Notas de Aula

Elementos de Matemática
Departamento de Matemática – UFPI

Estas notas de aula foram elaboradas para apoiar a disciplina Elementos de Matemática do curso de Matemática da Universidade Federal do Piauí. Trata-se de um material de apoio, e não de um livro didático. Algumas definições, demonstrações e exemplos não estão aqui incluídos, pois serão discutidos diretamente em sala de aula. Este material encontra-se em constante desenvolvimento e poderá ser aprimorado em futuras edições.

A versão mais atualizada deste material pode ser encontrada em: `https://vitalianoamaral.github.io`
No menu, clique em **Ensino**, depois em **Graduação** e, em seguida, em **Disciplinas Ministradas**. Localize a disciplina **Elementos de Matemática I** e clique no link **Notas de Aula**.

Prof. Vitaliano de Sousa Amaral
Departamento de Matemática – UFPI

29 de novembro de 2025

Sumário

Capítulo 1

Números Reais

1.1 Um pouco sobre os números Naturais, Inteiros e Racionais

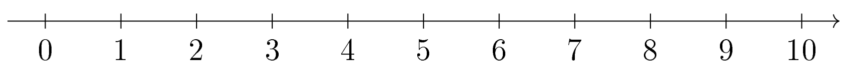
Ao longo da história, os números surgiram para atender a diferentes necessidades humanas. Os números naturais apareceram inicialmente como uma forma de contar objetos e registrar quantidades. Com o tempo, a necessidade de representar dívidas, perdas e posições relativas levou à introdução dos números inteiros, que incluem tanto os naturais quanto seus opostos negativos.

O conjunto dos números naturais é dado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Cada número natural pode ser representado sobre a reta real. Uma vez fixados os pontos correspondentes aos números 0 e 1, adotamos a distância entre eles como unidade de medida. A partir daí, todos os números naturais são representados como pontos igualmente espaçados, posicionados da esquerda para a direita a partir do zero.

Veja a seguir a ilustração do conjunto $\mathbb{N}$ sobre a reta real:

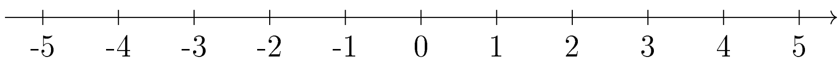


O conjunto dos números inteiros é representado da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

De maneira análoga, os números inteiros também podem ser representados sobre a reta real. Uma vez fixados os pontos 0 e 1, adotamos a distância entre eles como unidade de medida. A partir disso, os inteiros são posicionados igualmente espaçados, estendendo-se para a direita (inteiros positivos) e para a esquerda (inteiros negativos) a partir do zero.

Veja a seguir a ilustração do conjunto $\mathbb{Z}$ sobre a reta real:



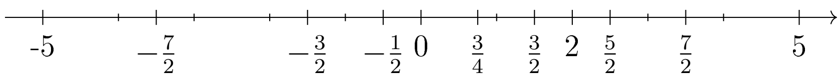
Observamos que os números inteiros consecutivos delimitam intervalos unitários (de comprimento 1).

O conjunto dos números racionais surge da necessidade de representar partes de um inteiro, aparecendo como subdivisões desses intervalos unitários. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ corresponde ao ponto situado exatamente no meio entre 0 e 1, $\frac{3}{4}$ está localizado a três quartos da distância entre 0 e 1, e assim por diante. Os racionais negativos seguem a mesma lógica, mas posicionados à esquerda de 0.

Assim, o conjunto dos números racionais é representado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

Essa construção nos permite associar um ponto da reta real a cada número racional. No entanto, como entre quaisquer dois números reais distintos existem infinitos racionais, não podemos representá-los todos graficamente. Em vez disso, destacamos apenas alguns exemplos para ilustrar a densidade dos números racionais sobre a reta real.



Admitiremos as seguintes operações (adição e multiplicação) no conjunto dos números racionais.

Definição 1.1.1. (Adição) *Sejam* $a = \dfrac{m}{n}$ *e* $b = \dfrac{r}{s}$ *elementos de* $\mathbb{Q}$, *com* $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$ *e* $n, s \neq 0$. *A soma de* a *com* b *é o elemento de* $\mathbb{Q}$ *dado por*

$$a + b = \frac{ms + nr}{ns}.$$

Exemplo 1.1.1. *Sejam* $a = \dfrac{2}{3}$ *e* $b = \dfrac{5}{4}$. *Então, a soma de* a *com* b *é:*

$$a + b = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{8 + 15}{12} = \frac{23}{12}.$$

Definição 1.1.2. (Multiplicação)*Sejam* $a = \dfrac{m}{n}$ *e* $b = \dfrac{r}{s}$ *elementos de* $\mathbb{Q}$, *com* $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$ *e* $n, s \neq 0$. *A multiplicação (ou produto) de* a *com* b *é o elemento de* $\mathbb{Q}$ *dado por*

$$ab = \frac{mr}{ns}.$$

Exemplo 1.1.2. *Sejam* $a = \dfrac{2}{3}$ *e* $b = \dfrac{5}{4}$*. Então, o produto de* a *com* b *é:*

$$ab = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

É fácil perceber que entre dois números racionais sempre existe outro número racional. De fato, dados dois números racionais $a = \dfrac{m}{n}$ e $b = \dfrac{r}{s}$ com $a < b$, $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$. Considere o número racional da forma

$$c = a + \frac{b-a}{2}.$$

Podemos observar que c está entre a e b, pois c é obtido somando a a a metade da distância entre a e b. Veja a ilustração geométrica na Figura 1.1.

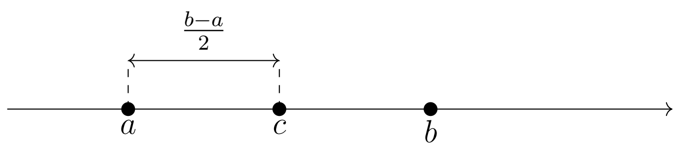


Figura 1.1: Ilustração do ponto médio $c = a + \frac{b-a}{2}$ na reta real.

Agora, além da afirmação acima vamos mosttrar que c é um número racional e está enrte os racionasi a e b. Veja que

$$\begin{aligned} c = a + \frac{1}{2}(b-a) &= \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{rn+ms}{2ns}\right), \end{aligned}$$

como $rn + ms$ e $2ns$ são números inteiros, podemos garantir que c é um número racional, pois é a razão entre dois inteiros com denominador diferente de zero.

Além da explicação anterior, outra forma de garantir que c está entre a e b é observar que

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} = c \quad \text{e} \quad c = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b,$$

portanto, temos $a < c < b$.

Diante do exposto anteriormente, surge uma dúvida: como sempre existe um número racional entre dois números racionais, então seria possível preencher toda a reta numérica apenas com números racionais?

A seguir veremos que a resposta para a pergunta anterior é: não é possível.

Diz-se que Hipaso de Metaponto, um seguidor de Pitágoras, foi o primeiro a descobrir que existem números que não podem ser representados pela divisão de dois números inteiros. Ele teria demonstrado que $\sqrt{2}$ não é racional, provavelmente por meio de uma prova geométrica.

Considere um triângulo retângulo desenhado sobre a reta numérica(veja Figura 1.2), com catetos medindo 1 unidade cada e hipotenusa sobre a reta numérica, indo do ponto 0 até o ponto marcado por x, ou seja, a hipotenusa tem comprimento medindo x unidades.

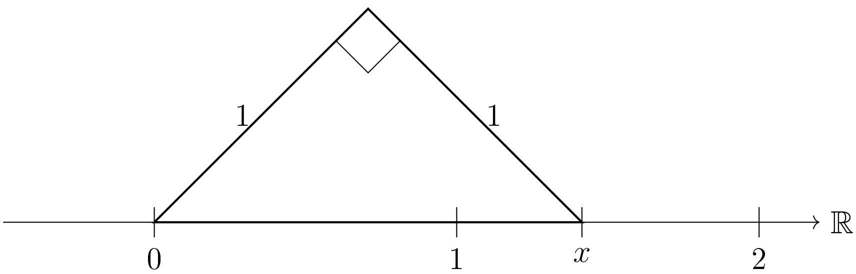


Figura 1.2:

Pelo **Teorema de Pitágoras**, temos: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Suponha, por contradição, que x seja um número racional. Então podemos escrevê-lo como $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si. Substituindo em $x^2 = 2$:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

Isso implica que p^2 é par, logo p é par. Seja $p = 2k$, assim temos

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 4k^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2k^2$$

Portanto, q^2 também é par, o que implica que q é par.

Chegamos a uma contradição, pois p e q seriam ambos pares, contrariando a hipótese de que são primos entre si. Logo, x **não é um número racional**.

Como x é um ponto da reta numérica que não pertence ao conjunto dos racionais, concluímos que a reta real não pode ser preenchida completamente apenas por números racionais.

O conjunto dos números que não podem ser representados como a divisão de dois inteiros, ou seja, que não são números racionais, é denotado pela letra $\mathbb{I}$ e chamado de *conjunto dos números irracionais.*

Da própria definição, temos que os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ não possuem elementos em comum, isto é,

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

Exercício 1.1.1. *Mostre que a soma de dois números racionais é também um número racional.*

Exercício 1.1.2. *A soma de uma número racional com um número irracional é um número racional? Justifique sua resposta.*

Exercício 1.1.3. *A soma de dois números irracionais é um número irracional? Justifique sua resposta.*

Exercício 1.1.4. *Sejam a um número racional não nulo e b um número irracional. Mostre que o produto ab não pode ser representado como uma divisão de dois números inteiros. Conclua que o produto de um número racional não nulo por um irracional é um número irracional.*

1.2 O conjunto dos números Reais

Os elementos dos conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, juntos, formam o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Como vimos anteriormente, todo ponto da reta numérica pode representar um número real. Assim, a partir de agora, essa reta numérica será chamada de **reta real**, como mostra a Figura 1.3 a seguir.

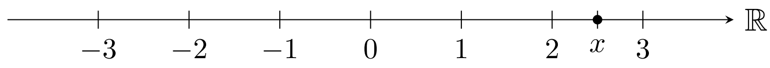


Figura 1.3: Representação da reta real.

Dizemos que um número real x é **positivo** se ele representa um ponto da reta real situado à direita da origem 0. Um número real x é dito negativo se $-x$ é positivo.

Para um número real x, é satisfeita uma, e apenas uma, das seguintes propriedades:

- x é positivo;
- $-x$ é positivo;
- $x = 0$.

1.2.1 Relação de ordem em $\mathbb{R}$

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que:

1. $x < y$ (lê-se: x menor que y) se $y - x$ for positivo;
2. $x = y$ (lê-se: x igual a y) se $y - x = 0$;
3. $x \leq y$ (lê-se: x menor ou igual a y) se $y - x$ for positivo ou $x - y = 0$.

Comutatividade e Associatividade

Comutatividade. Dizemos que uma operação é comutativa quando a ordem dos elementos não altera o resultado. No conjunto dos números reais, isso ocorre com a adição e a multiplicação:

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad ab = ba, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo:

$$7 + 4 = 4 + 7 \quad \text{e} \quad 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3.$$

Já a subtração e a divisão não possuem essa propriedade, pois

$$8 - 2 \neq 2 - 8, \quad \text{e} \quad \tfrac{12}{3} \neq \tfrac{3}{12}.$$

Associatividade. Uma operação é associativa quando o modo de agrupar os elementos não altera o resultado. Também nos reais, a adição e a multiplicação possuem essa propriedade:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (ab)c = a(bc), \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Isso significa que, ao somar ou multiplicar três ou mais números, podemos desprezar os parênteses e calcular livremente, por exemplo:

$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9, \qquad (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24.$$

Por outro lado, a subtração não é associativas. De fato,

$$(10 - 6) - 2 = 2 \quad \neq \quad 10 - (6 - 2) = 6.$$

Assim, é importante ter atenção ao realizar operações que envolvem diferentes tipos de operadores e parênteses, pois o uso incorreto de um sinal ou a aplicação equivocada de uma propriedade pode levar a erros nos cálculos.

No conjunto dos números reais são satisfeitas as seguintes propriedades:

i) $(a + b) + c = a + (b + c), \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

ii) $a + b = b + a, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

iii) Existe o elemento neutro da adição, denotado por 0, tal que

$$a + 0 = a, \ \forall\, a \in \mathbb{R};$$

iv) Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$;

v) $(ab)c = a(bc), \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

vi) $ab = ba, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

vii) Existe o elemento neutro da multiplicação, denotado por 1, tal que $a \cdot 1 = a, \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;

viii) $a(b+c) = ab + ac, \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

ix) Para todo $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{R}^*$ existe a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1$.

Proposição 1.2.1. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Então valem as seguintes propriedades:*

a) $x \leq x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;

c) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$;

d) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale exatamente uma das afirmações: $x = y$, $x \leq y$ ou $y \leq x$;

e) Se $x \leq y$, então $x + z \leq y + z, \ \forall\, z \in \mathbb{R}$;

f) Se $x > 0$ e $y > 0$, então $xy > 0$;

g) Se $x < 0$ e $y < 0$, então $xy > 0$;

h) Se $x > 0$ e $y < 0$, então $xy < 0$;

i) Se $x \neq 0$, então $x^2 > 0$;

j) Se $x < y$ e $z > 0$, então $xz < yz$;

k) Se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$;

l) $x > 0$ *implica* $x^{-1} > 0$;

m) $x < 0$ *implica* $x^{-1} < 0$;

n) $0 < x < 1$ *implica* $1 < x^{-1}$;

o) $1 < x$ *implica* $0 < x^{-1} < 1$;

p) $0 < x < y$ *implica* $0 < y^{-1} < x^{-1}$;

q) $x < y < 0$ *implica* $y^{-1} < x^{-1} < 0$.

1.2.2 Intervalos

Existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são representados por partes da reta real, estes conjuntos são chamados de intervalos. A seguir, será apresentado vários tipos de intervalos.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

i) O conjunto dos números reais $x \in \mathbb{R}$ tais que $a < x < b$ é chamado de intervalo aberto, e denotado por $(a,b)=\{x\in\mathbb{R};, a<x<b\}$.

ii) O conjunto dos números reais x tais que $a\leq x\leq b$ é chamado de intervalo fechado, e denotado por $[a,b]=\{x\in\mathbb{R};, a\leq x\leq b\}$.

iii) O conjunto dos números reais x tais que $a<x\leq b$ é chamado de intervalo semifechado à direita ou semiaberto à esquerda, e denotado por $(a,b]=\{x\in\mathbb{R};, a<x\leq b\}$.

iv) O conjunto dos números reais x tais que $a\leq x<b$ é chamado de intervalo semifechado à esquerda ou semiaberto à direita, e denotado por $(a,b]=\{x\in\mathbb{R};, a\leq x<b\}$.

v) Existem ainda conjuntos que são ilimitados, e representados da seguinte forma:

$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R};\ x<a\}$; $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R};\ x\leq a\}$;

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R};\ x>a\}$; $[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R};\ x\geq a\}$;

$(-\infty,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$.

Valor absoluto ou módulo

Definição 1.2.1. *Dado um número real x, seu módulo ou valor absoluto é denotado por $|x|$ e definido da seguinte forma:*

$$|x|=\begin{cases} x, & se\ x\geq 0,\\ -x, & se\ x<0.\end{cases}$$

O valor absoluto de um número real x também pode ser representado por:

$$|x|=\max\{x,-x\} \quad \text{ou} \quad |x|=\sqrt{x^2}.$$

Exercício 1.2.1. *Dados $x,y,z\in\mathbb{R}$, mostre que:*

a) $|xy|=|x|\,|y|$;

b) $|x+y|\leq|x|+|y|$;

c) $|x-y|\geq|x|-|y|$;

d) $||x|-|y||\leq|x-y|$.

Capítulo 2

Funções

2.1 Conceitos básicos

Definição 2.1.1. *Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma* ***função*** *$f : A \to B$ é uma regra que atribui a cada $x \in A$ um único elemento $y \in B$, chamado de valor de f em x e denotado por $f(x)$.*

Definição 2.1.2. *O conjunto A é chamado de domínio da função f. O conjunto B recebe o nome de* ***contradomínio****. A* ***imagem*** *de f é o subconjunto de B formado pelos valores assumidos por f: $Im(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$. O* ***gráfico*** *de f é o conjunto de pares ordenados: $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$.*

Exemplo 2.1.1. *Se $A = \{1, 4, 7\}$ e $B = \{0, 3, 12, 15, 21\}$, a correspondência $f(x) = 3x$ define uma função de A em B, pois cada elemento de A tem uma única imagem em B, conforme ilustrado na Figura 2.1.*

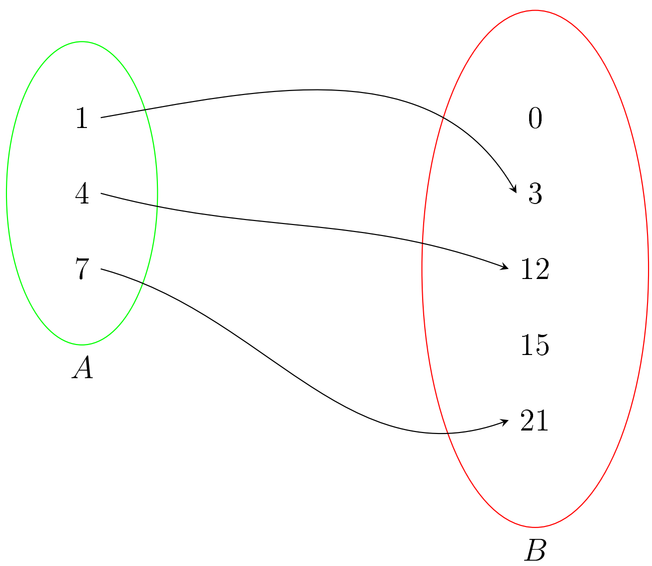


Figura 2.1: Função $f(x) = 3x$ de A em B

A seguir, apresentaremos o conceito de zeros de funções, ilustrando-o com definição formal, exemplo numérico e interpretação geométrica.

Definição 2.1.3. *Dizemos que um número $x \in \mathbb{R}$ é um **zero** (ou **raiz**) de uma função f quando $f(x) = 0$.*

Exemplo 2.1.2. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = x^2 + 5x + 6.$$

Para determinar seus zeros, resolvemos a equação $f(x) = 0$:

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Fatorando, temos $(x + 2)(x + 3) = 0$, e portanto os zeros são $x = -2$ e $x = -3$.

Interpretação geométrica: os zeros de uma função correspondem às abscissas dos pontos onde o gráfico de f intersecta o eixo OX (eixo das abscissas).

No geral, nem sempre é simples determinar os zeros de uma função, pois em muitos casos a equação $f(x) = 0$ não pode ser resolvida de maneira imediata.

Funções quadráticas. Como primeiro estudo específico, vamos abordar um tipo importante de função: a **função quadrática**.

Definição 2.1.4. *Chamamos de **Função do 2° grau** ou **Função quadrática**, toda função $f : I \to \mathbb{R}$ da forma*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e $I \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.1. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$, é uma função quadrática.*

Os zeros da função quadrática correspondem às soluções reais da equação do 2° grau associada.

Exemplo 2.1.2. *Seja $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Os zeros de f são os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Aplicando a Fórmula de Bháskara (que será apresentada a seguir), obtemos*

$$x_1 = 2 \quad e \quad x_2 = 1.$$

Portanto, $x = 1$ e $x = 2$ são os zeros de f.

A seguir, apresentaremos a **forma canônica** de uma função quadrática, que facilita a determinação de máximos, mínimos e também a dedução da Fórmula de Bháskara.

Proposição 2.1.1. *Toda função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita como*

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac. \tag{2.1}$$

*A fórmula (2.1) é chamada de **forma canônica** de f.*

Demonstração. Usando o método de completar quadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2+bx+c \\ &= a\left(x^2+\tfrac{2b}{2a}x+\tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\tfrac{b^2}{4a^2}+\tfrac{c}{a}\right] \\ &= a\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\tfrac{b^2-4ac}{4a} \\ &= a\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\tfrac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.1.3. *Escreva a função $f(x)=x^2-3x+2$ na sua forma canônica.*

Solução. Aplicando a forma canônica, temos:

$$f(x)=\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}.$$

■

Consequências da forma canônica. - A partir dela, obtemos facilmente a **Fórmula de Bháskara**:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Além disso, o gráfico de f é sempre uma **parábola**.

Definição geométrica: Uma parábola é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo, chamado *foco*, e de uma reta fixa, chamada *diretriz*.

A partir disso, mostra-se que o gráfico da função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ é uma parábola com:

- foco $F=\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{1+4ac-b^2}{4a}\right)$;
- diretriz $y=-\frac{b^2-4ac+1}{4a}$.

Clique aqui para ver uma ilustração geométrica no GeoGebra.

Definição 2.1.5. *Seja f uma função com domínio $D(f)$. Dizemos que f atinge um* ***valor máximo*** *em $A\subseteq D(f)$ quando existe $x_0\in A$ tal que*

$$f(x_0)\geq f(x),\quad \forall x\in A.$$

Analogamente, f atinge um ***valor mínimo*** *em A quando existe $x_0\in A$ tal que*

$$f(x_0)\leq f(x),\quad \forall x\in A.$$

Chamamos x_0 de ***ponto de máximo*** *em A ou* ***ponto de mínimo*** *em A, respectivamente.*

Nosso objetivo agora é identificar esses extremos no caso particular da função quadrática, utilizando apenas a forma canônica, sem recorrer a ferramentas de cálculo diferencial.

Theorem 2.1.1. *Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. O gráfico de f possui um ponto extremo (máximo ou mínimo) na abscissa*

$$x_v = -\frac{b}{2a}.$$

O valor da ordenada nesse ponto é

$$y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Se $a > 0$, o extremo é um mínimo*; se $a < 0$, o extremo é um* máximo*.*

Demonstração. Da forma canônica (Proposição 2.1.1), temos

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Observe que o termo quadrático $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre não negativo.

Se $a > 0$, multiplicando por a obtemos $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Logo,

$$f(x) \;\geq\; -\frac{\Delta}{4a},$$

e o valor mínimo ocorre em $x_v = -\frac{b}{2a}$.

Se $a < 0$, então $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, o que implica

$$f(x) \;\leq\; -\frac{\Delta}{4a},$$

e o valor máximo ocorre em $x_v = -\frac{b}{2a}$.

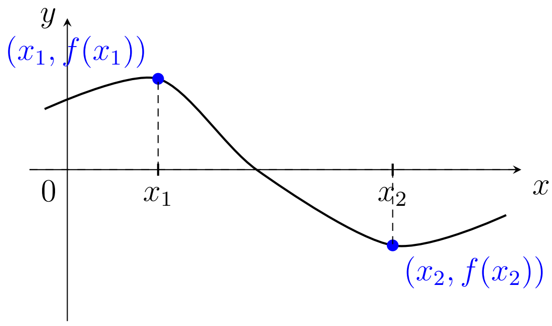
Assim, em ambos os casos, o ponto extremo é $(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. ■

Como saber se uma função, cujo gráfico não apresenta falhas, possui pelo menos uma raiz real?

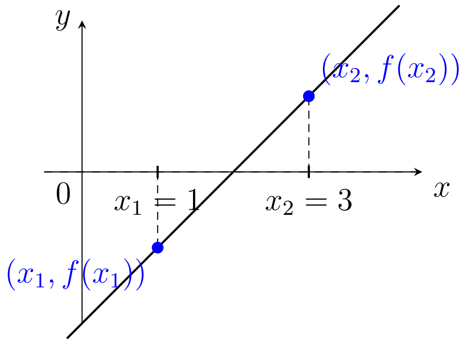
Uma raiz real de uma função é um número onde o valor da função é igual a zero, ou seja, o ponto onde o gráfico cruza o eixo x.

Se o gráfico da função não apresenta falhas (isto é, é contínuo, sem quebras ou saltos), para verificar se a função possui pelo menos uma raiz real podemos proceder da seguinte forma: escolha dois pontos distintos x_1 e x_2 tais que $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$. Como o gráfico liga os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ sem interrupções, é necessário que ele **cruze o eixo** x em algum lugar entre esses dois pontos.

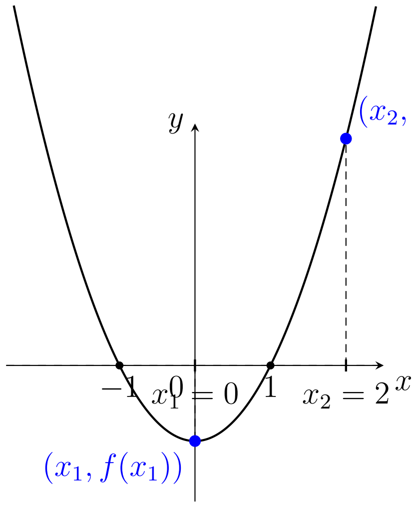
Assim, podemos concluir que f possui pelo menos uma raiz real no intervalo (x_1, x_2).



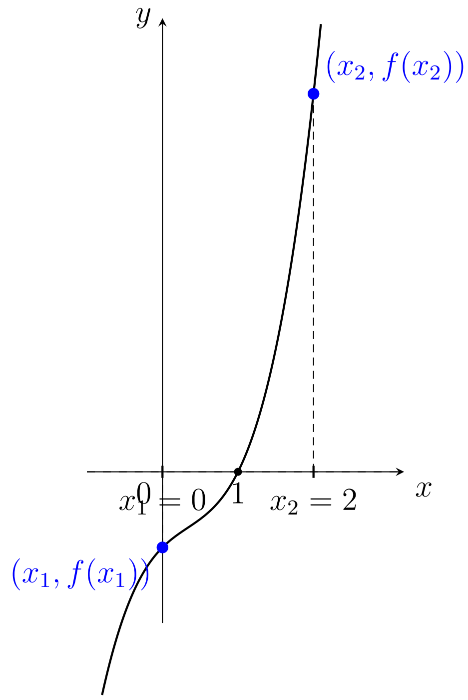
Exemplo 2.1.3. *Considere $f(x) = x - 2$. Temos $f(1) = -1 < 0$ e $f(3) = 1 > 0$. Como o gráfico não tem falhas, existe ao menos uma raiz no intervalo $(1, 3)$.*



Exemplo 2.1.4. *Considere $f(x) = x^2 - 1$. Temos $f(0) = -1 < 0$ e $f(2) = 3 > 0$. Logo, existe ao menos uma raiz em $(0, 2)$ (de fato, as raízes são $x = -1$ e $x = 1$).*



Exemplo 2.1.5. *Considere $f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$. Note que $x^2 + 1 > 0$ para todo x, então o sinal de f é o mesmo de $(x - 1)$. Assim, $f(0) = -1 < 0$ e $f(2) = 5 > 0$, garantindo uma raiz em $(0, 2)$ (de fato, a única raiz real é $x = 1$).*



Aqui vamos assumir que o gráfico de um polinômio é sempre uma curva contínua, ou seja, não tem falhas, quebras nem saltos. Isso acontece porque o valor de um polinômio é obtido apenas com somas, subtrações e multiplicações, e essas operações preservam a continuidade do gráfico.

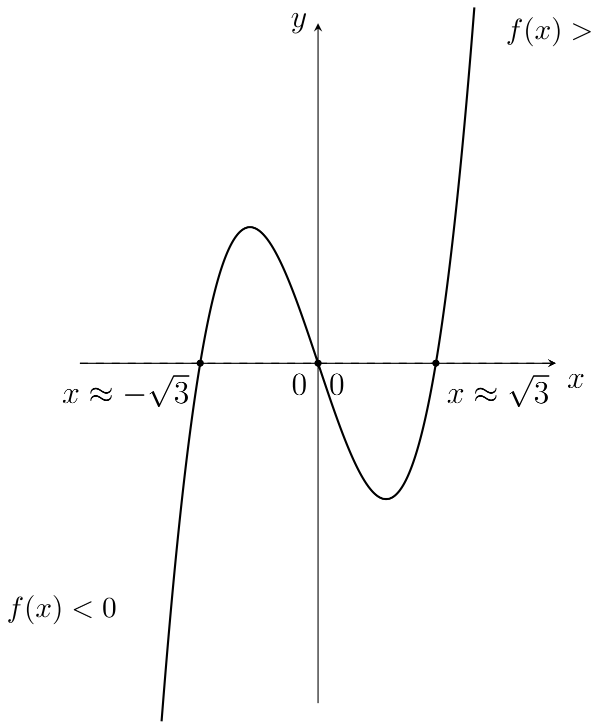
Além disso, todo polinômio de grau ímpar (por exemplo, x^3, $x^5 - 2x + 1$, etc.) definido em $\mathbb{R}$ possui pelo menos uma raiz real. A explicação intuitiva é a seguinte:

- Quando o grau é ímpar, o polinômio tem um comportamento oposto nas extremidades do gráfico.

- Para valores muito grandes e positivos de x, o polinômio também tende a crescer muito (ou a diminuir muito), e para valores muito negativos de x, o comportamento é o contrário.

Assim, o gráfico começa em uma região muito alta ou muito baixa e termina na região oposta. Como o gráfico é contínuo(sem falhas), ele é obrigado a cruzar o eixo x pelo menos uma vez. Esse ponto de cruzamento representa uma raiz real do polinômio.

Por exemplo, considere $f(x) = x^3 - 3x$. Para valores grandes e negativos de x, temos $f(x) < 0$, e para valores grandes e positivos de x, temos $f(x) > 0$. Portanto, o gráfico precisa cruzar o eixo x em algum ponto entre essas duas regiões.



Conclusão: Todo polinômio de grau ímpar definido em $\mathbb{R}$ tem pelo menos uma raiz real, porque seu gráfico é contínuo e muda de sinal entre valores muito negativos e muito positivos de x.

Com a noção de função contínua e de limites, que será estudada em Cálculo Diferencial e Integral I, tudo isso poderá ser comprovado de forma rigorosa.

Como determinar domínio e imagem de uma função a partir de seu gráfico

Um número b pertence ao domínio de uma função f se, e somente se, a reta vertical $x = b$ no plano xy intercepta o gráfico de f.

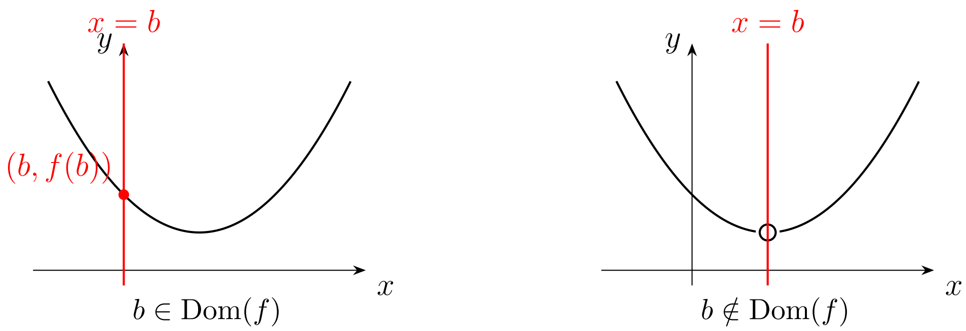


Figura 2.2: Caracterização geométrica do domínio de uma função.

Lembre que a **imagem de uma função** é o conjunto de todos os valores que a função assume. Assim, a imagem de uma função pode ser determinada pelas **retas horizontais** que interceptam o gráfico da função, como mostrado nos gráfico a seguir.

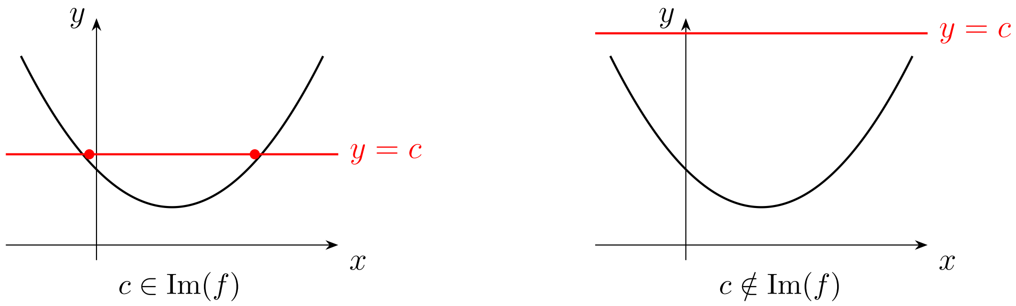


Figura 2.3: A imagem de f é o conjunto dos valores c para os quais $y = c$ intercepta o gráfico de f.

Sejam duas funções $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definimos as funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$ da seguinte forma:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ se $g(x) \neq 0$, para todo $x \in D$.

Definição 2.1.6. *Sejam as funções $f : C \to D$ e $g : A \to B$ com $B \subset C$ e $Im(g) \subset C$. Com essas condições, podemos definir a função composta $f \circ g : A \to D$, onde $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. A função $f \circ g$ é chamada de composta.*

Exemplo 2.1.6. *Se $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = e^x$ e $g(x) = len(x)$, $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $(f \circ g)(x) = e^{ln(x)} = x$.*

Definição 2.1.7. *Uma função $f : D \to E$ é dita sobrejetiva, quando sua imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, se $Im(f) = E$.*

Exemplo 2.1.7. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, onde $f(x) = x^2$ e $\mathbb{R}_+$ é o conjunto dos números reais não negativos, é uma função sobrejetiva.*

Definição 2.1.8. *Uma função $f : D \to E$ é dita injetiva, quando $f(x) \neq f(y)$ para $x, y \in D$ implicar $x \neq y$.*

Exemplo 2.1.8. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^3 + 4$ é injetiva.*
De fato, $f(x) \neq f(y)$ implica $0 \neq f(x) - f(y) = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, de onde segue que $x \neq y$.

Definição 2.1.9. *Uma função $f : D \to E$ é dita bijetiva quando for injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo 2.1.9. *A função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^*_+$, onde $f(x) = e^x$ é bijetiva.*

Definição 2.1.10. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injetora e $Im(f) = C$. Assim, podemos definir a função $g : C \to D$ onde $g(y) = x$ para $y = f(x)$. A função g é chamada de inversa de f e é denotada por $g = f^{-1}$.*

Observação 2.1.1. *Não confunda $f^{-1}(x)$ com $\dfrac{1}{f(x)}$, são coisas diferentes.*

Exercício 2.1.1. *Sejam $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = e^x$ e $g(x) = len(x)$. Mostre que $g = f^{-1}$.*

Definição 2.1.11. *Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é:*

a) decrescente se para $x, y \in D$ com $x < y$ implicar $f(x) > f(y)$.

b) crescente se para $x, y \in D$ com $x < y$ implicar $f(x) < f(y)$.

c) não-decrescente se para $x, y \in D$ com $x < y$ implicar $f(x) \leq f(y)$.

d) não-crescente se para $x, y \in D$ com $x < y$ implicar $f(x) \geq f(y)$.

Definição 2.1.12. *Uma função que satisfaz um dos itens da Definição 2.1.11 é dita monótona.*

Exemplo 2.1.10. *Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = 2x$ é crescente em $\mathbb{R}$.*

Solução: Sejam $x_1, x_2 \in S = \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$. Como $2 > 0$, temos então $2x_1 < 2x_2$, logo $f(x_1) < f(x_2)$.
Logo, f é uma função crescente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.11. *Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = -2x$ é decrescente em $\mathbb{R}$.*

Solução: Sejam $x_1, x_2 \in S = \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$. Como $-2 < 0$, temos então $2x_1 > 2x_2$, logo $f(x_1) > f(x_2)$.
Logo, f é uma função decrescente em $\mathbb{R}$.

Definição 2.1.13. *Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é:*

a) limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ para todo

$x \in D$.

b) limitada inferiormente se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m$ para todo

$x \in D$.

c) limitada se for limitada superiormente e inferiormente.

Exemplo 2.1.12. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = sen\, x$ é limitada, pois $-1 \leq sen\, x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.1.14. *Dizemos que uma função $f(x)$ é:*

i) par se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio.

ii) ímpar se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em seu domínio.

Exemplo 2.1.13. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *onde* $f(x) = x^2$ *é uma função par, pois* $x^2 = (-x)^2$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.14. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *onde* $f(x) = x^5$ *é uma função ímpar, pois* $-x^5 = (-x)^5$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.1.2. *Toda função pode ser escrita como sendo a soma de uma função par com uma função ímpar.*

Demonstração: Seja $f(x)$ uma função arbitrária. Vamos definir $f_P(x)$ como a parte par de $f(x)$ e $f_I(x)$ como a parte ímpar de $f(x)$.

A parte par de $f(x)$ é dada por:

$$f_P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

E a parte ímpar de $f(x)$ é dada por:

$$f_I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Assim temos o seguinte

$$\begin{aligned} f_P(x) + f_I(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &= \frac{f(x) + f(x)}{2} + \frac{f(-x) - f(-x)}{2} \\ &= \frac{2f(x)}{2} = f(x). \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que toda função $f(x)$ pode ser escrita como a soma de uma função par $f_P(x)$ e uma função ímpar $f_I(x)$. ∎

Definição 2.1.15. *Sejam* $D \subset \mathbb{R}$ *e* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função. O gráfico de* f *é o subconjunto do plano* $\mathbb{R}^2$ *dado por*

$$G(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x \in D \text{ e } y = f(x)\right\}.$$

Proposição 2.1.3. *O gráfico de uma função par definida em* $\mathbb{R}$ *é simétrico em relação ao eixo* y.

Demonstração: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par. Como f é par, então $f(x) = f(-x)$. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$, os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, f(x))$, que são simétricos em relação ao eixo y. Com isso podemos concluir que o gráfico de uma função par definida em $\mathbb{R}$ é simétrico em relação ao eixo y. ∎

Proposição 2.1.4. *O gráfico de uma função ímpar definida em* $\mathbb{R}$ *é simétrico em relação à origem do plano cartesiano.*

Demonstração: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar. Como f é ímpar, então $-f(x) = f(-x)$. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$, os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, -f(x))$, que são simétricos em relação à origem do plano cartesiano. Com isso podemos concluir que o gráfico de uma função par definida em $\mathbb{R}$ é simétrico em relação à origem do plano cartesiano. ∎

Definição 2.1.16. *Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é dita periódica se existir um número real $p \neq 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in D$.*
O número p é chamado de período de f e seu gráfico se repete em cada intervalo consecutivo de comprimento $|p|$.

2.2 Exercícios

Exercício 2.2.1. *Defina uma função g por $g(x) = f(x) + 1$, em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.*

(a) Determine o domínio de g.

(b) Determine a imagem de g.

(c) Esboce o gráfico de g.

Exercício 2.2.2. *Defina uma função h por*

$$h(x) = f(x) - 1,$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.

(a) Determine o domínio de h.

(b) Determine a imagem de h.

(c) Esboce o gráfico de h.

Exercício 2.2.3. *Defina as funções g e h por*

$$g(x) = 2f(x) \quad e \quad h(x) = \tfrac{1}{2}f(x),$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.

(a) Determine o domínio de g e o domínio de h.

(b) Determine a imagem de g.

(c) Determine a imagem de h.

(d) Esboce os gráficos de g e de h.

Exercício 2.2.4. *Defina uma função g por*

$$g(x) = -f(x),$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.

(a) Determine o domínio de g.

(b) Determine a imagem de g.

(c) Esboce o gráfico de g.

Exercício 2.2.5. *Defina uma função g por*

$$g(x) = f(x + 1),$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, sendo o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.

(a) Determine o domínio de g.

(b) Determine a imagem de g.

(c) Esboce o gráfico de g.

Exercício 2.2.6. *Defina funções g e h por*

$$g(x) = f(2x) \quad e \quad h(x) = f\left(\tfrac{1}{2}x\right),$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.

(a) Determine o domínio de g.

(b) Determine o domínio de h.

(c) Determine a imagem de g e a imagem de h.

(d) Esboce os gráficos de g e de h.

Exercício 2.2.7. *Defina uma função g por*

$$g(x) = f(-x),$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $\left[\tfrac{1}{2}, 1\right]$.

(a) Determine o domínio de g.

(b) Determine a imagem de g.

(c) Esboce o gráfico de g.

Exercício 2.2.8. *Defina uma função g por*

$$g(x) = 2f(x) + 1,$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.

(a) *Registre a ordem das operações usadas para calcular o valor de $g(x)$, depois de já ter calculado o valor de $f(x)$.*

(b) *Determine o domínio de g.*

(c) *Determine a imagem de g.*

(d) *Esboce o gráfico de g.*

Exercício 2.2.9. *Classifique cada uma das funções abaixo como **par**, **ímpar** ou **nenhuma das duas**:*

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = x^3$
3. $h(x) = x^3 + x$
4. $p(x) = x^3 + 1$
5. $q(x) = \cos(x)$
6. $r(x) = \sin(x)$

Exercício 2.2.10. *Mostre que a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com $x \neq 0$, é uma função ímpar.*

Exercício 2.2.11. *Determine a única função cujo domínio seja $\mathbb{R}$ e que seja ao mesmo tempo par e ímpar.*

Exercício 2.2.12. *Demonstre que, se f é uma função ímpar e $0 \in Dom(f)$, então $f(0) = 0$.*

Exercício 2.2.13. *Seja $f(x) = 2x^2 - 1$. Determine se f é par, ímpar ou nenhuma das duas.*

Exercício 2.2.14. *Seja $g(x) = x^4 - x^2$. Determine se g é par, ímpar ou nenhuma das duas.*

Exercício 2.2.15. *Esboce o gráfico das funções abaixo e indique, em cada caso, o tipo de simetria:*

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = x^3$

3. $h(x) = \sin(x)$

4. $p(x) = e^x$

Exercício 2.2.16. *Suponha que h seja uma função ímpar cujo gráfico, no intervalo $[1, 2]$, é conhecido. Esboce o gráfico de h no intervalo $[-2, -1]$.*

Exercício 2.2.17. *Suponha que g seja uma função par cujo gráfico, no intervalo $[0, 2]$, é conhecido. Esboce o gráfico de g no intervalo $[-2, 0]$.*

Exercício 2.2.18. *Verifique se as funções abaixo são invertíveis. Se forem, determine suas inversas:*

1. $f(x) = 2x + 3$

2. $g(x) = x^2$, *com domínio* $[0, +\infty)$

3. $h(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, *com* $x \neq -1$

Exercício 2.2.19. *Seja $f(x) = 3x - 5$. Determine $f^{-1}(x)$ e verifique, por composição, que $f^{-1}(f(x)) = x$.*

Exercício 2.2.20. *Seja $g(x) = \sqrt{x-2}$, com domínio $[2, +\infty)$. Determine $g^{-1}(x)$ e seu domínio.*

Exercício 2.2.21. *Encontre a inversa de $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ e indique o domínio e a imagem de f e de f^{-1}.*

Exercício 2.2.22. *Mostre que a função $f(x) = x^3$ é invertível e determine sua inversa.*

Exercício 2.2.23. *Mostre que, se f é uma função **ímpar** e invertível, então f^{-1} também é ímpar.*

Exercício 2.2.24. *Seja $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$. Determine $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ e verifique se alguma das composições é par ou ímpar.*

Exercício 2.2.25. *Considere a função $f(x) = e^x$.*

1. *Mostre que f é invertível.*

2. *Determine $f^{-1}(x)$.*

3. *Represente graficamente f e f^{-1} no mesmo plano cartesiano.*

Exercício 2.2.26. *Seja $f(x) = \ln(x)$, com domínio $(0, +\infty)$.*

1. *Determine $f^{-1}(x)$.*

2. *Esboce os gráficos de f e f^{-1}.*

3. *Mostre que os gráficos são simétricos em relação à reta $y = x$.*

Exercício 2.2.27. *Determine se as seguintes funções são inversas entre si:*

1. $f(x) = \dfrac{x-2}{3}$ *e* $g(x) = 3x + 2$
2. $f(x) = 2x + 1$ *e* $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$
3. $f(x) = x^2$ *(em* $x \geq 0$*) e* $g(x) = \sqrt{x}$

Exercício 2.2.28. *Seja* $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

1. *Mostre que f é invertível.*
2. *Encontre $f^{-1}(x)$.*
3. *Determine o domínio e a imagem de f e de f^{-1}.*

2.3 Polinômios

Definição 2.3.1 (Polinômio em uma variável real)**.** *Um polinômio em uma variável real x é uma função da forma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde n é um número inteiro não negativo, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais chamados coeficientes*, e $a_n \neq 0$. O número n é chamado de* grau *do polinômio.*

Dizemos que um número real r é uma **raiz de um polinômio** $P(x)$ se, ao substituir x por r, o valor do polinômio fica igual a zero. Em outras palavras:

$$P(r) = 0.$$

Exemplo. Considere o polinômio $P(x) = x^2 - 4$. Temos:

$$P(2) = 2^2 - 4 = 0 \quad \text{e} \quad P(-2) = (-2)^2 - 4 = 0.$$

Portanto, 2 e -2 são raízes de P.

Uma função definida em um intervalo é chamada **contínua** quando seu gráfico pode ser desenhado *sem levantar o lápis do papel.* Isso significa que seu gráfico não dá "saltos", não tem buracos e nem interrupções. Os polinômios são funções contínuas em toda a reta real.

Seja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com n **ímpar** e $a_n \neq 0$.

O termo mais importante quando x cresce muito é o termo principal $a_n x^n$. Ele domina todos os outros termos.

Quando o expoente n é ímpar, o termo x^n *troca de sinal*:

- se x é positivo e grande, x^n fica positivo e muito grande;

- se x é negativo e grande em módulo, x^n fica negativo e muito grande em módulo.

Assim:

$$P(x) \to +\infty \quad \text{quando } x \to +\infty,$$
$$P(x) \to -\infty \quad \text{quando } x \to -\infty,$$

ou o contrário, dependendo do sinal de a_n.

Por que um polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz?

Como vimos:

- Quando x vai muito para a direita ($x \to +\infty$), $P(x)$ tende a $+\infty$ ou $-\infty$.

- Quando x vai muito para a esquerda ($x \to -\infty$), $P(x)$ tende ao infinito com o *sinal oposto*.

Ou seja, o polinômio assume valores positivos em um lado e negativos no outro.

Como o polinômio é uma função contínua (seu gráfico não tem saltos), então seu gráfico precisa cruzar o eixo horizontal em algum ponto entre esses dois comportamentos opostos.

Portanto, existe pelo menos um número real c tal que:

$$P(c) = 0.$$

Isto é, todo polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raiz rea.

Denotamos por função racional real toda função da forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios reais. De modo análogo, definimos função racional complexa quando $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios com coeficientes complexos.

Neste trabalho, consideramos apenas funções racionais reais. Não será necessário trabalhar com raízes complexas, mas apresentaremos alguns resultados válidos tanto no caso real quanto no complexo.

Dizemos que a função racional

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

é irredutível quando $P(x)$ e $Q(x)$ não possuem fatores lineares ou quadráticos irredutíveis em comum.

Para estudar a decomposição de uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que:

$P(x)$ e $Q(x)$ não possuem fatores lineares ou quadráticos irredutíveis em comum e grau de $P(x)$ é menor que o grau de $Q(x)$. Se isso não ocorrer, efetuamos a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$, obtendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde $\deg(R) < \deg(Q)$.

Decomposição em fatores lineares e não repetidos

Seja

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

uma função racional irredutível, onde $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$. Suponha que $Q(x)$ seja um polinômio de grau n que possui n raízes reais

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

todas distintas entre si.

Existem constantes reais

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$$

tais que a fração racional pode ser escrita como uma soma de frações mais simples, isto é:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

Essa representação é chamada *decomposição em frações parciais* para o caso em que o denominador possui apenas fatores lineares e todos distintos.

Decomposição em fatores lineares com repetições

Seja

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

uma função racional irredutível, com $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$, e suponha que $Q(x)$ seja um polinômio de grau k que possui apenas raízes reais.

Denotemos as raízes de $Q(x)$ por

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

todas distintas entre si. Cada raiz a_i possui uma multiplicidade

$$\alpha_i \in \mathbb{N}^*.$$

Assim, o grau total do polinômio é

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k.$$

Existem constantes reais

$$A_{11},\dots,A_{1\alpha_1},\ A_{21},\dots,A_{2\alpha_2},\ \dots,\ A_{n1},\dots,A_{n\alpha_n}\in\mathbb{R}$$

tais que a decomposição em frações parciais pode ser escrita como

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\cdots+\frac{A_{n1}}{x-a_n}+\cdots+\frac{A_{n\alpha_n}}{(x-a_n)^{\alpha_n}}.$$

Essa é a forma geral da decomposição em frações parciais quando o denominador contém fatores lineares com multiplicidades.

Exercícios Resolvidos

——————————————————-

Exercício 2.3.1. *Determine se $r=2$ é raiz do polinômio*

$$P(x)=x^3-3x^2-4x+12.$$

Solução. *Calculamos:*

$$P(2)=2^3-3\cdot 2^2-4\cdot 2+12=8-12-8+12=0.$$

Logo, 2 é raiz do polinômio.

Exercício 2.3.2. *Seja*

$$P(x)=x^3-5x+6.$$

Mostre que o polinômio tem pelo menos uma raiz real.

Solução. *Vamos calcular o valor de $P(x)$ em alguns pontos inteiros:*

$$P(1)=1^3-5\cdot 1+6=1-5+6=2>0,$$
$$P(-3)=(-3)^3-5(-3)+6=-27+15+6=-6<0.$$

Assim, temos

$$P(-3)<0 \quad e \quad P(1)>0.$$

Como P é um polinômio, seu gráfico é uma curva contínua, isto é, sem "saltos" ou quebras. Portanto, ao ligar os pontos $(-3,P(-3))=(-3,-6)$ e $(1,P(1))=(1,2)$ no gráfico de P, a curva precisa necessariamente cruzar o eixo x em algum ponto entre $x=-3$ e $x=1$.

Logo, existe um número real $c\in[-3,1]$ tal que

$$P(c)=0.$$

Portanto, o polinômio $P(x)$ tem pelo menos uma raiz real.

Exercício 2.3.3. *Considere a função racional*

$$R(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}.$$

(a) Identifique $P(x)$ e $Q(x)$.

(b) Verifique se a função é irredutível.

Solução. *(a) $P(x) = x^2 - 4$, $Q(x) = x^2 - 1$.*

(b) Fatorando:

$$P(x) = (x - 2)(x + 2), \qquad Q(x) = (x - 1)(x + 1).$$

Eles não possuem fatores lineares em comum. Logo, a fração é irredutível.

Exercício 2.3.4. *Decomponha em frações parciais:*

$$\frac{7x + 1}{(x - 1)(x + 3)}.$$

em frações parciais.

Solução. *Escrevemos:*

$$\frac{7x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}.$$

Multiplicando ambos os lados pelo denominador:

$$7x + 1 = A(x + 3) + B(x - 1).$$

Tomando valores especiais:

$x = 1$*:*

$$8 = A(4) \Rightarrow A = 2.$$

$x = -3$*:*

$$-20 = B(-4) \Rightarrow B = 5.$$

Logo,

$$\frac{7x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{2}{x - 1} + \frac{5}{x + 3}.$$

Exercício 2.3.5. *Decomponha:*

$$\frac{5x - 3}{(x + 2)^2}.$$

em frações parciais.

Solução. *Como o fator é repetido:*

$$\frac{5x - 3}{(x + 2)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 2)^2}.$$

Multiplicando:

$$5x - 3 = A(x + 2) + B.$$

Escolhendo $x = -2$:

$$-10 - 3 = B \Rightarrow B = -13.$$

Agora expandimos:

$$5x - 3 = Ax + 2A - 13.$$

Comparando coeficientes:

$$5 = A, \qquad -3 = 2A - 13.$$

Logo, $A = 5$.

Portanto:

$$\frac{5x - 3}{(x + 2)^2} = \frac{5}{x + 2} - \frac{13}{(x + 2)^2}.$$

Exercício 2.3.6. *Decomponha a função racional:*

$$\frac{2x^2 + 7x + 3}{(x - 1)(x - 1)(x + 4)}$$

em frações parciais.

Solução. *Como há repetição em $x = 1$:*

$$\frac{2x^2 + 7x + 3}{(x - 1)^2(x + 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 4}.$$

Multiplicando pelo denominador:

$$2x^2 + 7x + 3 = A(x - 1)(x + 4) + B(x + 4) + C(x - 1)^2.$$

Usando valores especiais:

$x = 1$*:*

$$2 + 7 + 3 = B(5) \Rightarrow B = \frac{12}{5}.$$

$x = -4$*:*

$$32 - 28 + 3 = C(25) \Rightarrow C = \frac{7}{25}.$$

Agora substituímos A comparando coeficientes (ou escolhendo outro valor, ex: $x = 0$):

$x = 0$*:*

$$\begin{gathered} 3 = A(-1)(4) + B(4) + C(1) \\ 3 = -4A + \frac{48}{5} + \frac{7}{25} \\ A = 1. \end{gathered}$$

Logo:

$$\frac{2x^2 + 7x + 3}{(x - 1)^2(x + 4)} = \frac{1}{x - 1} + \frac{12/5}{(x - 1)^2} + \frac{7/25}{x + 4}.$$

Exercício 2.3.7. *Verifique se $r = 3$ é raiz do polinômio*

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Exercício 2.3.8. *Encontre todas as raízes reais do polinômio*

$$P(x) = x^2 - 9.$$

Exercício 2.3.9. *Mostre que o polinômio*

$$P(x) = 2x^3 - x + 8$$

possui pelo menos uma raiz real.

Exercício 2.3.10. *Considere a função racional*

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}.$$

Determine $P(x)$ e $Q(x)$ e verifique se a fração é irredutível.

Exercício 2.3.11. *Efetue a divisão polinomial*

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x + 5}{x - 1}.$$

Exercício 2.3.12. *Decomponha em frações parciais:*

$$\frac{6x + 7}{(x + 1)(x + 4)}.$$

Exercício 2.3.13. *Decomponha em frações parciais:*

$$\frac{9x - 2}{(x - 3)(x - 1)}.$$

Exercício 2.3.14. *Decomponha em frações parciais:*

$$\frac{4x + 5}{(x + 2)^2}.$$

Exercício 2.3.15. *Decomponha em frações parciais:*

$$\frac{7x + 10}{(x - 2)^2}.$$

Exercício 2.3.16. *Decomponha em frações parciais.:*

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{(x + 1)(x^2 - 4)}.$$

Exercício 2.3.17. *Decomponha em frações parciais.:*

$$\frac{5x^2 - x + 7}{(x - 4)(x^2 - 1)}.$$

Exercício 2.3.18. *Decomponha em frações parciais.:*

$$\frac{x^3+1}{x^3-1}.$$

Exercício 2.3.19. *Reduza a função racional*

$$\frac{x^2-4}{2x^2-2}$$

para sua forma irredutível.

Exercício 2.3.20. *Determine a decomposição em frações parciais de*

$$\frac{2x^2+3x-5}{(x-1)^2(x+3)}.$$

Exercício 2.3.21. *Determine a decomposição em frações parciais de*

$$\frac{8x^2-7x+10}{(x+2)^2(x-5)}.$$

Exercício 2.3.22. *Encontre a decomposição em frações parciais de*

$$\frac{6x^2+1}{x(x^2-9)}.$$

Exercício 2.3.23. *Determine a forma parcial de*

$$\frac{3x^2-x+4}{(x-1)(2x^2+5x+2)}.$$

Exercício 2.3.24. *Determine todas as raízes reais (se existirem) do polinômio*

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Exercício 2.3.25. *Mostre que o polinômio*

$$P(x) = 5x^5 - 3x^3 + x - 10$$

tem pelo menos uma raiz real.

Capítulo 3

Funções Trigonométricas

3.1 Funções Trigonométricas e o Triângulo Retângulo

As funções trigonométricas podem ser introduzidas de maneira natural a partir da geometria de um triângulo retângulo. Nesta seção, vamos considerar um ângulo agudo θ (isto é, $0° < \theta < 90°$) em um triângulo retângulo e, a partir das relações entre seus lados, definiremos seno, cosseno e tangente.

Considere um triângulo retângulo, isto é, um triângulo que possui um ângulo de $90°$, e um ângulo agudo θ desse triângulo. Usaremos as seguintes definições:

- **hipotenusa**: é o lado oposto ao ângulo reto (é sempre o maior lado);
- **cateto adjacente**: é o lado que forma o ângulo θ com a hipotenusa;
- **cateto oposto**: é o lado oposto ao ângulo θ.

Veja a Figura 3.1 a seguir.

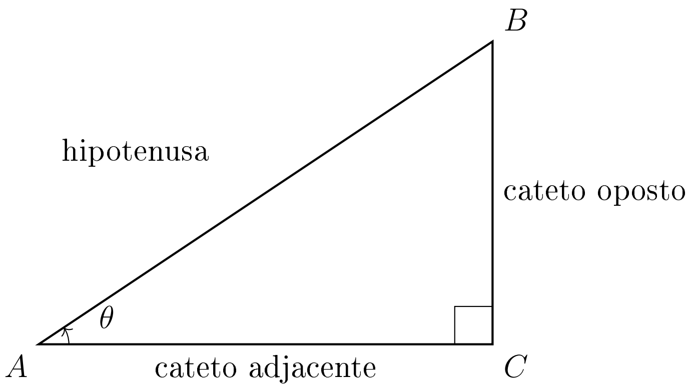


Figura 3.1: Triângulo retângulo e elementos associados ao ângulo θ.

Definição 3.1.1 (Funções trigonométricas e o triângulo retângulo)**.** *Seja θ um ângulo agudo em um triângulo retângulo. Denotando por* $\boldsymbol{a}$ *a hipotenusa, por* $\boldsymbol{b}$ *o cateto oposto e por* $\mathbf{c}$ *o cateto adjacente ao ângulo θ, definimos:*

$$sen\theta = \frac{b}{a}, \qquad \cos\theta = \frac{c}{a}, \qquad \tan\theta = \frac{b}{c}.$$

Definição 3.1.2 (Cossecante, Secante e Cotangente)**.** *Além das funções trigonométricas básicas seno, cosseno e tangente, definimos também as seguintes funções.*

Seja θ um ângulo agudo em um triângulo retângulo. Então definimos:

$$\csc\theta = \frac{1}{sen\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}.$$

Proposição 3.1.1 (Identidade trigonométrica fundamental)**.** *Para todo ângulo agudo θ em um triângulo retângulo, vale:*

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Demonstração. Considere um triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento a, cateto oposto ao ângulo θ de comprimento b e cateto adjacente de comprimento c.

Pela definição de seno e cosseno:

$$sen\theta = \frac{b}{a}, \qquad \cos\theta = \frac{c}{a}.$$

Elevando ao quadrado:

$$sen^2\theta = \frac{b^2}{a^2}, \qquad \cos^2\theta = \frac{c^2}{a^2}.$$

Somando as duas expressões:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

Mas, pelo Teorema de Pitágoras, no triângulo retângulo vale:

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Substituindo na expressão anterior, obtemos:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Portanto, a identidade está demonstrada. ∎

3.2 Extensão das funções trigonométricas usando o círculo unitário

As definições de seno e cosseno vistas anteriormente dependem de um triângulo retângulo e, portanto, só funcionam para ângulos agudos. Para definir as funções trigonométricas para *qualquer* ângulo real, utilizamos o **círculo unitário**, isto é, o conjunto de pontos do plano que satisfazem

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Esse é o círculo de raio 1 centrado na origem do plano cartesiano.

Considere um ponto P, de coordenadas (x_θ, y_θ), situado sobre o círculo trigonométrico (círculo unitário). Seja θ o ângulo determinado pelo arco que se inicia no ponto $(1, 0)$, localizado no eixo x positivo, e termina exatamente no ponto P.

Assim, θ é o ângulo central cujo arco inicial aponta para $(1, 0)$ e cujo arco terminal aponta para P. A partir dessa construção, definimos:

$$\cos\theta = x_\theta, \qquad sen\theta = y_\theta.$$

Veja Figura 3.2 a seguir:

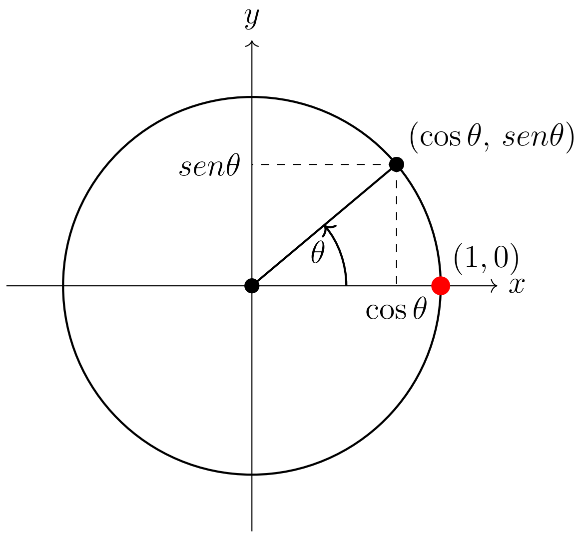


Figura 3.2: Definição de $\cos\theta$ e $sen\theta$ no círculo unitário.

Dessa forma, cada ângulo real θ corresponde a um ponto do círculo unitário, permitindo estender naturalmente as funções trigonométricas para qualquer valor de θ.

Essa definição é consistente porque, como (x_θ, y_θ) pertence ao círculo unitário, temos:

$$x_\theta^2 + y_\theta^2 = 1.$$

Portanto:

$$\cos^2\theta + sen^2\theta = 1,$$

mostrando que a identidade trigonométrica fundamental continua valendo para qualquer ângulo real.

Além disso, essa abordagem permite estender naturalmente as funções trigonométricas para ângulos maiores que 90°, para ângulos negativos e para ângulos maiores que 360°.

Um ângulo é considerado **positivo** quando sua abertura ocorre no **sentido anti-horário** e é considerado **negativo** quando sua abertura ocorre no **sentido horário**.

Vamos demonstrar a identidade trigonométrica:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\,\cos(b) + sen(a)\,sen(b).$$

Considere os pontos do círculo unitário associados aos ângulos a e b:

$$P_a = (\cos(a),\, sen(a)), \qquad P_b = (\cos(b),\, sen(b)).$$

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos no plano, temos:

$$|P_a - P_b|^2 = (\cos(a) - \cos(b))^2 + (sen(a) - sen(b))^2.$$

Expandindo:

$$\begin{aligned}|P_a - P_b|^2 &= \cos^2(a) - 2\cos(a)\cos(b) + \cos^2(b)\\ &\quad + sen^2(a) - 2sen(a)sen(b) + sen^2(b).\end{aligned}$$

Agrupando:

$$|P_a - P_b|^2 = (\cos^2(a) + sen^2(a)) + (\cos^2(b) + sen^2(b)) - 2(\cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b)).$$

Como $\cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$, obtemos:

$$|P_a - P_b|^2 = 2 - 2(\cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b)). \tag{3.1}$$

Considere os pontos no círculo unitário associados aos ângulos a e b:

$$P_a = (\cos(a), sen(a)), \qquad P_b = (\cos(b), sen(b)).$$

A distância entre esses dois pontos é dada por

$$|P_a - P_b|.$$

Agora, vamos fazer um raciocínio geométrico: imaginamos uma rotação de todo o plano em torno da origem por um ângulo $-b$. Uma rotação desse tipo é um movimento rígido, isto é, **não altera distâncias**. Logo, se denotarmos por $\widetilde{P}_a$ e $\widetilde{P}_b$ as imagens de P_a e P_b após essa rotação, temos:

$$|P_a - P_b| = |\widetilde{P}_a - \widetilde{P}_b|.$$

Observe que:

- o ponto P_b, que correspondia ao ângulo b, passa a corresponder ao ângulo $b-b=0$, isto é,

$$\widetilde{P}_b = (1,0);$$

- o ponto P_a, que correspondia ao ângulo a, passa a corresponder ao ângulo $a-b$, isto é,

$$\widetilde{P}_a = (\cos(a-b), sen(a-b)).$$

Assim,

$$|P_a - P_b|^2 = |\widetilde{P}_a - \widetilde{P}_b|^2 = (\cos(a-b) - 1)^2 + (sen(a-b) - 0)^2.$$

Calculando:

$$\begin{aligned} |\widetilde{P}_a - \widetilde{P}_b|^2 &= (\cos(a-b) - 1)^2 + sen^2(a-b) \\ &= \cos^2(a-b) - 2\cos(a-b) + 1 + sen^2(a-b). \end{aligned}$$

Usando a identidade $\cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$, com $\theta = a - b$, obtemos:

$$|\widetilde{P}_a - \widetilde{P}_b|^2 = 1 - 2\cos(a-b) + 1 = 2 - 2\cos(a-b).$$

Portanto,

$$|P_a - P_b|^2 = 2 - 2\cos(a-b). \tag{3.2}$$

Igualando (3.1) e (3.2):

$$2 - 2(\cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b)) = 2 - 2\cos(a-b).$$

Cancelando o fator 2:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b).$$

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b)}$$

Identidade demonstrada.

3.3 Lista de Exercícios

Exercício 3.3.1. *Demonstre a fórmula do cosseno da soma:*

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - sen(a)sen(b).$$

Exercício 3.3.2. *Demonstre a fórmula do seno da soma:*

$$sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + \cos(a)sen(b).$$

Exercício 3.3.3. *Usando apenas a fórmula do seno da soma, deduza a fórmula do seno da diferença:*

$$sen(a-b) = sen(a)\cos(b) - \cos(a)sen(b).$$

Exercício 3.3.4. *Usando apenas a fórmula do cosseno da soma, deduza a fórmula do cosseno da diferença:*

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b).$$

Exercício 3.3.5. *Calcule, usando as fórmulas de soma e diferença:*

$$\cos\left(75^\circ\right).$$

Exercício 3.3.6. *Calcule:*

$$sen\left(15^\circ\right).$$

Exercício 3.3.7. *Mostre que:*

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2(a) - sen^2(b).$$

Exercício 3.3.8. *Prove que:*

$$sen(a+b)sen(a-b) = sen^2(a) - sen^2(b).$$

Exercício 3.3.9. *Use as fórmulas de soma para mostrar que:*

$$\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a).$$

Exercício 3.3.10. *Use as fórmulas de soma e diferença para simplificar a expressão:*

$$\frac{sen(a+b) - sen(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}.$$

Exercício 3.3.11. *Mostre que:*

$$sen(a) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \quad e \quad \cos(a) = sen\left(\frac{\pi}{2} - a\right).$$

Exercício 3.3.12. *Calcule, sem calculadora, os valores exatos de:*

$$\cos(105^\circ), \qquad sen(105^\circ).$$

Exercício 3.3.13. *Mostre que:*

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

Exercício 3.3.14. *Mostre que:*

$$sen(a+b) + sen(a-b) = 2sen(a)\cos(b).$$

Exercício 3.3.15. *Calcule:*

$$sen\left(\frac{\pi}{12}\right), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right).$$