

Notas de aula - Elementos de Matemática

Vitaliano S. Amaral - UFPI

Sumário

Sumário	3
1 Números Reais	5
1.1 Um pouco sobre os números Naturais, Inteiros e Racionais	5
1.2 O conjunto dos números Reais	9
1.2.1 Relação de ordem em \mathbb{R}	9
1.2.2 Intervalos	11

Capítulo 1

Números Reais

1.1 Um pouco sobre os números Naturais, Inteiros e Racionais

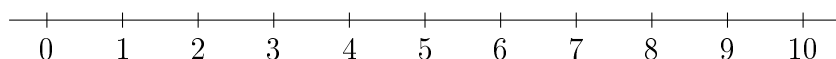
Ao longo da história, os números surgiram para atender a diferentes necessidades humanas. Os números naturais apareceram inicialmente como uma forma de contar objetos e registrar quantidades. Com o tempo, a necessidade de representar dívidas, perdas e posições relativas levou à introdução dos números inteiros, que incluem tanto os naturais quanto seus opostos negativos.

O conjunto dos números naturais é dado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Cada número natural pode ser representado sobre a reta real. Uma vez fixados os pontos correspondentes aos números 0 e 1, adotamos a distância entre eles como unidade de medida. A partir daí, todos os números naturais são representados como pontos igualmente espaçados, posicionados da esquerda para a direita a partir do zero.

Veja a seguir a ilustração do conjunto \mathbb{N} sobre a reta real:

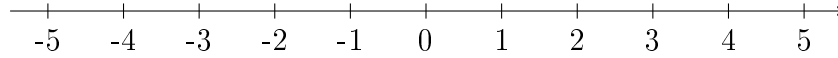


O conjunto dos números inteiros é representado da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

De maneira análoga, os números inteiros também podem ser representados sobre a reta real. Uma vez fixados os pontos 0 e 1, adotamos a distância entre eles como unidade de medida. A partir disso, os inteiros são posicionados igualmente espaçados, estendendo-se para a direita (inteiros positivos) e para a esquerda (inteiros negativos) a partir do zero.

Veja a seguir a ilustração do conjunto \mathbb{Z} sobre a reta real:



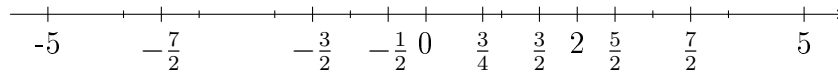
Observamos que os números inteiros consecutivos delimitam intervalos unitários (de comprimento 1).

O conjunto dos números racionais surge da necessidade de representar partes de um inteiro, aparecendo como subdivisões desses intervalos unitários. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ corresponde ao ponto situado exatamente no meio entre 0 e 1, $\frac{3}{4}$ está localizado a três quartos da distância entre 0 e 1, e assim por diante. Os racionais negativos seguem a mesma lógica, mas posicionados à esquerda de 0.

Assim, o conjunto dos números racionais é representado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Essa construção nos permite associar um ponto da reta real a cada número racional. No entanto, como entre quaisquer dois números reais distintos existem infinitos racionais, não podemos representá-los todos graficamente. Em vez disso, destacamos apenas alguns exemplos para ilustrar a densidade dos números racionais sobre a reta real.



Admitiremos as seguintes operações (adição e multiplicação) no conjunto dos números racionais.

Definição 1.1.1. (Adição) Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de \mathbb{Q} , com $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$ e $n, s \neq 0$. A soma de a com b é o elemento de \mathbb{Q} dado por

$$a + b = \frac{ms + nr}{ns}.$$

Exemplo 1.1.1. Sejam $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{5}{4}$. Então, a soma de a com b é:

$$a + b = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{8 + 15}{12} = \frac{23}{12}.$$

Definição 1.1.2. (Multiplicação) Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de \mathbb{Q} , com $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$ e $n, s \neq 0$. A multiplicação (ou produto) de a com b é o elemento de \mathbb{Q} dado por

$$ab = \frac{mr}{ns}.$$

Exemplo 1.1.2. Sejam $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{5}{4}$. Então, o produto de a com b é:

$$ab = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

É fácil perceber que entre dois números racionais sempre existe outro número racional. De fato, dados dois números racionais $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ com $a < b$, $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$. Considere o número racional da forma

$$c = a + \frac{b-a}{2}.$$

Podemos observar que c está entre a e b , pois c é obtido somando a a a metade da distância entre a e b . Veja a ilustração geométrica na Figura 1.1.

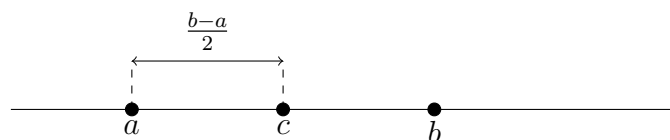


Figura 1.1: Ilustração do ponto médio $c = a + \frac{b-a}{2}$ na reta real.

Agora, além da afirmação acima vamos mostrar que c é um número racional e está entre os racionais a e b . Veja que

$$\begin{aligned} c = a + \frac{1}{2}(b-a) &= \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n} \right) = \left(\frac{rn+ms}{2ns} \right), \end{aligned}$$

como $rn+ms$ e $2ns$ são números inteiros, podemos garantir que c é um número racional, pois é a razão entre dois inteiros com denominador diferente de zero.

Além da explicação anterior, outra forma de garantir que c está entre a e b é observar que

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} = c \quad \text{e} \quad c = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b,$$

portanto, temos $a < c < b$.

Diante do exposto anteriormente, surge uma dúvida: como sempre existe um número racional entre dois números racionais, então seria possível preencher toda a reta numérica apenas com números racionais?

A seguir veremos que a resposta para a pergunta anterior é: não é possível.

Diz-se que Hipaso de Metaponto, um seguidor de Pitágoras, foi o primeiro a descobrir que existem números que não podem ser representados pela divisão de dois números inteiros. Ele teria demonstrado que $\sqrt{2}$ não é racional, provavelmente por meio de uma prova geométrica.

Considere um triângulo retângulo desenhado sobre a reta numérica (veja Figura 1.2), com catetos medindo 1 unidade cada e hipotenusa sobre a reta numérica, indo do ponto 0 até o ponto marcado por x , ou seja, a hipotenusa tem comprimento medindo x unidades.

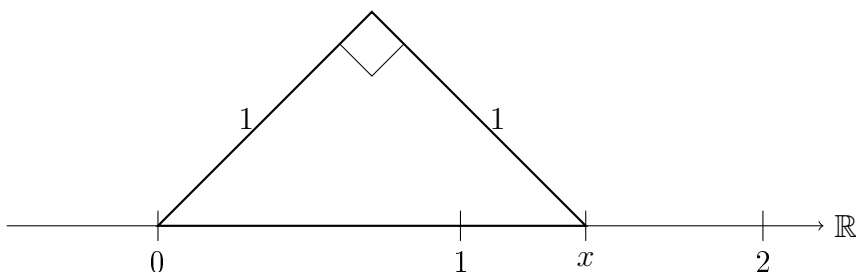


Figura 1.2:

Pelo **Teorema de Pitágoras**, temos: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Suponha, por contradição, que x seja um número racional. Então podemos escrevê-lo como $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si. Substituindo em $x^2 = 2$:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

Isso implica que p^2 é par, logo p é par. Seja $p = 2k$, assim temos

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 4k^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2k^2$$

Portanto, q^2 também é par, o que implica que q é par.

Chegamos a uma contradição, pois p e q seriam ambos pares, contrariando a hipótese de que são primos entre si. Logo, x **não é um número racional**.

Como x é um ponto da reta numérica que não pertence ao conjunto dos racionais, concluímos que a reta real não pode ser preenchida completamente apenas por números racionais.

O conjunto dos números que não podem ser representados como a divisão de dois inteiros, ou seja, que não são números racionais, é denotado pela letra \mathbb{I} e chamado de *conjunto dos números irracionais*.

Da própria definição, temos que os conjuntos \mathbb{Q} e \mathbb{I} não possuem elementos em comum, isto é,

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

Exercício 1.1.1. *Mostre que a soma de dois números racionais é também um número racional.*

Exercício 1.1.2. *A soma de um número racional com um número irracional é um número racional? Justifique sua resposta.*

Exercício 1.1.3. *A soma de dois números irracionais é um número irracional? Justifique sua resposta.*

Exercício 1.1.4. *Sejam a um número racional não nulo e b um número irracional. Mostre que o produto ab não pode ser representado como uma divisão de dois números inteiros. Conclua que o produto de um número racional não nulo por um irracional é um número irracional.*

1.2 O conjunto dos números Reais

Os elementos dos conjuntos \mathbb{Q} e \mathbb{I} , juntos, formam o conjunto dos números reais, denotado por \mathbb{R} , ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Como vimos anteriormente, todo ponto da reta numérica pode representar um número real. Assim, a partir de agora, essa reta numérica será chamada de **reta real**, como mostra a Figura 1.3 a seguir.

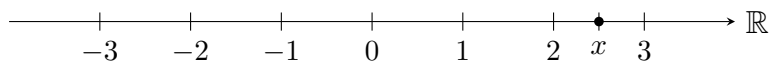


Figura 1.3: Representação da reta real.

Dizemos que um número real x é **positivo** se ele representa um ponto da reta real situado à direita da origem 0. Um número real x é dito negativo se $-x$ é positivo.

Para um número real x , é satisfeita uma, e apenas uma, das seguintes propriedades:

- x é positivo;
- $-x$ é positivo;
- $x = 0$.

1.2.1 Relação de ordem em \mathbb{R}

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que:

1. $x < y$ (lê-se: x menor que y) se $y - x$ for positivo;
2. $x = y$ (lê-se: x igual a y) se $y - x = 0$;
3. $x \leq y$ (lê-se: x menor ou igual a y) se $y - x$ for positivo ou $x - y = 0$.

Comutatividade e Associatividade

Comutatividade. Dizemos que uma operação é comutativa quando a ordem dos elementos não altera o resultado. No conjunto dos números reais, isso ocorre com a adição e a multiplicação:

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad ab = ba, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo:

$$7 + 4 = 4 + 7 \quad \text{e} \quad 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3.$$

Já a subtração e a divisão não possuem essa propriedade, pois

$$8 - 2 \neq 2 - 8, \quad \text{e} \quad \frac{12}{3} \neq \frac{3}{12}.$$

Associatividade. Uma operação é associativa quando o modo de agrupar os elementos não altera o resultado. Também nos reais, a adição e a multiplicação possuem essa propriedade:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Isso significa que, ao somar ou multiplicar três ou mais números, podemos desprezar os parênteses e calcular livremente, por exemplo:

$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9, \quad (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24.$$

Por outro lado, a subtração não é associativa. De fato,

$$(10 - 6) - 2 = 2 \neq 10 - (6 - 2) = 6.$$

Assim, é importante ter atenção ao realizar operações que envolvem diferentes tipos de operadores e parênteses, pois o uso incorreto de um sinal ou a aplicação equivocada de uma propriedade pode levar a erros nos cálculos.

No conjunto dos números reais são satisfeitas as seguintes propriedades:

- i) $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R};$
- ii) $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{R};$
- iii) Existe o elemento neutro da adição, denotado por 0, tal que

$$a + 0 = a, \quad \forall a \in \mathbb{R};$$

- iv) Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0;$

$$\text{v) } (ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R};$$

$$\text{vi) } ab = ba, \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$$

vii) Existe o elemento neutro da multiplicação, denotado por 1, tal que $a \cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

viii) $a(b + c) = ab + ac$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$;

ix) Para todo $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{R}^*$ existe a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1$.

Proposição 1.2.1. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Então valem as seguintes propriedades:*

- a) $x \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- b) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;
- c) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$;
- d) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale exatamente uma das afirmações: $x = y$, $x \leq y$ ou $y \leq x$;
- e) Se $x \leq y$, então $x + z \leq y + z$, $\forall z \in \mathbb{R}$;
- f) Se $x > 0$ e $y > 0$, então $xy > 0$;
- g) Se $x < 0$ e $y < 0$, então $xy > 0$;
- h) Se $x > 0$ e $y < 0$, então $xy < 0$;
- i) Se $x \neq 0$, então $x^2 > 0$;
- j) Se $x < y$ e $z > 0$, então $xz < yz$;
- k) Se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$;
- l) $x > 0$ implica $x^{-1} > 0$;
- m) $x < 0$ implica $x^{-1} < 0$;
- n) $0 < x < 1$ implica $1 < x^{-1}$;
- o) $1 < x$ implica $0 < x^{-1} < 1$;
- p) $0 < x < y$ implica $0 < y^{-1} < x^{-1}$;
- q) $x < y < 0$ implica $y^{-1} < x^{-1} < 0$.

1.2.2 Intervalos

Existem subconjuntos de \mathbb{R} que são representados por partes da reta real, estes conjuntos são chamados de intervalos. A seguir, será apresentado vários tipos de intervalos.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

i) O conjunto dos números reais $x \in \mathbb{R}$ tais que $a < x < b$ é chamado de

intervalo aberto, e denotado por $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$.

ii) O conjunto dos números reais x tais que $a \leq x \leq b$ é chamado de intervalo fechado, e denotado por $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$.

iii) O conjunto dos números reais x tais que $a < x \leq b$ é chamado de intervalo semifechado à direita ou semiaberto à esquerda, e denotado por $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$.

iv) O conjunto dos números reais x tais que $a \leq x < b$ é chamado de intervalo semifechado à esquerda ou semiaberto à direita, e denotado por $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$.

v) Existem ainda conjuntos que são ilimitados, e representados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R}; x < a\}; & (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}; \\ (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; x > a\}; & [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}; \\ (-\infty, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Valor absoluto ou módulo

Definição 1.2.1. *Dado um número real x , seu módulo ou valor absoluto é denotado por $|x|$ e definido da seguinte forma:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

O valor absoluto de um número real x também pode ser representado por:

$$|x| = \max\{x, -x\} \quad \text{ou} \quad |x| = \sqrt{x^2}.$$

Exercício 1.2.1. *Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, mostre que:*

- a) $|xy| = |x| |y|$;
- b) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- c) $|x - y| \geq |x| - |y|$;
- d) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.