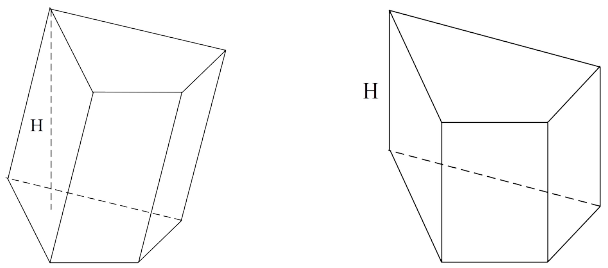
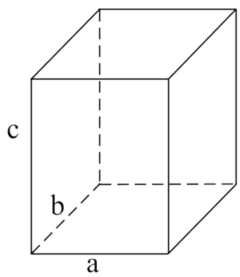
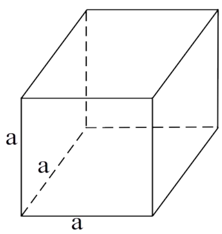
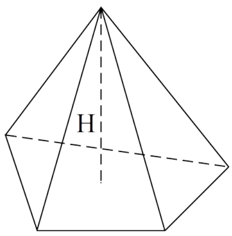
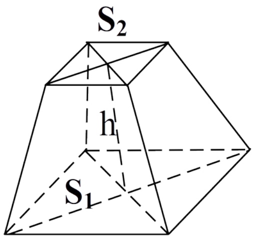
Тема. «Объёмы многогранников».
Методическое пособие по решению задач для студентов 2 курса СПО.
Дистанционная форма обучения.

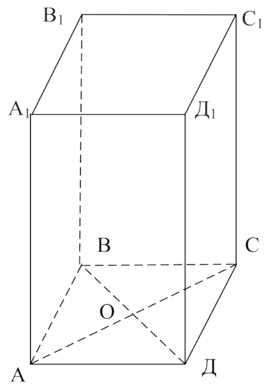
1. Теоретический материал.

Вид многогранника	Формула объёма
1. Призма 	$V = S_{осн}\,H$
2. Прямоугольный параллелепипед 	$V = abc$
3. Куб 	$V = a^3$
4. Пирамида 	$V = \frac{1}{3} S_{осн}\,H$
5.Усеченная пирамида 	$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

2. Решение задач.

Задача № 1

Найдите объем прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 25 и 60, и боковым ребром, равным 25.



Дано:

$АВСДА_1В_1С_1Д_1$ - прямая четырехугольная призма

АС = 60; ВД = 25; $АА_1$ = 25

Найти: $V_{призмы}$

Решение

$V_{призмы} = S_{осн}\, H$; $H = AA_1$

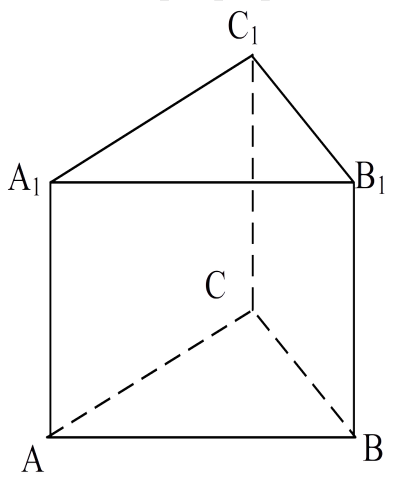
АВСД - ромб, следовательно $S_{осн} = \dfrac{AC \cdot ВД}{2}$;

$S_{осн} = \dfrac{60 \cdot 25}{2} = 750$; $V_{призмы}$ = 750¿25=18750

Ответ. 18750

Задача № 2

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 8 и 15, боковое ребро равно 9. Найдите объем призмы.



Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ - прямая треугольная призма.

Δ ABC - прямоугольный; АС и ВС - катеты

АС = 15; ВС = 8; $АА_1$ = 9

Найти: $V_{призмы}$

$V_{призмы} = S_{осн}\, H$; $H = AA_1$

ΔABC - прямоугольный треугольник,

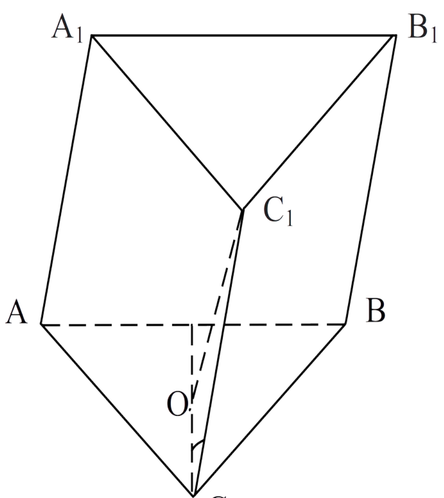
следовательно $S_{осн} = \dfrac{AC \cdot BC}{2}$;

$S_{осн} = \dfrac{15 \cdot 8}{2} = 60$; $V_{призмы}$ = 60¿9=540

Ответ. 540

Задача № 3.

В основании наклонной треугольной призмы лежит треугольник со сторонами 14; 12 и 12. Боковое ребро равно 6 и наклонено к плоскость основания под углом 30° . Найти объём призмы.



Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ - наклонная треугольная призма.

AC = 12; BC = 12; AB = 14; CC_1 = 6; $\angle C_1CO = 30^\circ$.

Найти: $V_{призмы}$

$V_{призмы} = S_{осн}\, H$;

ΔOCC_1 - прямоугольный треугольник, так как

C_1O ¿ плоскости Δ ABC; $\angle C_1CO = 30^\circ$;

$C_1O = C_1C$¿ $\sin 30^\circ$ = 6¿$\dfrac{1}{2}$ = 3

$H = OC_1 = 3$

$S_{осн} = \sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)}$; $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2}$;

$p = \dfrac{14+12+12}{2} = 19$;

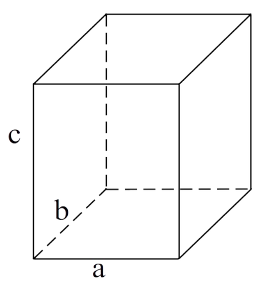
$S_{осн} = \sqrt{19(19-14)(19-12)(19-12)} = \sqrt{19\cdot 5\cdot 7\cdot 7} = 7\sqrt{95}$

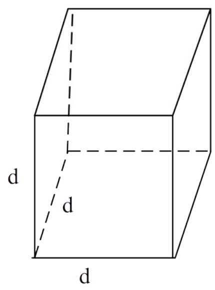
$V_{призмы} = 7\sqrt{95}\cdot 3 = 21\sqrt{95}$

Ответ. $21\sqrt{95}$

Задача № 4.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4, 6, 9. Найдите ребро равновеликого ему куба.

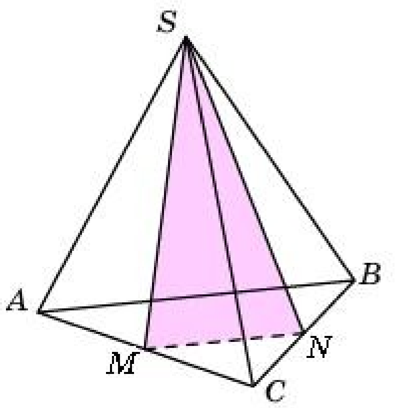




Дано: прямоугольный параллелепипед;
а=4; в=6; с=9. $V_{п.п} = V_к$
Найти : d
Решение:
$V_{п.п}$ =авс; $V_{п.п}$ = 4¿6¿9=216;
$V_к = d^3$; $d^3 = 216$; $d = \sqrt[3]{216} = 6$
Ответ. 6

Задача № 5

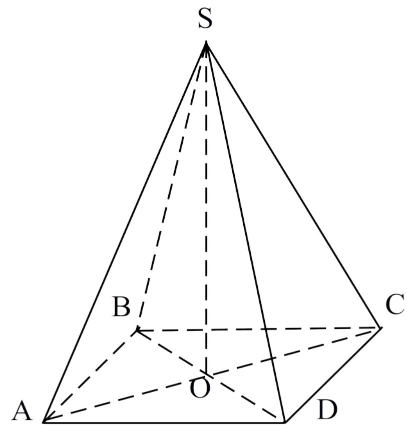
От треугольной пирамиды, объем которой равен 34, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



Дано:
$V_{SABC} = 34$; ΔSMN - сечение SABC
MN - средняя линия треугольника ABC
Найти: V_{SMNC}
Решение:
Так как MN - средняя линия треугольника ABC, то
MN = $\frac{1}{2}$ AB , поэтому ΔABC подобен ΔMNC.
Коэффициент подобия к=2, следовательно
$\dfrac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = \kappa^2$; $\dfrac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = 2^2$; $\dfrac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = 4$;
Так как высоты пирамид SABC и SMNC совпадают, то
$V_{SMNC} = V_{SABC} : 4 = 34:4 = 8{,}5$
Ответ. 8,5

Задача № 6

Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.



Дано: SABCD - пирамида; ABCD - прямоугольник;
$AB=3$; $BC = 4$; $V_{SABCD} = 16$

Найти: H

Решение:

$V=\frac{1}{3}S_{осн}H$; $V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot H$;

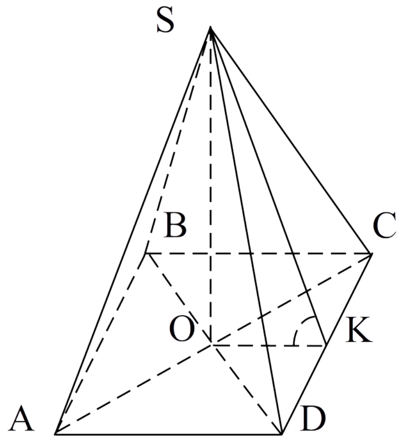
$S_{ABCD} = AB\cdot BC$; $S_{ABCD} = 3\cdot 4=12$;

$16=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot H$; $4H=16$; $H=4$

Ответ. 4

Задача № 7

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $6\sqrt{3}$ см, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти объем пирамиды.



Дано: SABCD - правильная четырехугольная пирамида;
$AB=6\sqrt{3}$ см; $\angle SKO=60°$

Найти: V_{SABCD}

Решение:

$V_{SABCD}=\frac{1}{3}S_{осн}H$;

$S_{осн} = AB^2$; $S_{осн} = (6\sqrt{3})^2 = 36\cdot 3=108$(см2)

ΔSKO - прямоугольный треугольник, так как
SO - высота пирамиды;
$\angle SKO$ - линейный угол двугранного угла при основании пирамиды SABCD, следовательно

$\angle SKO = 60^\circ$; $OK=\frac{1}{2}AB$; $OK=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}=3\sqrt{3}$(см)

$\frac{SO}{OK}=tg\,60^\circ$; $SO=OK\cdot tg60°=3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=9$(см);

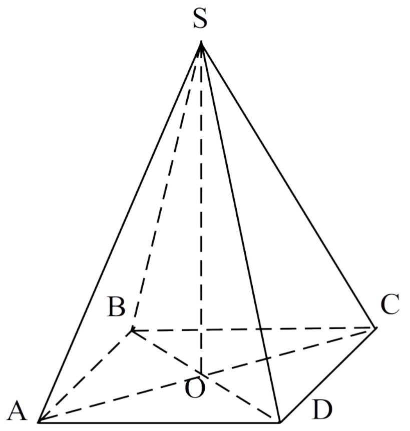
H=SO = 9см;

$V_{SABCD}=\frac{1}{3}108\cdot 9=324$(см^3)

Ответ. 324 см^3

Задача № 8

Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 6см и 8см. Все боковые ребра равны 13 см. Найти объём пирамиды.



Дано: SABCD - пирамида; ABCD - прямоугольник;
AB=6см; BC = 8си; SA=SB=SC=SD=13см.
Найти: V_{SABCD}
Решение:

$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{осн}\, H$;

S_{ABCD} = AB¿BC; S_{ABCD} = 6¿8=48(см^2)

ΔABC - прямоугольный, по теореме Пифагора

$AC^2 = AB^2 + BC^2$; $AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$; AC=10; AO=5см

SO ¿ ABCD, поэтому ΔSAO прямоугольный, по теореме Пифагора

$SO^2 = AS^2 - AO^2$; $SO^2 = 13^2 - 5^2 = 169-25=144$; SO=12см

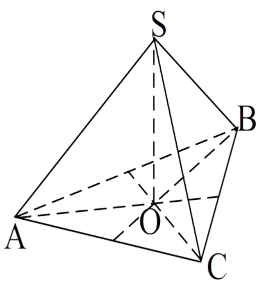
H=SO

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}$ 48¿ 12=192(см^3)

Ответ. 192см^3

Задача № 9

Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2см, а объем равен $\sqrt{3}$ см^3.



Дано: SABC-правильная треугольная пирамида; AB=2см;
$V_{SABC} = \sqrt{3}$ см^3
Найти: H
Решение:

$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{осн}\, H$;

ΔABC - правильный, поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2}$ AB¿AC¿sin60^0;

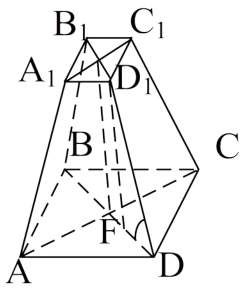
$S_{ABC} = \frac{1}{2}$ 2¿2¿sin60^0=2¿$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см^2);

$\sqrt{3} = \frac{1}{3}$ ¿ $\sqrt{3}$ ¿H; H= $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$ (см)

Ответ. 3

Задача № 10

Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3см и 5см. Найдите объем пирамиды, если ее боковое ребро равно $2\sqrt{3}$ см и наклонено к плоскости основания под углом 60 градусов.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$-правильная усеченная четырехугольная пирамида;

$AB=5$см; $A_1B_1 = 3$ см; $DD_1 = 2\sqrt{3}$см; D_1F¿ $(ABCD)$;

$\angle D_1DF=60^0$

Найти: V

Решение:

$$V=\frac{1}{3}h\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$$

$S_1 = S_{ABCD}$; $S_2 = S_{A_1B_1C_1D_1}$; $h = D_1F$

$S_{ABCD}=AB^2$; $S_{ABCD}= 5^2 = 25(см^2)$

$S_{A_1B_1C_1D_1}=A_1B_1{}^2$; $S_{A_1B_1C_1D_1}= 3^2 = 9(см^2)$;

ΔD_1DF - прямоугольный, поэтому $D_1F= D_1D$¿ $\sin60^0$;

$D_1F = 2\sqrt{3}$¿ $\sin60^0=2\sqrt{3}$¿ $\frac{\sqrt{3}}{2}=3$ (см);

$V=\frac{1}{3}\cdot3\left(25+\sqrt{25\cdot9}+9\right)=25+5\cdot3+9=49$ $(см^3)$

Ответ. 49 $см^3$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.

2. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.

3. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5. Объем призмы равен 30. Найдите ее боковое ребро.

4. Основанием прямой призмы является ромб со стороной 12см и углом 60º. Меньшее из диагональных сечений призмы является квадратом. Найти объем призмы.

5. В кубе AD_1 через середину ребер AB, DC и вершину D_1 проведено сечение. Найдите объем куба, если площадь этого сечения равна $\frac{4\sqrt{5}}{2}$.