Notas de Aula

Elementos de Matemática
Departamento de Matemática – UFPI

Estas notas de aula foram elaboradas para apoiar a disciplina Elementos de Matemática do curso de Matemática da Universidade Federal do Piauí. Trata-se de um material de apoio, e não de um livro didático. Algumas definições, demonstrações e exemplos não estão aqui incluídos, pois serão discutidos diretamente em sala de aula. Este material encontra-se em constante desenvolvimento e poderá ser aprimorado em futuras edições.

A versão mais atualizada deste material pode ser encontrada em: `https://vitalianoamaral.github.io`
No menu, clique em **Ensino**, depois em **Graduação** e, em seguida, em **Disciplinas Ministradas**. Localize a disciplina **Elementos de Matemática I** e clique no link **Notas de Aula**.

Prof. Vitaliano de Sousa Amaral
Departamento de Matemática – UFPI

15 de outubro de 2025

Sumário

Capítulo 1

Números Reais

1.1 Um pouco sobre os números Naturais, Inteiros e Racionais

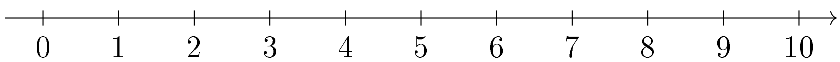
Ao longo da história, os números surgiram para atender a diferentes necessidades humanas. Os números naturais apareceram inicialmente como uma forma de contar objetos e registrar quantidades. Com o tempo, a necessidade de representar dívidas, perdas e posições relativas levou à introdução dos números inteiros, que incluem tanto os naturais quanto seus opostos negativos.

O conjunto dos números naturais é dado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Cada número natural pode ser representado sobre a reta real. Uma vez fixados os pontos correspondentes aos números 0 e 1, adotamos a distância entre eles como unidade de medida. A partir daí, todos os números naturais são representados como pontos igualmente espaçados, posicionados da esquerda para a direita a partir do zero.

Veja a seguir a ilustração do conjunto $\mathbb{N}$ sobre a reta real:

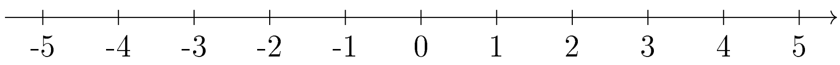


O conjunto dos números inteiros é representado da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

De maneira análoga, os números inteiros também podem ser representados sobre a reta real. Uma vez fixados os pontos 0 e 1, adotamos a distância entre eles como unidade de medida. A partir disso, os inteiros são posicionados igualmente espaçados, estendendo-se para a direita (inteiros positivos) e para a esquerda (inteiros negativos) a partir do zero.

Veja a seguir a ilustração do conjunto $\mathbb{Z}$ sobre a reta real:



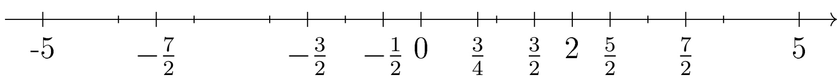
Observamos que os números inteiros consecutivos delimitam intervalos unitários (de comprimento 1).

O conjunto dos números racionais surge da necessidade de representar partes de um inteiro, aparecendo como subdivisões desses intervalos unitários. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ corresponde ao ponto situado exatamente no meio entre 0 e 1, $\frac{3}{4}$ está localizado a três quartos da distância entre 0 e 1, e assim por diante. Os racionais negativos seguem a mesma lógica, mas posicionados à esquerda de 0.

Assim, o conjunto dos números racionais é representado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

Essa construção nos permite associar um ponto da reta real a cada número racional. No entanto, como entre quaisquer dois números reais distintos existem infinitos racionais, não podemos representá-los todos graficamente. Em vez disso, destacamos apenas alguns exemplos para ilustrar a densidade dos números racionais sobre a reta real.



Admitiremos as seguintes operações (adição e multiplicação) no conjunto dos números racionais.

Definição 1.1.1. (Adição) *Sejam* $a = \dfrac{m}{n}$ *e* $b = \dfrac{r}{s}$ *elementos de* $\mathbb{Q}$*, com* $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$ *e* $n, s \neq 0$*. A soma de a com b é o elemento de* $\mathbb{Q}$ *dado por*

$$a + b = \frac{ms + nr}{ns}.$$

Exemplo 1.1.1. *Sejam* $a = \dfrac{2}{3}$ *e* $b = \dfrac{5}{4}$*. Então, a soma de a com b é:*

$$a + b = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{8 + 15}{12} = \frac{23}{12}.$$

Definição 1.1.2. (Multiplicação)*Sejam* $a = \dfrac{m}{n}$ *e* $b = \dfrac{r}{s}$ *elementos de* $\mathbb{Q}$*, com* $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$ *e* $n, s \neq 0$*. A multiplicação (ou produto) de a com b é o elemento de* $\mathbb{Q}$ *dado por*

$$ab = \frac{mr}{ns}.$$

Exemplo 1.1.2. *Sejam* $a = \frac{2}{3}$ *e* $b = \frac{5}{4}$. *Então, o produto de a com b é:*

$$ab = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

É fácil perceber que entre dois números racionais sempre existe outro número racional. De fato, dados dois números racionais $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ com $a < b$, $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$. Considere o número racional da forma

$$c = a + \frac{b-a}{2}.$$

Podemos observar que c está entre a e b, pois c é obtido somando a a a metade da distância entre a e b. Veja a ilustração geométrica na Figura 1.1.

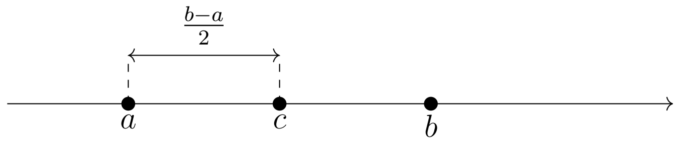


Figura 1.1: Ilustração do ponto médio $c = a + \frac{b-a}{2}$ na reta real.

Agora, além da afirmação acima vamos mosttrar que c é um número racional e está enrte os racionasi a e b. Veja que

$$\begin{aligned} c = a + \frac{1}{2}(b-a) &= \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{rn+ms}{2ns}\right), \end{aligned}$$

como $rn + ms$ e $2ns$ são números inteiros, podemos garantir que c é um número racional, pois é a razão entre dois inteiros com denominador diferente de zero.

Além da explicação anterior, outra forma de garantir que c está entre a e b é observar que

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} = c \quad \text{e} \quad c = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b,$$

portanto, temos $a < c < b$.

Diante do exposto anteriormente, surge uma dúvida: como sempre existe um número racional entre dois números racionais, então seria possível preencher toda a reta numérica apenas com números racionais?

A seguir veremos que a resposta para a pergunta anterior é: não é possível.

Diz-se que Hipaso de Metaponto, um seguidor de Pitágoras, foi o primeiro a descobrir que existem números que não podem ser representados pela divisão de dois números inteiros. Ele teria demonstrado que $\sqrt{2}$ não é racional, provavelmente por meio de uma prova geométrica.

Considere um triângulo retângulo desenhado sobre a reta numérica(veja Figura 1.2), com catetos medindo 1 unidade cada e hipotenusa sobre a reta numérica, indo do ponto 0 até o ponto marcado por x, ou seja, a hipotenusa tem comprimento medindo x unidades.

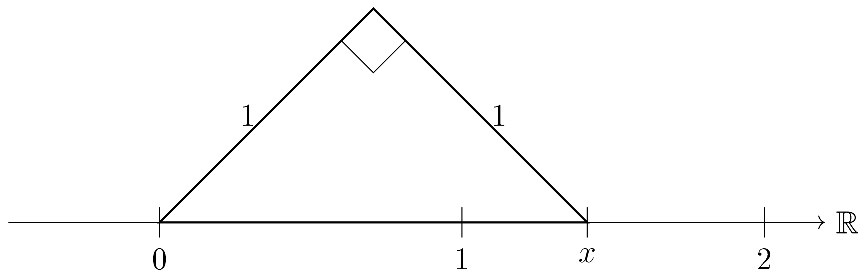


Figura 1.2:

Pelo **Teorema de Pitágoras**, temos: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Suponha, por contradição, que x seja um número racional. Então podemos escrevê-lo como $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si. Substituindo em $x^2 = 2$:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

Isso implica que p^2 é par, logo p é par. Seja $p = 2k$, assim temos

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 4k^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2k^2$$

Portanto, q^2 também é par, o que implica que q é par.

Chegamos a uma contradição, pois p e q seriam ambos pares, contrariando a hipótese de que são primos entre si. Logo, x **não é um número racional**.

Como x é um ponto da reta numérica que não pertence ao conjunto dos racionais, concluímos que a reta real não pode ser preenchida completamente apenas por números racionais.

O conjunto dos números que não podem ser representados como a divisão de dois inteiros, ou seja, que não são números racionais, é denotado pela letra $\mathbb{I}$ e chamado de *conjunto dos números irracionais.*

Da própria definição, temos que os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ não possuem elementos em comum, isto é,

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

Exercício 1.1.1. *Mostre que a soma de dois números racionais é também um número racional.*

Exercício 1.1.2. *A soma de uma número racional com um número irracional é um número racional? Justifique sua resposta.*

Exercício 1.1.3. *A soma de dois números irracionais é um número irracional? Justifique sua resposta.*

Exercício 1.1.4. *Sejam a um número racional não nulo e b um número irracional. Mostre que o produto ab não pode ser representado como uma divisão de dois números inteiros. Conclua que o produto de um número racional não nulo por um irracional é um número irracional.*

1.2 O conjunto dos números Reais

Os elementos dos conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, juntos, formam o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Como vimos anteriormente, todo ponto da reta numérica pode representar um número real. Assim, a partir de agora, essa reta numérica será chamada de **reta real**, como mostra a Figura 1.3 a seguir.

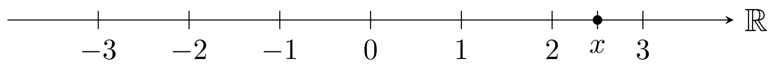


Figura 1.3: Representação da reta real.

Dizemos que um número real x é **positivo** se ele representa um ponto da reta real situado à direita da origem 0. Um número real x é dito negativo se $-x$ é positivo.

Para um número real x, é satisfeita uma, e apenas uma, das seguintes propriedades:

- x é positivo;
- $-x$ é positivo;
- $x = 0$.

1.2.1 Relação de ordem em $\mathbb{R}$

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que:

1. $x < y$ (lê-se: x menor que y) se $y - x$ for positivo;
2. $x = y$ (lê-se: x igual a y) se $y - x = 0$;
3. $x \leq y$ (lê-se: x menor ou igual a y) se $y - x$ for positivo ou $x - y = 0$.

Comutatividade e Associatividade

Comutatividade. Dizemos que uma operação é comutativa quando a ordem dos elementos não altera o resultado. No conjunto dos números reais, isso ocorre com a adição e a multiplicação:

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad ab = ba, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo:

$$7 + 4 = 4 + 7 \quad \text{e} \quad 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3.$$

Já a subtração e a divisão não possuem essa propriedade, pois

$$8 - 2 \neq 2 - 8, \quad \text{e} \quad \tfrac{12}{3} \neq \tfrac{3}{12}.$$

Associatividade. Uma operação é associativa quando o modo de agrupar os elementos não altera o resultado. Também nos reais, a adição e a multiplicação possuem essa propriedade:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (ab)c = a(bc), \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Isso significa que, ao somar ou multiplicar três ou mais números, podemos desprezar os parênteses e calcular livremente, por exemplo:

$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9, \qquad (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24.$$

Por outro lado, a subtração não é associativas. De fato,

$$(10 - 6) - 2 = 2 \quad \neq \quad 10 - (6 - 2) = 6.$$

Assim, é importante ter atenção ao realizar operações que envolvem diferentes tipos de operadores e parênteses, pois o uso incorreto de um sinal ou a aplicação equivocada de uma propriedade pode levar a erros nos cálculos.

No conjunto dos números reais são satisfeitas as seguintes propriedades:

i) $(a + b) + c = a + (b + c),\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

ii) $a + b = b + a,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

iii) Existe o elemento neutro da adição, denotado por 0, tal que

$$a + 0 = a,\ \forall\, a \in \mathbb{R};$$

iv) Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$;

v) $(ab)c = a(bc),\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

vi) $ab = ba,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

vii) Existe o elemento neutro da multiplicação, denotado por 1, tal que $a \cdot 1 = a, \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;

viii) $a(b+c) = ab + ac, \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

ix) Para todo $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{R}^*$ existe a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1$.

Proposição 1.2.1. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Então valem as seguintes propriedades:*

a) $x \leq x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) Se $x \leq y$ *e* $y \leq x$, *então* $x = y$;

c) Se $x \leq y$ *e* $y \leq z$, *então* $x \leq z$;

d) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale exatamente uma das afirmações:* $x = y$, $x \leq y$ *ou* $y \leq x$;

e) Se $x \leq y$, *então* $x + z \leq y + z, \ \forall\, z \in \mathbb{R}$;

f) Se $x > 0$ *e* $y > 0$, *então* $xy > 0$;

g) Se $x < 0$ *e* $y < 0$, *então* $xy > 0$;

h) Se $x > 0$ *e* $y < 0$, *então* $xy < 0$;

i) Se $x \neq 0$, *então* $x^2 > 0$;

j) Se $x < y$ *e* $z > 0$, *então* $xz < yz$;

k) Se $x < y$ *e* $z < 0$, *então* $xz > yz$;

l) $x > 0$ *implica* $x^{-1} > 0$;

m) $x < 0$ *implica* $x^{-1} < 0$;

n) $0 < x < 1$ *implica* $1 < x^{-1}$;

o) $1 < x$ *implica* $0 < x^{-1} < 1$;

p) $0 < x < y$ *implica* $0 < y^{-1} < x^{-1}$;

q) $x < y < 0$ *implica* $y^{-1} < x^{-1} < 0$.

1.2.2 Intervalos

Existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são representados por partes da reta real, estes conjuntos são chamados de intervalos. A seguir, será apresentado vários tipos de intervalos.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

i) O conjunto dos números reais $x \in \mathbb{R}$ tais que $a < x < b$ é chamado de intervalo aberto, e denotado por $(a,b) = \{x \in \mathbb{R};\, ,\, a < x < b\}$.

ii) O conjunto dos números reais x tais que $a \leq x \leq b$ é chamado de intervalo fechado, e denotado por $[a,b] = \{x \in \mathbb{R};\, ,\, a \leq x \leq b\}$.

iii) O conjunto dos números reais x tais que $a < x \leq b$ é chamado de intervalo semifechado à direita ou semiaberto à esquerda, e denotado por $(a,b] = \{x \in \mathbb{R};\, ,\, a < x \leq b\}$.

iv) O conjunto dos números reais x tais que $a \leq x < b$ é chamado de intervalo semifechado à esquerda ou semiaberto à direita, e denotado por $(a,b] = \{x \in \mathbb{R};\, ,\, a \leq x < b\}$.

v) Existem ainda conjuntos que são ilimitados, e representados da seguinte forma:

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$; $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$;

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$; $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$;

$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Valor absoluto ou módulo

Definição 1.2.1. *Dado um número real x, seu módulo ou valor absoluto é denotado por $|x|$ e definido da seguinte forma:*

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0, \\ -x, & se\ x < 0. \end{cases}$$

O valor absoluto de um número real x também pode ser representado por:

$$|x| = \max\{x, -x\} \quad \text{ou} \quad |x| = \sqrt{x^2}.$$

Exercício 1.2.1. *Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, mostre que:*

a) $|xy| = |x|\,|y|$;

b) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

c) $|x - y| \geq |x| - |y|$;

d) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Capítulo 2

Funções

2.1 Conceitos básicos

Definição 2.1.1. *Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma* ***função*** $f : A \to B$ *é uma regra que atribui a cada $x \in A$ um único elemento $y \in B$, chamado de valor de f em x e denotado por $f(x)$.*

Definição 2.1.2. *O conjunto A é chamado de domínio da função f. O conjunto B recebe o nome de* ***contradomínio****. A* ***imagem*** *de f é o subconjunto de B formado pelos valores assumidos por f: $Im(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$. O* ***gráfico*** *de f é o conjunto de pares ordenados: $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$.*

Exemplo 2.1.1. *Se $A = \{1, 4, 7\}$ e $B = \{0, 3, 12, 15, 21\}$, a correspondência $f(x) = 3x$ define uma função de A em B, pois cada elemento de A tem uma única imagem em B, conforme ilustrado na Figura 2.1.*

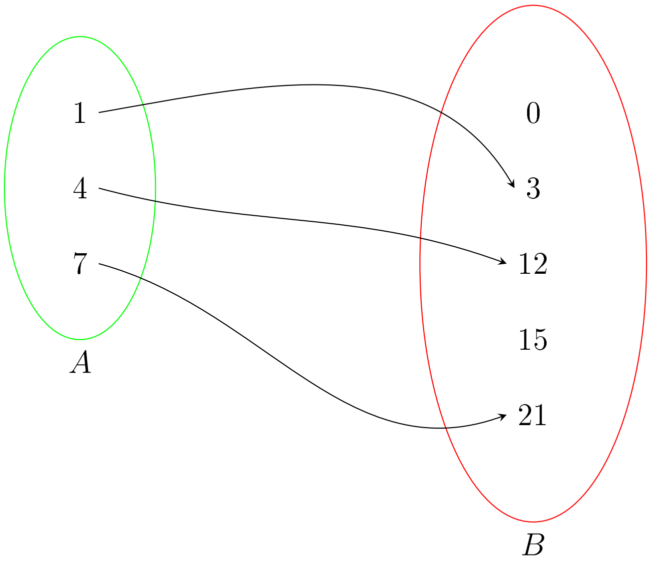


Figura 2.1: Função $f(x) = 3x$ de A em B

A seguir, apresentaremos o conceito de zeros de funções, ilustrando-o com definição formal, exemplo numérico e interpretação geométrica.

Definição 2.1.3. *Dizemos que um número $x \in \mathbb{R}$ é um **zero** (ou **raiz**) de uma função f quando $f(x) = 0$.*

Exemplo 2.1.2. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = x^2 + 5x + 6.$$

Para determinar seus zeros, resolvemos a equação $f(x) = 0$:

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Fatorando, temos $(x + 2)(x + 3) = 0$, e portanto os zeros são $x = -2$ e $x = -3$.

Interpretação geométrica: os zeros de uma função correspondem às abscissas dos pontos onde o gráfico de f intersecta o eixo OX (eixo das abscissas).

No geral, nem sempre é simples determinar os zeros de uma função, pois em muitos casos a equação $f(x) = 0$ não pode ser resolvida de maneira imediata.

Funções quadráticas. Como primeiro estudo específico, vamos abordar um tipo importante de função: a **função quadrática**.

Definição 2.1.4. *Chamamos de **Função do 2° grau** ou **Função quadrática**, toda função $f : I \to \mathbb{R}$ da forma*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e $I \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.1. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$, é uma função quadrática.*

Os zeros da função quadrática correspondem às soluções reais da equação do 2° grau associada.

Exemplo 2.1.2. *Seja $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Os zeros de f são os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Aplicando a Fórmula de Bháskara (que será apresentada a seguir), obtemos*

$$x_1 = 2 \quad e \quad x_2 = 1.$$

Portanto, $x = 1$ e $x = 2$ são os zeros de f.

A seguir, apresentaremos a **forma canônica** de uma função quadrática, que facilita a determinação de máximos, mínimos e também a dedução da Fórmula de Bháskara.

Proposição 2.1.1. *Toda função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita como*

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac. \tag{2.1}$$

*A fórmula (2.1) é chamada de **forma canônica** de f.*

Demonstração. Usando o método de completar quadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \tfrac{2b}{2a}x + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a}\right] \\ &= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a} \\ &= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.1.3. *Escreva a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$ na sua forma canônica.*

Solução. Aplicando a forma canônica, temos:

$$f(x) = \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4}.$$

■

Consequências da forma canônica. - A partir dela, obtemos facilmente a **Fórmula de Bháskara**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Além disso, o gráfico de f é sempre uma **parábola**.

Definição geométrica: Uma parábola é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo, chamado *foco*, e de uma reta fixa, chamada *diretriz*.

A partir disso, mostra-se que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola com:

- foco $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1+4ac-b^2}{4a}\right)$;
- diretriz $y = -\frac{b^2-4ac+1}{4a}$.

Clique aqui para ver uma ilustração geométrica no GeoGebra.

Definição 2.1.5. *Seja f uma função com domínio $D(f)$. Dizemos que f atinge um* ***valor máximo*** *em $A \subseteq D(f)$ quando existe $x_0 \in A$ tal que*

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in A.$$

Analogamente, f atinge um ***valor mínimo*** *em A quando existe $x_0 \in A$ tal que*

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in A.$$

Chamamos x_0 de ***ponto de máximo*** *em A ou* ***ponto de mínimo*** *em A, respectivamente.*

Nosso objetivo agora é identificar esses extremos no caso particular da função quadrática, utilizando apenas a forma canônica, sem recorrer a ferramentas de cálculo diferencial.

Theorem 2.1.1. *Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. O gráfico de f possui um ponto extremo (máximo ou mínimo) na abscissa*

$$x_v = -\frac{b}{2a}.$$

O valor da ordenada nesse ponto é

$$y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Se $a > 0$, o extremo é um mínimo*; se $a < 0$, o extremo é um* máximo*.*

Demonstração. Da forma canônica (Proposição 2.1.1), temos

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Observe que o termo quadrático $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre não negativo.

Se $a > 0$, multiplicando por a obtemos $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Logo,

$$f(x) \;\geq\; -\frac{\Delta}{4a},$$

e o valor mínimo ocorre em $x_v = -\frac{b}{2a}$.

Se $a < 0$, então $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, o que implica

$$f(x) \;\leq\; -\frac{\Delta}{4a},$$

e o valor máximo ocorre em $x_v = -\frac{b}{2a}$.

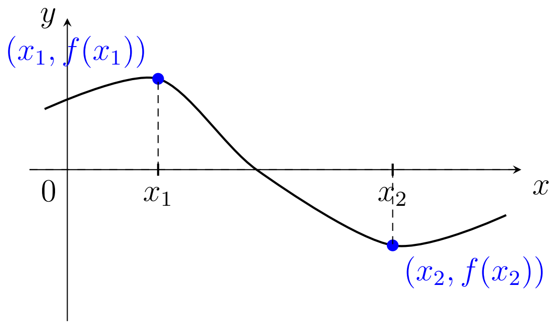
Assim, em ambos os casos, o ponto extremo é $(x_v, y_v) = \big(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\big)$. ■

Como saber se uma função, cujo gráfico não apresenta falhas, possui pelo menos uma raiz real?

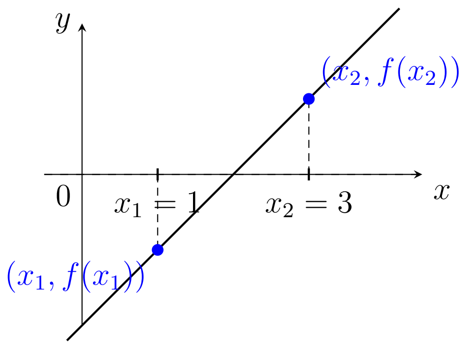
Uma raiz real de uma função é um número onde o valor da função é igual a zero, ou seja, o ponto onde o gráfico cruza o eixo x.

Se o gráfico da função não apresenta falhas (isto é, é contínuo, sem quebras ou saltos), para verificar se a função possui pelo menos uma raiz real podemos proceder da seguinte forma: escolha dois pontos distintos x_1 e x_2 tais que $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$. Como o gráfico liga os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ sem interrupções, é necessário que ele **cruze o eixo** x em algum lugar entre esses dois pontos.

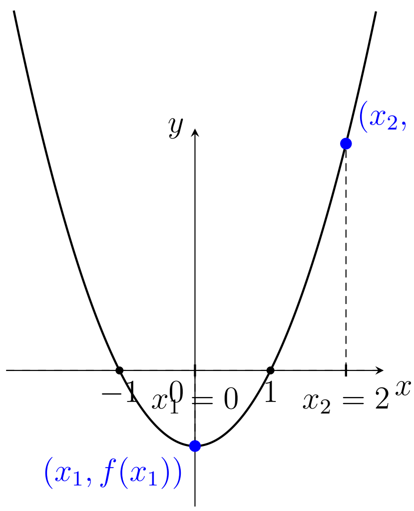
Assim, podemos concluir que f possui pelo menos uma raiz real no intervalo (x_1, x_2).



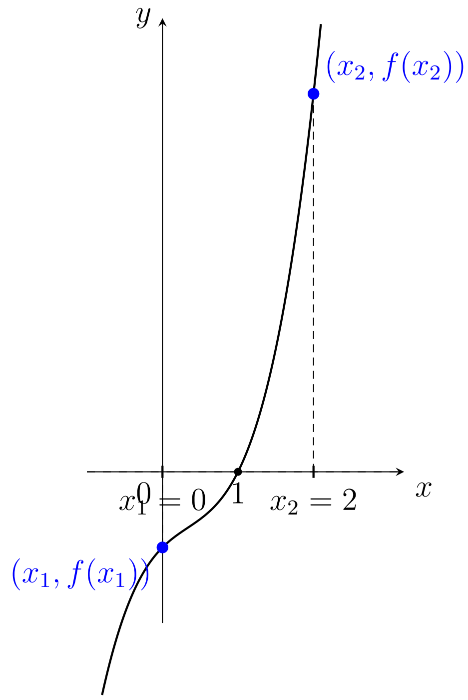
Exemplo 2.1.3. *Considere* $f(x) = x - 2$*. Temos* $f(1) = -1 < 0$ *e* $f(3) = 1 > 0$*. Como o gráfico não tem falhas, existe ao menos uma raiz no intervalo* $(1, 3)$*.*



Exemplo 2.1.4. *Considere* $f(x) = x^2 - 1$*. Temos* $f(0) = -1 < 0$ *e* $f(2) = 3 > 0$*. Logo, existe ao menos uma raiz em* $(0, 2)$ *(de fato, as raízes são* $x = -1$ *e* $x = 1$*).*



Exemplo 2.1.5. *Considere* $f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$*. Note que* $x^2 + 1 > 0$ *para todo* x*, então o sinal de* f *é o mesmo de* $(x - 1)$*. Assim,* $f(0) = -1 < 0$ *e* $f(2) = 5 > 0$*, garantindo uma raiz em* $(0, 2)$ *(de fato, a única raiz real é* $x = 1$*).*



Aqui vamos assumir que o gráfico de um polinômio é sempre uma curva contínua, ou seja, não tem falhas, quebras nem saltos. Isso acontece porque o valor de um polinômio é obtido apenas com somas, subtrações e multiplicações, e essas operações preservam a continuidade do gráfico.

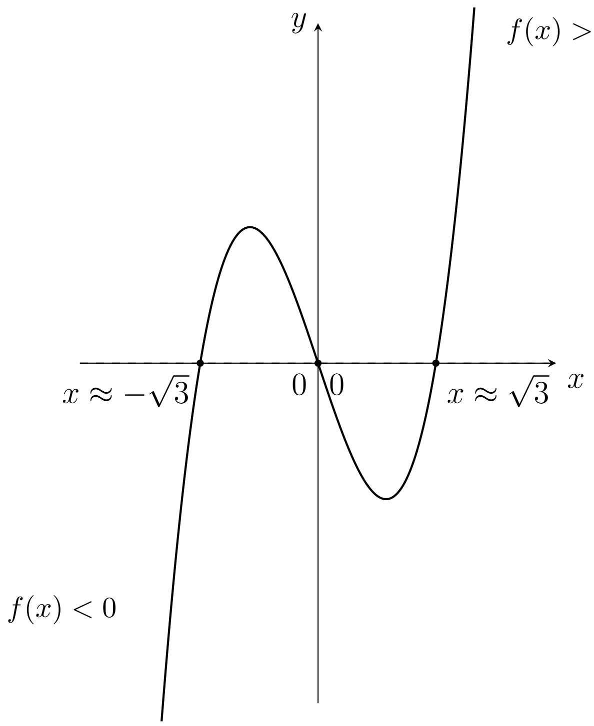
Além disso, todo polinômio de grau ímpar (por exemplo, x^3, $x^5 - 2x + 1$, etc.) definido em $\mathbb{R}$ possui pelo menos uma raiz real. A explicação intuitiva é a seguinte:

- Quando o grau é ímpar, o polinômio tem um comportamento oposto nas extremidades do gráfico.

- Para valores muito grandes e positivos de x, o polinômio também tende a crescer muito (ou a diminuir muito), e para valores muito negativos de x, o comportamento é o contrário.

Assim, o gráfico começa em uma região muito alta ou muito baixa e termina na região oposta. Como o gráfico é contínuo(sem falhas), ele é obrigado a cruzar o eixo x pelo menos uma vez. Esse ponto de cruzamento representa uma raiz real do polinômio.

Por exemplo, considere $f(x) = x^3 - 3x$. Para valores grandes e negativos de x, temos $f(x) < 0$, e para valores grandes e positivos de x, temos $f(x) > 0$. Portanto, o gráfico precisa cruzar o eixo x em algum ponto entre essas duas regiões.



Conclusão: Todo polinômio de grau ímpar definido em $\mathbb{R}$ tem pelo menos uma raiz real, porque seu gráfico é contínuo e muda de sinal entre valores muito negativos e muito positivos de x.

Com a noção de função contínua e de limites, que será estudada em Cálculo Diferencial e Integral I, tudo isso poderá ser comprovado de forma rigorosa.

Como determinar domínio e imagem de uma função a partir de seu gráfico

Um número b pertence ao domínio de uma função f se, e somente se, a reta vertical $x = b$ no plano xy intercepta o gráfico de f.

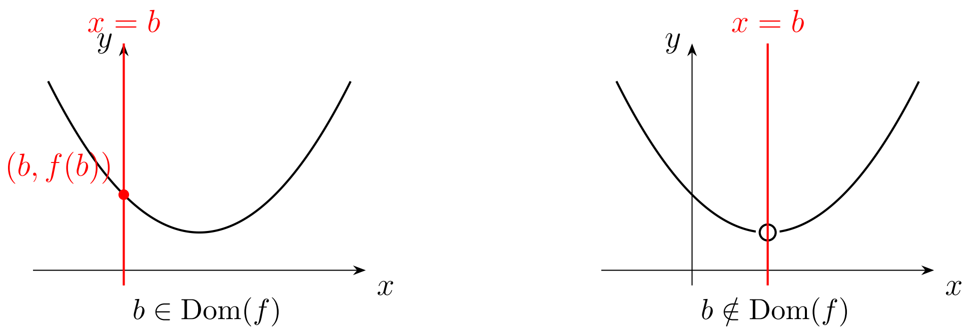


Figura 2.2: Caracterização geométrica do domínio de uma função.

Lembre que a **imagem de uma função** é o conjunto de todos os valores que a função assume. Assim, a imagem de uma função pode ser determinada pelas **retas horizontais** que interceptam o gráfico da função, como mostrado nos gráfico a seguir.

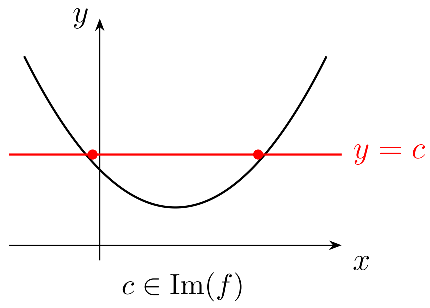


Figura 2.3: A imagem de f é o conjunto dos valores c para os quais $y = c$ intercepta o gráfico de f.

Sejam duas funções $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definimos as funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$ da seguinte forma:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ se $g(x) \neq 0$, para todo $x \in D$.

Definição 2.1.6. *Sejam as funções $f : C \to D$ e $g : A \to B$ com $B \subset C$ e $Im(g) \subset C$. Com essas condições, podemos definir a função composta $f \circ g : A \to D$, onde $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. A função $f \circ g$ é chamada de composta.*

Exemplo 2.1.6. *Se $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = e^x$ e $g(x) = len(x)$, $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $(f \circ g)(x) = e^{ln(x)} = x$.*

Definição 2.1.7. *Uma função $f : D \to E$ é dita sobrejetiva, quando sua imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, se $Im(f) = E$.*

Exemplo 2.1.7. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, onde $f(x) = x^2$ e $\mathbb{R}_+$ é o conjunto dos números reais não negativos, é uma função sobrejetiva.*

Definição 2.1.8. *Uma função $f : D \to E$ é dita injetiva, quando $f(x) \neq f(y)$ para $x, y \in D$ implicar $x \neq y$.*

Exemplo 2.1.8. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^3 + 4$ é injetiva.*
De fato, $f(x) \neq f(y)$ implica $0 \neq f(x) - f(y) = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, de onde segue que $x \neq y$.

Definição 2.1.9. *Uma função $f : D \to E$ é dita bijetiva quando for injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo 2.1.9. *A função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$, onde $f(x) = e^x$ é bijetiva.*

Definição 2.1.10. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injetora e $Im(f) = C$. Assim, podemos definir a função $g : C \to D$ onde $g(y) = x$ para $y = f(x)$. A função g é chamada de inversa de f e é denotada por $g = f^{-1}$.*

Observação 2.1.1. *Não confunda $f^{-1}(x)$ com $\dfrac{1}{f(x)}$, são coisas diferentes.*

Exercício 2.1.1. *Sejam $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = e^x$ e $g(x) = len(x)$. Mostre que $g = f^{-1}$.*

Definição 2.1.11. *Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é:*

a) decrescente se para $x, y \in D$ com $x < y$ implicar $f(x) > f(y)$.

b) crescente se para $x, y \in D$ com $x < y$ implicar $f(x) < f(y)$.

c) não-decrescente se para $x, y \in D$ com $x < y$ implicar $f(x) \leq f(y)$.

d) não-crescente se para $x, y \in D$ com $x < y$ implicar $f(x) \geq f(y)$.

Definição 2.1.12. *Uma função que satisfaz um dos itens da Definição 2.1.11 é dita monótona.*

Exemplo 2.1.10. *Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = 2x$ é crescente em $\mathbb{R}$.*

Solução: Sejam $x_1, x_2 \in S = \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$. Como $2 > 0$, temos então $2x_1 < 2x_2$, logo $f(x_1) < f(x_2)$.
Logo, f é uma função crescente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.11. *Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = -2x$ é decrescente em $\mathbb{R}$.*

Solução: Sejam $x_1, x_2 \in S = \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$. Como $-2 < 0$, temos então $2x_1 > 2x_2$, logo $f(x_1) > f(x_2)$.
Logo, f é uma função decrescente em $\mathbb{R}$.

Definição 2.1.13. *Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é:*

a) limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ para todo

$x \in D$.

b) limitada inferiormente se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m$ para todo

$x \in D$.

c) limitada se for limitada superiormente e inferiormente.

Exemplo 2.1.12. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = sen\, x$ é limitada, pois $-1 \leq sen\, x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.1.14. *Dizemos que uma função $f(x)$ é:*

i) par se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio.

ii) ímpar se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em seu domínio.

Exemplo 2.1.13. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *onde* $f(x) = x^2$ *é uma função par, pois* $x^2 = (-x)^2$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.14. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *onde* $f(x) = x^5$ *é uma função ímpar, pois* $-x^5 = (-x)^5$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.1.2. *Toda função pode ser escrita como sendo a soma de uma função par com uma função ímpar.*

Demonstração: Seja $f(x)$ uma função arbitrária. Vamos definir $f_P(x)$ como a parte par de $f(x)$ e $f_I(x)$ como a parte ímpar de $f(x)$.

A parte par de $f(x)$ é dada por:

$$f_P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

E a parte ímpar de $f(x)$ é dada por:

$$f_I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Assim temos o seguinte

$$\begin{aligned} f_P(x) + f_I(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &= \frac{f(x) + f(x)}{2} + \frac{f(-x) - f(-x)}{2} \\ &= \frac{2f(x)}{2} = f(x). \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que toda função $f(x)$ pode ser escrita como a soma de uma função par $f_P(x)$ e uma função ímpar $f_I(x)$. ■

Definição 2.1.15. *Sejam* $D \subset \mathbb{R}$ *e* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função. O gráfico de* f *é o subconjunto do plano* $\mathbb{R}^2$ *dado por*

$$G(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \, x \in D \text{ e } y = f(x)\right\}.$$

Proposição 2.1.3. *O gráfico de uma função par definida em* $\mathbb{R}$ *é simétrico em relação ao eixo* y.

Demonstração: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par. Como f é par, então $f(x) = f(-x)$. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$, os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, f(x))$, que são simétricos em relação ao eixo y. Com isso podemos concluir que o gráfico de uma função par definida em $\mathbb{R}$ é simétrico em relação ao eixo y. ■

Proposição 2.1.4. *O gráfico de uma função ímpar definida em* $\mathbb{R}$ *é simétrico em relação à origem do plano cartesiano.*

Demonstração: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar. Como f é ímpar, então $-f(x) = f(-x)$. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$, os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, -f(x))$, que são simétricos em relação à origem do plano cartesiano. Com isso podemos concluir que o gráfico de uma função par definida em $\mathbb{R}$ é simétrico em relação à origem do plano cartesiano. ■

Definição 2.1.16. *Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é dita periódica se existir um número real $p \neq 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in D$.*
O número p é chamado de período de f e seu gráfico se repete em cada intervalo consecutivo de comprimento $|p|$.

2.2 Exercícios

Exercício 2.2.1. *Defina uma função g por $g(x) = f(x) + 1$, em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.*

(a) Determine o domínio de g.

(b) Determine a imagem de g.

(c) Esboce o gráfico de g.

Exercício 2.2.2. *Defina uma função h por*

$$h(x) = f(x) - 1,$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.

(a) Determine o domínio de h.

(b) Determine a imagem de h.

(c) Esboce o gráfico de h.

Exercício 2.2.3. *Defina as funções g e h por*

$$g(x) = 2f(x) \quad e \quad h(x) = \tfrac{1}{2}f(x),$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.

(a) Determine o domínio de g e o domínio de h.

(b) Determine a imagem de g.

(c) Determine a imagem de h.

(d) Esboce os gráficos de g e de h.

Exercício 2.2.4. *Defina uma função g por*

$$g(x) = -f(x),$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.

(a) Determine o domínio de g.

(b) Determine a imagem de g.

(c) Esboce o gráfico de g.

Exercício 2.2.5. *Defina uma função g por*

$$g(x) = f(x + 1),$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, sendo o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.

(a) Determine o domínio de g.

(b) Determine a imagem de g.

(c) Esboce o gráfico de g.

Exercício 2.2.6. *Defina funções g e h por*

$$g(x) = f(2x) \quad e \quad h(x) = f\left(\tfrac{1}{2}x\right),$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.

(a) Determine o domínio de g.

(b) Determine o domínio de h.

(c) Determine a imagem de g e a imagem de h.

(d) Esboce os gráficos de g e de h.

Exercício 2.2.7. *Defina uma função g por*

$$g(x) = f(-x),$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(a) Determine o domínio de g.

(b) Determine a imagem de g.

(c) Esboce o gráfico de g.

Exercício 2.2.8. *Defina uma função g por*

$$g(x) = 2f(x) + 1,$$

em que f é a função definida por $f(x) = x^2$, com o domínio de f o intervalo $[-1, 1]$.

(a) Registre a ordem das operações usadas para calcular o valor de $g(x)$, depois de já ter calculado o valor de $f(x)$.

(b) Determine o domínio de g.

(c) Determine a imagem de g.

(d) Esboce o gráfico de g.

Exercício 2.2.9. *Classifique cada uma das funções abaixo como **par**, **ímpar** ou **nenhuma das duas**:*

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = x^3$
3. $h(x) = x^3 + x$
4. $p(x) = x^3 + 1$
5. $q(x) = \cos(x)$
6. $r(x) = \sin(x)$

Exercício 2.2.10. *Mostre que a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com $x \neq 0$, é uma função ímpar.*

Exercício 2.2.11. *Determine a única função cujo domínio seja $\mathbb{R}$ e que seja ao mesmo tempo par e ímpar.*

Exercício 2.2.12. *Demonstre que, se f é uma função ímpar e $0 \in Dom(f)$, então $f(0) = 0$.*

Exercício 2.2.13. *Seja $f(x) = 2x^2 - 1$. Determine se f é par, ímpar ou nenhuma das duas.*

Exercício 2.2.14. *Seja $g(x) = x^4 - x^2$. Determine se g é par, ímpar ou nenhuma das duas.*

Exercício 2.2.15. *Esboce o gráfico das funções abaixo e indique, em cada caso, o tipo de simetria:*

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = x^3$

3. $h(x) = \sin(x)$

4. $p(x) = e^x$

Exercício 2.2.16. *Suponha que h seja uma função ímpar cujo gráfico, no intervalo $[1, 2]$, é conhecido. Esboce o gráfico de h no intervalo $[-2, -1]$.*

Exercício 2.2.17. *Suponha que g seja uma função par cujo gráfico, no intervalo $[0, 2]$, é conhecido. Esboce o gráfico de g no intervalo $[-2, 0]$.*

Exercício 2.2.18. *Verifique se as funções abaixo são invertíveis. Se forem, determine suas inversas:*

1. $f(x) = 2x + 3$

2. $g(x) = x^2$, *com domínio* $[0, +\infty)$

3. $h(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, *com* $x \neq -1$

Exercício 2.2.19. *Seja $f(x) = 3x - 5$. Determine $f^{-1}(x)$ e verifique, por composição, que $f^{-1}(f(x)) = x$.*

Exercício 2.2.20. *Seja $g(x) = \sqrt{x-2}$, com domínio $[2, +\infty)$. Determine $g^{-1}(x)$ e seu domínio.*

Exercício 2.2.21. *Encontre a inversa de $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ e indique o domínio e a imagem de f e de f^{-1}.*

Exercício 2.2.22. *Mostre que a função $f(x) = x^3$ é invertível e determine sua inversa.*

Exercício 2.2.23. *Mostre que, se f é uma função* ***ímpar*** *e invertível, então f^{-1} também é ímpar.*

Exercício 2.2.24. *Seja $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$. Determine $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ e verifique se alguma das composições é par ou ímpar.*

Exercício 2.2.25. *Considere a função $f(x) = e^x$.*

1. *Mostre que f é invertível.*

2. *Determine $f^{-1}(x)$.*

3. *Represente graficamente f e f^{-1} no mesmo plano cartesiano.*

Exercício 2.2.26. *Seja $f(x) = \ln(x)$, com domínio $(0, +\infty)$.*

1. *Determine $f^{-1}(x)$.*

2. *Esboce os gráficos de f e f^{-1}.*

3. *Mostre que os gráficos são simétricos em relação à reta* $y = x$.

(19) Determine se as seguintes funções são inversas entre si:

1. $f(x) = \dfrac{x-2}{3}$ *e* $g(x) = 3x + 2$
2. $f(x) = 2x + 1$ *e* $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$
3. $f(x) = x^2$ *(em* $x \geq 0$*) e* $g(x) = \sqrt{x}$

Exercício 2.2.27. *Seja* $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

1. *Mostre que* f *é invertível.*
2. *Encontre* $f^{-1}(x)$.
3. *Determine o domínio e a imagem de* f *e de* f^{-1}.