

Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики  
Кафедра обчислювальної математики

Математичне моделювання в науці та технологіях

## ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПЕРЕНОСУ ЗАБРУДНЕНЬ У ВЕРХНІХ ШАРАХ ҐРУНТУ



**Виконав:**

студент IV курсу, групи ПМп-41  
напряму підготовки «Прикладна математика»

Грициндишин Віталій

**Викладачі:**

доц. Кухарський В. М.  
доц. Ящук Ю. О.  
ас. Марчук Ю. Б.

Львів - 2023

# Зміст

Вступ	3
1 Постановка задачі	4
2 Опис моделювання	5
3 Результати експериментів	6
Література	8
Додаток	9

# Вступ

Забруднення ґрунту є серйозною проблемою для довкілля та здоров'я людей. Для розв'язання цієї проблеми важливо мати математичну модель переносу забруднень в ґрунті. Така модель може допомогти передбачити розповсюдження забруднення та знайти оптимальні стратегії для його усунення.

# 1 Постановка задачі

Нехай ми маємо верхні шари ґрунту, які містять забруднення. Ми хочемо розрахувати концентрацію забруднення в ґрунті в залежності від часу та глибини.

Для моделювання переносу забруднень у верхніх шарах ґрунту ми використовуємо рівняння переносу маси. Ми розглядаємо ґрунт як неперервну середу та вважаємо, що концентрація забруднення залежить від часу та глибини.

Рівняння переносу маси має вигляд:

$$\frac{dC}{dt} = D\Delta^2 C - V\Delta C,$$

де  $C$  - концентрація забруднення,  $t$  - час,  $D$  - коефіцієнт дифузії,  $V$  - швидкість фільтрації води у ґрунті,  $\Delta^2$  - оператор Лапласа,  $\Delta$  - градієнт.

Для розв'язання цього рівняння ми використовуємо числові методи, такі як метод скінченних різниць або метод скінченних елементів. Ми задаємо початкові умови для концентрації забруднення в ґрунті та граничні умови для концентрації на поверхні ґрунту та на глибині.

Для побудови більш точної моделі можна врахувати такі фактори, як перенос маси від коренів рослин, процеси взаємодії забруднень з ґрунтовими частинками та хімічний стан ґрунту. Також важливим є врахування впливу кліматичних умов на процеси переносу забруднень, таких як опади та температура.

Для оцінки ефективності різних методів очищення ґрунту можна використовувати моделювання забруднення до та після застосування методу. Також можна використовувати моделі для прогнозування розповсюдження забруднень в разі аварійних ситуацій.

Отже, потрібно змодельовати випадок:

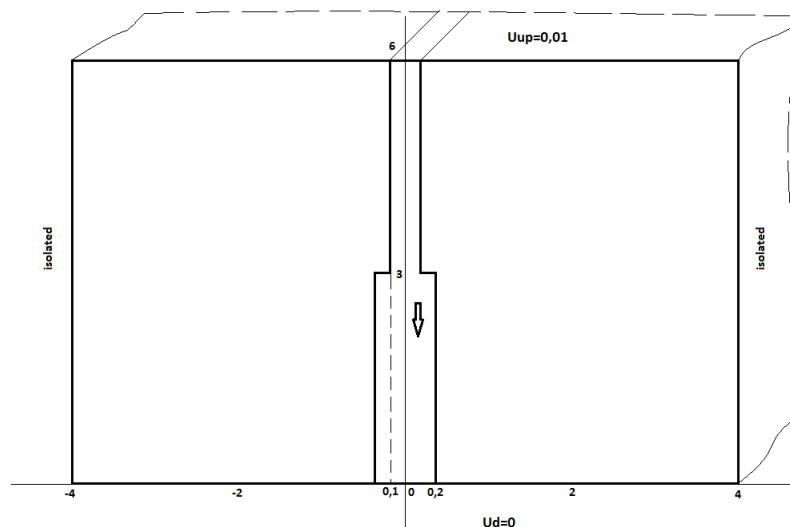


Рис. 1: Постановка задачі.

## 2 Опис моделювання

Спочатку потрібно геометрично змоделювати Рис.1:

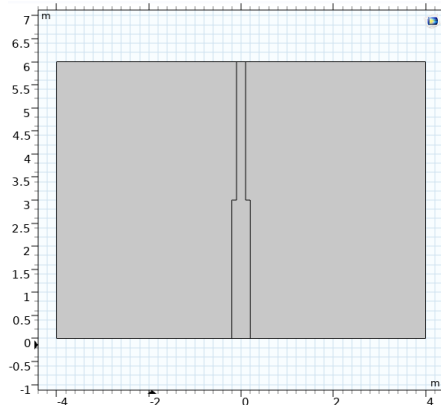


Рис. 2: Моделювання геометрії поверхні землі з водяним каналом.

Далі додали коефіцієнти дифузії забрудника у воді та землі:

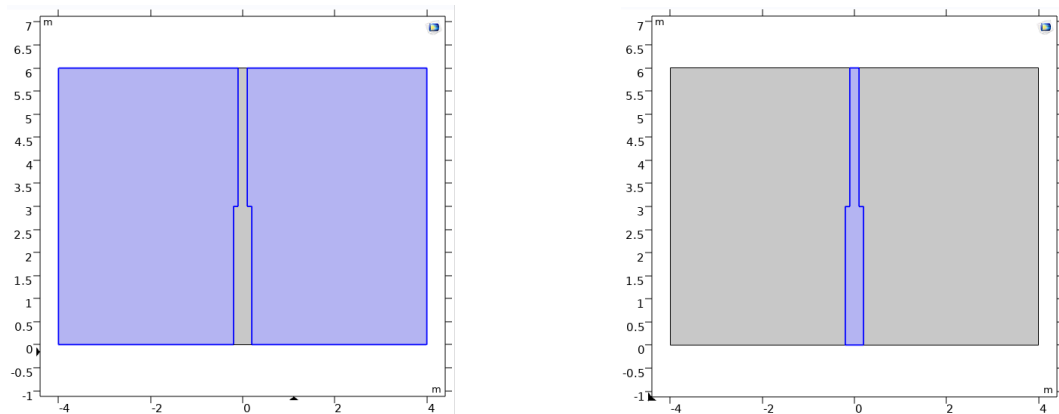


Рис. 3: Транспортування розведених видів.

Відповідно до постановки задачі задаємо концентацію забрудника на верхній межі 0.01  $[mol/m^3]$ , а на нижній 0  $[mol/m^3]$ :

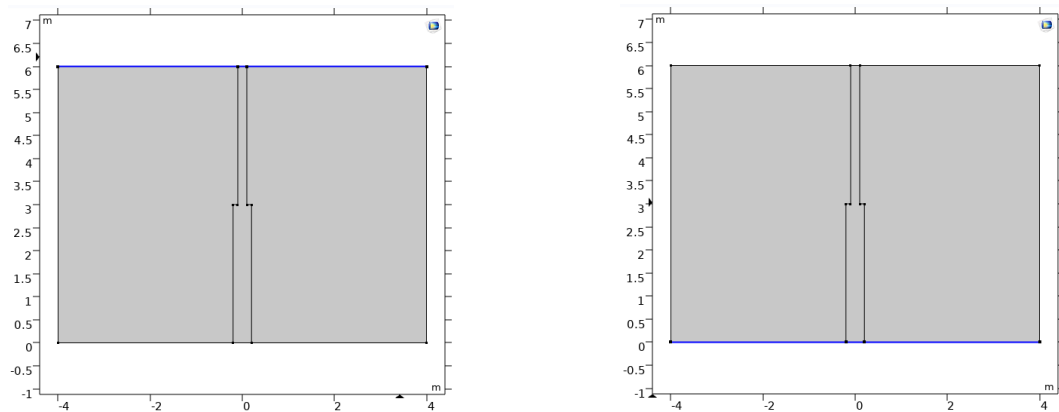


Рис. 4: Концентрація забрудника на межах.

### 3 Результати експериментів

Вважатимемо нафту забрудником, тоді коефіцієнт дифузії нафти у воді ( $0.7 \times 10^{-9} \text{ [m}^2/\text{s]})$ , а в землі ( $1 \times 10^{-12} \text{ [m}^2/\text{s]})$ . Швидкість потоку у водяному каналі  $1 \times 10^{-7} \text{ [m/s]}$ .

Отримаємо наступні результати:

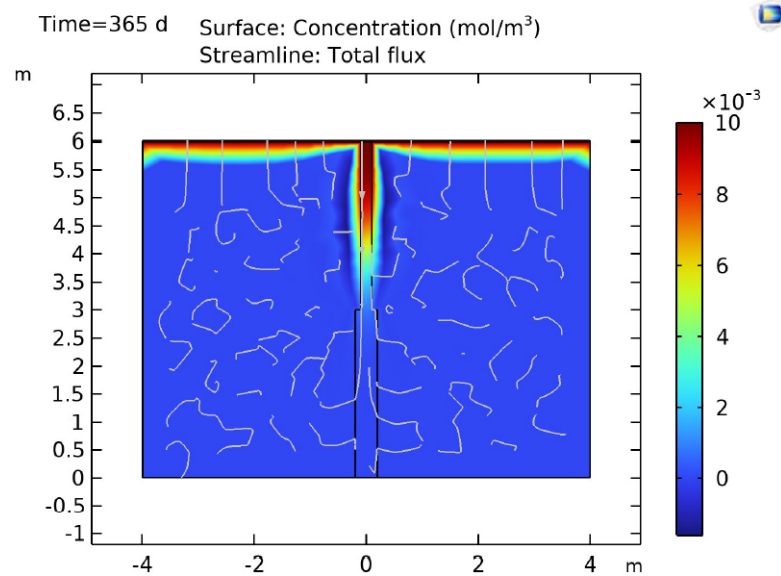


Рис. 5: Поширення забруднення через 1 рік.

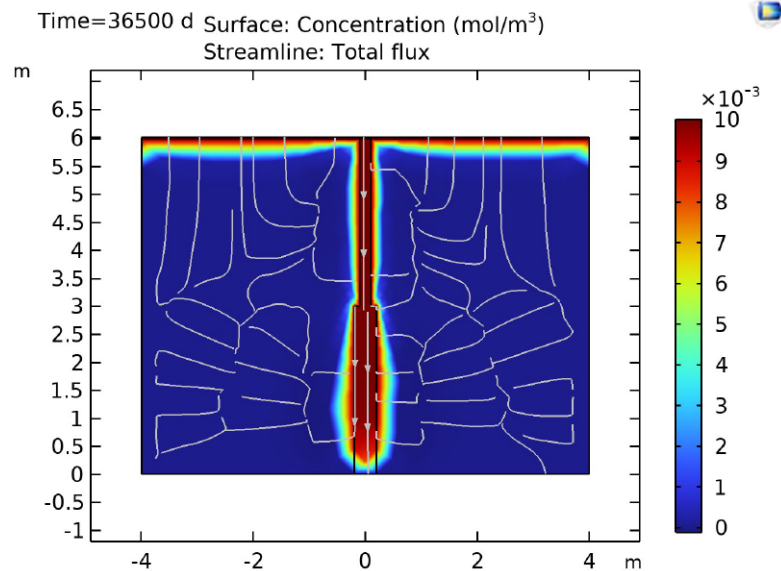


Рис. 6: Поширення забруднення через 100 років.

## Висновки

Математична модель переносу забруднень у верхніх шарах ґрунту є важливим інструментом для оцінки впливу забруднення на довкілля та забезпечення здоров'я людей. Використання програмного забезпечення COMSOL дозволяє провести чисельне моделювання процесу переносу забруднень у ґрунті та отримати детальні результати, що можуть бути використані для прийняття рішень щодо захисту довкілля та здоров'я людей.

Крім того, математична модель переносу забруднень у ґрунті може бути використана для розробки ефективних стратегій очищення забрудненого ґрунту. Наприклад, можна застосовувати методи біоремедіації, що полягають у використанні живих мікроорганізмів для очищення забрудненого ґрунту. Математична модель дозволяє оцінити ефективність таких методів та відбирати оптимальні умови для їх застосування.

Отже, математична модель переносу забруднень у верхніх шарах ґрунту та програмне забезпечення COMSOL є важливими інструментами для оцінки впливу забруднення на довкілля та розробки ефективних стратегій очищення забрудненого ґрунту.

## Література

- [1] ASTM E1689-95(2018), "Standard Guide for Developing Conceptual Site Models for Contaminated Sites".
- [2] ASTM E2531-20, "Standard Guide for Development of Conceptual Site Models and Remediation Strategies for Light Nonaqueous-Phase Liquids Released to the Subsurface".
- [3] US EPA, "Exposure Factors Handbook: 2011 Edition (Final Report)".
- [4] US EPA, "Risk Assessment Guidance for Superfund Volume I: Human Health Evaluation Manual (Part A)".
- [5] C. A. J. Appelo and D. Postma, "Geochemistry, Groundwater and Pollution 2nd Edition, CRC Press, 2005.
- [6] S. S. Rao and D. P. Mukherjee, "Contaminant Transport in Groundwater: A Numerical Approach CRC Press, 2011.
- [7] A. D. Bechtel and G. R. Demco, "Groundwater Modeling Using Geographical Information Systems CRC Press, 2006.
- [8] COMSOL Multiphysics User's Guide, available at <https://www.comsol.com/documentation>.



## Додаток

З реалізацією моделювання можна ознайомитись за посиланням на GitHub репозиторій.

<https://github.com/vitalikkk19/mmst>

