Notas de Aula

Cálculo Diferencial e Integral II - CT
Departamento de Matemática – UFPI

Estas notas de aula foram elaboradas para apoiar a disciplina Cálculo Diferencial e Integral II - CT da Universidade Federal do Piauí. Trata-se de um material de apoio, e não de um livro didático. Algumas definições, demonstrações e exemplos não estão aqui incluídos, pois serão discutidos diretamente em sala de aula. Este material encontra-se em constante desenvolvimento e poderá ser aprimorado em futuras edições.

A versão mais atualizada deste material pode ser encontrada em: `https://vitalianoamaral.github.io`
No menu, clique em **Ensino**, depois em **Graduação** e, em seguida, em **Disciplinas Ministradas**. Localize a disciplina **Cálculo diferencial e integral II-CT** e clique no link **Notas de Aula**.

Prof. Vitaliano de Sousa Amaral
Departamento de Matemática – UFPI

1 de setembro de 2025

Sumário

Capítulo 1

Integral Imprópria

1.1 Revisão: Integral Definida

Consideramos um intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Uma partição de $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos de $[a, b]$, $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ tais que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. A partição P divide o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \cdots, [x_{n-2}, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, x_n]$, como podemos ver na Figura 1.1.

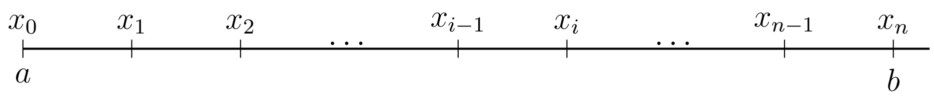

Figura 1.1

O i-ésimo subintervalo da partição P é $[x_{i-1}, x_i]$ e seu comprimento é representado por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Exemplo 1.1.1. *Uma partição do intervalo fechado* $[0, 10]$ *é o conjunto* $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. *Observamos que a partição* P *divide o intervalo* $[0, 10]$ *em* 5 *subintervalos* $[0, 2]$, $[2, 4]$, $[4, 6]$, $[6, 8]$ *e* $[8, 10]$. *Veja ilustração geométrica na Figura 1.2.*

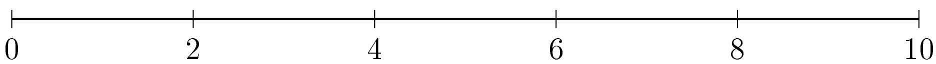

Figura 1.2

Seja uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ escolhamos c_i, $i = 1, \cdots, n$. Denotamos por $\|P\| = \max\limits_{1 \le i \le n} \{x_i - x_{i-1}\}$.

Veja ilustração geométrica na Figura 1.3 a seguir.

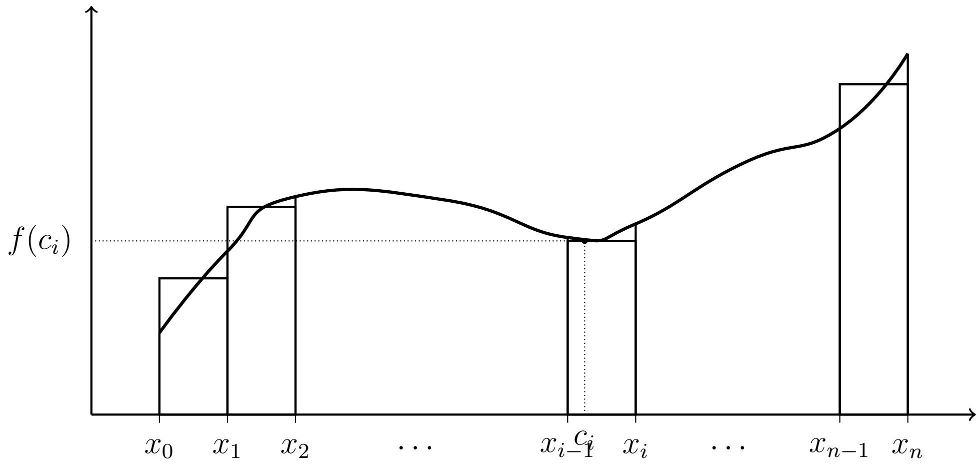

Figura 1.3

Consideremos o retângulo de base medindo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$ onde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (Veja Figura 1.3).

Na ilustração geométrica, consideramos uma função positiva no intervalo $[a, b]$. Observe que a soma das áreas dos retângulos aproxima a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo x. Alguns retângulos possuem parte de sua área acima do gráfico e outros possuem parte abaixo, de forma que a aproximação pode não ser exata quando temos um número finito de partições. No entanto, quando fazemos o comprimento de todos os subintervalos da partição tender a zero, isto é, quando tomamos infinitas partições cada vez mais finas, a soma infinita das áreas desses retângulos coincide exatamente com a área entre o gráfico de f e o eixo x.

Essa é apenas uma noção intuitiva do que chamamos de **integral definida**; a seguir apresentamos sua definição formal.

Definição 1.1.1. *Considere uma partição P e $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Dizemos que f integrável em $[a, b]$ se $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ existe, e denotamos por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

A seguir apresentamos as principais propriedades da integral definida.

1.1.1 Principais propriedades

Sejam f e g funções possuindo integral definida em $[a, b]$ e $k \in \mathbb{R}$ um constante. As integrais definidas possuem as seguintes propriedades:

1. $\displaystyle\int_a^b [kf(x) + g(x)]\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$

2. Para $c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

4. Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

5. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

O **Teorema Fundamental do Cálculo** estabelece a conexão entre derivação e integração.

Theorem 1.1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Se f é contínua em $[a,b]$ e F é uma primitiva de f (isto é, $F'(x) = f(x)$), então:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Este teorema fornece um método prático para calcular integrais definidas, evitando o uso direto da Soma de Riemann.

Outras propriedades serão apresentadas na seção sobre Integrais Impróprias.

1.2 Integrais Impróprias

Na definição de integral definida, consideramos a função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$. Agora, vamos estender essa definição para duas situações importantes:

1. Quando a função está definida em intervalos infinitos, como:

$$[a,+\infty), \quad (-\infty,b] \quad \text{ou} \quad (-\infty,+\infty).$$

2. Quando a função apresenta descontinuidade em algum ponto do intervalo de integração.

Nesses casos especiais usamos as **integrais impróprias**.

1.2.1 Integrais em Intervalos Infinitos

Para motivar a definição, vamos considerar um exemplo.

Exemplo 1.2.1. *Calcular a área da região R limitada pelo gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, com $x \geq 1$, e o eixo x.*

Primeiro, observamos que a região é ilimitada *no sentido horizontal. Se definirmos R_b como a parte da região R entre $x = 1$ e $x = b$ ($b > 1$), temos:*

$$A(R_b) = \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Ver Figura 1.4.

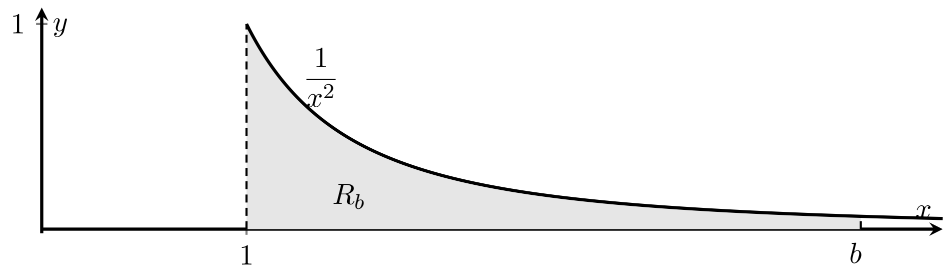

Figura 1.4: Área R_b sob $y = \frac{1}{x^2}$ de $x = 1$ a $x = b$.

À medida que $b \to +\infty$, essa área se aproxima da área total da região R:

$$A(R) = \lim_{b \to +\infty} A(R_b) = \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Ver Figura 1.5.

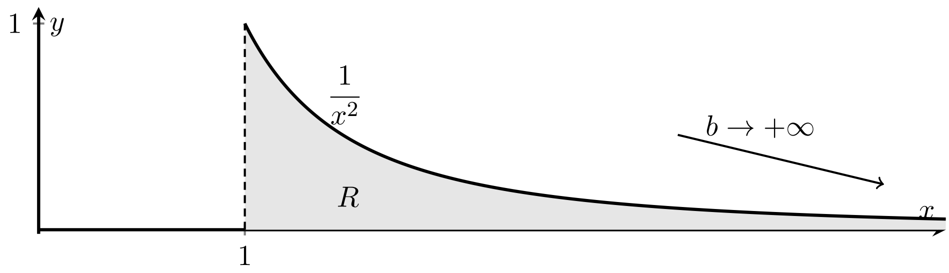

Figura 1.5: Limite $b \to +\infty$ resultando em $A(R) = 1$.

Esse exemplo motiva a seguinte definição.

Definição 1.2.1. *Seja f uma função integrável em $[a, +\infty)$. Definimos:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se f é uma função integrável em $(-\infty, b]$. Definimos:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se f é uma função integrável em $\mathbb{R}$. Definimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,dx.$$

Se o limite existir, dizemos que a integral imprópria **converge**. Caso contrário, dizemos que ela **diverge**.

1.2.2 Integrais com Descontinuidade

Agora, consideremos o caso em que a função apresenta descontinuidade em um ponto do intervalo de integração.

Exemplo 1.2.2. *Calcular a área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no intervalo $(0, 9]$.*

Como a função não está definida em $x = 0$, definimos:

$$A(R_\varepsilon) = \int_\varepsilon^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^9 = 6 - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Quando $\varepsilon \to 0^+$, obtemos:

$$A(R) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} A(R_\varepsilon) = 6.$$

De forma geral:

Definição 1.2.2. *Se f for integrável em $(a, b]$, definimos:*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,dx.$$

Se f for integrável em $[a, b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to b^-}\int_a^\varepsilon f(x)\,dx.$$

Se f tiver descontinuidade em $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to c^-}\int_a^\varepsilon f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to c^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,dx.$$

1.3 Critérios de convergência

Teorema 1.3.1 (Critério de comparação)**.** *Sejam f e g funções integráveis em $[a, t]$, para todo $t > a$, tais que*

$$0 \le f(x) \le g(x), \quad \forall x \ge a.$$

Então, valem as seguintes propriedades:

a) Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *converge, então* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *também converge.*

b) Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge, então* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *também diverge.*

Exemplo 1.3.1. *Verifique que a integral imprópria*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x\,dx$$

é convergente.

Solução. Para $x \geq 0$ vale $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, portanto

$$0 \leq e^{-x} \sin^2 x \leq e^{-x}.$$

Agora,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx := \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \big[-e^{-x}\big]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \big(1 - e^{-t}\big) = 1.$$

Assim, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ é convergente. Pelo critério de comparação, segue que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x\,dx \text{ é convergente e } 0 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x\,dx \leq 1.$$

Proposição 1.3.1. *Seja f integrável em $[a,t]$, para todo $t \geq a$. Se*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \quad \text{é convergente,}$$

então

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{também é convergente.}$$

Demonstração. Para todo $x \geq a$ vale

$$0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|.$$

Como $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ é convergente, pelo critério de comparação segue que

$$\int_a^{+\infty} \big(|f(x)| + f(x)\big)\,dx$$

também converge. Além disso, para todo $t > a$, temos

$$\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^t \big(|f(x)| + f(x)\big)\,dx - \int_a^t |f(x)|\,dx.$$

Ora, como os dois integrais do lado direito convergem quando $t \to +\infty$, conclui-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

também é convergente. □

Exemplo 1.3.2. *Determine se a integral imprópria*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^3 x \, dx$$

é convergente ou divergente. Justifique.

Solução. Para todo $x \geq 0$, tem-se

$$0 \leq \left| e^{-x} \sin^3 x \right| \leq e^{-x}.$$

Como $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$ é convergente, pelo critério de comparação segue que

$$\int_0^{+\infty} \left| e^{-x} \sin^3 x \right| dx$$

também converge. Aplicando a Proposição 1.3.1, conclui-se que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^3 x \, dx$$

é convergente. $\square$

Capítulo 2

Sequência e série de números reais

2.1 Sequências de Números Reais

Definição 2.1.1. *Uma sequência de números reais é uma função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, onde* $f(n) = a_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Notação 2.1.1. *A sequência* $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ *é também denotada por* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *ou* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Exemplo 2.1.1. *A função* $f(n) = (-1)^n$ *determina a sequência* $\{1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots\}$.

Definição 2.1.2. *Uma subsequência de uma sequência* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é uma restrição* $f_{\mathbb{N}'}$ *de* f*,* $f_{\mathbb{N}'} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, onde* $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.

Definição 2.1.3. *Dizemos que uma sequência de números reais* $\{a_n\}$ *é:*

a) decrescente se $a_n > a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

b) crescente se $a_n < a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

c) não-decrescente se $a_n \leq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

d) não-crescente se $a_n \geq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.1.4. *Uma sequência que satisfaz um dos itens da Definição 2.1.3 é dita* ***monótona****.*

Exemplo 2.1.2. *As sequências* $\{\frac{1}{n}\}$, $\{n+1\}$ *e* $\{7-n\}$ *são monótonas. Verifique.*

Definição 2.1.5. *Dizemos que uma sequência de números reais* $\{a_n\}$ *é:*

a) limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

b) limitada inferiormente se existe $m \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \geq m$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

c) limitada se for limitada superiormente e inferiormente.

2.2 Exercícios

Exercício 2.2.1. *Mostre que as sequências abaixo são limitadas e monótonas. Descreva o tipo de monotonicidade de cada uma delas.*

a) $x_n = \dfrac{2n-1}{n}$;

b) $x_n = 1 + \dfrac{1}{3n}$;

c) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$;

d) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$;

e) $x_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2}$.

Exercício 2.2.2. *Para cada uma das sequências do exercício anterior, exiba três subsequências.*

2.2.1 Limite de Sequências

Definição 2.2.1. *Dizemos que um número real L é limite de uma sequência $\{a_n\}$ se, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|a_n - L| < \epsilon, \quad \forall\, n \geq N. \tag{2.1}$$

Notação 2.2.1. *Denotamos:* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$.

Se a sequência $\{a_n\}$ possui limite, dizemos que a sequência é **convergente**. Caso contrário, dizemos que é **divergente**.

Definição 2.2.2. *Dizemos que* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ *se, para cada $M > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$ para todo $n \geq N$. Neste caso, dizemos que a sequência diverge para $+\infty$.*

Teorema 2.2.1. *Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências convergentes. Então:*

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} c = c$, *quando $a_n = c$ é constante;*

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$;

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n}$, *se* $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$.

Teorema 2.2.2 (Teorema do Confronto)**.** *Se as sequências $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ são tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n > n_0$ e*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L,$$

então $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$.

Exemplo 2.2.1. *Prove que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n^2+1} = 0$.*

Uma das sequências mais importantes no mundo matemático é a sequência de Fibonacci, definida por

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1 \quad \text{e} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall\, n \geq 2.$$

Proposição 2.2.1. *Uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $a \in \mathbb{R}$ se, e somente se, toda subsequência de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a.*

Proposição 2.2.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Teorema 2.2.3. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Teorema 2.2.4 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada possui pelo menos uma subsequência convergente.*

Exercício 2.2.3. *Mostre que a recíproca do Teorema 2.2.3 não é verdadeira.*