

# Sobre a complexidade de um algoritmo de regularização quadrática para minimizar funções não suaves e não convexas

Vitaliano S. Amaral - UFPI

Universidade Federal do Piauí

JMatUFPI 2024

Trabalho em parceria com J. O. Lopes, P. S. M. Santos e G. N. Silva

2024

# Sumário

1. Resultados Preliminares
2. O Problema
3. O Método
4. Convergência e Complexidade
5. Exemplos e Testes Numéricos

# Resultados Preliminares

Seja  $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função:

- $\xi$  é semicontínua inferiormente em  $\bar{a}$  se para cada  $\alpha < \xi(\bar{a})$  existe uma vizinhança  $V$  de  $\bar{a}$  tal que para qualquer  $x \in V$  temos  $\alpha < \xi(x)$ .
- O domínio de  $\xi$  é definido por  $\text{dom } \xi := \{x \in \mathbb{R}^n : \xi(x) < +\infty\}$ .
- O subdiferencial de Fréchet de  $\xi$  em  $\bar{a} \in \text{dom } \xi$  é definido por

$$\partial^F \xi(\bar{a}) = \left\{ b \in \mathbb{R}^n : \liminf_{a \rightarrow \bar{a}} \frac{\xi(a) - \xi(\bar{a}) - \langle b, a - \bar{a} \rangle}{\|a - \bar{a}\|} \geq 0 \right\}.$$

Se  $\bar{a} \notin \text{dom } \xi$ , então  $\partial^F \xi(\bar{a}) = \emptyset$ .

- Usamos  $u^k \xrightarrow{\xi} \bar{u}$  para dizer que  $u^k \rightarrow \bar{u}$  com  $\xi(u^k) \rightarrow \xi(\bar{u})$ .
- O subdiferencial de Mordukhovich,  $\partial^L \xi(\bar{a})$ , de  $\xi$  em  $\bar{a} \in \text{dom } \xi$  é definido por

$$\limsup_{a \xrightarrow{\xi} \bar{a}} \partial^F \xi(a) = \left\{ b \in \mathbb{R}^n : \exists a^k \xrightarrow{\xi} \bar{a}, b^k \in \partial^F \xi(a^k), b^k \rightarrow b \right\}.$$

- Se  $\xi$  é convexa, temos  $\partial^F \xi(\cdot) = \partial^L \xi(\cdot)$ .

Se  $\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa, seu  $\epsilon$ -subdiferencial é

$$\partial_\epsilon \zeta(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n : \zeta(z) \geq \zeta(\bar{x}) + \langle y, z - \bar{x} \rangle - \epsilon, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n\},$$

onde  $\epsilon \geq 0$ , e se  $\epsilon = 0$ , tem-se  $\partial_0 \zeta(\cdot) := \partial \zeta(\cdot)$ .

## O problema

Consideramos o seguinte problema de otimização:

$$\text{Minimizar } f(x) := g_1(x) + g_2(x) - h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Assumimos:

- $g_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  é própria e semicontínua inferior.
- $g_2$  diferenciável.
- $h$  é convexa possivelmente não diferenciável.

Algumas observações sobre o Problema (1):

- se  $g_1 \equiv h \equiv 0$ , temos o problema de minimizar uma função diferenciável.
- se  $g_1 \equiv 0$  e  $g_2$  convexa, temos um problema de minimização DC.
- se  $C$  um conjunto convexo, usando  $g_1$  como sendo a função indicadora do conjunto  $C$ , o Problema (1) resolver o problema

$$\text{Minimizar } f(x) := g_2(x) - h(x), \quad x \in C.$$

## O método

Propomos o seguinte método para resolver o Problema (1):

Assuma  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha, \theta, \epsilon \in (0, 1)$ ,  $f_{\text{target}} \in \mathbb{R}$ ,  $\rho_{\min} > 0$ ,  $\eta > 0$ .

Inicialize  $k \leftarrow 0$  e  $\rho_0 = \rho_{\min}$ .

**Passo 1.**  $\rho \leftarrow \rho_k$ .

**Passo 2.** Escolha  $\epsilon_k \leq \left(\frac{\eta}{\rho}\right)^2$  e calcule  $w^k \in \partial_{\epsilon_k} h(x^k)$ .

**Passo 2.1** Considere o modelo

$$M_{x^k, \rho}(x) := g_1(x) + g_2(x^k) - h(x^k) + \langle \nabla g_2(x^k) - w^k, x - x^k \rangle + \rho \|x - x^k\|^2.$$

Encontre  $\bar{x}^{k+1}$  tal que  $M_{x^k, \rho}(\bar{x}^{k+1}) \leq f(x^k)$  e

$$d(0, \partial^L g_1(\bar{x}^{k+1}) + \nabla g_2(x^k) + 2\rho(\bar{x}^{k+1} - x^k) - w^k) \leq \theta \|\bar{x}^{k+1} - x^k\|. \quad (2)$$

**Passo 2.2** Se  $d(0, \partial^L g_1(\bar{x}^{k+1}) + \nabla g_2(x^k) - w^k) < \epsilon$  ou  $f(\bar{x}^{k+1}) \leq f_{\text{target}}$ , parar. Caso contrário ir para o **Passo 3**.

**Passo 3.** Se

$$f(\bar{x}^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{\alpha}{36\rho} \epsilon^2. \quad (3)$$

é válido, fazer  $x^{k+1} = \bar{x}^{k+1}$ ,  $k \leftarrow k + 1$ ,  $\rho_{k+1} = \rho$  e ir para o **Passo 1**.  
Caso contrário, fazer  $\rho \leftarrow 2\rho$  e ir para o **Passo 2**.

### Suposição 1.

A função  $g_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e satisfaz

$$g_2(y) \leq g_2(x) + \langle \nabla g_2(x), y - x \rangle + L \|y - x\|^{\beta+1} \quad (4)$$

para algum  $L > 0$  e  $\beta \in (0, 1]$ .

## Boa definição do método

De  $g_1$  limitada inferiormente, temos que  $M_{x^k, \rho}(x)$  é coerciva, garantindo a boa definição do Passo 2.1.

assumindo a Suposição 1 e  $d(0, \partial^L g_1(\bar{x}^{k+1}) + \nabla g_2(x^k) - w^k) \geq \epsilon$ , provamos que

$$\rho \geq \max \left\{ 1, \frac{\theta}{4}, \left[ \frac{L}{(1-\alpha)} \left( \frac{\epsilon}{6} \right)^{\beta-1} + \frac{\eta^2}{(1-\alpha)} \left( \frac{\epsilon}{6} \right)^{-2} \right]^{\frac{1}{\beta}} \right\}, \quad (5)$$

implica

$$f(\bar{x}^{k+1}) \leq f(x^k) - \alpha \rho \|\bar{x}^{k+1} - x^k\|^2 \quad (6)$$

e

$$f(\bar{x}^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{\alpha}{36\rho} \epsilon^2. \quad (7)$$

Concluindo a boa definição do método.



## Convergência e complexidade

Mostramos que:

- o número de iterações necessárias para atingir o critério de parada definido no Algoritmo é limitado superiormente por

$$\frac{36\gamma(f(x^0) - f_{\text{target}})}{\alpha} \max \left\{ \epsilon^{-\frac{\beta+1}{\beta}}, \eta^{\frac{2}{\beta}} \epsilon^{-\frac{2(\beta+1)}{\beta}} \right\}$$

- o número de vezes em que o parâmetro  $\rho$  é atualizado é no máximo

$$\log_2 \left( \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \right),$$

- o número máximo de avaliações de  $f$  e seu subdiferencial é limitado por

$$\frac{36\gamma(f(x^0) - f_{\text{target}})}{\alpha} \max\{\epsilon^{-\frac{\beta+1}{\beta}}, \eta^{\frac{2}{\beta}} \epsilon^{-\frac{2(\beta+1)}{\beta}}\} + \log_2\left(\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\right),$$

$$\text{onde } \gamma := 2 \max\left\{1, \frac{\theta}{4}, \left[\frac{6^{1-\beta}L}{(1-\alpha)} + \frac{36}{(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{\beta}}, \rho_{\min}\right\} \text{ e}$$

$$\rho_{\max} := 2 \max\left\{1, \frac{\theta}{4}, \left[\frac{6^{1-\beta}L}{(1-\alpha)} + \frac{36}{(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{\beta}}, \rho_{\min}\right\} \max\{\epsilon^{\frac{\beta-1}{\beta}}, \eta^{\frac{2}{\beta}} \epsilon^{-\frac{2}{\beta}}\}.$$

## Exemplos

A seguir apresentaremos alguns problemas que poder ser resolvidos utilizando método apresentado.

**Exemplo 1:** o problema do lasso

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|_1 \right\}, \lambda > 0, A \in \mathbb{R}^{s \times n}, \quad (8)$$

considerando  $g_1(x) = \lambda \|x\|_1$ ,  $g_2(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$  e  $h = 0$ .

**Exemplo 2:** o problema:

$$\min \{ \|Ax - b\|^2 : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \} \quad (9)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{s \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^s$ .

Basta minimizar a decomposição  $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$  com  $g_1(x) = \delta_{\Omega}(x)$ ,  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}$ ,  $g_2(x) = \|Ax - b\|^2$ .

### Exemplo 3: o problema

$$\min f(x) = \frac{1}{2} \|A(x) - b\|_2^2 + \frac{\lambda}{p} \|\Phi(x)\|_p^p,$$

onde  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função não-linear e diferenciável,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $\Phi$  é um operador linear.

**Exemplo 4:** o problema de mínimos quadrados regularizado  $\ell_{1-2}$ :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|_1 - \lambda \|x\|, \quad (10)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , e  $\lambda > 0$  é o parâmetro de regularização.

## Exemplo 1

Problema de mínimos quadrados regularizado  $\ell_{1-2}$ :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|_1 - \lambda \|x\|, \quad (11)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , e  $\lambda > 0$  é o parâmetro de regularização. Consideramos


- $m = 720$ ,  $n = 2560$ ,  $g_1(x) = \lambda \|x\|_1$ ,  $g_2(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$  e  $h(x) = \lambda \|x\|$ ,  $\theta = \alpha = 0.5$ ,  $\rho_{\min} = 0.25$ ,  $x^0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ .
- o critério de parada para ambos os esquemas neste exemplo é:

$$\frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{\max\{1, \|x^{k-1}\|\}} < \epsilon = 5e-5.$$

Comparamos nossa abordagem IPTA com o algoritmo Proximal difference-of-convex com extrapolação (pDCA<sub>e</sub>) estudado no trabalho<sup>1</sup>.

Relatamos o número de iterações (iter), tempos de CPU em segundos (tempo de CPU) e os valores da função ao término (fval), com médias sobre as 30 instâncias aleatórias.

$\lambda$	IPTA			pDCA <sub>e</sub>		
	iter	CPU time	fval	iter	CPU time	fval
$10^{-3}$	1	0.4907	0.0427	119.3000	1.3003	0.0457
$10^{-4}$	1	0.4905	0.0427	120.9000	1.3268	0.0439
$10^{-5}$	1	0.4942	0.0427	125.8333	1.3981	0.0439
$10^{-6}$	1	0.4970	0.0427	125.8333	1.4212	0.0439

<sup>1</sup>B. Wen, X. Chen, and T. K. Pong, *A proximal difference-of-convex algorithm with extrapolation*. Comput. Optim. Appl. 69 (2018), pp. 297–324. 

## Exemplo 2:

### Problema

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|_1 \right\}, \quad (12)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro de regularização.

Consideramos:

- $\lambda = 5 \times 10^{-5}$
- critério de parada  $\frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{\|x^{k-1}\|} < \epsilon$ .
- a razão sinal-ruído de pico (PSNR) para medir o desempenho do algoritmo testado, onde  $\text{PSNR}(x_k)$  é definida por

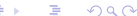
$$\text{PSNR}(x_k) = 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{\text{MSE}} \right),$$

onde  $\text{MSE} = \frac{1}{m \times n} \|x_k - \bar{x}\|^2$ , com  $\bar{x}$  sendo a imagem original e  $m \times n$  o tamanho da figura.

Neste problema de teste, consideramos uma imagem de teste de *carro* com tamanho  $149 \times 311$ .

Comparamos com os métodos IMA(Inertial Mann Algorithm) e FISTA(Fast iterative shrinkage-thresholding algorithm) seguindo<sup>2</sup>

No. Iterations	IMA	FISTA	IPTA
1	14.0449	14.0449	3.9047
5	17.0817	16.6018	6.4192
10	19.4416	18.3511	8.4139
25	22.9385	22.0312	13.3926
100	28.2198	29.4496	24.2047
250	32.0615	32.1528	26.9075
500	33.1078	34.6636	29.0335

<sup>2</sup>R. Wattanataweekul, and K. Janngam, *An accelerated common fixed point algorithm for a countable family of G-nonexpansive mappings with applications to image recovery*. J. Inequal. Appl. 2022 (2022), pp. 1–15. 



Algorithm	CPU time	Iterations	final PSNR
IMA	2.7254	301	32.5882
FISTA	4.4889	476	34.4286
IPTA	0.8866	435	28.6268



(a) Original



(b) Desfocada



(c) IMA



(d) FISTA



(e) IPTA

- O IPTA tem bom tempo de CPU.
- Verificamos que o FISTA apresenta um PSNR mais alto do que o IMA e o IPTA.

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡