Notas de Aula

Elementos de Matemática
Departamento de Matemática – UFPI

Estas notas de aula foram elaboradas para apoiar a disciplina Elementos de Matemática do curso de Matemática da Universidade Federal do Piauí. Trata-se de um material de apoio, e não de um livro didático. Algumas definições, demonstrações e exemplos não estão aqui incluídos, pois serão discutidos diretamente em sala de aula. Este material encontra-se em constante desenvolvimento e poderá ser aprimorado em futuras edições.

A versão mais atualizada deste material pode ser encontrada em: `https://vitalianoamaral.github.io`
No menu, clique em **Ensino**, depois em **Graduação** e, em seguida, em **Disciplinas Ministradas**. Localize a disciplina **Elementos de Matemática I** e clique no link **Notas de Aula**.

Prof. Vitaliano de Sousa Amaral
Departamento de Matemática – UFPI

28 de agosto de 2025

Sumário

Capítulo 1

Números Reais

1.1 Um pouco sobre os números Naturais, Inteiros e Racionais

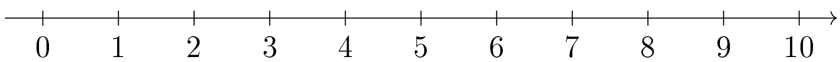
Ao longo da história, os números surgiram para atender a diferentes necessidades humanas. Os números naturais apareceram inicialmente como uma forma de contar objetos e registrar quantidades. Com o tempo, a necessidade de representar dívidas, perdas e posições relativas levou à introdução dos números inteiros, que incluem tanto os naturais quanto seus opostos negativos.

O conjunto dos números naturais é dado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Cada número natural pode ser representado sobre a reta real. Uma vez fixados os pontos correspondentes aos números 0 e 1, adotamos a distância entre eles como unidade de medida. A partir daí, todos os números naturais são representados como pontos igualmente espaçados, posicionados da esquerda para a direita a partir do zero.

Veja a seguir a ilustração do conjunto $\mathbb{N}$ sobre a reta real:

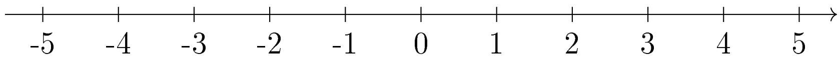


O conjunto dos números inteiros é representado da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

De maneira análoga, os números inteiros também podem ser representados sobre a reta real. Uma vez fixados os pontos 0 e 1, adotamos a distância entre eles como unidade de medida. A partir disso, os inteiros são posicionados igualmente espaçados, estendendo-se para a direita (inteiros positivos) e para a esquerda (inteiros negativos) a partir do zero.

Veja a seguir a ilustração do conjunto $\mathbb{Z}$ sobre a reta real:



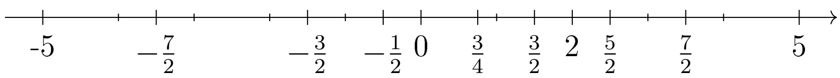
Observamos que os números inteiros consecutivos delimitam intervalos unitários (de comprimento 1).

O conjunto dos números racionais surge da necessidade de representar partes de um inteiro, aparecendo como subdivisões desses intervalos unitários. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ corresponde ao ponto situado exatamente no meio entre 0 e 1, $\frac{3}{4}$ está localizado a três quartos da distância entre 0 e 1, e assim por diante. Os racionais negativos seguem a mesma lógica, mas posicionados à esquerda de 0.

Assim, o conjunto dos números racionais é representado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

Essa construção nos permite associar um ponto da reta real a cada número racional. No entanto, como entre quaisquer dois números reais distintos existem infinitos racionais, não podemos representá-los todos graficamente. Em vez disso, destacamos apenas alguns exemplos para ilustrar a densidade dos números racionais sobre a reta real.



Admitiremos as seguintes operações (adição e multiplicação) no conjunto dos números racionais.

Definição 1.1.1. (Adição) *Sejam* $a = \dfrac{m}{n}$ *e* $b = \dfrac{r}{s}$ *elementos de* $\mathbb{Q}$*, com* $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$ *e* $n, s \neq 0$*. A soma de* a *com* b *é o elemento de* $\mathbb{Q}$ *dado por*

$$a + b = \frac{ms + nr}{ns}.$$

Exemplo 1.1.1. *Sejam* $a = \dfrac{2}{3}$ *e* $b = \dfrac{5}{4}$*. Então, a soma de* a *com* b *é:*

$$a + b = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{8 + 15}{12} = \frac{23}{12}.$$

Definição 1.1.2. (Multiplicação)*Sejam* $a = \dfrac{m}{n}$ *e* $b = \dfrac{r}{s}$ *elementos de* $\mathbb{Q}$*, com* $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$ *e* $n, s \neq 0$*. A multiplicação (ou produto) de* a *com* b *é o elemento de* $\mathbb{Q}$ *dado por*

$$ab = \frac{mr}{ns}.$$

Exemplo 1.1.2. *Sejam* $a = \dfrac{2}{3}$ *e* $b = \dfrac{5}{4}$. *Então, o produto de* a *com* b *é:*

$$ab = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

É fácil perceber que entre dois números racionais sempre existe outro número racional. De fato, dados dois números racionais $a = \dfrac{m}{n}$ e $b = \dfrac{r}{s}$ com $a < b$, $m, n, r, s \in \mathbb{Z}$. Considere o número racional da forma

$$c = a + \frac{b - a}{2}.$$

Podemos observar que c está entre a e b, pois c é obtido somando a a a metade da distância entre a e b. Veja a ilustração geométrica na Figura 1.1.

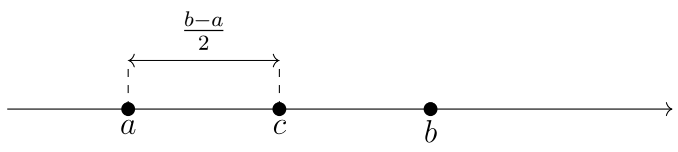


Figura 1.1: Ilustração do ponto médio $c = a + \frac{b-a}{2}$ na reta real.

Agora, além da afirmação acima vamos mosttrar que c é um número racional e está enrte os racionasi a e b. Veja que

$$\begin{aligned} c = a + \frac{1}{2}(b - a) &= \frac{2a + b - a}{2} = \frac{a + b}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{rn + ms}{2ns}\right), \end{aligned}$$

como $rn + ms$ e $2ns$ são números inteiros, podemos garantir que c é um número racional, pois é a razão entre dois inteiros com denominador diferente de zero.

Além da explicação anterior, outra forma de garantir que c está entre a e b é observar que

$$a = \frac{a + a}{2} < \frac{a + b}{2} = c \quad \text{e} \quad c = \frac{a + b}{2} < \frac{b + b}{2} = b,$$

portanto, temos $a < c < b$.

Diante do exposto anteriormente, surge uma dúvida: como sempre existe um número racional entre dois números racionais, então seria possível preencher toda a reta numérica apenas com números racionais?

A seguir veremos que a resposta para a pergunta anterior é: não é possível.

Diz-se que Hipaso de Metaponto, um seguidor de Pitágoras, foi o primeiro a descobrir que existem números que não podem ser representados pela divisão de dois números inteiros. Ele teria demonstrado que $\sqrt{2}$ não é racional, provavelmente por meio de uma prova geométrica.

Considere um triângulo retângulo desenhado sobre a reta numérica(veja Figura 1.2), com catetos medindo 1 unidade cada e hipotenusa sobre a reta numérica, indo do ponto 0 até o ponto marcado por x, ou seja, a hipotenusa tem comprimento medindo x unidades.

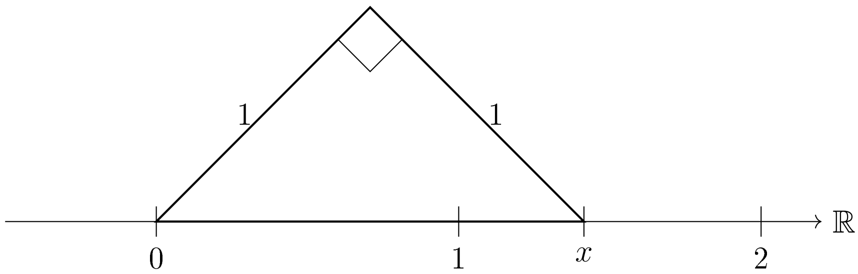


Figura 1.2:

Pelo **Teorema de Pitágoras**, temos: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Suponha, por contradição, que x seja um número racional. Então podemos escrevê-lo como $\dfrac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si. Substituindo em $x^2 = 2$:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

Isso implica que p^2 é par, logo p é par. Seja $p = 2k$, assim temos

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 4k^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2k^2$$

Portanto, q^2 também é par, o que implica que q é par.

Chegamos a uma contradição, pois p e q seriam ambos pares, contrariando a hipótese de que são primos entre si. Logo, x **não é um número racional**.

Como x é um ponto da reta numérica que não pertence ao conjunto dos racionais, concluímos que a reta real não pode ser preenchida completamente apenas por números racionais.

O conjunto dos números que não podem ser representados como a divisão de dois inteiros, ou seja, que não são números racionais, é denotado pela letra $\mathbb{I}$ e chamado de *conjunto dos números irracionais.*

Da própria definição, temos que os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ não possuem elementos em comum, isto é,

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

Exercício 1.1.1. *Mostre que a soma de dois números racionais é também um número racional.*

Exercício 1.1.2. *A soma de uma número racional com um número irracional é um número racional? Justifique sua resposta.*

Exercício 1.1.3. *A soma de dois números irracionais é um número irracional? Justifique sua resposta.*

Exercício 1.1.4. *Sejam a um número racional não nulo e b um número irracional. Mostre que o produto ab não pode ser representado como uma divisão de dois números inteiros. Conclua que o produto de um número racional não nulo por um irracional é um número irracional.*

1.2 O conjunto dos números Reais

Os elementos dos conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, juntos, formam o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Como vimos anteriormente, todo ponto da reta numérica pode representar um número real. Assim, a partir de agora, essa reta numérica será chamada de **reta real**, como mostra a Figura 1.3 a seguir.

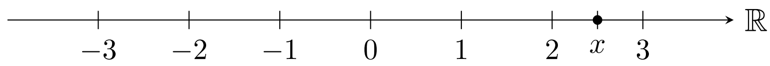


Figura 1.3: Representação da reta real.

Dizemos que um número real x é **positivo** se ele representa um ponto da reta real situado à direita da origem 0. Um número real x é dito negativo se $-x$ é positivo.

Para um número real x, é satisfeita uma, e apenas uma, das seguintes propriedades:

- x é positivo;
- $-x$ é positivo;
- $x = 0$.

1.2.1 Relação de ordem em $\mathbb{R}$

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que:

1. $x < y$ (lê-se: x menor que y) se $y - x$ for positivo;
2. $x = y$ (lê-se: x igual a y) se $y - x = 0$;
3. $x \leq y$ (lê-se: x menor ou igual a y) se $y - x$ for positivo ou $x - y = 0$.

Comutatividade e Associatividade

Comutatividade. Dizemos que uma operação é comutativa quando a ordem dos elementos não altera o resultado. No conjunto dos números reais, isso ocorre com a adição e a multiplicação:

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad ab = ba, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo:

$$7 + 4 = 4 + 7 \quad \text{e} \quad 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3.$$

Já a subtração e a divisão não possuem essa propriedade, pois

$$8 - 2 \neq 2 - 8, \quad \text{e} \quad \tfrac{12}{3} \neq \tfrac{3}{12}.$$

Associatividade. Uma operação é associativa quando o modo de agrupar os elementos não altera o resultado. Também nos reais, a adição e a multiplicação possuem essa propriedade:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (ab)c = a(bc), \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Isso significa que, ao somar ou multiplicar três ou mais números, podemos desprezar os parênteses e calcular livremente, por exemplo:

$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9, \qquad (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24.$$

Por outro lado, a subtração não é associativas. De fato,

$$(10 - 6) - 2 = 2 \quad \neq \quad 10 - (6 - 2) = 6.$$

Assim, é importante ter atenção ao realizar operações que envolvem diferentes tipos de operadores e parênteses, pois o uso incorreto de um sinal ou a aplicação equivocada de uma propriedade pode levar a erros nos cálculos.

No conjunto dos números reais são satisfeitas as seguintes propriedades:

i) $(a + b) + c = a + (b + c),\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

ii) $a + b = b + a,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

iii) Existe o elemento neutro da adição, denotado por 0, tal que

$$a + 0 = a,\ \forall\, a \in \mathbb{R};$$

iv) Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$;

v) $(ab)c = a(bc),\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

vi) $ab = ba,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

vii) Existe o elemento neutro da multiplicação, denotado por 1, tal que $a \cdot 1 = a, \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;

viii) $a(b+c) = ab + ac, \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

ix) Para todo $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{R}^*$ existe a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1$.

Proposição 1.2.1. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Então valem as seguintes propriedades:*

a) $x \leq x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) Se $x \leq y$ *e* $y \leq x$, *então* $x = y$;

c) Se $x \leq y$ *e* $y \leq z$, *então* $x \leq z$;

d) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale exatamente uma das afirmações:* $x = y$, $x \leq y$ *ou* $y \leq x$;

e) Se $x \leq y$, *então* $x + z \leq y + z, \ \forall\, z \in \mathbb{R}$;

f) Se $x > 0$ *e* $y > 0$, *então* $xy > 0$;

g) Se $x < 0$ *e* $y < 0$, *então* $xy > 0$;

h) Se $x > 0$ *e* $y < 0$, *então* $xy < 0$;

i) Se $x \neq 0$, *então* $x^2 > 0$;

j) Se $x < y$ *e* $z > 0$, *então* $xz < yz$;

k) Se $x < y$ *e* $z < 0$, *então* $xz > yz$;

l) $x > 0$ *implica* $x^{-1} > 0$;

m) $x < 0$ *implica* $x^{-1} < 0$;

n) $0 < x < 1$ *implica* $1 < x^{-1}$;

o) $1 < x$ *implica* $0 < x^{-1} < 1$;

p) $0 < x < y$ *implica* $0 < y^{-1} < x^{-1}$;

q) $x < y < 0$ *implica* $y^{-1} < x^{-1} < 0$.

1.2.2 Intervalos

Existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são representados por partes da reta real, estes conjuntos são chamados de intervalos. A seguir, será apresentado vários tipos de intervalos.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

i) O conjunto dos números reais $x \in \mathbb{R}$ tais que $a < x < b$ é chamado de intervalo aberto, e denotado por $(a,b) = \{x \in \mathbb{R};, a < x < b\}$.

ii) O conjunto dos números reais x tais que $a \leq x \leq b$ é chamado de intervalo fechado, e denotado por $[a,b] = \{x \in \mathbb{R};, a \leq x \leq b\}$.

iii) O conjunto dos números reais x tais que $a < x \leq b$ é chamado de intervalo semifechado à direita ou semiaberto à esquerda, e denotado por $(a,b] = \{x \in \mathbb{R};, a < x \leq b\}$.

iv) O conjunto dos números reais x tais que $a \leq x < b$ é chamado de intervalo semifechado à esquerda ou semiaberto à direita, e denotado por $(a,b] = \{x \in \mathbb{R};, a \leq x < b\}$.

v) Existem ainda conjuntos que são ilimitados, e representados da seguinte forma:

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$; $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$;

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$; $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$;

$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Valor absoluto ou módulo

Definição 1.2.1. *Dado um número real x, seu módulo ou valor absoluto é denotado por $|x|$ e definido da seguinte forma:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

O valor absoluto de um número real x também pode ser representado por:

$$|x| = \max\{x, -x\} \quad \text{ou} \quad |x| = \sqrt{x^2}.$$

Exercício 1.2.1. *Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, mostre que:*

a) $|xy| = |x|\,|y|$;

b) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

c) $|x - y| \geq |x| - |y|$;

d) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Capítulo 2

Funções

2.1 Conceitos básicos

Definição 2.1.1. *Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma* ***função*** *$f : A \to B$ é uma regra que atribui a cada $x \in A$ um único elemento $y \in B$, chamado de valor de f em x e denotado por $f(x)$.*

Definição 2.1.2. *O conjunto A é chamado de domínio da função f. O conjunto B recebe o nome de* ***contradomínio****. A* ***imagem*** *de f é o subconjunto de B formado pelos valores assumidos por f: $Im(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$. O* ***gráfico*** *de f é o conjunto de pares ordenados: $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$.*

Exemplo 2.1.1. *Se $A = \{1, 4, 7\}$ e $B = \{0, 3, 12, 15, 21\}$, a correspondência $f(x) = 3x$ define uma função de A em B, pois cada elemento de A tem uma única imagem em B, conforme ilustrado na Figura 2.1.*

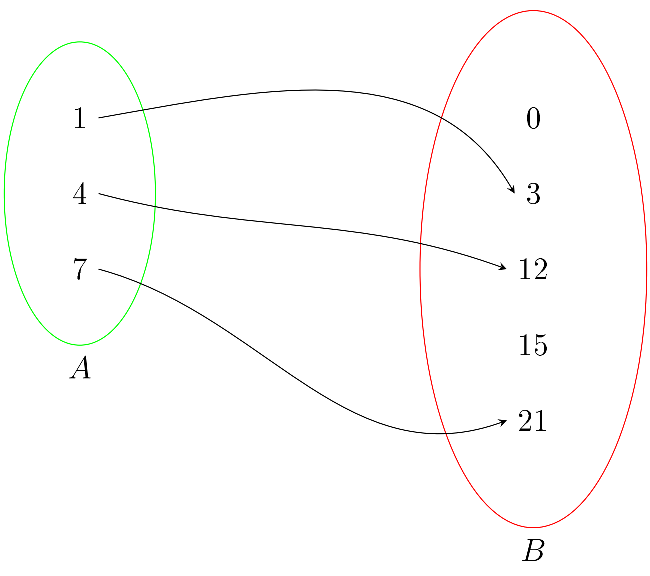


Figura 2.1: Função $f(x) = 3x$ de A em B

A seguir, apresentaremos o conceito de zeros de funções, ilustrando-o com definição formal, exemplo numérico e interpretação geométrica.

Definição 2.1.3. *Dizemos que um número $x \in \mathbb{R}$ é um* ***zero*** *(ou* ***raiz****) de uma função f quando $f(x) = 0$.*

Exemplo 2.1.2. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = x^2 + 5x + 6.$$

Para determinar seus zeros, resolvemos a equação $f(x) = 0$:

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Fatorando, temos $(x + 2)(x + 3) = 0$, e portanto os zeros são $x = -2$ e $x = -3$.

Interpretação geométrica: os zeros de uma função correspondem às abscissas dos pontos onde o gráfico de f intersecta o eixo OX (eixo das abscissas).

No geral, nem sempre é simples determinar os zeros de uma função, pois em muitos casos a equação $f(x) = 0$ não pode ser resolvida de maneira imediata.

Funções quadráticas. Como primeiro estudo específico, vamos abordar um tipo importante de função: a **função quadrática**.

Definição 2.1.4. *Chamamos de* ***Função do 2° grau*** *ou* ***Função quadrática****, toda função $f : I \to \mathbb{R}$ da forma*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e $I \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.1. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$, é uma função quadrática.*

Os zeros da função quadrática correspondem às soluções reais da equação do 2° grau associada.

Exemplo 2.1.2. *Seja $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Os zeros de f são os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Aplicando a Fórmula de Bháskara (que será apresentada a seguir), obtemos*

$$x_1 = 2 \quad e \quad x_2 = 1.$$

Portanto, $x = 1$ e $x = 2$ são os zeros de f.

A seguir, apresentaremos a **forma canônica** de uma função quadrática, que facilita a determinação de máximos, mínimos e também a dedução da Fórmula de Bháskara.

Proposição 2.1.1. *Toda função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita como*

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac. \tag{2.1}$$

A fórmula (2.1) é chamada de ***forma canônica*** *de f.*

Demonstração. Usando o método de completar quadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \tfrac{2b}{2a}x + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a}\right] \\ &= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a} \\ &= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.1.3. *Escreva a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$ na sua forma canônica.*

Solução. Aplicando a forma canônica, temos:

$$f(x) = \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4}.$$

■

Consequências da forma canônica. - A partir dela, obtemos facilmente a **Fórmula de Bháskara**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Além disso, o gráfico de f é sempre uma **parábola**.

Definição geométrica: Uma parábola é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo, chamado *foco*, e de uma reta fixa, chamada *diretriz*.

A partir disso, mostra-se que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola com:

- foco $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1+4ac-b^2}{4a}\right)$;
- diretriz $y = -\frac{b^2-4ac+1}{4a}$.

Clique aqui para ver uma ilustração geométrica no GeoGebra.

Definição 2.1.5. *Seja f uma função com domínio $D(f)$. Dizemos que f atinge um **valor máximo** em $A \subseteq D(f)$ quando existe $x_0 \in A$ tal que*

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in A.$$

*Analogamente, f atinge um **valor mínimo** em A quando existe $x_0 \in A$ tal que*

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in A.$$

*Chamamos x_0 de **ponto de máximo** em A ou **ponto de mínimo** em A, respectivamente.*

Nosso objetivo agora é identificar esses extremos no caso particular da função quadrática, utilizando apenas a forma canônica, sem recorrer a ferramentas de cálculo diferencial.

Theorem 2.1.1. *Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. O gráfico de f possui um ponto extremo (máximo ou mínimo) na abscissa*

$$x_v = -\frac{b}{2a}.$$

O valor da ordenada nesse ponto é

$$y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Se $a > 0$, o extremo é um mínimo*; se $a < 0$, o extremo é um* máximo.

Demonstração. Da forma canônica (Proposição 2.1.1), temos

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Observe que o termo quadrático $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre não negativo.

Se $a > 0$, multiplicando por a obtemos $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Logo,

$$f(x) \ \geq \ -\frac{\Delta}{4a},$$

e o valor mínimo ocorre em $x_v = -\frac{b}{2a}$.

Se $a < 0$, então $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, o que implica

$$f(x) \ \leq \ -\frac{\Delta}{4a},$$

e o valor máximo ocorre em $x_v = -\frac{b}{2a}$.

Assim, em ambos os casos, o ponto extremo é $(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. ∎