

Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики  
Кафедра обчислювальної математики

Математичне моделювання в науці та технологіях

**АНАЛІЗ ЗАБРУДНЕННЯ ПОВЕРХНІ ЗЕМЛІ  
ЧЕРЕЗ ВИКИДИ В АТМОСФЕРУ ІЗ ТОЧКОВОГО ДЖЕРЕЛА,  
ПІДНЯТОГО НАД ПОВЕРХНЕЮ**



**Виконав:**

студент IV курсу, групи ПМп-41  
напряму підготовки «Прикладна математика»

Грициндишин Віталій

**Викладачі:**

доц. Кухарський В. М.  
доц. Ящук Ю. О.  
ас. Марчук Ю. Б.

# **Зміст**

<b>Вступ</b>	<b>3</b>
<b>1 Постановка задачі</b>	<b>4</b>
<b>2 Опис моделі</b>	<b>5</b>
<b>3 Результати експериментів</b>	<b>7</b>
<b>Висновки</b>	<b>9</b>
<b>Література</b>	<b>10</b>
<b>Додаток</b>	<b>11</b>

# Вступ

При наявності спостережень забруднення повітря на станція хдозиметрії і характеристик переміщення повітряних мас на метеорологічних станціях можна обчислити співвідношення між змінними з використанням статистичних методів. У статистичних моделях дослідження забрудненості повітря використовують стохастичні рівняння для встановлення співвідношень між показниками якості повітря і даними метеорології. Статистичні моделі встановлюють співвідношення між оцінками концентрацій і значеннями параметрів, що реально вимірювалися при аналогічних обставинах.

У даній роботі ми проаналізуємо забруднення поверхні землі через викиди в атмосферу із точкового джерела, піднятого над поверхнею. Побудуємо математичну модель. Проведемо експерименти з вхідними параметрами, на які маємо вплив. Спробуємо мінімізувати максимальну концентрацію забруднюючих речовин на рівні ґрунту.

# 1 Постановка задачі

Статистична модель - це математична модель, яка дозволяє описати випадкові процеси та явища в термінах статистичних методів. Вона базується на теорії випадкових процесів, ймовірнісних розподілів та інших математичних концепціях.

Статистична модель використовується для аналізу даних та прогнозування майбутніх значень на основі даних, які були зібрані раніше. Вона може бути використана для розуміння взаємозв'язку між різними змінними та для визначення того, як одна змінна впливає на іншу.

Статистична модель при певних умовах може дати кращі результати ніж чисельна імітаційна модель.

Серед статичних моделей розглядають моделі усереднення за часом; моделі, що базуються на аналізі часових рядів; моделі багатозмінного аналізу.

Багатофакторний аналіз (multivariable analysis) - це сукупність статистичних методів, які одночасно розглядають вплив багатьох змінних на якийсь одинчинник. Якщо після усунення впливу цих змінних діячинника зберігається, його діяв вважається незалежною. Крім того, ці методи застосовуються для виділення звеликого числа ознак малої підмножини, яка вносить незалежний і істотний внесок до кінцевого результату (результат), що використовується для ранжирування змінних по силі їх дії на результат і для інших цілей.

Отже, потрібно реалізувати статистичну багатофакторну модель для аналізу забрудження землі через викиди в атмосферу із точкового джерела.

## 2 Опис моделі

Розглянемо найвідоміші формули для розрахунку концентрації забруднення при точковому викиді, які мають насупний вигляд:

$$\varphi(x, y, z = 0, H) = A \times \exp \left[ - \left( \frac{y}{\sqrt{2}\sigma_y} \right)^r - \left( \frac{H}{\sqrt{2}\sigma_z} \right)^s \right],$$

де  $\varphi(x, y, z = 0, H)$  - концентрація забруднюючих речовин на рівні ґрунту ( $z = 0$ , площина  $XOY$ ), що спостерігається при постійному викиді забруднення потужності  $Q$  із точкового джерела, піднятого над поверхнею ґрунту на ефективну висоту ( $H = h_s + \delta h$ , де  $h_s$  - геометрична висота труби,  $\delta h$  - підйом викиду, викликаний кінцевою швидкістю викиду в димарі і наявністю піднімальної архімедової сили);

$\sigma_y, \sigma_z$  - дисперсія в напрямках  $y$  і  $z$  відповідно.

Для зазначених моделей, що представлені в однаковій формі, у таблиці наведені значення характерних параметрів:

$$A = \frac{QU}{2k^2 a u_*^2 x^2},$$

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{2} a k u_* x}{U},$$

$$\sigma_z = \frac{\sqrt{2} k u_* x}{U},$$

де  $u_* = k u(z) \log(z/z_0)$  - швидкість, ( $k$  - постійна фон Кармана;  $u(z)$  - профіль усередненого вітру;  $z_0$  - висота нерівностей;  $z$  - характерна висота примежевого шару);

$a$  - відношення флуктуації горизонтальної швидкості до флуктуацій вертикальної швидкості.

Використавши засоби мови MATLAB та вибравши відповідні параметри:

$Q, [\text{кг/с}]$	10 <sup>6</sup>	потужність викиду
$H, [\text{м}]$	40	точкове джерело (висота труби + підйом викиду)
$U, [\text{м/с}]$	10	швидкість вітру
$s$	1	
$r$	1	
$u_*, [\text{м/с}]$	5	$u_* = k u(z) \log(z/z_0)$
$a$	8	відношення фгш видкості до фвш
$k$	0.004	постійна фон Кармана
$x, [\text{м}]$	$400i + 800, i = (0, \bar{50})$	довжина (розташування на горизонтальній вісі)
$y, [\text{м}]$	$-100 + 4j, j = (0, \bar{50})$	ширина (розташування на вертикальній вісі)
$\sigma_y, [\text{м}]$	-	дисперсія в горизонтальному напрямку
$\sigma_z, [\text{м}]$	-	дисперсія в вертикальному напрямку
$A, [\text{кг/м}^3]$	-	концентрація забруднюючих речовин
$\varphi, [\text{кг/м}^3]$	-	концентрація забруднення

Ми можемо побудувати модель та проаналізувати максимальну концентрацію забруднюючих речовин на рівні ґрунту та орієнтовну протяжність:

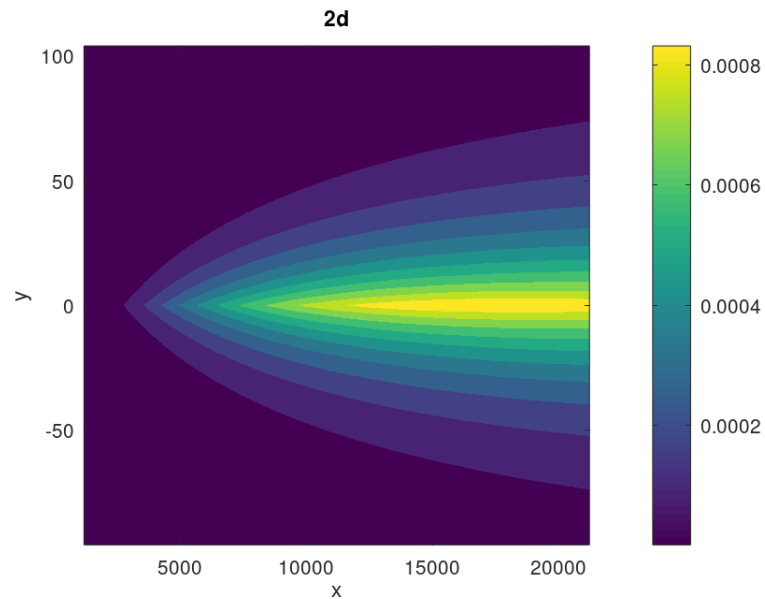


Рис. 1: 2d графік початкової моделі.

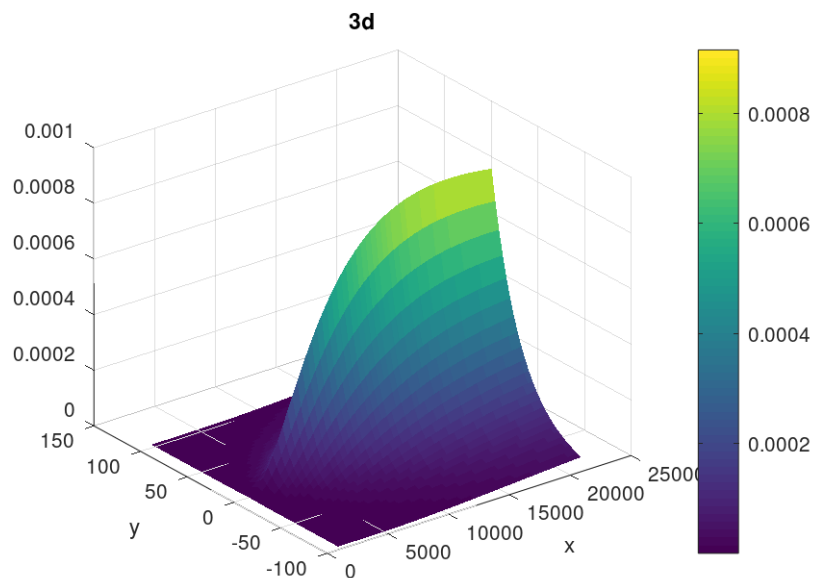


Рис. 2: 3d графік початкової моделі.

На Рис. 1 можна помітити місце КЗР (концентрація забруднюючих речовин) на площині  $ХОУ$ .

В результаті обчислень та з Рис. 2 бачимо, що максимальна КЗР становить  $9.1577 \times 10^{-4}$ . Також помітно, що забруднення є нерівномірним.

### 3 Результати експериментів

На основі попередніх результатів можна спробувати знизити концентрацію забруднюючих речовин заміною параметрів на які маємо вплив. В даному випадку вплив є на потужність викиду ( $Q$ ), точкове джерело ( $H$ ) та швидкість вітру ( $U$ ). Спробуємо змінити параметри та відслідкувати зміну КЗР:

№	$Q$ , [кг/с]	$H$ , [м]	$U$ , [м/с]	$\varphi$ , [кг/м <sup>3</sup> ]
1	$10^6$	40	10	9.1577e-04
2	$10^6/2$	40	10	4.5789e-04
3	$10^6$	80	10	2.3363e-05
4	$10^6$	40	20	9.9251e-05

Рис. 3: Результати експериментів.

Відобразимо на графіку результати експериментів:

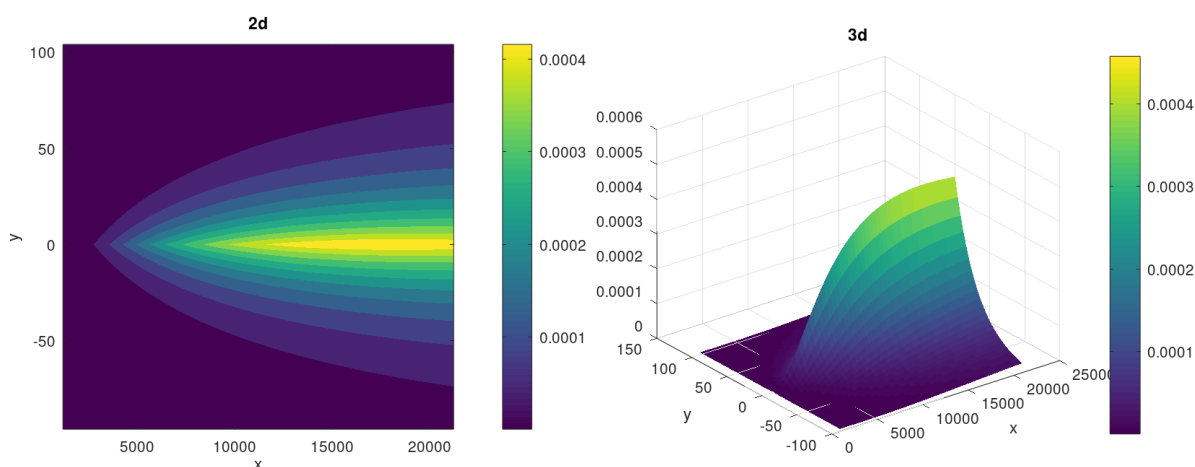


Рис. 4: 2d та 3d графіки оптимізованої зменшенням  $Q$  моделі.

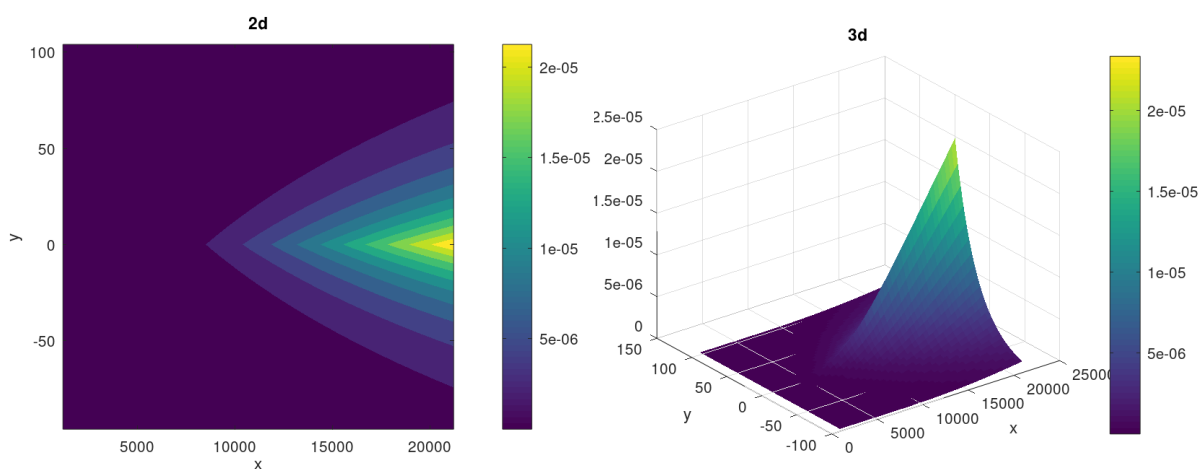


Рис. 5: 2d та 3d графіки оптимізованої збільшенням  $H$  моделі.

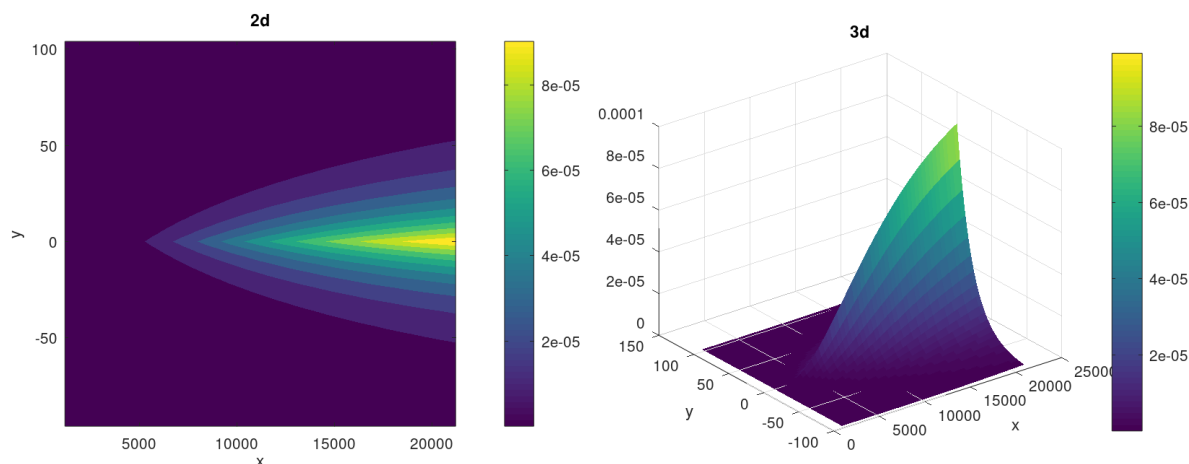


Рис. 6: 2d та 3d графіки оптимізованої збільшенням  $U$  моделі.

На Рис.3 помітно, що зменшення вдвічі потужності викиду майже вдвічі зменшило КЗР. Досить сутево можна покращити результати збільшенням швидкості вітру, але найкращі результати у випадку збільшення довжини точкового джерела.

З Рис.4 можна сказати, зменшення потужності викиду не вплинуло на площу площини забруднення, але зменшило концентрацію забруднюючих речовин.

З Рис.5 видно, що збільшення довжини точкового джерела(труби) досить не погано вплинуло на оптимізацію. Вдалось зменшити протяжність та концентрацію забруднення.

На Рис.6 видно, що збільшенням швидкості вітру вдалось трохи звузити протяжність (за рахунок збільшення дальності) та зменшити коефіцієнт забруднення.



## Висновки

У даній роботі я навчився будувати модель забруднення поверхні землі через викиди в атмосферу із точкового джерела, піднятого над поверхнею, аналізувати та покращувати модель, змінюючи вхідні дані. Найоптимізованіше вдалося зменшити максимальну концентрацію забруднюючих речовин за допомогою збільшення довжини точкового джерела (труби).

## Література

- [1] *Згуровский М.З.* Численное моделирование распространения загрязнений окружающей среде. / Згуровский М.З., Скопецкий В.В., Хрущ В.К. – К.: Науковадумка, 1997. – 260с.

## Додаток

---

```
Q = 10^6;
U = 10;
H = 40;

s = 1;
r = 1;
u1 = 5;
a = 8;
k = 0.004;

lenX = 51;
lenY = 51;

function y = qy(a,k,u1,x,U)
    y = (sqrt(2) * a * k * u1 * x) / U;
endfunction

function z = qz(k,u1,x,U)
    z = (sqrt(2) * k * u1 * x) / U;
endfunction

function a = Ax(Q, k, a, u1, x, U)
    a = ((Q) / (2 * k * k * a * u1 * u1 * x*x*U));
endfunction

xArr = zeros(1, lenX);
yArr = zeros(1, lenY);

for ii = 1:lenX
    xArr(ii) = ii * 400 + 800;
endfor

for jj = 1:lenY
    yArr(jj) = -100 + jj * 4;
endfor

m = zeros(length(xArr), length(yArr));

for ii = 1:lenX
    for jj = 1:lenY
        m(ii,jj) = (Ax(Q, k, a, u1, xArr(ii), U) *
            exp(-power((abs(yArr(jj)))/(sqrt(2*qy(a,k,u1,xArr(ii),U)))), r) -
            power(H/sqrt(2*qz(k,u1,xArr(ii),U)), s)));
    endfor
endfor

maxPhi = (max(m(:)))
```

```
figure;
[Y, X] = meshgrid(yArr, xArr);
contourf(X, Y, m, 'LineStyle', 'none');
xlabel('x');
ylabel('y');
title('2d');
colorbar();
print('2d.png')

[Y, X] = meshgrid(yArr, xArr);
fig = figure();
ax = axes('position', [0.1, 0.1, 0.8, 0.8]);
surf(X, Y, m, 'EdgeColor', 'none');
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('phi');
title('3d');
colorbar();
print('3d.png')
```

---

Для розв'язання даної матричної задачі Коші з використанням методу скінченних елементів застосуємо метод Галеркіна. Перед тим як продовжувати, зазначимо, що  $M$  та  $A$  - симетричні та невироджені матриці, а  $M$  - додатно визначена матриця.

Розділимо проміжок  $[0, T]$  на  $N$  рівних частин з кроком  $h = \frac{T}{N}$ , тобто  $t_i = ih$  для  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Розбиваємо область  $\Omega$  на скінченні елементи, наприклад, лінійні елементи. Для кожного елемента  $e$  визначимо локальні матриці  $M_e$  та  $A_e$ , використовуючи функції форми для лінійних елементів:

$$\frac{t_{i+1} - t}{h}, t_i \leq t \leq t_{i+1},$$

$$\frac{t - t_i}{h}, t_i \leq t \leq t_{i+1},$$

3. Побудуємо апроксимацію розв'язку  $U(t)$  за допомогою функцій форми:

$$U(t) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(t)$$

4. Підставимо апроксимацію  $U(t)$  в матричне рівняння Коші:

$$MU'(t) + AU(t) = I(t)$$

Отримаємо:

$$\sum_{j=1}^N (M_{ij} \phi_j'(t) u_j) + \sum_{j=1}^N (A_{ij} \phi_j(t) u_j) = I_i(t)$$

5. Застосуємо метод Галеркіна та помножимо на тестову функцію  $\phi_i(t)$ , після чого інтегруємо за часом від  $t_i$  до  $t_{i+1}$ , отримаємо систему рівнянь:

$$(M_{ii} + hA_{ii}) \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h} + \sum_{j \neq i} (M_{ij} + hA_{ij}) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{h} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi_i(t) I(t) dt$$

Розглянемо розв'язок вигляду  $u(t) = \sum_j \phi_j(t) u_j$ , де  $u_j$  - вузлові значення шуканої функції в момент часу  $t$  на проміжку  $[t_i, t_{i+1}]$ :  $u(t) = \phi_i u_i + \phi_{i+1}(t) u_{i+1}$ , де  $\phi_i = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}$

та  $\phi_{i+1} = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$ .

Підставляючи цей розв'язок в рівняння  $MU'(t) + AU(t) = I(t)$ , отримуємо:

$$M \left( \phi_i' u_i + \phi_{i+1}'(t) u_{i+1} \right) + A \left( \phi_i u_i + \phi_{i+1}(t) u_{i+1} \right) = I(t)$$

$$M \phi_i' u_i + M \phi_{i+1}'(t) u_{i+1} + A \phi_i u_i + A \phi_{i+1}(t) u_{i+1} = I(t)$$

$$M \phi_i' u_i + M \phi_{i+1}'(t) u_{i+1} + A \phi_i u_i + A \phi_{i+1}(t) u_{i+1} = I(t)$$

$$M \phi_i' u_i + M \phi_{i+1}'(t) u_{i+1} + A \phi_i u_i + A \phi_{i+1}(t) u_{i+1} = I(t)$$

$$M \phi_i' u_i + M \phi_{i+1}'(t) u_{i+1} + A \phi_i u_i + A \phi_{i+1}(t) u_{i+1} = I(t)$$

$$M \phi_i' u_i + M \phi_{i+1}'(t) u_{i+1} + A \phi_i u_i + A \phi_{i+1}(t) u_{i+1} = I(t)$$

$$M \phi_i' u_i + M \phi_{i+1}'(t) u_{i+1} + A \phi_i u_i + A \phi_{i+1}(t) u_{i+1} = I(t)$$

Звідси, застосовуючи метод гальоркіна, отримуємо систему лінійних рівнянь для коефіцієнтів  $u_j$ :

$$\begin{aligned} & (\tau \wedge i) \\ & \tau \wedge i+1 \\ & M \wedge j \wedge \\ & (\tau) \wedge i \wedge \\ & (\tau) d \tau \wedge \tau \wedge i \\ & \tau \wedge i+1 \\ & A \wedge j \\ & (\tau) \wedge i \\ & (\tau) d \tau) u \wedge j \\ & = \tau \wedge i \\ & \tau \wedge i+1 \\ & I(\tau) \wedge i \\ & (\tau) d \tau \wedge M \wedge i \\ & (\tau \wedge i \\ & ) p \end{aligned}$$

Ця система лінійних рівнянь може бути записана у матричній формі як  $KU = F$ , де  $K$  - матриця системи,  $U$  - вектор невідомих коефіцієнтів  $u_j$ , а  $F$  - вектор вільних членів, що обчислюються з рівняння  $I(t)\phi_i(t)dt - M\phi'_i(t_i)p$ .

14

Для доведення нерівності використаємо наступну тотожність, яка вірна для будь-якого  $x \in \mathbb{R}^m$ :

-ф1-

Припустимо, що  $|x|_{l_1^{(m)}} = \sum_{i=1}^m |x_i| = 1$ , тоді  $\max_{|y|_{l_\infty^{(m)}} \leq 1} \sum_{i=1}^m |x_i y_i| \geq |x_1| \cdot 1 = |x_1|$ .

З іншого боку,  $\max_{|y|_{l_\infty^{(m)}} \leq 1} \sum_{i=1}^m |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^m |x_i| \cdot |y_i| = |x|_{l_1^{(m)}} = 1$ . Таким чином, отримуємо, що  $\alpha = \min_{x \in \mathbb{R}^m \setminus 0} \frac{|x|_{E^m}}{|x|_{l_1^{(m)}}} \geq |x_1|$  для будь-якого  $x$  такого, що  $|x|_{l_1^{(m)}} = 1$ .

Так як це справедливо для будь-якого вектора  $x$ , то  $\alpha \geq \min_{i=1, \dots, m} |x_i|$ .

Припустимо тепер, що  $|x|_{E^m} = 1$ . Тоді для будь-якого  $i = 1, \dots, m$  маємо

ф2

Отже,  $|x|_{l_1^{(m)}} = \sum_{i=1}^m |x_i| \leq m \cdot |x|_{E^m}$ . Таким чином,  $\beta = \max_{x \in \mathbb{R}^m \setminus 0} \frac{|x|_{E^m}}{|x|_{l_1^{(m)}}} \leq m$ .

Остаточно, маємо нерівності:

ф3-

$\alpha = \min_{i=1, \dots, m} |x_i|$  та  $\beta = m$ .

Ці нерівності вказують на те, що норма  $E^m$  є більш "жорсткою" (strict) ніж  $l_1^{(m)}$  норма. Наприклад, якщо  $x$  - вектор з декількох нулів та одним значенням, яке за модулем є значно більшим за решту, то  $|x|_{E^m}$  буде близько до цього значення, а  $|x|_{l_1^{(m)}}$  буде дорівнювати сумі всіх модулів, в тому числі й значень, що дорівнюють нулю.

Нерівності також дають змогу контролювати точність наближення вектора  $x$  однією нормою іншою. Наприклад, якщо  $x$  є розрідженим вектором зі значущими ненульовими елементами, то можна знайти константу  $\alpha$  та  $\beta$  і зрозуміти, що норма  $E^m$  буде забезпечувати більш точне наближення, ніж  $l_1^{(m)}$  норма.

Таким чином, нерівності для норм  $|x|_{E^m}$  та  $|x|_{l_1^{(m)}}$  можуть бути корисним інструментом в дослідженнях, пов'язаних з лінійною алгеброю, оптимізацією, обробкою даних та машинним навчанням.