Notas de Aula

Cálculo Diferencial e Integral II - CT
Departamento de Matemática – UFPI

Estas notas de aula foram elaboradas para apoiar a disciplina Cálculo Diferencial e Integral II - CT da Universidade Federal do Piauí. Trata-se de um material de apoio, e não de um livro didático. Algumas definições, demonstrações e exemplos não estão aqui incluídos, pois serão discutidos diretamente em sala de aula. Este material encontra-se em constante desenvolvimento e poderá ser aprimorado em futuras edições.

A versão mais atualizada deste material pode ser encontrada em: `https://vitalianoamaral.github.io`
No menu, clique em **Ensino**, depois em **Graduação** e, em seguida, em **Disciplinas Ministradas**. Localize a disciplina **Cálculo diferencial e integral II-CT** e clique no link **Notas de Aula**.

Prof. Vitaliano de Sousa Amaral
Departamento de Matemática – UFPI

28 de novembro de 2025

Sumário

Capítulo 1

Integral Imprópria

1.1 Revisão: Integral Definida

Consideramos um intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Uma partição de $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos de $[a, b]$, $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ tais que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. A partição P divide o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \cdots, [x_{n-2}, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, x_n]$, como podemos ver na Figura 1.1.

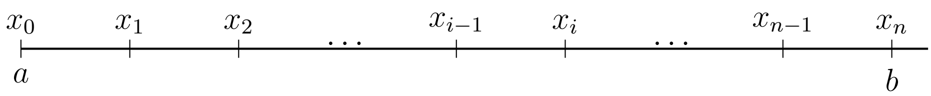

Figura 1.1

O i-ésimo subintervalo da partição P é $[x_{i-1}, x_i]$ e seu comprimento é representado por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Exemplo 1.1.1. *Uma partição do intervalo fechado* $[0, 10]$ *é o conjunto* $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. *Observamos que a partição* P *divide o intervalo* $[0, 10]$ *em* 5 *subintervalos* $[0, 2]$, $[2, 4]$, $[4, 6]$, $[6, 8]$ *e* $[8, 10]$. *Veja ilustração geométrica na Figura 1.2.*

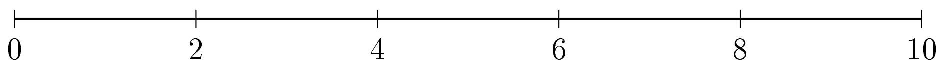

Figura 1.2

Seja uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ escolhamos c_i, $i = 1, \cdots, n$. Denotamos por $\|P\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{x_i - x_{i-1}\}$.

Veja ilustração geométrica na Figura 1.3 a seguir.

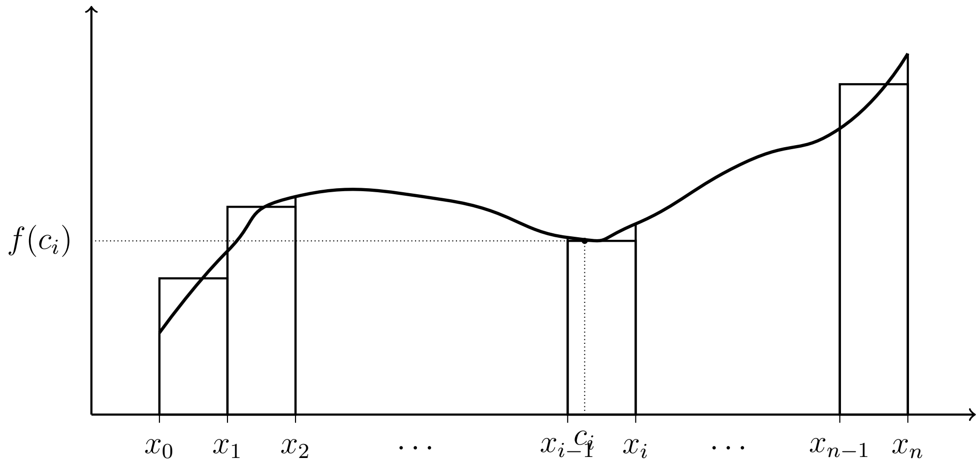

Figura 1.3

Consideremos o retângulo de base medindo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$ onde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (Veja Figura 1.3).

Na ilustração geométrica, consideramos uma função positiva no intervalo $[a, b]$. Observe que a soma das áreas dos retângulos aproxima a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo x. Alguns retângulos possuem parte de sua área acima do gráfico e outros possuem parte abaixo, de forma que a aproximação pode não ser exata quando temos um número finito de partições. No entanto, quando fazemos o comprimento de todos os subintervalos da partição tender a zero, isto é, quando tomamos infinitas partições cada vez mais finas, a soma infinita das áreas desses retângulos coincide exatamente com a área entre o gráfico de f e o eixo x.

Essa é apenas uma noção intuitiva do que chamamos de **integral definida**; a seguir apresentamos sua definição formal.

Definição 1.1.1. *Considere uma partição P e $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Dizemos que f integrável em $[a, b]$ se $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ existe, e denotamos por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

A seguir apresentamos as principais propriedades da integral definida.

1.1.1 Principais propriedades

Sejam f e g funções possuindo integral definida em $[a, b]$ e $k \in \mathbb{R}$ um constante. As integrais definidas possuem as seguintes propriedades:

1. $\displaystyle\int_a^b [kf(x) + g(x)]\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$

2. Para $c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

4. Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

5. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

O **Teorema Fundamental do Cálculo** estabelece a conexão entre derivação e integração.

Theorem 1.1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Se f é contínua em $[a,b]$ e F é uma primitiva de f (isto é, $F'(x) = f(x)$), então:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Este teorema fornece um método prático para calcular integrais definidas, evitando o uso direto da Soma de Riemann.

Outras propriedades serão apresentadas na seção sobre Integrais Impróprias.

1.2 Integrais Impróprias

Na definição de integral definida, consideramos a função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$. Agora, vamos estender essa definição para duas situações importantes:

1. Quando a função está definida em intervalos infinitos, como:

$$[a,+\infty), \quad (-\infty,b] \quad \text{ou} \quad (-\infty,+\infty).$$

2. Quando a função apresenta descontinuidade em algum ponto do intervalo de integração.

Nesses casos especiais usamos as **integrais impróprias**.

1.2.1 Integrais em Intervalos Infinitos

Para motivar a definição, vamos considerar um exemplo.

Exemplo 1.2.1. *Calcular a área da região R limitada pelo gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, com $x \geq 1$, e o eixo x.*

Primeiro, observamos que a região é ilimitada *no sentido horizontal. Se definirmos R_b como a parte da região R entre $x = 1$ e $x = b$ ($b > 1$), temos:*

$$A(R_b) = \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Ver Figura 1.4.

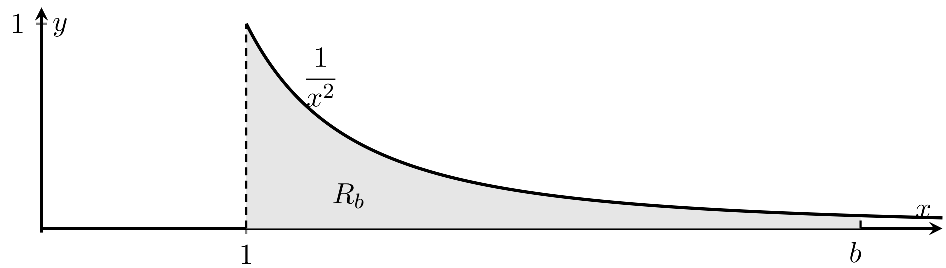

Figura 1.4: Área R_b sob $y = \frac{1}{x^2}$ de $x = 1$ a $x = b$.

À medida que $b \to +\infty$, essa área se aproxima da área total da região R:

$$A(R) = \lim_{b \to +\infty} A(R_b) = \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Ver Figura 1.5.

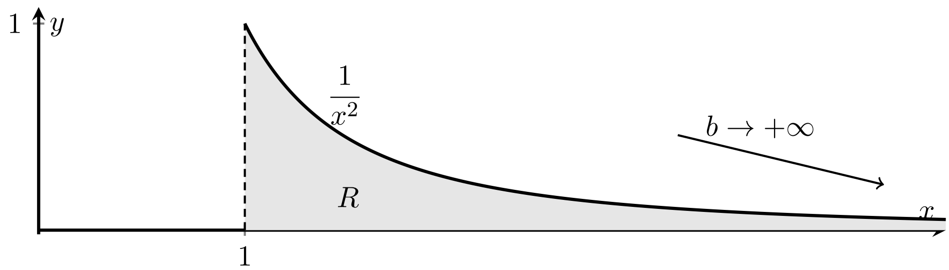

Figura 1.5: Limite $b \to +\infty$ resultando em $A(R) = 1$.

Esse exemplo motiva a seguinte definição.

Definição 1.2.1. *Seja f uma função integrável em $[a, +\infty)$. Definimos:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se f é uma função integrável em $(-\infty, b]$. Definimos:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se f é uma função integrável em $\mathbb{R}$. Definimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,dx.$$

Se o limite existir, dizemos que a integral imprópria **converge**. Caso contrário, dizemos que ela **diverge**.

1.2.2 Integrais com Descontinuidade

Agora, consideremos o caso em que a função apresenta descontinuidade em um ponto do intervalo de integração.

Exemplo 1.2.2. *Calcular a área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no intervalo $(0, 9]$.*

Como a função não está definida em $x = 0$, definimos:

$$A(R_\varepsilon) = \int_\varepsilon^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^9 = 6 - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Quando $\varepsilon \to 0^+$, obtemos:

$$A(R) = \lim_{\varepsilon\to0^+} A(R_\varepsilon) = 6.$$

De forma geral:

Definição 1.2.2. *Se f for integrável em $(a, b]$, definimos:*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,dx.$$

Se f for integrável em $[a, b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to b^-}\int_a^\varepsilon f(x)\,dx.$$

Se f tiver descontinuidade em $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to c^-}\int_a^\varepsilon f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to c^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,dx.$$

1.3 Critérios de convergência

Teorema 1.3.1 (Critério de comparação)**.** *Sejam f e g funções integráveis em $[a, t]$, para todo $t > a$, tais que*

$$0 \le f(x) \le g(x), \quad \forall x \ge a.$$

Então, valem as seguintes propriedades:

a) Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *converge, então* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *também converge.*

b) Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge, então* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *também diverge.*

Exemplo 1.3.1. *Verifique que a integral imprópria*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x\,dx$$

é convergente.

Solução. Para $x \geq 0$ vale $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, portanto

$$0 \leq e^{-x} \sin^2 x \leq e^{-x}.$$

Agora,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx := \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \big[-e^{-x}\big]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \big(1-e^{-t}\big) = 1.$$

Assim, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ é convergente. Pelo critério de comparação, segue que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x\,dx \text{ é convergente e } 0 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x\,dx \leq 1.$$

Proposição 1.3.1. *Seja f integrável em $[a,t]$, para todo $t \geq a$. Se*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \quad \text{é convergente,}$$

então

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{também é convergente.}$$

Demonstração. Para todo $x \geq a$ vale

$$0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|.$$

Como $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ é convergente, pelo critério de comparação segue que

$$\int_a^{+\infty} \big(|f(x)| + f(x)\big)\,dx$$

também converge. Além disso, para todo $t > a$, temos

$$\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^t \big(|f(x)| + f(x)\big)\,dx - \int_a^t |f(x)|\,dx.$$

Ora, como os dois integrais do lado direito convergem quando $t \to +\infty$, conclui-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

também é convergente. □

Exemplo 1.3.2. *Determine se a integral imprópria*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, \sin^3 x\, dx$$

é convergente ou divergente. Justifique.

Solução. Para todo $x \geq 0$, tem-se

$$0 \leq \left| e^{-x} \sin^3 x \right| \leq e^{-x}.$$

Como $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ é convergente, pelo critério de comparação segue que

$$\int_0^{+\infty} \left| e^{-x} \sin^3 x \right| dx$$

também converge. Aplicando a Proposição 1.3.1, conclui-se que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^3 x\, dx$$

é convergente. $\square$

Capítulo 2

Sequência e série de números reais

2.1 Sequências de Números Reais

Definição 2.1.1. *Uma sequência de números reais é uma função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, onde* $f(n) = a_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Notação 2.1.1. *A sequência* $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ *é também denotada por* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Exemplo 2.1.1. *A função* $f(n) = (-1)^n$ *determina a sequência* $\{1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots\}$.

Definição 2.1.2. *Uma subsequência de uma sequência* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é uma restrição* $f_{\mathbb{N}'}$ *de* f*,* $f_{\mathbb{N}'} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, onde* $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.

Definição 2.1.3. *Dizemos que uma sequência de números reais* $\{a_n\}$ *é:*

a) decrescente se $a_n > a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

b) crescente se $a_n < a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

c) não-decrescente se $a_n \leq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

d) não-crescente se $a_n \geq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.1.4. *Uma sequência que satisfaz um dos itens da Definição 2.1.3 é dita* ***monótona****.*

Exemplo 2.1.2. *As sequências* $\{\frac{1}{n}\}$*,* $\{n+1\}$ *e* $\{7-n\}$ *são monótonas. Verifique.*

Definição 2.1.5. *Dizemos que uma sequência de números reais* $\{a_n\}$ *é:*

a) limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

b) limitada inferiormente se existe $m \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \geq m$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

c) limitada se for limitada superiormente e inferiormente.

2.1.1 Exercícios

Exercício 2.1.1. *Mostre que as sequências abaixo são limitadas e monótonas. Descreva o tipo de monotonicidade de cada uma delas.*

a) $x_n = \dfrac{2n-1}{n}$;

b) $x_n = 1 + \dfrac{1}{3n}$;

c) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$;

d) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$;

e) $x_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2}$.

Exercício 2.1.2. *Para cada uma das sequências do exercício anterior, exiba três subsequências.*

2.1.2 Limite de Sequências

Definição 2.1.6. *Dizemos que um número real L é limite de uma sequência $\{a_n\}$ se, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|a_n - L| < \epsilon, \quad \forall\, n \geq N. \tag{2.1}$$

Denotamos: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$.

Se a sequência $\{a_n\}$ possui limite, dizemos que a sequência é **convergente**. Caso contrário, dizemos que é **divergente**.

Definição 2.1.7. *Dizemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se, para cada $M > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$ para todo $n \geq N$. Neste caso, dizemos que a sequência diverge para $+\infty$.*

Teorema 2.1.1. *Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências convergentes. Então:*

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} c = c$, *quando* $a_n = c$ *é constante;*

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$;

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n}$, *se* $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$.

Teorema 2.1.2 (Teorema do Confronto). *Se as sequências $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ são tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n > n_0$ e*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L,$$

então $\lim_{n\to+\infty} b_n = L$.

Exemplo 2.1.3. *Prove que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2+1} = 0$.*

Uma das sequências mais importantes no mundo matemático é a sequência de Fibonacci, definida por

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1 \quad \text{e} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall\, n \geq 2.$$

Proposição 2.1.1. *Uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $a \in \mathbb{R}$ se, e somente se, toda subsequência de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a.*

Proposição 2.1.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Teorema 2.1.3. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Teorema 2.1.4 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada possui pelo menos uma subsequência convergente.*

2.1.3 Exercícios

Exercício 2.1.3. *Calcule os seguintes limites das seguintes sequências:*

a) $\lim \dfrac{2^n}{n^2}$

b) $\lim(\sqrt{n^2+1} - n)$

c) $\lim \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

d) $\lim \dfrac{1+2n}{\sqrt{4n^2-1}}$

e) $\lim \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

f) $\lim(\sqrt[n]{n})$

g) $\lim n \left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - 1\right)$

h) $\lim \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

i) $\lim(\sqrt[n]{a}),\ a > 0$

Exercício 2.1.4. *Mostre que se* $\lim(|a_n|) = 0$*, então* $\lim(a_n) = 0$.

Exercício 2.1.5. *Mostre que se* $\lim(b_n) = 0$ *e* (a_n) *é limitada, então* $\lim(b_n a_n) = 0$.

Exercício 2.1.6. *Calcule os seguintes limites:*

a) $\lim \dfrac{(-1)^n}{n}$

b) $\lim \dfrac{1}{n}\cos(n)$

Exercício 2.1.7. *Seja* (a_n) *uma sequência definida recursivamente por:*

$$a_1 = \sqrt{2} \quad e \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},\ \forall n \geq 1.$$

a) Mostre que $a_n < 2$, $\forall n \geq 1$.

b) Mostre que $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 - a_n)(1 + a_n)$, $\forall n \geq 1$.

c) Mostre que (a_n) *é estritamente crescente.*

d) Mostre que (a_n) *converge e ache o seu limite.*

Exercício 2.1.8. *Mostre que a recíproca do Teorema 2.1.3 não é verdadeira.*

2.2 Séries de Números Reais

Uma série de números reais é uma soma infinita de termos reais, escrita da seguinte forma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Nesta expressão, cada a_n representa o n-ésimo termo da sequência associada à série.

Dada uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, considera-se a sequência (S_n) definida por:

$$S_1 = a_1, \qquad S_2 = a_1 + a_2, \qquad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \qquad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

A sequência (S_n) é chamada de **sequência das somas parciais** da série.

Se o limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ existe e é um número real S, dizemos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** e sua soma é S.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad \text{se, e somente se,} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Se o limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ não existe, dizemos que a série **diverge**.

Exemplo 2.2.1. *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *converge.*

Solução: Temos:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Essa é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$, *cujo termo geral é* $a_n = \frac{1}{2^n}$.

A soma parcial é:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Logo, a série converge e sua soma é $S = 1$.

De modo geral, uma série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 r^n$$

converge se e somente se $|r| < 1$, e sua soma é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1-r}.$$

Fica como exercício para o leitor fazer a demonstração.

Exemplo 2.2.2. *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ *diverge.*

Solução: Temos:

$S_1 = -1, \quad S_2 = -1+1 = 0, \quad S_3 = -1+1-1 = -1, \quad S_4 = -1+1-1+1 = 0,$ *e assim por diante.*

Portanto, a sequência das somas parciais (S_n) *é:*

$$S_n = \begin{cases} -1, & \text{se } n \text{ for ímpar,} \\ 0, & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Logo, (S_n) *não converge (pois oscila entre* -1 *e* 0*), e a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

é divergente.

Operações com Séries Convergentes

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $c \in \mathbb{R}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ também converge, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Demonstração: Por hipótese, a sequência das somas parciais (S_n) converge, ou seja, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \to S$. Então,

$$cS_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n,$$

e a sequência (cS_n) também converge. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem, então

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$$

também converge, e vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demonstração: Como $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, temos

$$S_n + T_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n).$$

Se $S_n \to S$ e $T_n \to T$, então $S_n + T_n \to S + T$, logo a série também converge.

Observação 2.2.1. *Se $\sum a_n$ diverge e $c \in \mathbb{R}$, com $c \neq 0$, então $\sum ca_n$ também diverge.*

Observação 2.2.2. *Se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ diverge, então $\sum(a_n + b_n)$ também diverge.*

2.2.1 Testes de Convergência de Séries

A seguir, serão enunciados alguns testes e teoremas que são muito úteis para determinar se uma série converge ou não.

Teorema 2.2.1. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *O inverso, entretanto, não é verdadeiro: se* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *então a série diverge.*

Demonstração: Seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a sequência das somas parciais. Temos:

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Como S_n converge, existem $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ e $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Portanto, se a série converge, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Mas o contrário não é garantido: o fato de $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ não assegura a convergência da série.

Exemplo 2.2.3. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n+1}$ *diverge, pois*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1 \neq 0.$$

Teste da Comparação

Exemplo 2.2.4. *Sejam as sequências* (a_n) *e* (b_n) *tais que* $0 \leq a_n \leq b_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então:*

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também converge.*

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *também diverge.*

Demonstração: (a) Por hipótese, a sequência

$$b_1,\ b_1 + b_2,\ b_1 + b_2 + b_3,\ \ldots$$

é convergente, logo limitada. Por outro lado, como $a_n \geq 0$ e $a_n \leq b_n$, temos:

$$a_1 \leq b_1, \quad a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Portanto, a sequência $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ também é limitada e crescente. Como toda sequência crescente e limitada é convergente, concluímos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

(b) O item (b) é a contrapositiva de (a).

Exemplo 2.2.5. *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$ *converge.*

Solução: Como $2^n + n > 2^n$ para todo n, temos:

$$0 < \frac{1}{2^n + n} < \frac{1}{2^n}.$$

Sabemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é uma série convergente. Logo, pelo teste da comparação, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$ também converge.

Teste da Integral

Teorema 2.2.2. *Seja f uma função contínua, positiva e decrescente para todo $x \geq 1$. Então, a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

converge se, e somente se, a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

converge.

Exemplo 2.2.6. *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

Esta série é chamada de ***série*** *p. Temos:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge se, e somente se, } p > 1.$$

De fato, para $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1, \\ \infty, & \text{se } p \leq 1. \end{cases}$$

Conclusão: *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.*

Séries Alternadas

Uma série alternada é uma série da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n,$$

onde $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.2.7. *As séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

são séries alternadas.

Teste de Leibniz.

Teorema 2.2.3. *Se $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

converge.

Exemplo 2.2.8. *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

converge.

Solução: De fato, $\frac{1}{n}$ é decrescente e $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Assim, o Teste de Leibniz se aplica.

Exemplo 10.9.3. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

também converge.

Solução: De fato, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ é decrescente e $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Logo, pelo Teste de Leibniz, a série converge.

Convergência Absoluta

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Exemplo 2.2.9. *A série*
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$$
converge absolutamente, pois a série
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
converge.

Teorema 2.2.4. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *também converge.*

Demonstração: Como $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, somando termo a termo, obtemos:
$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ converge por comparação com $\sum_{n=1}^{\infty}2|a_n|$. Mas:
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| - a_n)\right],$$
e ambas as séries do lado direito convergem. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ também converge.

A recíproca desse fato, entretanto, não é verdadeira: há séries que convergem, mas não convergem absolutamente.

Exemplo 2.2.10. *A série*
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$
converge (série harmônica alternada), mas a série
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
diverge. Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ *é condicionalmente convergente.*

Teste da Razão

Suponha que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q.$$

Então:

(i) Se $q < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

(ii) Se $q > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(iii) Se $q = 1$, nada podemos concluir.

Exemplo 2.2.11. *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}$$

converge absolutamente.

Solução: De fato,

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Portanto, a série converge absolutamente.

Exemplo 2.2.12. *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

diverge.

Solução: De fato,

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1.$$

Logo, como $q = 1$, o teste é inconclusivo. Mas como $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$, a série diverge.

Exemplo 2.2.13. *Considere as séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Solução: Para ambas, temos $q = 1$. Neste caso, o teste da razão não fornece conclusão: sabemos, no entanto, que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge.

Exemplo 2.2.14. *Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$, onde*

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Solução: Usando a decomposição em frações parciais:

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

temos:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Observando que há cancelamentos sucessivos, resta:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Assim, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

2.3 Séries de Potências

Uma série de potência é uma soma infinita da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

O número c é dito o *centro* da série. Se $c = 0$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.3.1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$$

Exemplo 2.3.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

Exemplo 2.3.3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots$$

Exemplo 2.3.4.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Exemplo 2.3.5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\,2^n} = \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{3 \cdot 2^3} + \cdots$$

Exemplo 2.3.6.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n = 1 + x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \cdots$$

O domínio de convergência de uma série de potências é o conjunto dos números x para os quais a série converge.

Exemplo 2.3.7. *Para a série* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *domínio de convergência:*

$$-1 < x < 1.$$

Solução: De fato, usando o teste da Razão, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

converge se $|x| < 1$. Se $x = 1$, temos $\sum_{n=0}^{\infty} 1$, a qual diverge. Se $x = -1$, temos $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, a qual também diverge.

Exemplo 2.3.8. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *possui domínio de convergência:*

$$-1 \leq x < 1.$$

Exemplo 2.3.9. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ *possui domínio de convergência:*

$$-1 \leq x \leq 1.$$

Exemplo 2.3.10. *A série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *possui domínio de convergência:*

$$-\infty < x < \infty.$$

Exemplo 2.3.11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\,2^n}$$

possui domínio de convergência:

$$-1 < x < 3.$$

Solução: De fato,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n2^n}{(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x-1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\right| = \frac{|x-1|}{2}.$$

Pelo teste da Razão, temos que a série dada converge se $\frac{|x-1|}{2} < 1$, isto é:

$$-1 < x < 3.$$

Para $x = -1$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

que converge, pelo teste de Leibniz.

Para $x = 3$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

a qual diverge. Portanto, o domínio de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n}$$

é $-1 \leq x < 3$.

O **intervalo de convergência** de uma série de potência é o intervalo aberto que resulta do domínio de convergência ao suprimir-se os extremos. Desta forma, nos exemplos anteriores temos os seguintes intervalos de convergência.

Exemplo 2.3.12. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *intervalo de convergência é:*

$$-1 < x < 1.$$

Exemplo 2.3.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *intervalo de convergência é:*

$$-1 < x < 1.$$

Exemplo 2.3.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ *intervalo de convergência é:*

$$-1 < x < 1.$$

Exemplo 2.3.15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *intervalo de convergência é:*

$$\mathbb{R}.$$

Exemplo 2.3.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^n}$ *intervalo de convergência é:*

$$-1 < x < 3.$$

2.3.1 Propriedades das Séries de Potências

Uma função real $f(x)$ é dita desenvolvível em série de potências no intervalo aberto $(c-r,\, c+r)$ se existem constantes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ reais tais que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n.$$

Exemplo 2.3.17. *A função* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *é desenvolvível em série de potências no intervalo aberto* $-1 < x < 1$*, uma vez que*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \textit{se } -1 < x < 1.$$

De fato, como:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x},$$

tomando-se o limite em $n \to \infty$*, resulta que*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Suponha que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

em $c - r < x < c + r$. Então:

1. $g'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$;

2. $\displaystyle\int_0^x g(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}$ no mesmo intervalo.

A partir destas propriedades podemos obter novos desenvolvimentos a partir de um desenvolvimento dado.

Exemplo 2.3.18.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad \textit{se } |x| < 1.$$

Substituindo x *por* $-t$*, obtém-se:*

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots, \quad \textit{se } |t| < 1.$$

E agora substituindo t por t^2, tem-se:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots, \quad se\ |t| < 1.$$

Agora, integrando (a) de 0 até x, temos:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \quad se\ |x| < 1.$$

Ou seja,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \qquad |x| < 1.$$

Além disso, foi provado que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ *converge, pelo Teste de Leibniz. Donde se tem a igualdade:*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad se\ -1 < x \leq 1.$$

Portanto, temos:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Agora, integrando (b) de 0 a x, temos:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad se\ |x| < 1,$$

ou ainda,

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \qquad |x| < 1.$$

Porém, usando o critério de Leibniz, pode-se provar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$$

converge. Logo, temos:

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \qquad -1 < x \leq 1.$$

Assim tem sentido calcular-se:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}.$$

2.3.2 Séries de Taylor

Quando uma função real $f(x)$ é desenvolvível em séries de potências, isto é, quando

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n, \quad c-r < x < c+r,$$

temos que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}, \quad c-r < x < c+r,$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-c)^{n-2}, \quad c-r < x < c+r,$$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)a_n(x-c)^{n-m}, \quad c-r < x < c+r.$$

E, assim sucessivamente. De tal modo que:

$$f(c) = a_0, \quad f'(c) = 1a_1, \quad f''(c) = 2\cdot 1a_2, \quad f'''(c) = 3\cdot 2\cdot 1a_3, \ldots$$

$$f^{(n)}(c) = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1a_n = n!a_n.$$

Logo,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Concluímos que, quando f é desenvolvível em série de potência, então f é infinitamente derivável e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n. \tag{2.2}$$

O desenvolvimento (1) é chamado desenvolvimento de Taylor de f, e a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

é chamada **Série de Taylor** de f.

Em particular, se $c = 0$ em (1), temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

que é chamado **desenvolvimento de Maclaurin** de f.

2.4 Exercícios

Exercício 2.4.1. *Mostre que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} ln\left(1+\frac{1}{a^{n-1}}\right)$ *é convergente se* $a>1$.

Exercício 2.4.2. *As seguintes séries diverge ou converge? Justifique.*

a) $\sum_{k=1}^{+\infty} k\, sen\frac{1}{k}$; *b)* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^k}{k}$; *c)* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^k}{12k^5+k^3-176576k^2}$; *d)* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{3k}}{k^3+e^{2k}}$.

Exercício 2.4.3. *Mostre que a série dada é convergente:*

a) $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1} sen\frac{1}{k}$; *b)* $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^3}{n^4+3}$; *c)* $\sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{ln\, k}{k}$;
d) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 2^{-n}$; *e)* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)(n+1)}$; *e)* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{11}{(2n+3)(3n+5)}$.

Exercício 2.4.4. *Estude a série dada com relação a convergência ou divergência.*

a) $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k^2+1)}$; *b)* $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2\, ln\, k}$; *c)* $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha\, ln\, k}$, $\alpha>0$; *d)* $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{1+k^4}$.

4. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ *converge e tem soma* $\frac{a}{1-q}$ *se* $|q|<1$ *e diverge se* $|q|\geq 1$.

Exercício 2.4.5. *Mostre que* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$ *converge e tem soma igual a* 2.

6. A série $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k} sen\frac{1}{k}$ *é convergente ou divergente? Justifique.*

Exercício 2.4.6. *Estude a série dada com relação a convergência ou divergência.*

a) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{2k^3-k+1}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}$; *c)* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+2}{k^5+2k+1}$;.

8. Diga se cada série a seguir converge ou diverge. Justifique.

a) $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{3^k}{(1+4^k)}$; *b)* $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k!2^k}{k^k}$; *c)* $\sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha^k$ *com* $\alpha>0$;
d) $\sum_{k=1}^{+\infty}[\sqrt{k+1}-\sqrt{k}]$; *e)* $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^3+4}{2^k}$ *f)* $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}$ *com* $a>0$.

Exercício 2.4.7. *Determine* $x>0$ *para que a série seja convergente.*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}$; *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}$; *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{kx^k}{k^3+1}$; *d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{2^k}$; *e)* $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{x^k}{ln\,k}$;
f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k+1)}$; *g)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k+1)x^k}{k!}$; *h)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^k}$.

Exercício 2.4.8. *Determine $x>0$ para que a série seja convergente.*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}x^k$; *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$; *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{ln\,k}$; *d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}$; *e)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}e^{kx}$;
f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k}x^{2k}$; *g)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$; *h)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k!x^k}{k^k}$.

Exercício 2.4.9. *Determine o domínio da função f dada por:*

a) $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k!x^k$; *b)* $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^3}$; *c)* $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\big(sen\frac{1}{k}\big)x^k$; *d)* $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}2^kx^k$.
(O domínio de uma função é o conjunto dos x onde a série é convergente.)

Exercício 2.4.10. *Considere a série de números reais $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$. Suponha que existe uma sequência $\{b_n\}$ tal que $0<b_n\le a_n$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}b_n=b>0$. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ é convergente?* **Justifique sua resposta!**

Exercício 2.4.11. *Considere as séries de números reais $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ tais que $0\le a_n\le b_n$. Além disso, suponha que existe uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua, positiva e decrescente tal que $f(n)=b_n$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f(n)=0$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)dx$ é convergente. Prove que:*

a) a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ é convergente.

b) a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ é convergente.

Exercício 2.4.12. *As séries dadas a seguir converge ou diverge?* **Justifique sua resposta!**

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{cos(1/k)}{k^2}$; *b)* $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{sen(k)}{k^3\,ln\,k}$; *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k+1}{k^2}$; *d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{cos(k\pi)}{k}$.

Exercício 2.4.13. *Se uma sequência de números reais positivos* $\{a_n\}$ *é tal que* $a_{n+1} = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$, *então a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge ou diverge?* **Justifique sua resposta!**

Exercício 2.4.14. *Determine a série de Maclaurin de:*

a) $f(x) = sen\, x$. *b)* $f(x) = cos\, x$. *c)* $f(x) = e^{2x}$.

d) $f(x) = actg\, x$. *b)* $f(x) = ln(x+1)$. *c)* $f(x) = e^{-x^2}$.

Exercício 2.4.15. *Encontre a série de Taylor da função* $f(x) = cos\, x$ *em torno de* π.

Exercício 2.4.16. *Encontre a série de Taylor da função* $f(x) = (x+1)^n$ *em torno de* 0.

Exercício 2.4.17. *Prove que*

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} a^{n-p} b^p$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $n \in I\!N$. *A fórmula acima é conhecida binômio de Newton.*

2.5 Série de Fourier

Definição 2.5.1. *Uma série de Fourier é uma forma de escrever uma função periódica* $f(x)$ *como uma soma de senos e cossenos.*

Dizemos que $f(x)$ *é periódica de período* $2L$ *quando ela é definida no intervalo* $(-L, L)$ *e, para todo* x, *vale*

$$f(x) = f(x+2L).$$

A série de Fourier associada à função $f(x)$ *é definida por*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) + b_n sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) \right),$$

onde os números a_0, a_n *e* b_n *são chamados coeficientes de Fourier.*

Os coeficientes da série de Fourier de uma função $f(x)$, periódica de período $2L$, são dados pelas fórmulas abaixo.

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\, dx, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)}$$

Para $n = 0$, obtemos o coeficiente da média (termo constante):

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx.}$$

De forma análoga, multiplicando a série por $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e integrando, obtêm-se os coeficientes senoidais:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \qquad (n = 1, 2, \ldots)}$$

Exemplo 2.5.1. *Vamos apresentar um exemplo de função contínua no intervalo* $[-\pi, +\pi]$*, ou seja, periódica de período* $2L = 2\pi$*. Considere a função*

$$f(x) = x^2, \qquad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Os coeficientes de Fourier são

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)\,dx = \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 sen\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)\,dx = 0.$$

Assim, a série de Fourier correspondente é

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Uma característica importante das séries de Fourier é que elas permitem representar também funções que apresentam saltos ou interrupções. Um exemplo muito conhecido é a chamada *onda quadrada*, cuja função é periódica de período $2L = 2\pi$.

Podemos descrevê-la assim:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \ \ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

onde f está definida no intervalo $(-\pi, \pi)$. Observe que a função não é contínua: ela possui saltos nos pontos $x = 0$ e nas extremidades do período, ou seja, $x = \pm\pi$.

Agora vamos determinar os coeficientes de Fourier da onda quadrada definida em $(-\pi, \pi)$ por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Como f é uma função ímpar, sua série de Fourier contém apenas termos de seno. Os coeficientes ficam:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-1)\, dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx + \int_{-\pi}^{0} -\cos(nx)\, dx \right) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx + \int_{-\pi}^{0} -\sin(nx)\, dx \right) = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar}, \\ 0, & \text{se } n \text{ é par}. \end{cases}$$

Assim, apenas os valores ímpares de n contribuem para a série de Fourier. A expansão resultante é

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \right).$$

Podemos também olhar as somas parciais para aproximar a solução:

$$S_p(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin((2p-1)x)}{2p-1} \right).$$

Lista de Exercícios – Séries de Fourier

Exercício 2.5.1. *Seja $f(x) = x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, com extensão 2π-periódica. Determine a série de Fourier de f em $[-\pi, \pi]$.*

Exercício 2.5.2. *Considere $f(x)$ definida em $[-\pi, \pi]$ por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ -1, & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

e 2π-periódica.

a) Mostre que f é uma função ímpar.

b) Determine a série de Fourier de f em $[-\pi, \pi]$.

Exercício 2.5.3. *Seja $f(x) = x^2$ em $[-\pi, \pi]$, estendida 2π-periodicamente.*

a) Mostre que f é par.

b) Determine a série de Fourier de f em $[-\pi, \pi]$.

Exercício 2.5.4. *Ache a série de Fourier da função*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

com extensão 2π-periódica.

Capítulo 3

Funções Vetoriais de Uma Variável Real

Definição 3.0.1. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}$. Chamamos de* função vetorial *qualquer aplicação*

$$F : D \to \mathbb{R}^m$$

que, para cada parâmetro real $t \in D$, produz um vetor da forma

$$F(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)) \in \mathbb{R}^m.$$

Assim, cada valor de t está associado a exatamente um vetor em $\mathbb{R}^m$.

Example 3.0.1. *A seguir listamos algumas funções vetoriais, cada uma com diferentes dimensões de imagem. Nos itens (a) e (c), os vetores possuem duas componentes; já nos itens (b) e (d), os vetores pertencem a $\mathbb{R}^3$.*

(a) $F_1(t) = (2t,\, 4t), \qquad t \geq 0.$

(b) $F_2(t) = (t,\, 2t,\, 4t), \qquad t \geq 0.$

(c) $F_3(t) = (2\cos t,\, 3\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$

(d) $F_4(t) = (\cos t,\, \sin t,\, t), \qquad t \geq 0.$

3.1 Operações com Funções Vetoriais

Definição 3.1.1. *Sejam $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ funções vetoriais, $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função escalar e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Definem-se as seguintes operações:*

(a) ***Soma:*** *A função $(F + G) : D \to \mathbb{R}^m$ é definida por*

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t), \quad t \in D.$$

(b) ***Diferença :*** *A função* $(F - G) : D \to \mathbb{R}^m$ *é dada por*

$$(F - G)(t) = F(t) - G(t), \quad t \in D.$$

(c) ***Multiplicação por constante:*** *A função* $kF : D \to \mathbb{R}^m$ *é definida por*

$$(kF)(t) = k\,F(t), \quad t \in D.$$

(d) ***Multiplicação por função escalar:*** *Dada a função real* f*, define-se*

$$(fF)(t) = f(t)\,F(t), \quad t \in D.$$

(e) ***Quociente por função escalar:*** *Se* $f(t) \neq 0$ *para todo* $t \in D$*, definimos*

$$\left(\frac{F}{f}\right)(t) = \frac{F(t)}{f(t)}, \quad t \in D.$$

(f) ***Produto escalar (ou interno):*** *A função* $F \cdot G : D \to \mathbb{R}$ *é definida por*

$$(F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t), \quad t \in D.$$

(g) ***Produto vetorial:*** *Quando* $m = 3$*, o produto vetorial gera uma nova função* $F \times G : D \to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$(F \times G)(t) = F(t) \times G(t), \quad t \in D.$$

Exemplo 3.1.1. *Considere as funções*

$$f(t) = \sin t, \qquad F(t) = (t,\, e^t,\, t^2), \qquad G(t) = (t,\, 1,\, t^3).$$

Calcule as seguintes expressões vetoriais:

(a) $F + G$

(b) $2F$

(c) fF

(d) $F \cdot G$

(e) $F \times G$

Solução.

(a) *Soma termo a termo:*

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t) = (t,\, e^t,\, t^2) + (t,\, 1,\, t^3) = (2t,\, e^t + 1,\, t^2 + t^3).$$

(b) *Multiplicação por constante:*

$$(2F)(t) = 2\,F(t) = (2t,\, 2e^t,\, 2t^2).$$

(c) *Produto por função escalar:*

$$(fF)(t) = f(t)\,F(t) = \sin t \cdot (t,\, e^t,\, t^2) = (t \sin t,\, e^t \sin t,\, t^2 \sin t).$$

(d) *Produto escalar:*

$$(F \cdot G)(t) = t \cdot t + e^t \cdot 1 + t^2 \cdot t^3 = t^2 + e^t + t^5.$$

(e) *Produto vetorial:*

$$(F \times G)(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t & e^t & t^2 \\ t & 1 & t^3 \end{vmatrix} = \left(t^3 e^t - t^2,\ t^3 - t^4,\ t - te^t\right).$$

Definição 3.1.2. *Seja $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ uma função vetorial, onde o conjunto D contém um intervalo aberto em torno de t_0 (não sendo necessário que F esteja definida no próprio ponto t_0). Dizemos que $F(t)$* converge *para o vetor $L \in \mathbb{R}^m$ quando t se aproxima de t_0 se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que*

$$0 < |t - t_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|F(t) - L\| < \varepsilon.$$

Usamos a notação

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = L.$$

Para um vetor

$$F(t) = (f_1(t),\, f_2(t),\, \ldots,\, f_m(t)) \quad \text{e} \quad L = (l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_m),$$

a distância entre $F(t)$ e L é dada por

$$\|F(t) - L\| = \sqrt{(f_1(t) - l_1)^2 + (f_2(t) - l_2)^2 + \cdots + (f_m(t) - l_m)^2}.$$

A partir dessa expressão, conclui-se que

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t \to t_0} f_i(t) = l_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Example 3.1.1. *Calcule o limite*

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{\sin t}{t},\ \frac{1 - \cos t}{t} \right).$$

Solução: *Como cada componente possui limite conhecido,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \qquad e \qquad \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0,$$

o limite vetorial é obtido componente a componente:

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{\sin t}{t},\ \frac{1 - \cos t}{t} \right) = (1,\, 0)\,.$$

Theorem 3.1.1 (Propriedades do limite)**.** *Sejam* $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ *e* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, com*

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = L, \qquad \lim_{t\to t_0} G(t) = M, \qquad \lim_{t\to t_0} f(t) = k.$$

Então:

(a) $\lim_{t\to t_0}(F \pm G)(t) = L \pm M$*;*

(b) $\lim_{t\to t_0}(fF)(t) = kL$*;*

(c) $\lim_{t\to t_0}\left(\dfrac{F}{f}\right)(t) = \dfrac{L}{k}$*, se* $k \neq 0$*;*

(d) $\lim_{t\to t_0}\|F(t)\| = \|L\|$*;*

(e) $\lim_{t\to t_0}(F \cdot G)(t) = L \cdot M$*;*

(f) se $m = 3$*, então* $\lim_{t\to t_0}(F \times G)(t) = L \times M$*.*

Definição 3.1.3 (Continuidade)**.** *Seja* $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ *e considere* t_0 *pertencente a um intervalo aberto* $I \subseteq D$*. Dizemos que* F *é* contínua em t_0 *quando*

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0).$$

Observação 3.1.1. *Se* t_0 *pertence à fronteira de* D*, o limite adequado a ser considerado é o limite lateral correspondente.*

A partir do Teorema do limite vetorial, temos a equivalência:

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t\to t_0} f_i(t) = f_i(t_0), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Definição 3.1.4 (Curva)**.** *Seja* $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ *uma função contínua definida em um intervalo* I*. Chamamos de* curva *a imagem do mapa* F*, isto é, o conjunto dos pontos* $F(t)$ *gerados à medida que* t *percorre* I*.*

Definição 3.1.5 (Derivada)**.** *Considere* $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ *e um ponto* t_0 *pertencente a um intervalo aberto* $I \subseteq D$*. Dizemos que* F *é derivável em* t_0 *quando o limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h}$$

existe. Este limite é chamado de derivada de F em t_0 *e é denotado por* $F'(t_0)$ *ou* $\dfrac{dF}{dt}(t_0)$*.*

Como consequência direta do Teorema do limite vetorial:

$$F \text{ é derivável em } t_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{cada componente } f_i(t) \text{ é derivável em } t_0,$$

e, nesse caso,

$$F'(t_0) = \left(f_1'(t_0), \dots, f_m'(t_0)\right).$$

Example 3.1.2. *Calcule a derivada de F em $t_0 = 1$, onde*

$$F(t) = \left(3t^2,\ \sin(t^3),\ e^{t^2}\right).$$

Como cada componente é derivável, basta derivarmos coordenada a coordenada:

$$F'(1) = \left((3t^2)'|_{t=1},\ (\sin(t^3))'|_{t=1},\ (e^{t^2})'|_{t=1}\right).$$

Calculando:

$$F'(1) = \left(6,\ 3t^2\cos(t^3)\Big|_{t=1},\ 2te^{t^2}\Big|_{t=1}\right) = (6,\ 3\cos(1),\ 2e).$$

Theorem 3.1.2 (Regras de derivação)**.** *Sejam $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, todas deriváveis em $t_0 \in I \subseteq D$. Então:*

(a) $(aF + bG)'(t_0) = aF'(t_0) + bG'(t_0)$*, para* $a, b \in \mathbb{R}$*;*

(b) $(fF)'(t_0) = f'(t_0)F(t_0) + f(t_0)F'(t_0)$*;*

(c) $(F \cdot G)'(t_0) = F'(t_0) \cdot G(t_0) + F(t_0) \cdot G'(t_0)$*;*

(d) se $m = 3$*, então* $(F \times G)'(t_0) = F'(t_0) \times G(t_0) + F(t_0) \times G'(t_0)$*.*

Definição 3.1.6 (Reta tangente à trajetória)**.** *Seja $F : A \to \mathbb{R}^n$ derivável em t_0, com*

$$\frac{dF}{dt}(t_0) \neq \vec{0}.$$

Dizemos que $\frac{dF}{dt}(t_0)$ *é um* vetor tangente *à trajetória de F em $F(t_0)$.*

A reta

$$X = F(t_0) + \lambda \frac{dF}{dt}(t_0), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

denomina-se reta tangente *à trajetória de F no ponto $F(t_0)$.*

Exemplo 3.1.2. *Seja $F(t) = (\cos t,\ sen t)$, $t \in \mathbb{R}$. Determine a equação da reta tangente à trajetória de F no ponto $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.*

Solução.

$$F\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2},\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad \frac{dF}{dt} = (-sen t,\ \cos t);$$

assim,

$$\frac{dF}{dt}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

A equação da reta tangente em $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *é:*

$$X = F\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \lambda \frac{dF}{dt}\left(\tfrac{\pi}{4}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ou seja,

$$(x,y) = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definição 3.1.7 (Comprimento de uma curva)**.** *Seja* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *uma curva com derivada contínua em* $[a,b]$*. Definimos o* comprimento $L(\gamma)$ *da curva* γ *por*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Exemplo 3.1.3. *Uma partícula desloca-se no espaço com equações paramétricas* $x = x(t)$*,* $y = y(t)$ *e* $z = z(t)$*. Sabe-se que, para todo* t*,*

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \sqrt{2}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -2.$$

Sabe-se, ainda, que $\frac{dz}{dt}\Big|_{t=0} = 2$ *e que, no instante* $t = 0$*, a partícula encontra-se na origem.*

a) Qual a posição da partícula no instante t*?*

b) Qual a velocidade escalar da partícula?

c) Determine o instante T *em que a partícula volta a tocar o plano* xy*.*

d) Qual o espaço percorrido pela partícula entre os instantes 0 *e* T*?*

Solução.

a)

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}\, t + k_1.$$

Da condição $x(0) = 0$ *segue* $k_1 = 0$*, então* $x = \sqrt{2}\, t$*.*

De forma análoga, $y = \sqrt{2}\, t$*.*

Para z temos:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -2 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -2t + k_3.$$

Da condição $\dfrac{dz}{dt}(0) = 2$ *resulta* $k_3 = 2$, *logo*

$$\frac{dz}{dt} = -2t + 2.$$

Integrando novamente,

$$z = -t^2 + 2t + k_4.$$

Como $z(0) = 0$, *temos* $k_4 = 0$. *Assim,*

$$z = -t^2 + 2t.$$

Portanto, a posição da partícula é

$$\begin{cases} x(t) = t\sqrt{2}, \\ y(t) = t\sqrt{2}, \\ z(t) = -t^2 + 2t. \end{cases}$$

b)

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{2 + 2 + (2-2t)^2} = 2\sqrt{1 + (2-t)^2}.$$

c) *A partícula toca o plano xy quando $z = 0$:*

$$-t^2 + 2t = 0 \Rightarrow t(2-t) = 0 \Rightarrow t = 0 \ ou \ t = 2.$$

Logo, $T = 2$.

d) *O comprimento percorrido entre* 0 *e* 2 *é:*

$$s(2) = \int_0^2 2\sqrt{1 + (2-t)^2}\, dt.$$

Fazendo $2 - t = \tan\theta$, *então* $dt = -\sec^2\theta\, d\theta$ *e quando* $t = 0$, $\theta = \arctan 2$; *quando* $t = 2$, $\theta = 0$.

Assim,

$$s(2) = -2\int_{\arctan 2}^{0} \sec^3\theta\, d\theta = 2\int_0^{\arctan 2} \sec^3\theta\, d\theta.$$

Usando integração por partes e $\sec\theta = \sqrt{5}$ *quando* $\theta = \arctan 2$, *obtém-se:*

$$s(2) = \tan\theta\, \sec\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big|_0^{\arctan 2} = 2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Velocidade e Aceleração

Seja $\mathbf{r}(t)$ a função vetorial que descreve a posição de uma partícula no plano ou no espaço no instante t.

- **Velocidade**: é a derivada da posição em relação ao tempo. Representa tanto a direção do movimento quanto a taxa de variação da posição:

  $$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t).$$

  O vetor velocidade é sempre tangente à curva descrita por $\mathbf{r}(t)$.

- **Aceleração**: é a derivada da velocidade (ou a segunda derivada da posição). Mede como a velocidade está mudando:

  $$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t).$$

  O vetor aceleração indica como a trajetória está se curvando e como a rapidez está variando.

Além disso, o módulo da velocidade,

$$\|\mathbf{v}(t)\|,$$

é chamado de **rapidez** e corresponde à velocidade escalar do movimento.

3.2 Exercícios

Exercício 3.2.1. *Esboce a curva descrita por* $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2 \rangle$, *para* $t \in [-2, 2]$.

Exercício 3.2.2. *Determine o domínio das funções vetoriais:*

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle \sqrt{t-1},\ \ln(t+2) \rangle, \qquad \mathbf{r}_2(t) = \left\langle \frac{1}{t^2-4},\ e^{1/t} \right\rangle.$$

Exercício 3.2.3. *Calcule* $\mathbf{r}'(t)$ *para:*

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^3,\ \cos t,\ e^{2t} \rangle.$$

Exercício 3.2.4. *Encontre o vetor tangente* $\mathbf{T}(t)$ *para*

$$\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t \rangle.$$

Exercício 3.2.5. *Calcule* $\mathbf{r}'(t)$ *e* $\mathbf{r}''(t)$ *para:*

$$\mathbf{r}(t) = \langle e^t,\ te^t,\ t^2 e^t \rangle.$$

Exercício 3.2.6. *Para* $\mathbf{r}(t) = \langle 3t, t^2, 1-t \rangle$, *encontre:*

1. *a velocidade* $\mathbf{v}(t)$*,*

2. *a aceleração* $\mathbf{a}(t)$*,*

3. *a velocidade no instante* $t = 2$*.*

Exercício 3.2.7. *Um objeto se move segundo* $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t\rangle$*. Determine a rapidez* $\|\mathbf{v}(t)\|$*.*

Exercício 3.2.8. *Mostre que o movimento descrito por*

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t,\ 2\sin t, rangle$$

é um círculo e determine seu raio.

Exercício 3.2.9. *Encontre a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos* $P(1, 2, 3)$ *e* $Q(4, -1, 5)$*.*

Exercício 3.2.10. *Determine a interseção da curva paramétrica*

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2 + t,\ 1 - t,\ 3 + 2t\rangle$$

com o plano $x + y + z = 10$*.*

Exercício 3.2.11. *Calcule o comprimento de arco da curva*

$$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2\rangle, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Exercício 3.2.12. *Calcule o comprimento de arco da curva*

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t\rangle, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Exercício 3.2.13. *Mostre que para a curva* $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$*, o vetor tangente é sempre paralelo ao vetor velocidade.*

Exercício 3.2.14. *Encontre os pontos em que a curva*

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 1,\ t^3 - 3t,\ 2t\rangle$$

intersecta o eixo z*.*

Exercício 3.2.15. *Para a curva* $\mathbf{r}(t) = \langle t,\ \sqrt{1+t},\ \ln(1+t)\rangle$*, calcule:*

1. $\mathbf{r}'(t)$*,*

2. $\|\mathbf{r}'(t)\|$*,*

3. *o comprimento do arco entre* $t = 0$ *e* $t = 3$*.*

Exercício 3.2.16. *Mostre que para qualquer função vetorial diferenciável, vale:*

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{r}(t)\|^2 = 2\langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)\rangle.$$