

Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики  
Кафедра обчислювальної математики

Математичне моделювання в науці та технологіях

## МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІКИ РІДИН



**Виконав:**

студент IV курсу, групи ПМп-41  
напряму підготовки «Прикладна математика»

Грициндишин Віталій

**Викладачі:**

доц. Кухарський В. М.

доц. Ящук Ю. О.

ас. Марчук Ю. Б.

# **Зміст**

<b>Вступ</b>	<b>3</b>
<b>1 Постановка задачі</b>	<b>3</b>
<b>2 Опис моделі</b>	<b>3</b>
<b>3 Результати експериментів</b>	<b>4</b>
<b>Висновки</b>	<b>5</b>
<b>Література</b>	<b>7</b>
<b>Додаток</b>	<b>8</b>

# Вступ

Моделювання механіки рідин є важливим етапом для розуміння поведінки рідин в різних умовах та для дослідження різних фізичних процесів, пов'язаних з рухом рідин. В даний час, одним з найбільш ефективних інструментів для моделювання механіки рідин є програмний пакет COMSOL.

## 1 Постановка задачі

Для моделювання механіки рідин за допомогою COMSOL необхідно встановити початкові та граничні умови, які описують задачу. Наприклад, якщо ми хочемо дослідити течію рідини в трубі, то необхідно задати діаметр труби, в'язкість рідини, щільність, тиск на вході та виході труби, температуру, швидкість руху рідини на вході та виході труби та інші параметри.

## 2 Опис моделі

Рівняння механіки рідин - це система диференціальних рівнянь, що описують рух рідини в просторі.

Одне з найважливіших рівнянь механіки рідин - це рівняння Нав'є-Стокса, яке описує збереження кількості руху в рідині. Однак, в даному випадку, ми будемо мати справу зі спрощеною системою рівнянь, що називається рівняннями Нав'є-Стокса для невязкої рідини. Ці рівняння використовуються для моделювання руху рідин, які не мають в'язкості, або в'язкість їх є знехтувано малою.

Перше рівняння вище є рівнянням збереження кількості руху і має наступний вигляд:

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \mathbf{K}] + \mathbf{F}$$

де  $\rho$  - густина рідини,  $\mathbf{u}$  - вектор швидкості,  $p$  - тиск,  $\mathbf{I}$  - одинична матриця,  $\mathbf{K}$  - тензор в'язкості, а  $\mathbf{F}$  - зовнішні сили.

Це рівняння описує рух рідини в термінах зміни кількості руху. Ліва частина рівняння представляє силу, яка викликає зміну кількості руху, а права частина - силу, яка компенсує цю зміну. Зокрема, перший доданок на правій стороні рівняння відповідає градієнту тиску, який компенсує зміну кількості руху, а другий доданок відповідає зовнішнім силам, таким як сила тяжіння чи обертова сила.

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- нерозривності (або нерухомості) рідини і описує той факт, що рідина не може бути стиснута або розтягнута, тобто об'єм рідини залишається постійним під час руху. За рівнянням нерозривності, дивергенція швидкості руху рідини  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  дорівнює нулю. Це означає, що кожен елемент рідини може рухатися незалежно від інших елементів, але об'єм рідини залишається постійним.

Обидва ці рівняння є основою для моделювання руху рідин у різних задачах та використовуються у програмах для чисельного розв'язання різних задач механіки рідин, таких як COMSOL. Розв'язання цих рівнянь дозволяє отримати розподіл тиску та швидкості руху рідини в просторі та часі для різних задач, наприклад, для моделювання течії в каналах, аеродинамічних потоків, а також для вивчення впливу різних параметрів на рух рідини.

При моделюванні руху рідин за допомогою COMSOL, рівняння механіки рідин можуть бути доповнені іншими рівняннями, які враховують додаткові фізичні ефекти, наприклад, рівнянням для теплопередачі або рівнянням для дифузії речовини в рідині. Задача полягає у виборі відповідної моделі, яка найбільш точно відображає реальний процес, та у встановленні відповідних граничних умов для вирішення задачі.

Для змодельовання руху рідини по трубі змінного перерізу в COMSOL необхідно задати граничні умови на вході та виході з труби, а також умови на стінках труби.

На вході труби зазвичай задають умову заданої швидкості або заданого тиску. Наприклад, можна задати умову заданої швидкості вектора  $\mathbf{u}$  на вході труби, що відповідає постійному потоку рідини в трубі.

На виході з труби також можна задати умову заданої швидкості або заданого тиску. Наприклад, можна задати умову нульового градієнту тиску на виході з труби.

На стінках труби задають умову нульової швидкості, оскільки рідина не може проникати через стінки труби. Також можна задати умову нульового градієнту тиску на стінках труби.

Для переходу від ламінарного потоку до турбулентного потрібно враховувати безрозмірний параметр числа Рейнольдса, який визначає співвідношення між інерційними і в'язкісними силами в рухомій рідині. Якщо число Рейнольдса перевищує певне критичне значення, то потік може стати турбулентним. Критичне значення числа Рейнольдса залежить від геометрії труби та властивостей рідини, і може бути визначене експериментально або теоретично.

### 3 Результати експериментів

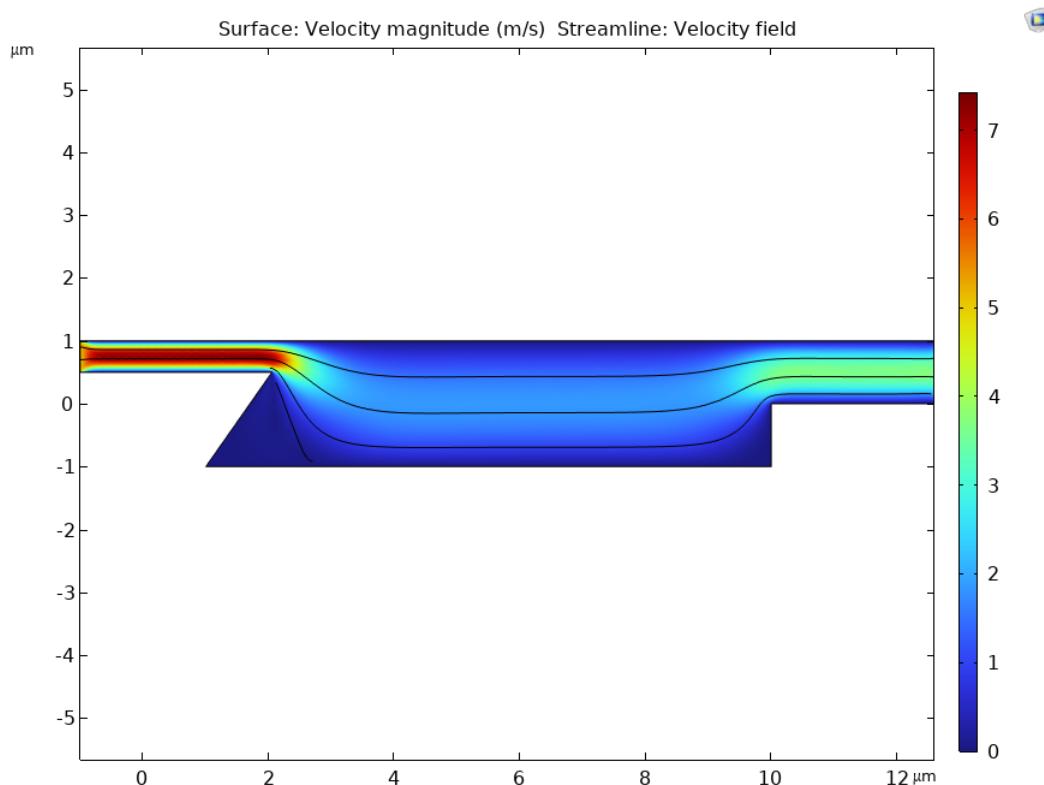


Рис. 1: Швидкість рідини - 5 м/с.

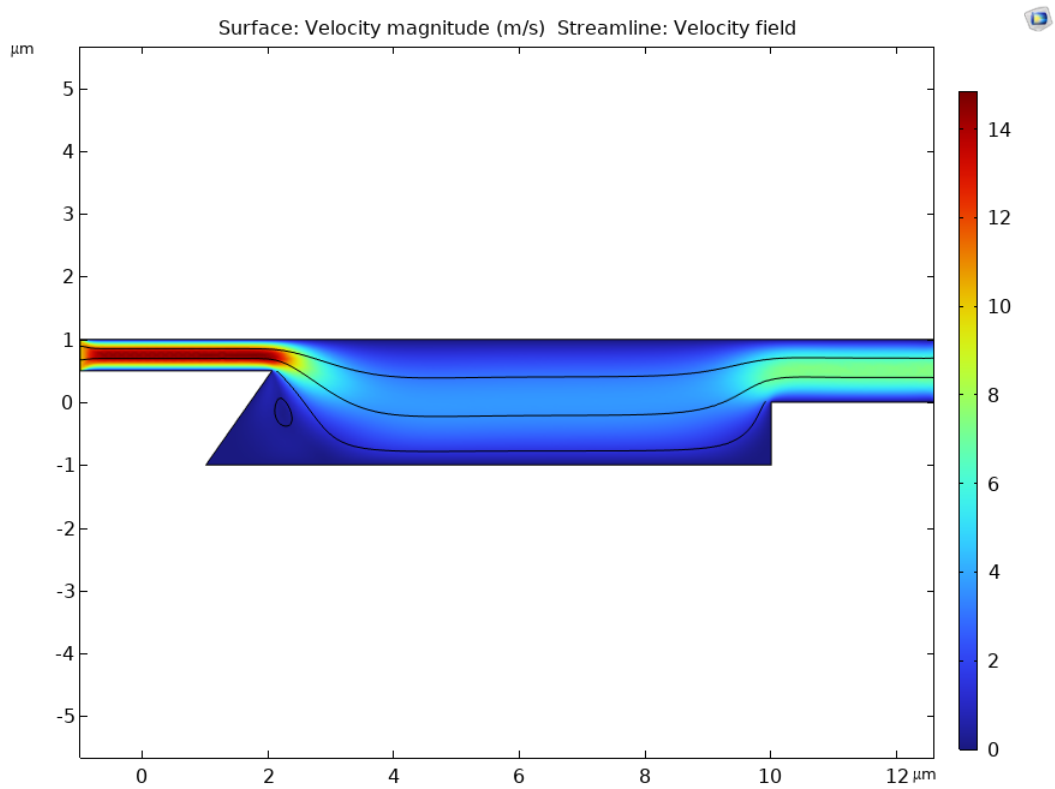


Рис. 2: Швидкість рідини - 10 м/с.

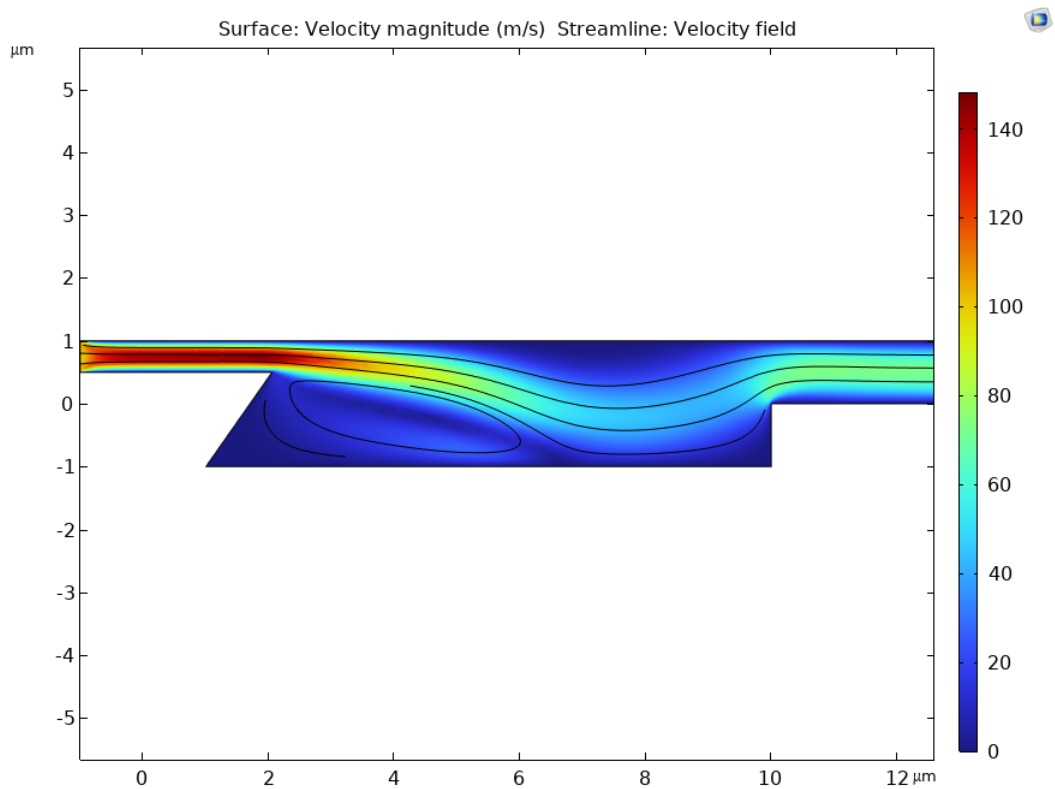


Рис. 3: Швидкість рідини - 100 м/с.

## Висновки

Моделювання механіки рідин за допомогою COMSOL є важливим етапом для дослідження поведінки рідин в різних умовах та для розуміння різних фізичних процесів, пов'язаних з рухом рідин. COMSOL надає різні методи чисельного розв'язування рівнянь Нав'є-Стокса, що дозволяє вибрати оптимальний метод для конкретної задачі. Отримані результати можуть бути використані для аналізу течії рідини, дослідження ефектів, пов'язаних з рухом рідини, та для прогнозування різних процесів, пов'язаних з рухом рідини, наприклад, теплообміну, масопереносу та інших.

## Література

- [1] H. Versteeg, W. Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, Pearson Education, 2007.
- [2] J. D. Anderson Jr., Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications, McGraw-Hill Education, 1995.
- [3] L. Elliott, Computational Fluid Dynamics: An Introduction, John Wiley, Sons, 2012.
- [4] COMSOL Multiphysics, User's Guide, Version 5.7, COMSOL Inc., 2020.
- [5] A. T. Patera, A Spectral Element Method for Fluid Dynamics: Laminar Flow in a Channel Expansion, Journal of Computational Physics, 1984.

## Додаток

З реалізацією моделювання можна ознайомитись за посиланням на GitHub репозиторій.

<https://github.com/vitalikkk19/mmst>

