

# Notas de Aula

Cálculo Diferencial e Integral II - CT  
Departamento de Matemática – UFPI

*Estas notas de aula foram elaboradas para apoiar a disciplina Cálculo Diferencial e Integral II - CT da Universidade Federal do Piauí. Trata-se de um material de apoio, e não de um livro didático. Algumas definições, demonstrações e exemplos não estão aqui incluídos, pois serão discutidos diretamente em sala de aula. Este material encontra-se em constante desenvolvimento e poderá ser aprimorado em futuras edições.*

**A versão mais atualizada deste material pode ser encontrada em:** <https://vitalianoamaral.github.io>  
No menu, clique em **Ensino**, depois em **Graduação** e, em seguida, em **Disciplinas Ministradas**. Localize a disciplina **Cálculo diferencial e integral II-CT** e clique no link **Notas de Aula**.

Prof. Vitaliano de Sousa Amaral  
Departamento de Matemática – UFPI

22 de novembro de 2025



# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>3</b>
<b>1 Integral Imprópria</b>	<b>5</b>
1.1 Revisão: Integral Definida . . . . .	5
1.1.1 Principais propriedades . . . . .	6
1.2 Integrais Impróprias . . . . .	7
1.2.1 Integrais em Intervalos Infinitos . . . . .	7
1.2.2 Integrais com Descontinuidade . . . . .	9
1.3 Critérios de convergência . . . . .	9
<b>2 Sequência e série de números reais</b>	<b>13</b>
2.1 Sequências de Números Reais . . . . .	13
2.1.1 Exercícios . . . . .	14
2.1.2 Limite de Sequências . . . . .	14
2.1.3 Exercícios . . . . .	15
2.2 Séries de Números Reais . . . . .	16
2.2.1 Testes de Convergência de Séries . . . . .	19
2.3 Séries de Potências . . . . .	24
2.3.1 Propriedades das Séries de Potências . . . . .	27
2.3.2 Séries de Taylor . . . . .	29
2.4 Exercícios . . . . .	30
2.5 Série de Fourier . . . . .	32
<b>3 Funções Vetoriais de Uma Variável Real</b>	<b>35</b>
3.1 Operações com Funções Vetoriais . . . . .	35



# Capítulo 1

## Integral Imprópria

### 1.1 Revisão: Integral Definida

Consideramos um intervalo fechado e limitado  $[a, b]$ . Uma partição de  $[a, b]$  é um conjunto finito de pontos de  $[a, b]$ ,  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$  tais que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . A partição  $P$  divide o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ ,  $[x_{n-1}, x_n]$ , como podemos ver na Figura 1.1.

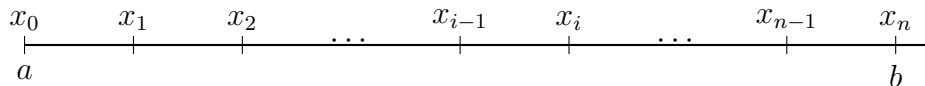


Figura 1.1

O  $i$ -ésimo subintervalo da partição  $P$  é  $[x_{i-1}, x_i]$  e seu comprimento é representado por  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Exemplo 1.1.1.** Uma partição do intervalo fechado  $[0, 10]$  é o conjunto  $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Observamos que a partição  $P$  divide o intervalo  $[0, 10]$  em 5 subintervalos  $[0, 2]$ ,  $[2, 4]$ ,  $[4, 6]$ ,  $[6, 8]$  e  $[8, 10]$ . Veja ilustração geométrica na Figura 1.2.

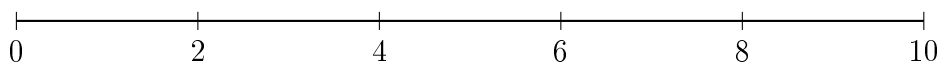


Figura 1.2

Seja uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e em cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  escolhamos  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Denotamos por  $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$ .

Veja ilustração geométrica na Figura 1.3 a seguir.

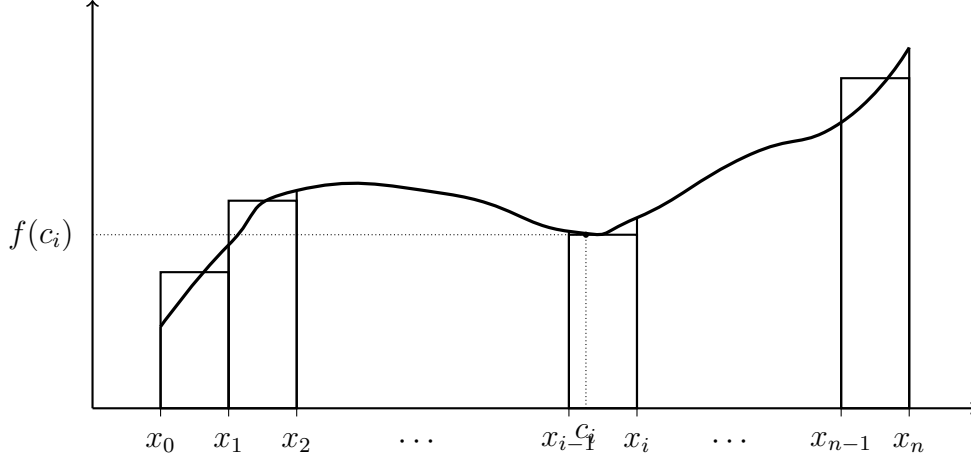


Figura 1.3

Consideremos o retângulo de base medindo  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  e altura  $f(c_i)$  onde  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  (Veja Figura 1.3).

Na ilustração geométrica, consideramos uma função positiva no intervalo  $[a, b]$ . Observe que a soma das áreas dos retângulos aproxima a área compreendida entre o gráfico de  $f$  e o eixo  $x$ . Alguns retângulos possuem parte de sua área acima do gráfico e outros possuem parte abaixo, de forma que a aproximação pode não ser exata quando temos um número finito de partições. No entanto, quando fazemos o comprimento de todos os subintervalos da partição tender a zero, isto é, quando tomamos infinitas partições cada vez mais finas, a soma infinita das áreas desses retângulos coincide exatamente com a área entre o gráfico de  $f$  e o eixo  $x$ .

Essa é apenas uma noção intuitiva do que chamamos de **integral definida**; a seguir apresentamos sua definição formal.

**Definição 1.1.1.** Considere uma partição  $P$  e  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Dizemos que  $f$  integrável em  $[a, b]$  se  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$  existe, e denotamos por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

A seguir apresentamos as principais propriedades da integral definida.

### 1.1.1 Principais propriedades

Sejam  $f$  e  $g$  funções possuindo integral definida em  $[a, b]$  e  $k \in \mathbb{R}$  um constante. As integrais definidas possuem as seguintes propriedades:

$$1. \int_a^b [kf(x) + g(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

2. Para  $c \in [a, b]$ ,  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

3.  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .

4. Se  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , então  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

5. Se  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , então:  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

O **Teorema Fundamental do Cálculo** estabelece a conexão entre derivação e integração.

**Theorem 1.1.1** (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e  $F$  é uma primitiva de  $f$  (isto é,  $F'(x) = f(x)$ ), então:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Este teorema fornece um método prático para calcular integrais definidas, evitando o uso direto da Soma de Riemann.

Outras propriedades serão apresentadas na seção sobre Integrais Impróprias.

## 1.2 Integrais Impróprias

Na definição de integral definida, consideramos a função contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ . Agora, vamos estender essa definição para duas situações importantes:

1. Quando a função está definida em intervalos infinitos, como:

$$[a, +\infty), \quad (-\infty, b] \quad \text{ou} \quad (-\infty, +\infty).$$

2. Quando a função apresenta descontinuidade em algum ponto do intervalo de integração.

Nesses casos especiais usamos as **integrais impróprias**.

### 1.2.1 Integrais em Intervalos Infinitos

Para motivar a definição, vamos considerar um exemplo.

**Exemplo 1.2.1.** Calcular a área da região  $R$  limitada pelo gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , com  $x \geq 1$ , e o eixo  $x$ .

Primeiro, observamos que a região é ilimitada no sentido horizontal. Se definirmos  $R_b$  como a parte da região  $R$  entre  $x = 1$  e  $x = b$  ( $b > 1$ ), temos:

$$A(R_b) = \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Ver Figura 1.4.

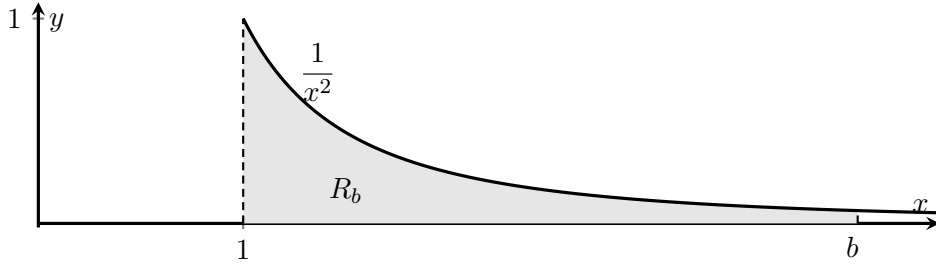


Figura 1.4: Área  $R_b$  sob  $y = \frac{1}{x^2}$  de  $x = 1$  a  $x = b$ .

À medida que  $b \rightarrow +\infty$ , essa área se aproxima da área total da região  $R$ :

$$A(R) = \lim_{b \rightarrow +\infty} A(R_b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Ver Figura 1.5.

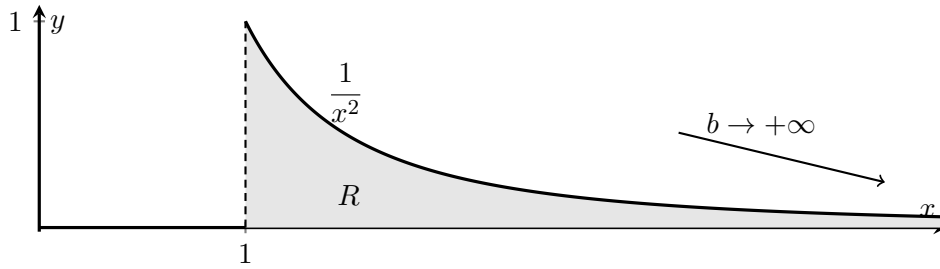


Figura 1.5: Limite  $b \rightarrow +\infty$  resultando em  $A(R) = 1$ .

Esse exemplo motiva a seguinte definição.

**Definição 1.2.1.** Seja  $f$  uma função integrável em  $[a, +\infty)$ . Definimos:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Se  $f$  é uma função integrável em  $(-\infty, b]$ . Definimos:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$



Se  $f$  é uma função integrável em  $\mathbb{R}$ . Definimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx.$$

Se o limite existir, dizemos que a integral imprópria **converge**. Caso contrário, dizemos que ela **diverge**.

## 1.2.2 Integrais com Descontinuidade

Agora, consideremos o caso em que a função apresenta descontinuidade em um ponto do intervalo de integração.

**Exemplo 1.2.2.** Calcular a área sob o gráfico de  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  no intervalo  $(0, 9]$ .

Como a função não está definida em  $x = 0$ , definimos:

$$A(R_\varepsilon) = \int_\varepsilon^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_\varepsilon^9 = 6 - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , obtemos:

$$A(R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A(R_\varepsilon) = 6.$$

De forma geral:

**Definição 1.2.2.** Se  $f$  for integrável em  $(a, b]$ , definimos:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_\varepsilon^b f(x) dx.$$

Se  $f$  for integrável em  $[a, b)$ :

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow b^-} \int_a^\varepsilon f(x) dx.$$

Se  $f$  tiver descontinuidade em  $c \in (a, b)$ :

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow c^-} \int_a^\varepsilon f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow c^+} \int_\varepsilon^b f(x) dx.$$

## 1.3 Critérios de convergência

**Teorema 1.3.1** (Critério de comparação). *Sejam  $f$  e  $g$  funções integráveis em  $[a, t]$ , para todo  $t > a$ , tais que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \geq a.$$

*Então, valem as seguintes propriedades:*

- a) Se  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  converge, então  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  também converge.
- b) Se  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  diverge, então  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  também diverge.

**Exemplo 1.3.1.** Verifique que a integral imprópria

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx$$

é convergente.

*Solução.* Para  $x \geq 0$  vale  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ , portanto

$$0 \leq e^{-x} \sin^2 x \leq e^{-x}.$$

Agora,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx := \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-t}) = 1.$$

Assim,  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$  é convergente. Pelo critério de comparação, segue que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx \text{ é convergente e } 0 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx \leq 1.$$

**Proposição 1.3.1.** Seja  $f$  integrável em  $[a, t]$ , para todo  $t \geq a$ . Se

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ é convergente,}$$

então

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ também é convergente.}$$

*Demonstração.* Para todo  $x \geq a$  vale

$$0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|.$$

Como  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  é convergente, pelo critério de comparação segue que

$$\int_a^{+\infty} (|f(x)| + f(x)) dx$$

também converge. Além disso, para todo  $t > a$ , temos

$$\int_a^t f(x) dx = \int_a^t (|f(x)| + f(x)) dx - \int_a^t |f(x)| dx.$$

Ora, como os dois integrais do lado direito convergem quando  $t \rightarrow +\infty$ , conclui-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

também é convergente. □

**Exemplo 1.3.2.** *Determine se a integral imprópria*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^3 x \, dx$$

*é convergente ou divergente. Justifique.*

*Solução.* Para todo  $x \geq 0$ , tem-se

$$0 \leq |e^{-x} \sin^3 x| \leq e^{-x}.$$

Como  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$  é convergente, pelo critério de comparação segue que

$$\int_0^{+\infty} |e^{-x} \sin^3 x| \, dx$$

também converge. Aplicando a Proposição 1.3.1, conclui-se que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^3 x \, dx$$

é convergente. □



# Capítulo 2

## Sequência e série de números reais

### 2.1 Sequências de Números Reais

**Definição 2.1.1.** Uma sequência de números reais é uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(n) = a_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Notação 2.1.1.** A sequência  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  é também denotada por  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ .

**Exemplo 2.1.1.** A função  $f(n) = (-1)^n$  determina a sequência  $\{1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$ .

**Definição 2.1.2.** Uma subsequência de uma sequência  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma restrição  $f_{\mathbb{N}'}$  de  $f$ ,  $f_{\mathbb{N}'} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ .

**Definição 2.1.3.** Dizemos que uma sequência de números reais  $\{a_n\}$  é:

- a) decrescente se  $a_n > a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- b) crescente se  $a_n < a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- c) não-decrescente se  $a_n \leq a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- d) não-crescente se  $a_n \geq a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 2.1.4.** Uma sequência que satisfaz um dos itens da Definição 2.1.3 é dita **monótona**.

**Exemplo 2.1.2.** As sequências  $\{\frac{1}{n}\}$ ,  $\{n+1\}$  e  $\{7-n\}$  são monótonas. Verifique.

**Definição 2.1.5.** Dizemos que uma sequência de números reais  $\{a_n\}$  é:

- a) limitada superiormente se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- b) limitada inferiormente se existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $a_n \geq m$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- c) limitada se for limitada superiormente e inferiormente.

### 2.1.1 Exercícios

**Exercício 2.1.1.** *Mostre que as sequências abaixo são limitadas e monótonas. Descreva o tipo de monotonicidade de cada uma delas.*

$$a) \ x_n = \frac{2n-1}{n};$$

$$b) \ x_n = 1 + \frac{1}{3n};$$

$$c) \ x_n = \frac{1}{n^2};$$

$$d) \ x_n = \frac{n}{n+1};$$

$$e) \ x_n = \frac{n^2+1}{3n^2}.$$

**Exercício 2.1.2.** *Para cada uma das sequências do exercício anterior, exiba três subseqüências.*

### 2.1.2 Limite de Sequências

**Definição 2.1.6.** *Dizemos que um número real  $L$  é limite de uma sequência  $\{a_n\}$  se, dado  $\epsilon > 0$  arbitrário, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que*

$$|a_n - L| < \epsilon, \quad \forall n \geq N. \quad (2.1)$$

Denotamos:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ .

Se a sequência  $\{a_n\}$  possui limite, dizemos que a sequência é **convergente**. Caso contrário, dizemos que é **divergente**.

**Definição 2.1.7.** *Dizemos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  se, para cada  $M > 0$ , existir  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n > M$  para todo  $n \geq N$ . Neste caso, dizemos que a sequência diverge para  $+\infty$ .*

**Teorema 2.1.1.** *Sejam  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  duas sequências convergentes. Então:*

$$a) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n;$$

$$b) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} c = c, \text{ quando } a_n = c \text{ é constante};$$

$$c) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n;$$

$$d) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n}, \text{ se } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \neq 0.$$

**Teorema 2.1.2** (Teorema do Confronto). *Se as sequências  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  e  $\{c_n\}$  são tais que  $a_n \leq b_n \leq c_n$  para todo  $n > n_0$  e*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L,$$

*então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L$ .*

**Exemplo 2.1.3.** *Prove que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n^2 + 1} = 0$ .*

Uma das sequências mais importantes no mundo matemático é a sequência de Fibonacci, definida por

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1 \quad \text{e} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

**Proposição 2.1.1.** *Uma sequência  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $a \in \mathbb{R}$  se, e somente se, toda subsequência de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $a$ .*

**Proposição 2.1.2.** *Toda sequência convergente é limitada.*

**Teorema 2.1.3.** *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

**Teorema 2.1.4** (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada possui pelo menos uma subsequência convergente.*

### 2.1.3 Exercícios

**Exercício 2.1.3.** *Calcule os seguintes limites das seguintes sequências:*

a)  $\lim \frac{2^n}{n^2}$

b)  $\lim(\sqrt{n^2 + 1} - n)$

c)  $\lim \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

d)  $\lim \frac{1 + 2n}{\sqrt{4n^2 - 1}}$

e)  $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

f)  $\lim(\sqrt[n]{n})$

g)  $\lim n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$

h)  $\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

i)  $\lim(\sqrt[n]{a}), a > 0$

**Exercício 2.1.4.** Mostre que se  $\lim(|a_n|) = 0$ , então  $\lim(a_n) = 0$ .

**Exercício 2.1.5.** Mostre que se  $\lim(b_n) = 0$  e  $(a_n)$  é limitada, então  $\lim(b_n a_n) = 0$ .

**Exercício 2.1.6.** Calcule os seguintes limites:

a)  $\lim \frac{(-1)^n}{n}$

b)  $\lim \frac{1}{n} \cos(n)$

**Exercício 2.1.7.** Seja  $(a_n)$  uma sequência definida recursivamente por:

$$a_1 = \sqrt{2} \quad e \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

a) Mostre que  $a_n < 2, \forall n \geq 1$ .

b) Mostre que  $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 - a_n)(1 + a_n), \forall n \geq 1$ .

c) Mostre que  $(a_n)$  é estritamente crescente.

d) Mostre que  $(a_n)$  converge e ache o seu limite.

**Exercício 2.1.8.** Mostre que a recíproca do Teorema 2.1.3 não é verdadeira.

## 2.2 Séries de Números Reais

Uma série de números reais é uma soma infinita de termos reais, escrita da seguinte forma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Nesta expressão, cada  $a_n$  representa o  $n$ -ésimo termo da sequência associada à série.

Dada uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , considera-se a sequência  $(S_n)$  definida por:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

A sequência  $(S_n)$  é chamada de **sequência das somas parciais** da série.

Se o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existe e é um número real  $S$ , dizemos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **converge** e sua soma é  $S$ .



$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad \text{se, e somente se,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Se o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  não existe, dizemos que a série **diverge**.

**Exemplo 2.2.1.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  converge.

*Solução: Temos:*

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Essa é uma série geométrica de razão  $r = \frac{1}{2}$ , cujo termo geral é  $a_n = \frac{1}{2^n}$ .

A soma parcial é:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

Logo, a série converge e sua soma é  $S = 1$ .

De modo geral, uma série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 r^n$$

converge se e somente se  $|r| < 1$ , e sua soma é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}.$$

Fica como exercício para o leitor fazer a demonstração.

**Exemplo 2.2.2.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  diverge.

*Solução: Temos:*

$$S_1 = -1, \quad S_2 = -1 + 1 = 0, \quad S_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \quad S_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0, \quad \text{e assim por diante.}$$

Portanto, a sequência das somas parciais  $(S_n)$  é:

$$S_n = \begin{cases} -1, & \text{se } n \text{ for ímpar,} \\ 0, & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Logo,  $(S_n)$  não converge (pois oscila entre  $-1$  e  $0$ ), e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

é divergente.

## Operações com Séries Convergentes

1. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge e  $c \in \mathbb{R}$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  também converge, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

*Demonstração:* Por hipótese, a sequência das somas parciais  $(S_n)$  converge, ou seja,  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \rightarrow S$ . Então,

$$cS_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n,$$

e a sequência  $(cS_n)$  também converge. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  convergem, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

também converge, e vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

*Demonstração:* Como  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  e  $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ , temos

$$S_n + T_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n).$$

Se  $S_n \rightarrow S$  e  $T_n \rightarrow T$ , então  $S_n + T_n \rightarrow S + T$ , logo a série também converge.

**Observação 2.2.1.** Se  $\sum a_n$  diverge e  $c \in \mathbb{R}$ , com  $c \neq 0$ , então  $\sum ca_n$  também diverge.

**Observação 2.2.2.** Se  $\sum a_n$  converge e  $\sum b_n$  diverge, então  $\sum (a_n + b_n)$  também diverge.

### 2.2.1 Testes de Convergência de Séries

A seguir, serão enunciados alguns testes e teoremas que são muito úteis para determinar se uma série converge ou não.

**Teorema 2.2.1.** *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . O inverso, entretanto, não é verdadeiro: se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , então a série diverge.*

*Demonstração:* Seja  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  a sequência das somas parciais. Temos:

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Como  $S_n$  converge, existem  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ . Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Portanto, se a série converge, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Mas o contrário não é garantido: o fato de  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  não assegura a convergência da série.

**Exemplo 2.2.3.** *A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n+1}$  diverge, pois*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = 1 \neq 0.$$

### Teste da Comparação

**Exemplo 2.2.4.** *Sejam as sequências  $(a_n)$  e  $(b_n)$  tais que  $0 \leq a_n \leq b_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então:*

(a) *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também converge.*

(b) *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge, então  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  também diverge.*

*Demonstração:* (a) Por hipótese, a sequência

$$b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, \dots$$

é convergente, logo limitada. Por outro lado, como  $a_n \geq 0$  e  $a_n \leq b_n$ , temos:

$$a_1 \leq b_1, \quad a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Portanto, a sequência  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  também é limitada e crescente. Como toda sequência crescente e limitada é convergente, concluímos que  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge.

(b) O item (b) é a contrapositiva de (a).

**Exemplo 2.2.5.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$  converge.

*Solução:* Como  $2^n + n > 2^n$  para todo  $n$ , temos:

$$0 < \frac{1}{2^n + n} < \frac{1}{2^n}.$$

Sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  é uma série convergente. Logo, pelo teste da comparação, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$  também converge.

## Teste da Integral

**Teorema 2.2.2.** Seja  $f$  uma função contínua, positiva e decrescente para todo  $x \geq 1$ . Então, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

converge se, e somente se, a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

converge.

**Exemplo 2.2.6.** Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Esta série é chamada de **série  $p$** . Temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge se, e somente se, } p > 1.$$

De fato, para  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ , temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1, \\ \infty, & \text{se } p \leq 1. \end{cases}$$

**Conclusão:** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge se  $p > 1$  e diverge se  $p \leq 1$ .

## Séries Alternadas

Uma série alternada é uma série da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

onde  $a_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 2.2.7.** *As séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

*são séries alternadas.*

### Teste de Leibniz.

**Teorema 2.2.3.** *Se  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , então a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

*converge.*

**Exemplo 2.2.8.** *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

*converge.*

*Solução:* De fato,  $\frac{1}{n}$  é decrescente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Assim, o Teste de Leibniz se aplica.

**Exemplo 10.9.3.** *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

*também converge.*

*Solução:* De fato,  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  é decrescente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ . Logo, pelo Teste de Leibniz, a série converge.

## Convergência Absoluta

Uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge.

**Exemplo 2.2.9.** *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

*converge absolutamente, pois a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

*converge.*

**Teorema 2.2.4.** *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também converge.*

*Demonstração:* Como  $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , somando termo a termo, obtemos:

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$  converge por comparação com  $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ . Mas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - a_n) \right],$$

e ambas as séries do lado direito convergem. Logo,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também converge.

A recíproca desse fato, entretanto, não é verdadeira: há séries que convergem, mas não convergem absolutamente.

**Exemplo 2.2.10.** *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

*converge (série harmônica alternada), mas a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

*diverge. Logo, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  é condicionalmente convergente.*

## Teste da Razão

Suponha que  $a_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q.$$

Então:

(i) Se  $q < 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente.

(ii) Se  $q > 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

(iii) Se  $q = 1$ , nada podemos concluir.

**Exemplo 2.2.11.** A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$$

converge absolutamente.

*Solução:* De fato,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Portanto, a série converge absolutamente.

**Exemplo 2.2.12.** A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

diverge.

*Solução:* De fato,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 = 1.$$

Logo, como  $q = 1$ , o teste é inconclusivo. Mas como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$ , a série diverge.

**Exemplo 2.2.13.** Considere as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

*Solução:* Para ambas, temos  $q = 1$ . Neste caso, o teste da razão não fornece conclusão: sabemos, no entanto, que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge.

**Exemplo 2.2.14.** Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , onde

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

*Solução:* Usando a decomposição em frações parciais:

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

temos:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Observando que há cancelamentos sucessivos, resta:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

Assim,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

## 2.3 Séries de Potências

Uma série de potência é uma soma infinita da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

O número  $c$  é dito o *centro* da série. Se  $c = 0$ , então

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 2.3.1.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$$

**Exemplo 2.3.2.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

**Exemplo 2.3.3.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots$$

**Exemplo 2.3.4.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$



**Exemplo 2.3.5.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n 2^n} = \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{3 \cdot 2^3} + \dots$$

**Exemplo 2.3.6.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2! x^2 + 3! x^3 + \dots$$

O domínio de convergência de uma série de potências é o conjunto dos números  $x$  para os quais a série converge.

**Exemplo 2.3.7.** Para a série  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  domínio de convergência:

$$-1 < x < 1.$$

**Solução:** De fato, usando o teste da Razão, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

converge se  $|x| < 1$ . Se  $x = 1$ , temos  $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ , a qual diverge. Se  $x = -1$ , temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n, \text{ a qual também diverge.}$$

**Exemplo 2.3.8.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  possui domínio de convergência:

$$-1 \leq x < 1.$$

**Exemplo 2.3.9.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  possui domínio de convergência:

$$-1 \leq x \leq 1.$$

**Exemplo 2.3.10.** A série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  possui domínio de convergência:

$$-\infty < x < \infty.$$

**Exemplo 2.3.11.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n 2^n}$$

possui domínio de convergência:

$$-1 < x < 3.$$

**Solução:** De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{(x-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x-1}{2} \cdot \frac{n}{n+1} \right| = \frac{|x-1|}{2}.$$

Pelo teste da Razão, temos que a série dada converge se  $\frac{|x-1|}{2} < 1$ , isto é:

$$-1 < x < 3.$$

Para  $x = -1$ , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que converge, pelo teste de Leibniz.

Para  $x = 3$ , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

a qual diverge. Portanto, o domínio de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^n}$$

é  $-1 \leq x < 3$ .

O **intervalo de convergência** de uma série de potência é o intervalo aberto que resulta do domínio de convergência ao suprimir-se os extremos. Desta forma, nos exemplos anteriores temos os seguintes intervalos de convergência.

**Exemplo 2.3.12.**  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  *intervalo de convergência é:*

$$-1 < x < 1.$$

**Exemplo 2.3.13.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  *intervalo de convergência é:*

$$-1 < x < 1.$$

**Exemplo 2.3.14.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  *intervalo de convergência é:*

$$-1 < x < 1.$$

**Exemplo 2.3.15.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  *intervalo de convergência é:*

$$\mathbb{R}.$$

**Exemplo 2.3.16.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^n}$  *intervalo de convergência é:*

$$-1 < x < 3.$$

### 2.3.1 Propriedades das Séries de Potências

Uma função real  $f(x)$  é dita desenvolvível em série de potências no intervalo aberto  $(c - r, c + r)$  se existem constantes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  reais tais que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n.$$

**Exemplo 2.3.17.** A função  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  é desenvolvível em série de potências no intervalo aberto  $-1 < x < 1$ , uma vez que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{se } -1 < x < 1.$$

De fato, como:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x},$$

tomando-se o limite em  $n \rightarrow \infty$ , resulta que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Suponha que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$$

em  $c - r < x < c + r$ . Então:

1.  $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - c)^{n-1}$ ;
2.  $\int_0^x g(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - c)^{n+1}}{n+1}$  no mesmo intervalo.

A partir destas propriedades podemos obter novos desenvolvimentos a partir de um desenvolvimento dado.

**Exemplo 2.3.18.**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad \text{se } |x| < 1.$$

Substituindo  $x$  por  $-t$ , obtém-se:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots, \quad \text{se } |t| < 1.$$

E agora substituindo  $t$  por  $t^2$ , tem-se:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots, \quad \text{se } |t| < 1.$$

Agora, integrando (a) de 0 até  $x$ , temos:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \quad \text{se } |x| < 1.$$

Ou seja,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Além disso, foi provado que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  converge, pelo Teste de Leibniz.

Donde se tem a igualdade:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \text{se } -1 < x \leq 1.$$

Portanto, temos:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Agora, integrando (b) de 0 a  $x$ , temos:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad \text{se } |x| < 1,$$

ou ainda,

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x| < 1.$$

Porém, usando o critério de Leibniz, pode-se provar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$$

converge. Logo, temos:

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad -1 < x \leq 1.$$

Assim tem sentido calcular-se:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}.$$

### 2.3.2 Séries de Taylor

Quando uma função real  $f(x)$  é desenvolvível em séries de potências, isto é, quando

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n, \quad c-r < x < c+r,$$

temos que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-c)^{n-1}, \quad c-r < x < c+r,$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-c)^{n-2}, \quad c-r < x < c+r,$$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)a_n(x-c)^{n-m}, \quad c-r < x < c+r.$$

E, assim sucessivamente. De tal modo que:

$$f(c) = a_0, \quad f'(c) = 1a_1, \quad f''(c) = 2 \cdot 1a_2, \quad f'''(c) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3, \dots$$

$$f^{(n)}(c) = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1a_n = n!a_n.$$

Logo,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Concluimos que, quando  $f$  é desenvolvível em série de potência, então  $f$  é infinitamente derivável e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n. \quad (2.2)$$

O desenvolvimento (1) é chamado desenvolvimento de Taylor de  $f$ , e a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

é chamada **Série de Taylor** de  $f$ .

Em particular, se  $c = 0$  em (1), temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

que é chamado **desenvolvimento de Maclaurin** de  $f$ .

## 2.4 Exercícios

**Exercício 2.4.1.** Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{a^{n-1}}\right)$  é convergente se  $a > 1$ .

**Exercício 2.4.2.** As seguintes séries diverge ou converge? Justifique.

$$a) \sum_{k=1}^{+\infty} k \operatorname{sen} \frac{1}{k}; \quad b) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^k}{k}; \quad c) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^k}{12k^5 + k^3 - 176576k^2}; \quad d) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{3k}}{k^3 + e^{2k}}.$$

**Exercício 2.4.3.** Mostre que a série dada é convergente:

$$a) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sen} \frac{1}{k}; \quad b) \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4 + 3}; \quad c) \sum_{k=3}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k};$$

$$d) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^{-n}; \quad e) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)(n+1)}; \quad e) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{11}{(2n+3)(3n+5)}.$$

**Exercício 2.4.4.** Estude a série dada com relação a convergência ou divergência.

$$a) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k^2 + 1)}; \quad b) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}; \quad c) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha \ln k}, \alpha > 0; \quad d) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{1 + k^4}.$$

4. Mostre que  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$  converge e tem soma  $\frac{a}{1-q}$  se  $|q| < 1$  e diverge se  $|q| \geq 1$ .

**Exercício 2.4.5.** Mostre que  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$  converge e tem soma igual a 2.

6. A série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{1}{k}$  é convergente ou divergente? Justifique.

**Exercício 2.4.6.** Estude a série dada com relação a convergência ou divergência.

$$a) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{2k^3 - k + 1}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}; \quad c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 2}{k^5 + 2k + 1};$$

8. Diga se cada série a seguir converge ou diverge. Justifique.

$$a) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{(1 + 4^k)}; \quad b) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k! 2^k}{k^k}; \quad c) \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha^k \text{ com } \alpha > 0;$$

$$d) \sum_{k=1}^{+\infty} [\sqrt{k+1} - \sqrt{k}]; \quad e) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3 + 4}{2^k} \quad f) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \text{ com } a > 0.$$

**Exercício 2.4.7.** Determine  $x > 0$  para que a série seja convergente.

$$\begin{aligned}
 & a) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}; \quad b) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}; \quad c) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^k}{k^3+1}; \quad d) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{2^k}; \quad e) \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x^k}{\ln k}; \\
 & f) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)}; \quad g) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k+1)x^k}{k!}; \quad h) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^k}.
 \end{aligned}$$

**Exercício 2.4.8.** Determine  $x > 0$  para que a série seja convergente.

$$\begin{aligned}
 & a) \sum_{k=1}^{+\infty} x^k; \quad b) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}; \quad c) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{\ln k}; \quad d) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}; \quad e) \sum_{k=1}^{+\infty} e^{kx}; \\
 & f) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} x^{2k}; \quad g) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}; \quad h) \\
 & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!x^k}{k^k}.
 \end{aligned}$$

**Exercício 2.4.9.** Determine o domínio da função  $f$  dada por:

$$\begin{aligned}
 & a) f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k!x^k; \quad b) f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^3}; \quad c) f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{k}\right)x^k; \quad d) f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x^k. \\
 & (O domínio de uma função é o conjunto dos  $x$  onde a série é convergente.)
 \end{aligned}$$

**Exercício 2.4.10.** Considere a série de números reais  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ . Suponha que existe uma sequência  $\{b_n\}$  tal que  $0 < b_n \leq a_n$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b > 0$ . A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente? **Justifique sua resposta!**

**Exercício 2.4.11.** Considere as séries de números reais  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  tais que  $0 \leq a_n \leq b_n$ . Além disso, suponha que existe uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, positiva e decrescente tal que  $f(n) = b_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$  e  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  é convergente. Prove que:

$$\begin{aligned}
 & a) \text{ a série } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ é convergente.} \\
 & b) \text{ a série } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ é convergente.}
 \end{aligned}$$

**Exercício 2.4.12.** As séries dadas a seguir converge ou diverge? **Justifique sua resposta!**

$$\begin{aligned}
 & a) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(1/k)}{k^2}; \quad b) \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\sin(k)}{k^3 \ln k}; \quad c) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{k^2}; \quad d) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k}.
 \end{aligned}$$

**Exercício 2.4.13.** Se uma sequência de números reais positivos  $\{a_n\}$  é tal que  $a_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$ , então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge ou diverge? **Justifique sua resposta!**

**Exercício 2.4.14.** Determine a série de Maclaurin de:

- a)  $f(x) = \operatorname{sen} x$ .      b)  $f(x) = \cos x$ .      c)  $f(x) = e^{2x}$ .  
d)  $f(x) = \operatorname{actg} x$ .      b)  $f(x) = \ln(x+1)$ .      c)  $f(x) = e^{-x^2}$ .

**Exercício 2.4.15.** Encontre a série de Taylor da função  $f(x) = \cos x$  em torno de  $\pi$ .

**Exercício 2.4.16.** Encontre a série de Taylor da função  $f(x) = (x+1)^n$  em torno de 0.

**Exercício 2.4.17.** Prove que

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!(n-p)!} a^{n-p} b^p$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . A fórmula acima é conhecida binômio de Newton.

## 2.5 Série de Fourier

**Definição 2.5.1.** Uma série de Fourier é uma forma de escrever uma função periódica  $f(x)$  como uma soma de senos e cossenos.

Dizemos que  $f(x)$  é periódica de período  $2L$  quando ela é definida no intervalo  $(-L, L)$  e, para todo  $x$ , vale

$$f(x) = f(x + 2L).$$

A série de Fourier associada à função  $f(x)$  é definida por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

onde os números  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  são chamados coeficientes de Fourier.

Os coeficientes da série de Fourier de uma função  $f(x)$ , periódica de período  $2L$ , são dados pelas fórmulas abaixo.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$



Para  $n = 0$ , obtemos o coeficiente da média (termo constante):

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

De forma análoga, multiplicando a série por  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e integrando, obtêm-se os coeficientes senoidais:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

**Exemplo 2.5.1.** Vamos apresentar um exemplo de função contínua no intervalo  $[-\pi, +\pi]$ , ou seja, periódica de período  $2L = 2\pi$ . Considere a função

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Os coeficientes de Fourier são

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = 0.$$

Assim, a série de Fourier correspondente é

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Uma característica importante das séries de Fourier é que elas permitem representar também funções que apresentam saltos ou interrupções. Um exemplo muito conhecido é a chamada *onda quadrada*, cuja função é periódica de período  $2L = 2\pi$ .

Podemos descrevê-la assim:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

onde  $f$  está definida no intervalo  $(-\pi, \pi)$ . Observe que a função não é contínua: ela possui saltos nos pontos  $x = 0$  e nas extremidades do período, ou seja,  $x = \pm\pi$ .

Agora vamos determinar os coeficientes de Fourier da onda quadrada definida em  $(-\pi, \pi)$  por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Como  $f$  é uma função ímpar, sua série de Fourier contém apenas termos de seno. Os coeficientes ficam:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \, dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^\pi \cos(nx) \, dx + \int_{-\pi}^0 -\cos(nx) \, dx \right) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^\pi \sin(nx) \, dx + \int_{-\pi}^0 -\sin(nx) \, dx \right) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Assim, apenas os valores ímpares de  $n$  contribuem para a série de Fourier. A expansão resultante é

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \right).$$

Podemos também olhar as somas parciais para aproximar a solução:

$$S_p(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin((2p-1)x)}{2p-1} \right).$$

## Capítulo 3

# Funções Vetoriais de Uma Variável Real

**Definição 3.0.1.** *Seja  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Chamamos de função vetorial qualquer aplicação*

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

*que, para cada parâmetro real  $t \in D$ , produz um vetor da forma*

$$F(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \in \mathbb{R}^m.$$

*Assim, cada valor de  $t$  está associado a exatamente um vetor em  $\mathbb{R}^m$ .*

**Example 3.0.1.** *A seguir listamos algumas funções vetoriais, cada uma com diferentes dimensões de imagem. Nos itens (a) e (c), os vetores possuem duas componentes; já nos itens (b) e (d), os vetores pertencem a  $\mathbb{R}^3$ .*

$$(a) \ F_1(t) = (2t, 4t), \quad t \geq 0.$$

$$(b) \ F_2(t) = (t, 2t, 4t), \quad t \geq 0.$$

$$(c) \ F_3(t) = (2 \cos t, 3 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$(d) \ F_4(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \geq 0.$$

### 3.1 Operações com Funções Vetoriais

**Definição 3.1.1.** *Sejam  $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  funções vetoriais,  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função escalar e  $k \in \mathbb{R}$  uma constante. Definem-se as seguintes operações:*

(a) **Soma:** *A função  $(F + G) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  é definida por*

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t), \quad t \in D.$$

(b) **Diferença** : A função  $(F - G) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  é dada por

$$(F - G)(t) = F(t) - G(t), \quad t \in D.$$

(c) **Multiplicação por constante**: A função  $kF : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  é definida por

$$(kF)(t) = k F(t), \quad t \in D.$$

(d) **Multiplicação por função escalar**: Dada a função real  $f$ , define-se

$$(fF)(t) = f(t) F(t), \quad t \in D.$$

(e) **Quociente por função escalar**: Se  $f(t) \neq 0$  para todo  $t \in D$ , definimos

$$\left(\frac{F}{f}\right)(t) = \frac{F(t)}{f(t)}, \quad t \in D.$$

(f) **Produto escalar (ou interno)**: A função  $F \cdot G : D \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$(F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t), \quad t \in D.$$

(g) **Produto vetorial**: Quando  $m = 3$ , o produto vetorial gera uma nova função  $F \times G : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$(F \times G)(t) = F(t) \times G(t), \quad t \in D.$$

**Exemplo 3.1.1.** Considere as funções

$$f(t) = \sin t, \quad F(t) = (t, e^t, t^2), \quad G(t) = (t, 1, t^3).$$

Calcule as seguintes expressões vetoriais:

(a)  $F + G$

(b)  $2F$

(c)  $fF$

(d)  $F \cdot G$

(e)  $F \times G$

**Solução.**

(a) Soma termo a termo:

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t) = (t, e^t, t^2) + (t, 1, t^3) = (2t, e^t + 1, t^2 + t^3).$$

(b) *Multiplicação por constante:*

$$(2F)(t) = 2F(t) = (2t, 2e^t, 2t^2).$$

(c) *Produto por função escalar:*

$$(fF)(t) = f(t)F(t) = \sin t \cdot (t, e^t, t^2) = (t \sin t, e^t \sin t, t^2 \sin t).$$

(d) *Produto escalar:*

$$(F \cdot G)(t) = t \cdot t + e^t \cdot 1 + t^2 \cdot t^3 = t^2 + e^t + t^5.$$

(e) *Produto vetorial:*

$$(F \times G)(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t & e^t & t^2 \\ t & 1 & t^3 \end{vmatrix} = (t^3 e^t - t^2, t^3 - t^4, t - t e^t).$$

**Definição 3.1.2.** *Seja  $F : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função vetorial, onde o conjunto  $D$  contém um intervalo aberto em torno de  $t_0$  (não sendo necessário que  $F$  esteja definida no próprio ponto  $t_0$ ). Dizemos que  $F(t)$  converge para o vetor  $L \in \mathbb{R}^m$  quando  $t$  se aproxima de  $t_0$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um número  $\delta > 0$  tal que*

$$0 < |t - t_0| < \delta \implies \|F(t) - L\| < \varepsilon.$$

Usamos a notação

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L.$$

Para um vetor

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)) \quad \text{e} \quad L = (l_1, l_2, \dots, l_m),$$

a distância entre  $F(t)$  e  $L$  é dada por

$$\|F(t) - L\| = \sqrt{(f_1(t) - l_1)^2 + (f_2(t) - l_2)^2 + \dots + (f_m(t) - l_m)^2}.$$

A partir dessa expressão, conclui-se que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L \iff \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = l_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

**Example 3.1.1.** *Calcule o limite*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin t}{t}, \frac{1 - \cos t}{t} \right).$$

**Solução:** *Como cada componente possui limite conhecido,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0,$$

*o limite vetorial é obtido componente a componente:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin t}{t}, \frac{1 - \cos t}{t} \right) = (1, 0).$$

**Theorem 3.1.1** (Propriedades do limite). *Sejam  $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} G(t) = M, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = k.$$

*Então:*

$$(a) \lim_{t \rightarrow t_0} (F \pm G)(t) = L \pm M;$$

$$(b) \lim_{t \rightarrow t_0} (fF)(t) = kL;$$

$$(c) \lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{F}{f} \right)(t) = \frac{L}{k}, \text{ se } k \neq 0;$$

$$(d) \lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t)\| = \|L\|;$$

$$(e) \lim_{t \rightarrow t_0} (F \cdot G)(t) = L \cdot M;$$

$$(f) \text{ se } m = 3, \text{ então } \lim_{t \rightarrow t_0} (F \times G)(t) = L \times M.$$

**Definição 3.1.3** (Continuidade). *Seja  $F : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  e considere  $t_0$  pertencente a um intervalo aberto  $I \subseteq D$ . Dizemos que  $F$  é contínua em  $t_0$  quando*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0).$$

**Observação 3.1.1.** *Se  $t_0$  pertence à fronteira de  $D$ , o limite adequado a ser considerado é o limite lateral correspondente.*

A partir do Teorema do limite vetorial, temos a equivalência:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0) \iff \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = f_i(t_0), \quad i = 1, \dots, m.$$

**Definição 3.1.4** (Curva). *Seja  $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função contínua definida em um intervalo  $I$ . Chamamos de curva a imagem do mapa  $F$ , isto é, o conjunto dos pontos  $F(t)$  gerados à medida que  $t$  percorre  $I$ .*

**Definição 3.1.5** (Derivada). *Considere  $F : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  e um ponto  $t_0$  pertencente a um intervalo aberto  $I \subseteq D$ . Dizemos que  $F$  é derivável em  $t_0$  quando o limite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h}$$

*existe. Este limite é chamado de derivada de  $F$  em  $t_0$  e é denotado por  $F'(t_0)$  ou  $\frac{dF}{dt}(t_0)$ .*

Como consequência direta do Teorema do limite vetorial:

$$F \text{ é derivável em } t_0 \iff \text{ cada componente } f_i(t) \text{ é derivável em } t_0,$$

e, nesse caso,

$$F'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_m(t_0)).$$

**Example 3.1.2.** Calcule a derivada de  $F$  em  $t_0 = 1$ , onde

$$F(t) = (3t^2, \sin(t^3), e^{t^2}).$$

Como cada componente é derivável, basta derivarmos coordenada a coordenada:

$$F'(1) = \left( (3t^2)'|_{t=1}, (\sin(t^3))'|_{t=1}, (e^{t^2})'|_{t=1} \right).$$

Calculando:

$$F'(1) = \left( 6, 3t^2 \cos(t^3)|_{t=1}, 2te^{t^2}|_{t=1} \right) = (6, 3 \cos(1), 2e).$$

**Theorem 3.1.2** (Regras de derivação). Sejam  $F, G : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , todas deriváveis em  $t_0 \in I \subseteq D$ . Então:

- (a)  $(aF + bG)'(t_0) = aF'(t_0) + bG'(t_0)$ , para  $a, b \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $(fF)'(t_0) = f'(t_0)F(t_0) + f(t_0)F'(t_0)$ ;
- (c)  $(F \cdot G)'(t_0) = F'(t_0) \cdot G(t_0) + F(t_0) \cdot G'(t_0)$ ;
- (d) se  $m = 3$ , então  $(F \times G)'(t_0) = F'(t_0) \times G(t_0) + F(t_0) \times G'(t_0)$ .