um polinômio é obtido apenas com somas, subtrações e multiplicações, e essas operações preservam a continuidade do gráfico.

Além disso, todo polinômio de grau ímpar (por exemplo,  $x^3$ ,  $x^5 - 2x + 1$ , etc.) definido em  $\mathbb{R}$  possui pelo menos uma raiz real. A explicação intuitiva é a seguinte:

- Quando o grau é ímpar, o polinômio tem um comportamento oposto nas extremidades do gráfico.
- Para valores muito grandes e positivos de  $x$ , o polinômio também tende a crescer muito (ou a diminuir muito), e para valores muito negativos de  $x$ , o comportamento é o contrário.

Assim, o gráfico começa em uma região muito alta ou muito baixa e termina na região oposta. Como o gráfico é contínuo(sem falhas), ele é obrigado a cruzar o eixo  $x$  pelo menos uma vez. Esse ponto de cruzamento representa uma raiz real do polinômio.

Por exemplo, considere  $f(x) = x^3 - 3x$ . Para valores grandes e negativos de  $x$ , temos  $f(x) < 0$ , e para valores grandes e positivos de  $x$ , temos  $f(x) > 0$ . Portanto, o gráfico precisa cruzar o eixo  $x$  em algum ponto entre essas duas regiões.



**Conclusão:** Todo polinômio de grau ímpar definido em  $\mathbb{R}$  tem pelo menos uma raiz real, porque seu gráfico é contínuo e muda de sinal entre valores muito negativos e muito positivos de  $x$ .

Com a noção de função contínua e de limites, que será estudada em Cálculo Diferencial e Integral I, tudo isso poderá ser comprovado de forma rigorosa.

### Como determinar domínio e imagem de uma função a partir de seu gráfico

Um número  $b$  pertence ao domínio de uma função  $f$  se, e somente se, a reta vertical  $x = b$  no plano  $xy$  intercepta o gráfico de  $f$ .

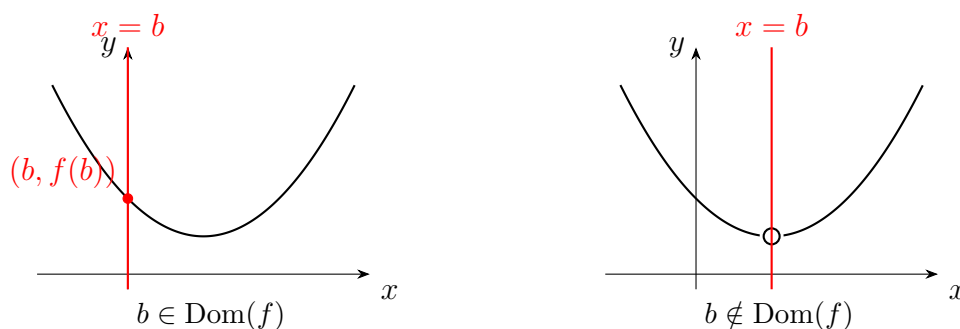


Figura 2.2: Caracterização geométrica do domínio de uma função.

Lembre que a **imagem de uma função** é o conjunto de todos os valores que a função assume. Assim, a imagem de uma função pode ser determinada pelas **retas horizontais** que interceptam o gráfico da função, como mostrado nos gráfico a seguir.

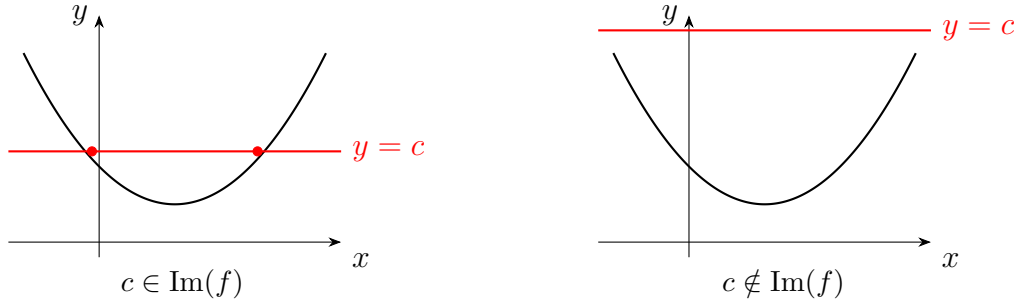


Figura 2.3: A imagem de  $f$  é o conjunto dos valores  $c$  para os quais  $y = c$  intercepta o gráfico de  $f$ .

Sejam duas funções  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos as funções  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  e  $\frac{f}{g}$  da seguinte forma:

1.  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,
2.  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ ,
3.  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ,
4.  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  se  $g(x) \neq 0$ , para todo  $x \in D$ .

**Definição 2.1.6.** Sejam as funções  $f : C \rightarrow D$  e  $g : A \rightarrow B$  com  $B \subset C$  e  $\text{Im}(g) \subset C$ . Com essas condições, podemos definir a função composta  $f \circ g : A \rightarrow D$ , onde  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ . A função  $f \circ g$  é chamada de composta.

**Exemplo 2.1.6.** Se  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$  e  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \ln(x)$ ,  $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x)} = x$ .

**Definição 2.1.7.** Uma função  $f : D \rightarrow E$  é dita sobrejetiva, quando sua imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, se  $\text{Im}(f) = E$ .

**Exemplo 2.1.7.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , onde  $f(x) = x^2$  e  $\mathbb{R}_+$  é o conjunto dos números reais não negativos, é uma função sobrejetiva.

**Definição 2.1.8.** Uma função  $f : D \rightarrow E$  é dita injetiva, quando  $f(x) \neq f(y)$  para  $x, y \in D$  implicar  $x \neq y$ .

**Exemplo 2.1.8.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(x) = x^3 + 4$  é injetiva. De fato,  $f(x) \neq f(y)$  implica  $0 \neq f(x) - f(y) = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ , de onde segue que  $x \neq y$ .

**Definição 2.1.9.** Uma função  $f : D \rightarrow E$  é dita bijetiva quando for injetiva e sobrejetiva.

**Exemplo 2.1.9.** A função  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , onde  $f(x) = e^x$  é bijetiva.

**Definição 2.1.10.** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função injetora e  $\text{Im}(f) = C$ . Assim, podemos definir a função  $g : C \rightarrow D$  onde  $g(y) = x$  para  $y = f(x)$ . A função  $g$  é chamada de inversa de  $f$  e é denotada por  $g = f^{-1}$ .*

**Observação 2.1.1.** *Não confunda  $f^{-1}(x)$  com  $\frac{1}{f(x)}$ , são coisas diferentes.*

**Exercício 2.1.1.** *Sejam  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$  e  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \ln(x)$ . Mostre que  $g = f^{-1}$ .*

**Definição 2.1.11.** *Dizemos que uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é:*

- a) decrescente se para  $x, y \in D$  com  $x < y$  implicar  $f(x) > f(y)$ .*
- b) crescente se para  $x, y \in D$  com  $x < y$  implicar  $f(x) < f(y)$ .*
- c) não-decrescente se para  $x, y \in D$  com  $x < y$  implicar  $f(x) \leq f(y)$ .*
- d) não-crescente se para  $x, y \in D$  com  $x < y$  implicar  $f(x) \geq f(y)$ .*

**Definição 2.1.12.** *Uma função que satisfaz um dos itens da Definição 2.1.11 é dita monótona.*

**Exemplo 2.1.10.** *Mostre que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f(x) = 2x$  é crescente em  $\mathbb{R}$ .*

**Solução:** Sejam  $x_1, x_2 \in S = \mathbb{R}$ , com  $x_1 < x_2$ . Como  $2 > 0$ , temos então  $2x_1 < 2x_2$ , logo  $f(x_1) < f(x_2)$ .  
Logo,  $f$  é uma função crescente em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.1.11.** *Mostre que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f(x) = -2x$  é decrescente em  $\mathbb{R}$ .*

**Solução:** Sejam  $x_1, x_2 \in S = \mathbb{R}$ , com  $x_1 < x_2$ . Como  $-2 < 0$ , temos então  $2x_1 > 2x_2$ , logo  $f(x_1) > f(x_2)$ .  
Logo,  $f$  é uma função decrescente em  $\mathbb{R}$ .

**Definição 2.1.13.** *Dizemos que uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é:*

- a) limitada superiormente se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \leq M$  para todo  $x \in D$ .*
- b) limitada inferiormente se existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \geq m$  para todo  $x \in D$ .*
- c) limitada se for limitada superiormente e inferiormente.*

**Exemplo 2.1.12.** *A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f(x) = \sin x$  é limitada, pois  $-1 \leq \sin x \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Definição 2.1.14.** *Dizemos que uma função  $f(x)$  é:*

- i) par se  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x$  em seu domínio.*
- ii) ímpar se  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$  em seu domínio.*

**Exemplo 2.1.13.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f(x) = x^2$  é uma função par, pois  $x^2 = (-x)^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.1.14.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f(x) = x^5$  é uma função ímpar, pois  $-x^5 = (-x)^5$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 2.1.2.** Toda função pode ser escrita como sendo a soma de uma função par com uma função ímpar.

**Demonstração:** Seja  $f(x)$  uma função arbitrária. Vamos definir  $f_P(x)$  como a parte par de  $f(x)$  e  $f_I(x)$  como a parte ímpar de  $f(x)$ .

A parte par de  $f(x)$  é dada por:

$$f_P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

E a parte ímpar de  $f(x)$  é dada por:

$$f_I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Assim temos o seguinte

$$\begin{aligned} f_P(x) + f_I(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &= \frac{f(x) + f(x)}{2} + \frac{f(-x) - f(-x)}{2} \\ &= \frac{2f(x)}{2} = f(x). \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que toda função  $f(x)$  pode ser escrita como a soma de uma função par  $f_P(x)$  e uma função ímpar  $f_I(x)$ . ■

**Definição 2.1.15.** Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. O gráfico de  $f$  é o subconjunto do plano  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in D \text{ e } y = f(x)\}.$$

**Proposição 2.1.3.** O gráfico de uma função par definida em  $\mathbb{R}$  é simétrico em relação ao eixo  $y$ .

**Demonstração:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função par. Como  $f$  é par, então  $f(x) = f(-x)$ . Assim, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , os pontos  $(x, f(x))$  e  $(-x, f(x))$ , que são simétricos em relação ao eixo  $y$ . Com isso podemos concluir que o gráfico de uma função par definida em  $\mathbb{R}$  é simétrico em relação ao eixo  $y$ . ■

**Proposição 2.1.4.** O gráfico de uma função ímpar definida em  $\mathbb{R}$  é simétrico em relação à origem do plano cartesiano.

**Demonstração:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função ímpar. Como  $f$  é ímpar, então  $-f(x) = f(-x)$ . Assim, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , os pontos  $(x, f(x))$  e  $(-x, -f(x))$ , que são simétricos em relação à origem do plano cartesiano. Com isso podemos concluir que o gráfico de uma função par definida em  $\mathbb{R}$  é simétrico em relação à origem do plano cartesiano. ■

**Definição 2.1.16.** Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *periódica* se existir um número real  $p \neq 0$  tal que  $f(x + p) = f(x)$  para todo  $x \in D$ .

O número  $p$  é chamado de *período* de  $f$  e seu gráfico se repete em cada intervalo consecutivo de comprimento  $|p|$ .

## 2.2 Exercícios

**Exercício 2.2.1.** Defina uma função  $g$  por  $g(x) = f(x) + 1$ , em que  $f$  é a função definida por  $f(x) = x^2$ , com o domínio de  $f$  o intervalo  $[-1, 1]$ .

(a) Determine o domínio de  $g$ .

(b) Determine a imagem de  $g$ .

(c) Esboce o gráfico de  $g$ .

**Exercício 2.2.2.** Defina uma função  $h$  por

$$h(x) = f(x) - 1,$$

em que  $f$  é a função definida por  $f(x) = x^2$ , com o domínio de  $f$  o intervalo  $[-1, 1]$ .

(a) Determine o domínio de  $h$ .

(b) Determine a imagem de  $h$ .

(c) Esboce o gráfico de  $h$ .

**Exercício 2.2.3.** Defina as funções  $g$  e  $h$  por

$$g(x) = 2f(x) \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{2}f(x),$$

em que  $f$  é a função definida por  $f(x) = x^2$ , com o domínio de  $f$  o intervalo  $[-1, 1]$ .

(a) Determine o domínio de  $g$  e o domínio de  $h$ .

(b) Determine a imagem de  $g$ .

(c) Determine a imagem de  $h$ .

(d) Esboce os gráficos de  $g$  e de  $h$ .

**Exercício 2.2.4.** Defina uma função  $g$  por

$$g(x) = -f(x),$$

em que  $f$  é a função definida por  $f(x) = x^2$ , com o domínio de  $f$  o intervalo  $[-1, 1]$ .

(a) Determine o domínio de  $g$ .

(b) Determine a imagem de  $g$ .

(c) Esboce o gráfico de  $g$ .

**Exercício 2.2.5.** Defina uma função  $g$  por

$$g(x) = f(x + 1),$$

em que  $f$  é a função definida por  $f(x) = x^2$ , sendo o domínio de  $f$  o intervalo  $[-1, 1]$ .

(a) Determine o domínio de  $g$ .

(b) Determine a imagem de  $g$ .

(c) Esboce o gráfico de  $g$ .

**Exercício 2.2.6.** Defina funções  $g$  e  $h$  por

$$g(x) = f(2x) \quad \text{e} \quad h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right),$$

em que  $f$  é a função definida por  $f(x) = x^2$ , com o domínio de  $f$  o intervalo  $[-1, 1]$ .

(a) Determine o domínio de  $g$ .

(b) Determine o domínio de  $h$ .

(c) Determine a imagem de  $g$  e a imagem de  $h$ .

(d) Esboce os gráficos de  $g$  e de  $h$ .

**Exercício 2.2.7.** Defina uma função  $g$  por

$$g(x) = f(-x),$$

em que  $f$  é a função definida por  $f(x) = x^2$ , com o domínio de  $f$  o intervalo  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

(a) Determine o domínio de  $g$ .

(b) Determine a imagem de  $g$ .

(c) Esboce o gráfico de  $g$ .



**Exercício 2.2.8.** Defina uma função  $g$  por

$$g(x) = 2f(x) + 1,$$

em que  $f$  é a função definida por  $f(x) = x^2$ , com o domínio de  $f$  o intervalo  $[-1, 1]$ .

- (a) Registre a ordem das operações usadas para calcular o valor de  $g(x)$ , depois de já ter calculado o valor de  $f(x)$ .
- (b) Determine o domínio de  $g$ .
- (c) Determine a imagem de  $g$ .
- (d) Esboce o gráfico de  $g$ .

**Exercício 2.2.9.** Mostre que a função  $f$  definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

para todo número real  $x \neq 0$  é uma função ímpar.

**Exercício 2.2.10.** Suponha que  $g$  seja uma função par cujo domínio é  $[-2, -1] \cup [1, 2]$  e cujo gráfico, no intervalo  $[1, 2]$ , é o gráfico usado nas instruções dos Exercícios 1–14. Esboce o gráfico de  $g$  em  $[-2, -1] \cup [1, 2]$ .

**Exercício 2.2.11.** Suponha que  $g$  seja uma função par cujo domínio é  $[-5, -1] \cup [1, 5]$  e cujo gráfico, no intervalo  $[1, 5]$ , é o gráfico usado nas instruções dos Exercícios 15–50. Esboce o gráfico de  $g$  em  $[-5, -1] \cup [1, 5]$ .

**Exercício 2.2.12.** Suponha que  $h$  seja uma função ímpar cujo domínio é  $[-2, -1] \cup [1, 2]$  e cujo gráfico, no intervalo  $[1, 2]$ , é o gráfico usado nas instruções dos Exercícios 1–14. Esboce o gráfico de  $h$  em  $[-2, -1] \cup [1, 2]$ .

**Exercício 2.2.13.** Suponha que  $h$  seja uma função ímpar cujo domínio é  $[-5, -1] \cup [1, 5]$  e cujo gráfico, no intervalo  $[1, 5]$ , é o gráfico usado nas instruções dos Exercícios 15–50. Esboce o gráfico de  $h$  em  $[-5, -1] \cup [1, 5]$ .