Métodos Operativos y Estadísticos de Gestión

César Beltrán Royo

22 de septiembre de 2016

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo está estructurado en la siguientes secciones:

- La empresa y sus fines.
- Organización y estructura de la empresa.
- El papel de la investigación de operaciones en la organización de empresas.

1.1. La empresa y sus fines

- Definición: Una empresa es una organización o entidad que ha sido creada por personas, en las que se unen una serie de factores o recursos, materiales, técnicos, financieros y humanos, para realizar actividades y que persigue unos fines que suelen contemplar el afán de lucro.
  - Existen distintas definiciones desde los puntos de vista legal, financiero, sociológico, comercial, sus objetivos o de sus actividades
  - Por un lado existen gran cantidad de formas legales para una empresa, que van desde las grandes multinacionales (por ejemplo Movistar) hasta las microempresas donde el propietario es el único trabajador.
- Objetivo: La mayoría de las empresas tienen como objetivo la obtención de beneficio económico, pero existen organizaciones, como las empresas públicas, cuyo objetivo es prestar un servicio público y donde el beneficio es algo secundario, por ejemplo la corporación RTVE, Renfe, Sociedad Estatal de Correos y Telecomunicaciones, etc.
- Actividades: Comerciales, financieras, industriales o de servicios, pudiendo mezclar varios tipos de actividades en muchas ocasiones.
- Grupos de interés (stakeholders): Se refiere a los grupos que tienen interés en una empresa, dado que pueden afectar o ser afectados por las actividades de la empresa. Dentro de los grupos de interés podemos encontrar:
  - Propietarios: pueden tener varios objetivos como la rentabilidad de la empresa, su expansión, la sostenibilidad de la empresa a largo plazo, etc.

  - Inversores: su objetivo es rentabilizar su inversión.
  - Trabajadores: su objetivo es el mantenimiento de su puesto de trabajo y el cobro de sus remuneraciones.
  - Acreedores: su objetivo es el cobro de las cantidades adeudadas por la empresa (dentro de éstos podemos incluir a los Bancos).
  - Administración: su objetivo es el cobro de impuestos y el mantenimiento de la empresa (por su generación de riqueza económica, puestos de trabajo y el servicio prestado a la sociedad).
  - Directivos: su objetivo es el crecimiento de la empresa y su beneficio (gran parte de sus ingresos dependen de los bonus que obtienen por ello).
  - Clientes: su objetivo es el mantenimiento y mejora de los productos que compra a la empresa.
  - Ciudadanos en general: sus objetivos pasan por la corrección medioambiental de las empresas y la generación de puestos de trabajo / riqueza.

- El objetivo de una empresa depende de los objetivos de sus grupos de interés en proporción directa a la fuerza que cada grupo tenga en la empresa.

- Ejemplo: En el caso de una empresa cooperativa, donde los propietarios son los trabajadores (por lo que son el principal grupo de poder), el objetivo fundamental es la permanencia de los puestos de trabajo y el pago de las nóminas.

- Ejemplo: En una empresa cuya titularidad es pública (propiedad de una Administración) el fin es la prestación de un servicio público.

- Ejemplo: En una empresa donde los directivos tienen mucho poder (no tienen porqué ser propietarios, como ocurriría en una empresa que cotice en Bolsa) el fin es el crecimiento, etc.

1.2. Organización y estructura de la empresa

- La empresa debe organizar los recursos materiales, humanos, financieros y tecnológicos de los que dispone para la realización de sus actividades.

- Esta organización se realizará a través de una estructura espacio-temporal que será diferente para cada entidad y que por supuesto irá evolucionando con el paso del tiempo.

- Normalmente las empresas suelen organizarse por funciones, a través de departamentos, que se encargan de una serie de tareas definidas previamente. Sin embargo, hay ocasiones en las que las empresas se organizan departamentalmente por ubicaciones geográficas (por Ej. en multinacionales), por tipología de clientes (por Ej. las constructoras), por producto, por operaciones, etc.

- La escala organizativa de una empresa se suele representar a través de un esquema en forma de pirámide donde se indica los tres niveles organizativos, el flujo de información y las decisiones a tomar (Figura. 1.1). Se organiza en los siguientes niveles:

  - Nivel inferior: nivel Operativo, formado por aquellos que desarrollan las actividades del negocio de la empresa.

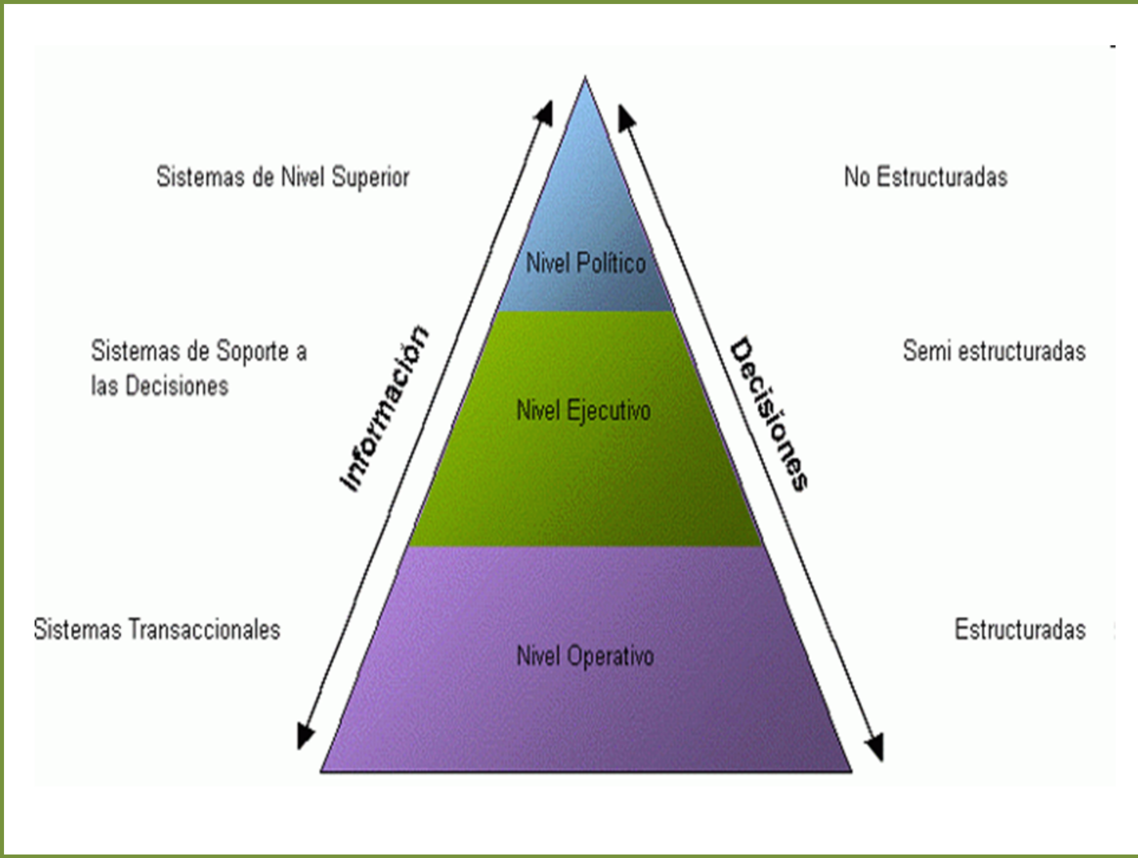


Figura 1.1: Pirámide organizativa.

- Nivel medio: nivel Ejecutivo, que toma decisiones a corto plazo y conforme con las directrices y planificación a medio y largo plazo establecidas en la compañía.
- Nivel superior: nivel Directivo o Político, que marca las directrices de la compañía y realiza la planificación a largo plazo.

- La información deberá fluir de cada uno de estos niveles tanto en dirección ascendente como descendente, aunque las necesidades de datos no son las mismas en todos los niveles. De la misma forma también en todos los niveles se deberán tomar decisiones, pero no serán del mismo tipo, ni con los mismos efectos en la empresa.
- Otro tipo de organización de empresas es a través de Departamentos funcionales, que se encargan de una serie de tareas definidas previamente.
- Tradicionalmente los Departamentos funcionales más comunes son: Aprovisionamiento, Producción, Marketing y Administración, aunque hay empresas que también cuentan con Departamentos de Control de Calidad, I+D, Personal, etc.
- El número y tamaño de los Departamentos funcionales dependerá de cada empresa, condicionados por el tamaño, sector e importancia de las funciones de la compañía y sobre todo de la estructura planteada por el nivel Político.

- En muchos casos se mezclan estructuras departamentales funcionales con estructuras de otro tipo, como las de ubicación geográfica, las de tipo de producto o de cliente. Estas situaciones suelen ocurrir en empresas de tamaño muy grande, en las que es necesaria una especialización importante y en las que un control centralizado (en muy pocas manos) sería imposible.

1.3. El papel de la investigación de operaciones en la organización de empresas.

- Los métodos operativos de gestión que se explican en esta asignatura pertenecen al área científico-técnica denominada 'Investigación de Operaciones'.
- La investigación de operaciones, también llamada, Investigación Operativa (IO) se encarga de la aplicación de herramientas y métodos matemáticos y estadísticos para la resolución de problemas sobre organización, planificación y control en cualquier tipo de sistema, sea artificial como una empresa o natural como pueda ser un río.
- El objeto fundamental de la IO es el de servir como ayuda en la toma de decisiones complejas o muy complejas, de cara a tomar la mejor decisión posible en cada momento.
- En el caso de las empresas, el papel de la IO es fundamental en la toma de decisiones a corto plazo, pero sobre todo, en la toma de decisiones a medio y largo plazo a través de la planificación estratégica de las compañías.
- Las principales cuestiones sobre las que utilizaremos las técnicas de IO dentro de la organización y gestión en las empresas serán:
    - Toma de decisiones, ya sea a través de la optimización como a través de los procesos decisorios.
    - Planificación y gestión a corto, medio y largo plazo
    - Gestión de la Calidad en la empresa
- A continuación pasaremos a describir en qué consiste cada uno de estos temas que posteriormente iremos desarrollando a lo largo del curso.
- Toma de Decisiones:
    - Son fundamentales para la correcta gestión de la empresa, ya que una decisión mala pone en riesgo la solvencia de la compañía y disminuye su rentabilidad.
    - Los procesos de Toma de Decisiones se pueden producir a través de la utilización de herramientas de optimización, que buscan maximizar los conceptos positivos (ingresos, ventas, beneficios, etc.) y minimizar los negativos (costes, sanciones, etc.)
    - También pueden apoyarse en herramientas de Análisis de Decisiones, ya sea para casos en los que se considera un único criterio o para aquellos otros en los que se consideran varios criterios.
- Planificación:
    - El realizar planes a corto, medio o largo plazo es algo fundamental en una empresa, ya que muchas inversiones son productivas al termino de plazos medios o largos.

- En nuestro caso vamos a estudiar con mayor profundidad la planificación de la gestión de proyectos.
- La planificación de la gestión de proyectos es una herramienta fundamental tanto para el desarrollo de proyectos de cara a clientes, como para el desarrollo de proyectos de inversión.
- En general la planificación es una herramienta fundamental para el desarrollo futuro y presente de cualquier compañía, sobre todo de cara al crecimiento y rentabilidad futura.

- Gestión de la Calidad:
  - Hoy en día nadie puede dudar de la importancia de la existencia de sistemas de control y gestión de calidad en cualquier empresa. Han representado uno de los grandes avances industriales del siglo XX y deberán desarrollarse durante el actual siglo.
  - Por un lado aumentan la rentabilidad, aumentando las ventas y disminuyendo los costes (por las menores devoluciones y demandas).
  - Por otro lado garantizan la competitividad con el entorno, haciendo el producto más atractivo hacia el cliente y dejando la puerta siempre abierta de la ingeniería de procesos y de la gestión del cambio.

Capítulo 2

Programación lineal

2.1. Introducción

Este capítulo está estructurado en la siguientes secciones:

- Modelos de la programación lineal.
- Introducción a las técnicas de resolución.
- Postoptimización.

Nota. Este tema también se puede consultar y/o ampliar en los Capítulos 4 y 5 del siguiente libro: Rardin, R. L., ‘Optimization in operations research’, Editorial Prentice Hall, 1998.

2.2. Modelos de la programación lineal

Objetivo:

- El objetivo de esta sección es aprender a *formular problemas* de ‘programación lineal’ (PL), también llamada ‘optimización lineal’.
- Notar que plantearemos los problemas pero *no los resolveremos.* En la sección siguiente veremos cómo se pueden resolver.
- A menudo simplificaremos la expresión ‘tenemos un problema de PL’ por ‘tenemos un PL’.

Apartados:

- Modelos de asignación de recursos
- Modelos de mezclas
- Modelos de planificación de operaciones

- Modelos de gestión de personal
- Modelos temporales (multiperiodo)

2.2.1. Modelos de asignación de recursos

Ejemplo 1

Objetivo: Juan, estudiante de ingeniería, quiere maximizar sus *resultados académicos.*

Datos:

- Número total de *horas disponibles* para estudiar: 30 h.
- La estimación del *incremento de la nota* de cada materia aportado por cada hora de estudio viene dado en la siguiente tabla:

Investigación Operativa (IO)	2 %
Ingeniería Económica (IE)	3 %
Estadística (ES)	1 %
Programación (PR)	5 %

- Juan quiere:
  - Que el número de *horas de estudio dedicadas a IO* sea superior al resto.
  - Un máximo de *10 h de estudio* por materia.

Operaciones 1:

- Definimos las siguiente *variables de decisión:*

  $x_j :=$ *Horas* dedicadas a cada materia,

$$j \in \{\text{IO, IE, ES, PR}\}.$$

- La *formulación* como problema de programación lineal (PL) es:
  - *Maximizar* el incremento acumulado de las notas de Juan (en %):

$$z(x) = 2\, x_{IO} + 3\, x_{IE} + 1\, x_{ES} + 5\, x_{PR}.$$

  - *Sujeto a* las siguientes restricciones:

$$
\begin{array}{ll}
x_{IO}+x_{IE}+x_{ES}+x_{PR}=30 & \textit{(asignación de las horas)}\\
x_{IO}\geq x_{IE} & \textit{(IO la que más)}\\
x_{IO}\geq x_{ES} & \\
x_{IO}\geq x_{PR} & \\
x_{IO}\leq 10 & \textit{(máximo 10 h)}\\
x_{IE}\leq 10 & \\
x_{ES}\leq 10 & \\
x_{PR}\leq 10 & \\
x_{IO}\geq 0 & \textit{(mínimo 0 h)}\\
x_{IE}\geq 0 & \\
x_{ES}\geq 0 & \\
x_{PR}\geq 0 &
\end{array}
$$

- De forma compacta podemos escribir:

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = 2\,x_{IO}+3\,x_{IE}+1\,x_{ES}+5\,x_{PR}, & \textit{(incremento total)}\\
\text{s. a.} & x_{IO}+x_{IE}+x_{ES}+x_{PR}=30, & \textit{(asignación)}\\
 & x_{IO}\geq x_j,\quad j\in\{\text{IE, ES, PR}\} & \textit{(IO la que más)}\\
 & x_j\leq 10,\quad j\in\{\text{IO, IE, ES, PR}\} & \textit{(máximo 10 h)}\\
 & x_j\geq 0.\quad j\in\{\text{IO, IE, ES, PR}\} & \textit{(mínimo 0 h)}
\end{array}
$$

donde *'max'* significa 'Maximizar' y *'s. a.'* significa 'Sujeto a (las siguientes restricciones)'.

Solución:

- Más adelante veremos cómo se puede *resolver* este tipo de problemas de optimización.
- De momento nos tenemos que conformar con saber que una *solución óptima* vendría dada por el siguiente número de horas:

$$x_{IO}^*=10,\quad x_{IE}^*=10,\quad x_{ES}^*=0,\quad x_{PR}^*=10.$$

- Con esta asignación óptima el *incremento acumulado* para todas las notas de Juan sería $z^* = 100\,\%$:
$$z^* = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 10 = 100.$$
- Notar que para indicar valores óptimos usamos los símbolos x^* y z^*.

General

- *Modelos de asignación:*
  - *Repartimos* un recurso entre varias actividades.
  - En el ejemplo anterior hemos repartido 30 horas de estudio entre varias asignaturas.
- *Variables de decisión:*
  - Determinan qué *cantidad de recurso* asignamos a cada actividad.
- *Problema de Programación Lineal (PL):*
  - El modelo o problema de asignación es un caso particular de PL.
  - Un problema de optimización es un PL si su función objetivo $z(x)$ y sus restricciones son funciones *lineales.*

$$\begin{array}{lll} \min & z(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & \textit{(función objetivo)} \\ \text{s. a.} & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & \textit{(restricciones)} \\ & \vdots & \\ & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m & \\ & x_i \geq 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\} & \end{array}$$

  - En este PL tenemos sólo restricciones de igualdad. En general un PL puede tener restricciones tanto de *igualdad* como de *desigualdad.*
  - En un PL nos puede interesar maximizar un *beneficio* (dinero, fiabilidad, seguridad, etc.) o minimizar un *coste* (dinero, tiempo, distancia, etc.). Escribiremos ‘min’ o ‘max’ según cada caso.
- *Expresión matricial de un PL:*
  - Notar que en el anterior PL usando el *producto escalar* podemos escribir la función objetivo como
$$z(x) = c^{\mathsf{T}} x.$$
  - Usando el producto de *matriz por vector* podemos escribir las anteriores restricciones en formato matricial
$$Ax = b,$$
donde la matriz A y el vector b están definidos a partir de los *coeficientes* a_{ij} y b_i, respectivamente.

- De esta forma podemos escribir el anterior PL en formato matricial como sigue:

$$\begin{array}{lll} \min & c^{\mathsf{T}} x & \textit{(función objetivo)} \\ \text{s. a.} & Ax = b & \textit{(restricciones)} \\ & x \geq 0. & \textit{(restricciones de no negatividad)} \end{array}$$

2.2.2. Modelos de mezclas

Ejemplo 2 (Problema de la dieta)

Objetivo:

- Una compañía quiere decidir la *composición* de mínimo coste de un pienso para gallinas.
- *Formula* este problema de optimización como un PL (no hay que resolverlo).

Datos:

- La compañía debe fabricar 10.000 Kg de pienso.
- Cada Kg de *pienso* debe contener:
  - Como máximo 10 mg de *sodio.*
  - Al menos 50 g de *fibra.*
  - Al menos 400 g de *maíz.*
- El pienso se va a fabricar a partir de tres ingredientes: maíz, trigo y avena.
- La composición y precio por Kg de cada *ingrediente* es:

Ingrediente	g *Fibra* / Kg	mg de *Sodio* / Kg	*Euros* / Kg
Maíz (1)	40	10	0.15
Trigo (2)	90	15	0.12
Avena (3)	30	5	0.20

Operaciones 2:

- Aunque la compañía debe fabricar 10.000 Kg de pienso, es suficiente calcular la composición de *1 Kg* y luego aplicar la composición resultante a todo el proceso de fabricación.
- Definimos las *variables de decisión* siguientes:

  $x_j :=$ Kg del ingrediente j por cada Kg de pienso,

  $\forall j \in \{1, 2, 3\}$.
- Tenemos que minimizar la siguiente *función objetivo* que nos da el coste en euros de un Kg de pienso:

$$z(x) = 0{,}15\, x_1 + 0{,}12\, x_2 + 0{,}20\, x_3.$$

- Tenemos que imponer las siguientes restricciones a nuestro PL:

  - La *mezcla* de los ingredientes debe pesar 1 Kg:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ Kg.}$$

  - Cada Kg de pienso contiene como máximo 10 mg de *sodio.*

$$10x_1 + 15x_2 + 5x_3 \leq 10 \text{ mg.}$$

  - El pienso debe contener al menos 50 g de *fibra.*

$$40x_1 + 90x_2 + 30x_3 \geq 50 \text{ g.}$$

  - El pienso contiene al menos 400 g de *maíz.*

$$x_1 \geq 0{,}4 \text{ Kg.}$$

  - La cantidad de cada ingrediente debe ser *positiva:*

    $x_j \geq 0, \qquad \forall j \in \{1, 2, 3\}.$

Solución: El PL para calcular la *composición* de mínimo coste corresponde a:

$$\begin{array}{lll}
\min & z = 0{,}15\, x_1 + 0{,}12\, x_2 + 0{,}20\, x_3 & \textit{(coste)} \\
\text{s. a.} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \textit{(composición de 1 kg)} \\
& 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 \leq 10 & \textit{(sodio)} \\
& 40x_1 + 90x_2 + 30x_3 \geq 50 & \textit{(fibra)} \\
& x_1 \geq 0{,}4 & \textit{(maiz)} \\
& x_i \geq 0 \quad i \in \{1, 2, 3\} & \textit{(no negatividad)}
\end{array}$$

General

- *Modelos de mezclas:* En los modelos de asignación *repartimos* un recurso. En los modelos de mezclas los *combinamos.*
- *Variables de decisión:* Determinan qué *cantidad de cada recurso* incluimos en la mezcla.
- *Restricciones de composición:* Determinan cotas superiores y/o inferiores a las *propiedades de la mezcla* resultante.

2.2.3. Modelos de planificación de operaciones

Ejemplo 3

Objetivo:

- Una compañía quiere *planificar su producción* de zumo de naranja para maximizar su beneficio.
- *Formula* este problema de optimización como un PL (no hay que resolverlo).

Datos:

- El *precio de venta al público* del zumo fabricado es de 1500 Euros/Tonelada.
- La compañía estima que tiene una *demanda* de 15000 toneladas (T) de zumo.
- La compañía fabrica su zumo a partir de *naranjas* y/o *concentrado* de zumo de naranja (CZN).

Producto	*Precio* (Euros/ T)	*Efectividad* (T. de zumo / T. de producto)	*Existencias* (T)
Naranjas	200	0.2	10000
CZN	1600	2	Sin límite

Operaciones 3:

- Definimos las siguientes *variables de decisión:*
  - x_1 := Toneladas de *naranjas.*
  - x_2 := Toneladas de *concentrado* de zumo de naranja.
  - x_3 := Toneladas de *zumo* de naranja producido.
- La *formulación* como problema de PL es:

$$\begin{array}{lcl}
\max & z = -200x_1 - 1600x_2 + 1500x_3 & \textit{(beneficio)} \\
\text{s. a.} & 0{,}2x_1 + 2x_2 = x_3 & \textit{(ecuación de balance)} \\
 & x_1 \leq 10000 & \textit{(límite de existencias)} \\
 & x_3 \leq 15000 & \textit{(límite de ventas)} \\
 & x_i \geq 0 \quad i \in \{1,2,3\} &
\end{array}$$

Solución: Ver apartado 'Operaciones'.

General

- *Modelos de planificación de operaciones:* Debemos decidir *qué* hacer, *cuando* y *donde.*
- *Variables de decisión:* Las variables de decisión *enteras* y de gran magnitud se suelen tratar como variables *continuas* para simplificar la resolución del problemas.
- *Restricciones de balance:* El *flujo entrante* de materias primas debe ser igual al *flujo saliente* de productos manufacturados *(ecuación de balance).* Intervienen *factores de conversión.*

2.2.4. Modelos de gestión de personal

Ejemplo 4

Objetivo:

- Una agencia estatal quiere *optimizar* el número de operarios de su plantilla, pero cubriendo sus necesidades operativas.
- *Formula* este problema de optimización como un PL (no hay que resolverlo).

Datos:

- De los 5 días laborables, los empleados *trabajan 4 días* a razón de 10 h/día y tienen un *día libre,* según su turno.

Turno	*Día libre*
1	Martes
2	Miércoles
3	Jueves

- El *número de empleados* requeridos cada día de la semana se detalla a continuación.

L	M	Mx	J	V
10	7	7	7	9

Operaciones 4:

- Definimos las siguientes *variables de decisión:*

  $x_i :=$ Número de empleados según el turno i, $i \in \{1, 2, 3\}$.

- La *formulación* como problema de PL es:

$$
\begin{array}{lll}
\min & z = x_1 + x_2 + x_3 & \textit{(personal total)} \\
\text{s. a.} & x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 & \textit{(cubrimos el lunes)} \\
& x_2 + x_3 \geq 7 & \textit{(cubrimos el martes)} \\
& x_1 + x_3 \geq 7 & \textit{(cubrimos el miércoles)} \\
& x_1 + x_2 \geq 7 & \textit{(cubrimos el jueves)} \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 9 & \textit{(cubrimos el viernes)} \\
& x_i \geq 0 \quad i \in \{1, 2, 3\} &
\end{array}
$$

Solución: Ver apartado ‘Operaciones’.

General

- *Modelos de gestión de personal:*
  - Los modelos de *gestión de operaciones* deciden qué tarea realizar en cada momento de forma que los recursos sean usados eficientemente.
  - En la gestión de personal decidimos qué *tipo* de empleado y *cuántos* de cada tipo deben realizar cada tarea.
- *Restricciones de cubrimiento:*
  - En la planificación de los turnos debemos asegurar que el número de operarios asignados cubre las *necesidades de cada periodo.*
  - Para ello imponemos la siguiente *restricción de cubrimiento:*

$$
\sum_{\text{turnos}} \text{(Producción / Operario)} \times \text{(Operarios en servicio)}
$$
$$
\geq \textit{Necesidades} \text{ del periodo.}
$$

2.2.5. Modelos de planificación multiperiodo

Ejemplo 5

Objetivo:

- Una compañía de fabricación de palas para la nieve quiere *optimizar su producción* y almacenaje.
- *Formula* este problema de optimización como un PL (no hay que resolverlo).

Datos:

- El *coste* de fabricación y almacenamiento de las palas para cada trimestre se detalla en la siguiente tabla (en miles de euros por cada mil palas):

T1	T2	T3	T4
13	12	11	10

- El *stock* de palas al principio del primer trimestre es de 0 palas.
- La *demanda* en miles de palas para cada trimestre se detalla en la siguiente tabla:

T1	T2	T3	T4
11	48	64	15

Operaciones 5:

- Definimos las siguientes *variables de decisión:*
  - $x_t :=$ Miles de *palas fabricadas* durante el trimestre $t \in T := \{1, 2, 3, 4\}$.
  - $s_t :=$ Miles de *palas en stock,* al final del trimestre $t \in T$.
- Tenemos que minimizar el *coste* de fabricación y almacenamiento de las palas (miles euros):

$$z(x) = 13\, x_1 + 12\, x_2 + 11\, x_3 + 10\, x_4.$$

- La formulación de las *ecuaciones de balance* para los 4 trimestres es ($s_0 = 0$):

$$s_0 + x_1 = 11 + s_1 \quad \textit{(primer trimestre)}$$

$$s_1 + x_2 = 48 + s_2 \quad \textit{(segundo trimestre)}$$

$$s_2 + x_3 = 64 + s_3 \quad \textit{(tercer trimestre)}$$

$$s_3 + x_4 = 15 + s_4 \quad \textit{(cuarto trimestre)}$$

Solución: El PL para optimizar la *producción* y almacenamiento de las palas corresponde a:

$$
\begin{array}{lll}
\min & z = 13\,x_1 + 12\,x_2 + 11\,x_3 + 10\,x_4 & \textit{(coste)} \\
\text{s. a.} & s_0 = 0 & \textit{(stock inicial)} \\
& s_0 + x_1 = 11 + s_1 & \textit{(primer trimestre)} \\
& s_1 + x_2 = 48 + s_2 & \textit{(segundo trimestre)} \\
& s_2 + x_3 = 64 + s_3 & \textit{(tercer trimestre)} \\
& s_3 + x_4 = 15 + s_4 & \textit{(cuarto trimestre)} \\
& s_t \geq 0 \quad t \in T & \textit{(no negatividad)} \\
& x_t \geq 0 \quad t \in T & \textit{(no negatividad)}
\end{array}
$$

General

- *Modelos de planificación multiperiodo:*
  - Los modelos estudiados hasta ahora se han limitado a un solo periodo *(modelos estáticos).*
  - En muchas ocasiones hay que planificar en un horizonte de tiempo que abarca varios periodos *(modelos dinámicos* o *multiperiodo).*
- *Variables de decisión:* En estos problemas, muchas variables de decisión tiene una *versión para cada periodo.*
- *Restricciones de balance:*
  - Describen la *evolución temporal* de una magnitud.
  - A menudo es suficiente describir la evolución experimentada entre dos *periodos consecutivos.*

$$\text{Situación}_t + \text{Cambios}_t = \text{Situación}_{t+1}.$$

2.3. Introducción a las técnicas de resolución de un PL

En esta sección veremos dos apartados:

- Resolución *geométrica* de un problema PL.
- Problema PL en *formato estandar.*

2.3.1. Resolución geométrica de un PL

Ejemplo 6 (Representación de rectas)

Datos:

- Consideramos la recta R_k definida por la siguiente *ecuación:*

$$2x_1 + 3x_2 = k.$$

- Una notación más *compacta* consiste en decir: Consideramos la recta R_k

$$R_k \equiv 2x_1 + 3x_2 = k.$$

Objetivo:

1. *Representa* las rectas R_k para $k = 6, 12, 18$.
2. Supongamos que en un PL su *función objetivo* es

$$z(x) = 2x_1 + 3x_2$$

   ¿Cuánto vale la función objetivo para todos los puntos que están sobre la *recta* R_6? ¿Y los que están en R_{12}? ¿Y en R_{18}?
3. Supongamos que en el anterior PL estamos *maximizando* un beneficio. ¿En cuál de las anteriores rectas la función objetivo alcanza un mejor valor?
4. Escribe la función objetivo como *producto escalar* $c^\intercal x$.
5. ¿Qué *ángulo* forma el vector c con las rectas anteriores?

Operaciones 6:

1. Podemos resolver la *primera cuestión* como sigue:

   - Una forma sencilla de representar una recta es calcular *dos puntos* por donde pasa dicha recta.

- En la tabla siguiente tenemos dos puntos para cada recta R_k para $k = 6, 12, 18$.

k	x_1	x_2
6	0	2
	3	0
12	0	4
	6	0
18	0	6
	9	0

- A continuación representamos las correspondientes *rectas* .

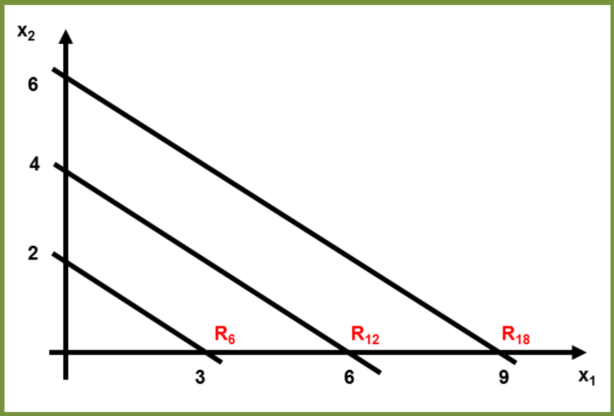


Figura 2.1: Las tres rectas son *paralelas.*

2. Para todos los puntos que están sobre R_6, R_{12} ó R_{18} la *función objetivo* vale 6, 12 ó 18 respectivamente.

3. La función objetivo alcanza *mejor valor* en los puntos que están en R_{18} que en los puntos que están en las otras dos rectas.

4. Podemos escribir la función objetivo usando el *producto escalar:*

$$z(x) = 2x_1 + 3x_2 = c^{\mathsf{T}} x$$

donde $c^{\mathsf{T}} = (2,\ 3)$ y $x = \binom{x_1}{x_2}$.

5. En la Figura 2.2 observamos que el vector c es *perpendicular* a las tres rectas.

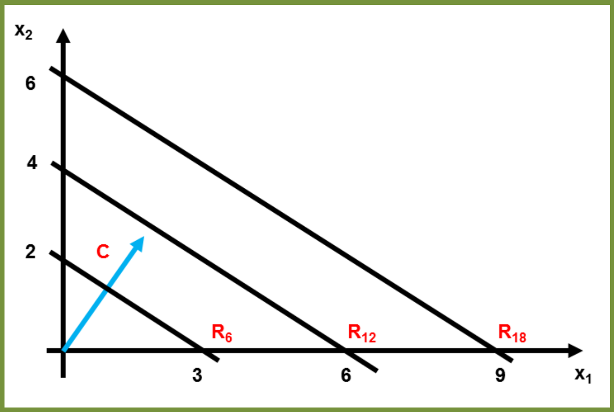


Figura 2.2: c es perpendicular a las tres rectas.

Solución:

1. Ver apartado 'Operaciones' (cuestión 1).
2. Para todos los puntos que están sobre $R_6,\ R_{12}$ o R_{18} la función objetivo vale $6,\ 12$ ó 18, respectivamente.
3. La función objetivo alcanza mejor valor en los puntos que están en R_{18}.
4. $z(x) = c^{\mathsf{T}}x$ donde $c^{\mathsf{T}} = (2,\ 3)$ y $x = \binom{x_1}{x_2}$.
5. 90º.

General (Curvas de nivel en un PL)

- Consideramos un PL de *dimensión dos,* cuya función objetivo es

$$z(x) = c^{\mathsf{T}}x,$$

donde $c^{\mathsf{T}} = (c_1,\ c_2)$ y $x = \binom{x_1}{x_2}$.

- Para todos los puntos sobre la *recta*

$$R_k \equiv c^{\mathsf{T}}x = k$$

el valor de la función objetivo es k.

- Las rectas R_k son *perpendiculares* a c y por tanto paralelas entre ellas.

- La *'curva de nivel k'* de $z(x)$ es la curva que cumple

$$z(x) = k.$$

Notar que las curvas de nivel asociadas a una función lineal son en realidad *rectas.*

- Por lo tanto, las *curvas de nivel* de $z(x)$ son las rectas R_k para todo $k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 7 (Representación de semiplanos)

Datos: Consideramos los *semiplanos* S_1 y S_2 definidos por la siguientes *inecuaciones*

$$S_1 \equiv 2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$S_2 \equiv x_1 + 2x_2 \leq 6.$$

Objetivo:

1. Representa la región del *primer cuadrante* del plano que cumple la primera inecuación. Nota: el primer cuadrante es la región del plano con $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$.
2. Representa la región del primer cuadrante del plano que cumple las dos inecuaciones anteriores.

Operaciones 7:

1. Podemos resolver la *primera cuestión* como sigue:

   - En primer lugar representamos la *recta* determinada por la ecuación $2x_1 + x_2 = 6$.

k	x_1	x_2
6	0	6
	3	0

   - Esta recta divide el plano en en *dos semiplanos:* el semiplano A que contiene el punto $(0,\ 0)$ y el semiplano B que no lo contiene.
   - S_1 sólo puede ser A o B.
   - Dado que el punto $(0,\ 0)$ cumple la inecuación que define S_1

     $$2 \cdot 0 + 0 = 0 \leq 6$$

     podemos concluir que S_1 coincide con A.
   - En caso contrario concluiríamos que S_1 coincide con B.
   - Ver Figura 2.3.

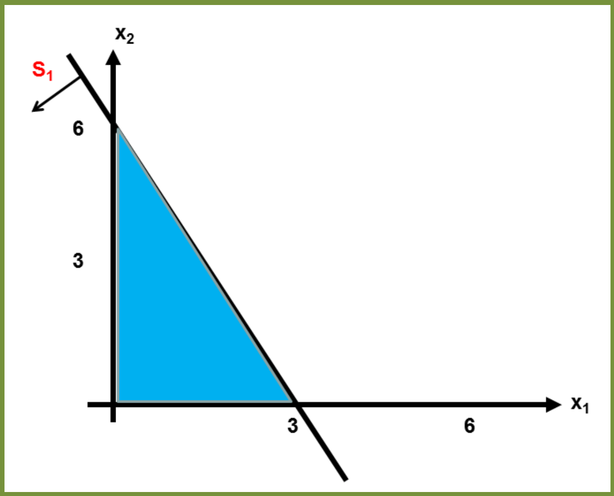


Figura 2.3: Región determinada por S_1.

2. Podemos resolver la *segunda cuestión* como sigue:

   - En primer lugar representamos los *semiplanos* S_1 y S_2 en el primer cuadrante.
   - La región que nos piden corresponde a la *intersección* de S_1 y S_2 en el primer cuadrante.
   - Ver Figura 2.4.

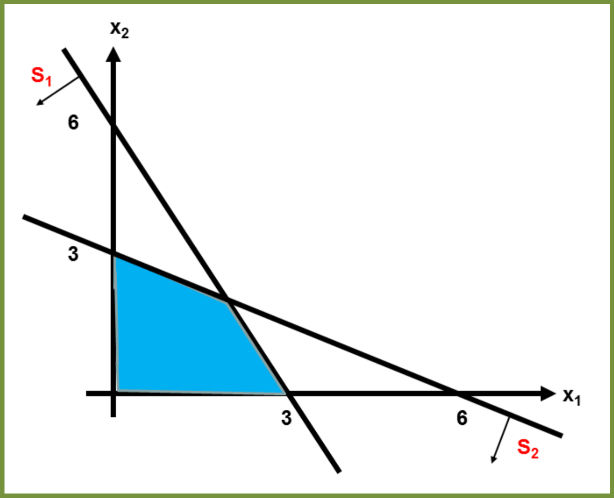


Figura 2.4: Región determinada por S_1 y S_2.

Solución: Ver apartado ‘Operaciones’.

General (Semiplanos en un PL)

- Consideramos un PL de *dimensión dos* cuyas restricciones son todas de desigualdad y con variables positivas.

- Cada una de dichas desigualdades corresponde a una inecuación que determina un *semiplano.*
- La *región factible* del PL corresponde a la región determinada por los puntos que cumplen todas las restricciones.
- En este caso, la región factible corresponde a la región del primer cuadrante donde *intersectan* todos los semiplanos asociados a las restricciones del PL.

Ejemplo 8 (Resolución gráfica de un PL)

Datos: Consideramos el siguiente PL

$$\begin{array}{rll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 & \\ \text{s.a.} & 2x_1 + x_2 \leq 6 & (\text{Semiplano } S_1) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 & (\text{Semiplano } S_2) \\ & x \geq 0. & \end{array}$$

Objetivo:

1. Resuelve este PL de forma gráfica.
2. ¿Qué solución obtendríamos si en vez de maximizar, quisiéramos minimizar z?

Operaciones 8: El primer objetivo podemos resolverlo como sigue:

- En primer lugar representamos la región factible y la mejor curva de nivel asociada a la función objetivo. Ver Figura 2.5.
- El punto óptimo x^* corresponde a la intersección de las rectas que determinan los semiplanos S_1 y S_2.
- Por lo tanto, podemos obtener x^* resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$2x_1 + x_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

- La solución de este sistema es $x^* = (2 \;\; 2)^\intercal$ y por tanto $z^* = c^\intercal x^* = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10.$

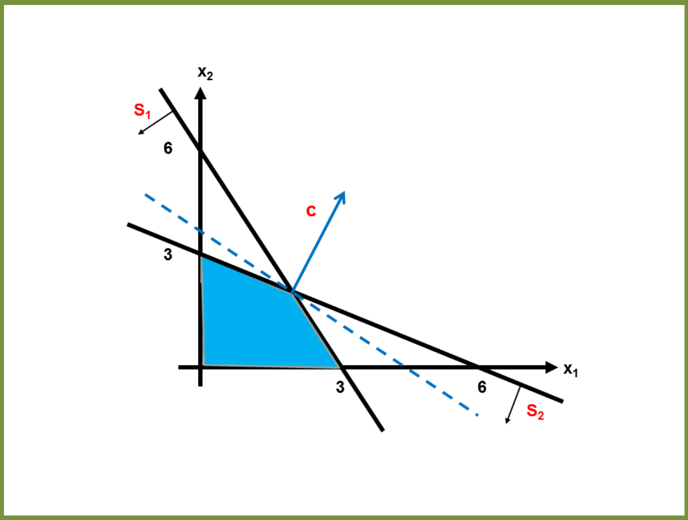


Figura 2.5: Maximización: Resolución gráfica.

El segundo objetivo podemos resolverlo de forma análoga:

- Sin embargo, en caso de minimización debemos movernos en la dirección de $-c$ para buscar el mejor punto.
- En la Figura 2.6 podemos ver que ahora el mejor punto es el origen de coordenadas.
- Por tanto la solución óptima es $x^* = (0 \;\; 0)^\intercal$ y $z^* = c^\intercal x^* = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$.

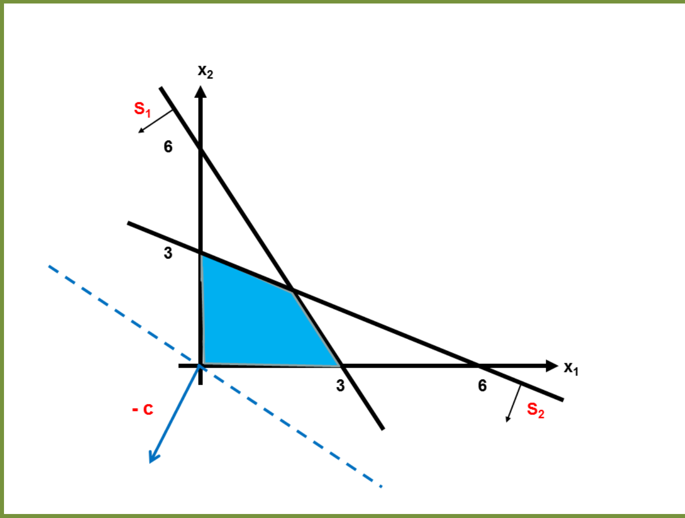


Figura 2.6: Minimización: Resolución gráfica.

Solución:

1. El mejor punto es $x^* = (2 \;\; 2)^\intercal$ con valor de la función objetivo $z^* = 10$.

2. El mejor punto es $x^* = (0\ \ 0)^\intercal$ con valor de la función objetivo $z^* = 0$.

General (Resolución gráfica de un PL)

- Consideramos un PL de *dimensión dos,* donde se quiere *maximizar* $z(x) = c^\intercal x$.
- Para resolverlo de forma *gráfica* podemos seguir los siguientes pasos:
    1. Representar el *conjunto factible.*
    2. Representar el *vector* c.
    3. Representar la *recta* $R_{k^*} \equiv c^\intercal x = k^*$ tal que:
        a) Es perpendicular a c.
        b) Intersecta con el conjunto factible,
        c) k^* tiene el valor máximo posible.
    4. Elegir un *vértice* factible que pertenezca a R_{k^*} y que llamamos x^*.
    5. Determinar las coordenadas exactas de x^* resolviendo el *sistema lineal* asociado a las restricciones que determinan x^*.
    6. La *punto óptimo* del PL es x^* y el *beneficio* óptimo es $z(x^*)$.
- En caso de *minimizar,* hacemos lo mismo salvo que en el anterior algoritmo debemos sustituir c por $-c$.

Ejemplo 9 (Fabricación de trofeos)

Datos:

- Una compañía produce *trofeos* para fútbol y trofeos para tenis.

Tipo de trofeo	*Beneficio* (Euros/trofeo)	*Madera* (pies/trofeo)
Fútbol	12	4
Tenis	9	2

- En el almacén tenemos:
    - 1000 *adornos* para el trofeo de fútbol,
    - 1500 *adornos* para el trofeo de tenis,
    - 1750 *placas* para la inscripción de cada trofeo,
    - 4800 pies de *madera*
- Se supone que se vende toda la producción.

Objetivo:

- Esta compañía quiere *maximizar sus beneficios.* ¿Cuántos trofeos de cada tipo debería fabricar? ¿Cuánto sería su beneficio?
- Buscar una buena *solución por tanteo.*

Operaciones: Se deja al lector.

Ejemplo 10 (Fabricación de trofeos - continuación)

Objetivo:

1. *Formular* este problema de optimización como un PL.
2. Resolverlo de forma *gráfica.*

Datos: Ver ejemplo anterior.

Operaciones 10:

1. Podemos resolver la *primera cuestión* como sigue:

   - Definimos las *variables de decisión*

     $x_j :=$ Número de trofeos a producir del deporte j,

     $$j \in J := \{1, 2\} = \{\text{Fútbol, Tenis}\}.$$

   - Finalidad del PL: Decidir los valores de $x_j,\ j \in J$, para *maximizar* el beneficio.

   - La *formulación* como problema de PL es:

$$\begin{array}{lllll} \max & z = 12x_1 + 9x_2 & & & \textit{(ganancia total)} \\ \text{s. a.} & x_1 & \leq 1000 & & \textit{(adornos fútbol)} \\ & x_2 & \leq 1500 & & \textit{(adornos tenis)} \\ & x_1 + x_2 & \leq 1750 & & \textit{(placas)} \\ & 4x_1 + 2x_2 & \leq 4800 & & \textit{(madera)} \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

2. Podemos resolver la *segunda cuestión* como sigue:

   - En primer lugar representamos la *región factible* (ver Fig. 2.7).

   - En segundo lugar representamos las *curvas de nivel* asociadas a la función objetivo (Fig. 2.7).

   - Estas curvas de nivel son las *rectas* R_k perpendiculares al vector $c^\intercal = (12,\ 9)$.

   - El punto óptimo corresponde a la *intersección* de la región factible con la recta R_k con un k^* máximo.

   - A simple vista *no sabemos* cuanto vale este k^*.

   - Sin embargo, en la Fig. 2.7 observamos que el punto óptimo corresponde al *vértice* de la región factible determinado por la intersección de las restricciones etiquetadas como *'placas'* y *'madera'* (ver la formulación del PL).

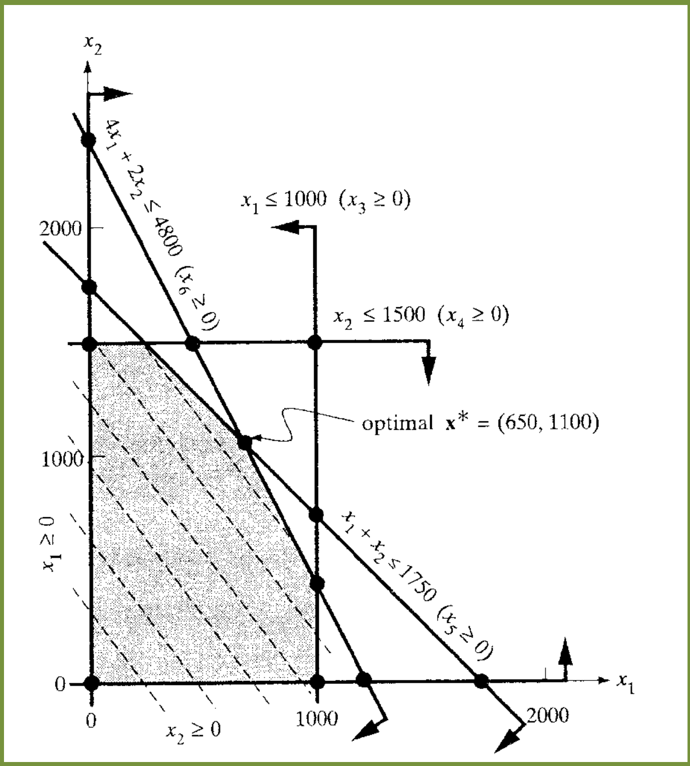


Figura 2.7: *Región factible.*

- Para determinar con exactitud las coordenadas de este punto tenemos que resolver el *sistema lineal* asociado:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1750 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 4800 \end{aligned}$$

- Resolviéndolo obtenemos el *punto óptimo*

$$x^* = (650,\ 1100).$$

- Para obtener el *beneficio óptimo* calculamos

$$z(x^*) = 12 \cdot 650 + 9 \cdot 1100 = 17700.$$

- Notar que en este caso la mejor curva de nivel es R_{17700}.

Solución:

1. Ver apartado 1.

2. La *solución óptima* corresponde a fabricar 650 y 1100 trofeos de fútbol y de tenis, respectivamente. El *beneficio óptimo* es de 17700 euros.

General (Tipos de puntos en un PL)

- *Tipos de puntos:*
  - *Factible:* Cumple todas las restricciones.
  - *Infactible:* No es factible.
  - *Frontera:* En al menos una desigualdad se cumple la igualdad.
  - *Interior:* Punto factible que no es punto frontera.
  - *Extremo:* No están contenidos en ningún segmento factible. Son los vértices del conjunto factible.
  - *Óptimo:* Punto factible con el mejor valor de la función objetivo.
- *Tipos de conjuntos:* Con los puntos anteriores, podemos formar:
  - El conjunto factible.
  - La frontera del conjunto factible.
  - El interior del conjunto factible.
  - El conjunto óptimo.
- *Propiedades de los puntos óptimos:*
  - Todo punto óptimo de un PL está en la *frontera.*
  - Un PL puede tener 0, 1 ó infinitos puntos óptimos:
    - *0 puntos óptimos:* Ocurre cuando el PL es infactible o no acotado.
    - *1 punto óptimo:* Necesariamente es un punto extremo del conjunto factible.
    - *Infinitos puntos óptimos:* Algunos de ellos son puntos extremos y el resto no.

2.3.2. Problema PL en formato estandar

Ejemplo 11 (Rardin, pag. 181, Ejercicio 5.3 b)

Objetivo: Pasar a *formato estandar* el siguiente PL.

Datos:

$$\begin{array}{lll}
\text{min} & z = 15(2x_1 + 8x_2) - 4x_3 & \\
\text{s. a.} & 2(10 - x_1) + x_2 + 5(9 - x_3) & \geq 10 \\
& x_1 + 2x_3 & \leq x_3 \\
& 2x_2 + 18x_3 & = 50 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 &
\end{array}$$

Operaciones 11:

$$\begin{array}{lll} \min & z = 30x_1 + 120x_2 - 4x_3 & \\ \text{s. a.} & -2x_1 + x_2 - 5x_3 & \geq -55 \\ & x_1 + x_3 & \leq 0 \\ & 2x_2 + 18x_3 & = 50 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{lll} \min & z = 30x_1 + 120x_2 - 4x_3 & \\ \text{s. a.} & -2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 & = -55 \\ & x_1 + x_3 + x_5 & = 0 \\ & 2x_2 + 18x_3 & = 50 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{array}$$

General

- *PL en formato estandar (versión expandida):*

$$\begin{array}{llll} \min & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & & \textit{(función objetivo)} \\ \text{s. a.} & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 & \textit{(m restricciones)} \\ & \vdots & & \\ & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m & \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n & & \textit{(restricciones} \\ & & & \textit{de no negatividad)} \end{array}$$

  donde:

  x_j *variable de decisión,*

  c_j *coste* de x_j,

  a_{ij} *coeficiente* de la i-ésima restricción correspondiente a x_j,

  b_i *término derecho* de la restricción i (en inglés: Right-hand side, RHS).

  m número de restricciones,

  n número de variables de decisión.

- *PL en formato estándar (versión sumatorio):*

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{s. a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & \text{para todo } j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

- *PL en formato estándar (versión matricial):* (Repaso de matrices: Rardin, pag. 185.)

$$\begin{array}{ll} \min & c'x \\ \text{s. a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- *Cotas superiores:* Un PL con variables acotadas superiormente por el vector u, tiene el siguiente formato:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c'x \\ \text{s. a.} & Ax = b \\ & 0 \leq x \leq u \end{array}$$

- *PL de maximización y software:*
  - A menudo al usar *software* para resolver un PL sólo tenemos la opción de minimizar.
  - En este caso para resolver un PL de *maximización* podemos usar el siguiente procedimiento:
    1. *Transformar* nuestro PL de maximización en un PL de minimización, es decir, en vez de resolver 'max $c^\intercal x$' resolvemos 'min $[-c^\intercal x]$'
    2. Si z^* es el *valor óptimo* del problema de minimización, entonces el valor óptimo del problema de maximización original es $-z^*$.
  - Este procedimiento se basa en la siguiente *propiedad*

$$\text{max } c^\intercal x = -\text{ min } [-c^\intercal x]$$

2.4. Postoptimización

Las ideas principales de la postoptimización son:

- *Datos estimados:* Algunos de los parámetros que definen un PL más que datos reales son estimaciones. ¿Qué *confianza* nos merece el óptimo PL calculado ante posibles errores de estimación de nuestros parámetros?
- *Postoptimización:* La postoptimización, también conocida como análisis de sensibilidad, estudia cómo y cuánto varía el óptimo frente a *cambios* en los parámetros del PL.
- *Problema dual:* Para todo PL podemos definir el denominado PL dual que puede usarse como *herramienta* de análisis de sensibilidad.

Respecto a la postoptimización veremos las siguientes seccíones:

1. La perspectiva de actividades frente a recursos.
2. Sensibilidad cualitativa.
3. Sensibilidad cuantitativa.
4. Formulación del problema lineal dual.
5. Relaciones primal dual.
6. Salidas de ordenador y cambios de un solo parámetro.

Nota. Las secciones que siguen hasta el final del tema, también se pueden consultar y/o ampliar en el Capítulo 7 del siguiente libro: Rardin, R. L., ‘Optimization in operations research’, Editorial Prentice Hall, 1998.

2.5. Actividades frente a recursos

Ejemplo 12

Datos: Dado el PL

$$\begin{array}{llllllr}
\max & +13x_1 & +24x_2 & +5x_3 & +50x_4 & & \\
\text{s. a.} & +1x_1 & +3x_2 & & & \geq & 89 \\
 & & & +3x_3 & +5x_4 & \geq & 60 \\
 & +10x_1 & +6x_2 & +8x_3 & +2x_4 & \leq & 608 \\
 & & +1x_2 & & +1x_4 & \leq & 28 \\
 & x \geq 0 & & & & &
\end{array}$$

Objetivo: Dar una *interpretación* genérica de la función objetivo y restricciones.

Operaciones 12:

- *Función objetivo:*
  - Maximizamos el beneficio asociado a 4 actividades.
  - La variable de decisión x_1 determina el nivel de la actividad 1, etc.
  - El beneficio por unidad de actividad 1 es 13, etc.
- *Restricciones:*
  - En la primera restricción tenemos que satisfacer una demanda de al menos 89 unidades ($\geq$).
  - En la tercera restricción tenemos un recurso del cual no podemos consumir más de 608 unidades.
  - Cada unidad de la primera actividad produce 1 unidad del primer producto.
  - Cada unidad de la primera actividad consume 10 unidades del primer recurso.
  - El nivel de actividad es siempre positivo $x \geq 0$.

General

- *Función objetivo $c'x$:* Normalmente la función objetivo de un PL puede interpretarse como la minimización de *costes* o la maximización de *beneficios.*
- *Signo de b:* Normalmente, la expresión más natural de una restricción dará lugar a un $b \geq 0$. En todo el capítulo supondremos $b \geq 0$.

- *Recursos limitados:* Dado un $b \geq 0$, una restricción $\leq$ normalmente corresponde a un límite en la disponibilidad de un *recurso.*
- *Satisfacción de demandas:* Dado un $b \geq 0$, una restricción $\geq$ normalmente corresponde a la satisfacción de una *demanda.*
- *Restricciones de igualdad:* Una restricción de igualdad puede interpretarse como dos restricciones de desigualdad *simultaneas* y opuestas.
- *Restricción de no negatividad $x \geq 0$:* Aunque es una restricción, normalmente se interpreta como una declaración de un *tipo de variable.*
- *Parámetros:* Un PL está definido por unos parámetros (A, b, c). Algunos de ellos son *estimaciones* del valor exacto (desconocido).
- *Variables de decisión:* Cada variable de decisión de un PL $(x_1, \ldots, x_n)$ normalmente puede interpretarse como la elección del nivel de una *actividad.*
- *Coeficiente c_j:* Representa el *impacto* en la función objetivo por unidad de actividad j.
- *Coeficiente a_{ij}:* Representa el *impacto* en la restricción i por unidad de actividad j.

2.5.1. Sensibilidad cualitativa

En esta sección analizamos la sensibilidad de un *óptimo* frente los siguientes cambios cualitativos:

- *Relajar* o *tensar* una restricción.
- Cambios en b ('Right-Hand Side' RHS).
- Cambios en A ('Left-Hand Side' LHS).
- Añadir o eliminar restricciones.
- Añadir o eliminar variables.

Para predecir si el óptimo va a *mejorar* o *empeorar,* tenemos que analizar si el cambio cualitativo aumenta o disminuye el conjunto factible:

- *Aumento del conjunto factible:* Si el nuevo conjunto factible incluye al conjunto factible inicial, el óptimo no cambia o *mejora.*
- *Reducción del conjunto factible:* Si el nuevo conjunto factible está incluido en el conjunto factible inicial, el óptimo no cambia o *empeora.*

2.5.2. Cambios en b ('Right-Hand Side' RHS)

Ejemplo 13

Datos: Dado el PL

$$\begin{array}{llllll} \max & +13x_1 & +24x_2 & +5x_3 & +50x_4 & \\ \text{s. a.} & +1x_1 & +3x_2 & & & \geq & 89 \\ & +10x_1 & +6x_2 & +8x_3 & +2x_4 & \leq & 608 \\ & x \geq 0 & & & & & \end{array}$$

Objetivo: Estudiar qué cambios cualitativos se producen al aumentar o disminuir b.

Operaciones 13:

- Si *aumentamos* el 89 (por ejemplo, lo cambiamos por 100):
  - Hacemos que haya *menos soluciones* $(x_1,\ x_2)$ que cumplan la primera restricción.
  - Estamos *reduciendo* el conjunto factible.
  - En este caso, decimos que estamos *'tensando'* la primera restricción.
  - Notar que, si aumentamos 89, la nueva solución óptima será *igual o peor* que la que teníamos antes de aumentar el 89, pues después de aumentar tenemos menos opciones.
- Por el contrario, si *disminuimos* el 89 (por ejemplo, lo cambiamos por 70):
  - Hacemos que haya *más soluciones* $(x_1,\ x_2)$ que cumplan la primera restricción.
  - Estamos *aumentando* el conjunto factible.
  - En este caso, decimos que estamos *'relajando'* la primera restricción.
  - Notar que, si disminuimos 89, la nueva solución óptima será *igual o mejor* que la que teníamos antes de disminui el 89, pues después de disminuir tenemos más opciones.
- En resumen:
  - Si aumentamos 89 $\rightarrow$ *Tensamos* la primera restricción. El óptimo será igual o peor.
  - Si disminuimos 89 $\rightarrow$ *Relajamos* la primera restricción. El óptimo será igual o mejor.
- Notar que aumentar o disminuir el RHS no siempre implicará tensar o relajar, respectivamente. Dependerá de la *orientación* de la desigualdad ($\leq$ ó $\geq$).
- Así, por ejemplo, en la *segunda restricción,* al ser de $\leq$, pasa lo contrario que en la primera restricción que era de $\geq$:

- Si aumentamos 608 $\rightarrow$ *Relajamos* la segunda restricción. El óptimo será igual o mejor.
- Si disminuimos 608 $\rightarrow$ *Tensamos* la segunda restricción. El óptimo será igual o peor.

General

- *Relajar una restricción:*
  - Relajar una restricción equivale a modificar dicha restricción de forma que el conjunto factible *aumente.*
  - Después de relajar una restricción el óptimo o no cambia o *mejora.*
- *Tensar una restricción:*
  - Tensar una restricción equivale a modificar dicha restricción de forma que el conjunto factible *disminuya.*
  - Después de tensar una restricción el óptimo o no cambia o *empeora.*
- *Cambios en b:* En un PL, al cambiar b_i tenemos las siguientes repercusiones en la restricción i:

Tipo de restricción	*Aumenta* b_i	*Disminuye* b_i
Recurso ($\leq$)	Se relaja	Se tensa
Demanda ($\geq$)	Se tensa	Se relaja

2.5.3. Cambios en A ('Left-Hand Side' LHS)

Ejemplo 14

Datos: Dado el PL

$$\begin{array}{llllll}
\max & +13x_1 & +24x_2 & +5x_3 & +50x_4 & & \\
\text{s. a.} & +1x_1 & +3x_2 & & & \geq & 89 \\
 & +10x_1 & +6x_2 & +8x_3 & +2x_4 & \leq & 608 \\
 & x \geq 0 & & & & &
\end{array}$$

Objetivo: Estudiar qué cambios cualitativos se producen al aumentar o disminuir los coeficientes de A.

Operaciones 14: Haciendo un análisis análogo al realizado en el Ejemplo anterior, llegamos a las siguientes conclusiones:

- En la primera restricción, si aumentamos 1 $\rightarrow$ *Relajamos* la primera restricción. El óptimo será igual o mejor.

- En la primera restricción, si disminuimos 1 $\rightarrow$ *Tensamos* la primera restricción. El óptimo será igual o peor.
- En la segunda restricción, si aumentamos 10 $\rightarrow$ *Tensamos* la segunda restricción. El óptimo será igual o peor.
- En la segunda restricción, si disminuimos 10 $\rightarrow$ *Relajamos* la segunda restricción. El óptimo será igual o mejor.

General En un PL, al cambiar a_{ij} tenemos las siguientes repercusiones en la restricción i:

Tipo de restricción	*Aumenta* a_{ij}	*Disminuye* a_{ij}
Recurso $(\leq)$	Se tensa	Se relaja
Demanda $(\geq)$	Se relaja	Se tensa

2.5.4. Añadir o eliminar restricciones

- *Inclusión de nuevas restricciones:* Si en un PL incluimos nuevas restricciones el óptimo será igual o *peor.*
- *Eliminación de restricciones:* Si en un PL eliminamos restricciones el óptimo será igual o *mejor.*

2.5.5. Añadir o eliminar variables

- *Inclusión de nuevas variables:* Si en un PL incluimos nuevas variables el óptimo será igual o *mejor.*
- *Eliminación de variables:* Si en un PL eliminamos variables el óptimo será igual o *peor.*

2.6. Sensibilidad cuantitativa: El problema dual

Ref: Rardin, pag. 315.

- *Análisis de sensibilidad cuantitativo:* Dado un cambio en los parámetros de un PL, el análisis *cualitativo* nos da una idea intuitiva de las consecuencias de ese cambio para el óptimo. En esta sección intentaremos *cuantificar* esas consecuencias.
- *Metodología:* En el análisis cuantitativo nos ayudaremos de lo que se denomina *problema dual.* En esta sección iremos describiendo los elementos del problema dual.

2.6.1. Definición de los problemas primal y dual

- *Problema primal:* El problema primal es el problema de optimización que queremos resolver con el objetivo de planificar o *tomar una decisión.*
- *Problema dual:* El problema dual es un problema de optimización auxiliar que puede ser utilizado para *cuantificar la sensibilidad* de la solución primal (óptima) ante cambios en los parámetros.

2.6.2. Variables duales

Ejemplo 15 (Acero Sueco)

Datos:

- Ref: Rardin, pag 305.
- El PL para minimizar los *costes de producción* es:

$$
\begin{array}{llccl}
\min & 16x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 9x_4 & & & \\
 & +48x_5 + 60x_6 + 53x_7 & & & \text{(Coste)} \\
\text{s. a} & \cdots & & & \\
 & 0{,}120x_1 + 0{,}011x_2 + 1{,}0x_6 & \geq & 10{,}0 & \text{(Cromo)} \\
 & \ldots & & & \\
 & x_1 & \leq & 75{,}0 & \text{(Chatarra tipo I)} \\
 & \ldots & & & \\
 & x \geq 0 & & &
\end{array}
$$

Objetivo: Analizar cómo cambia el *coste óptimo* de este PL al cambiar el lado derecho de las dos restricciones.

Operaciones 15:

- *Construcción de la gráfica correspondiente a 'Chatarra tipo I':*
  - Actualmente disponemos de 75 Kg. ($b_2 = 75$).

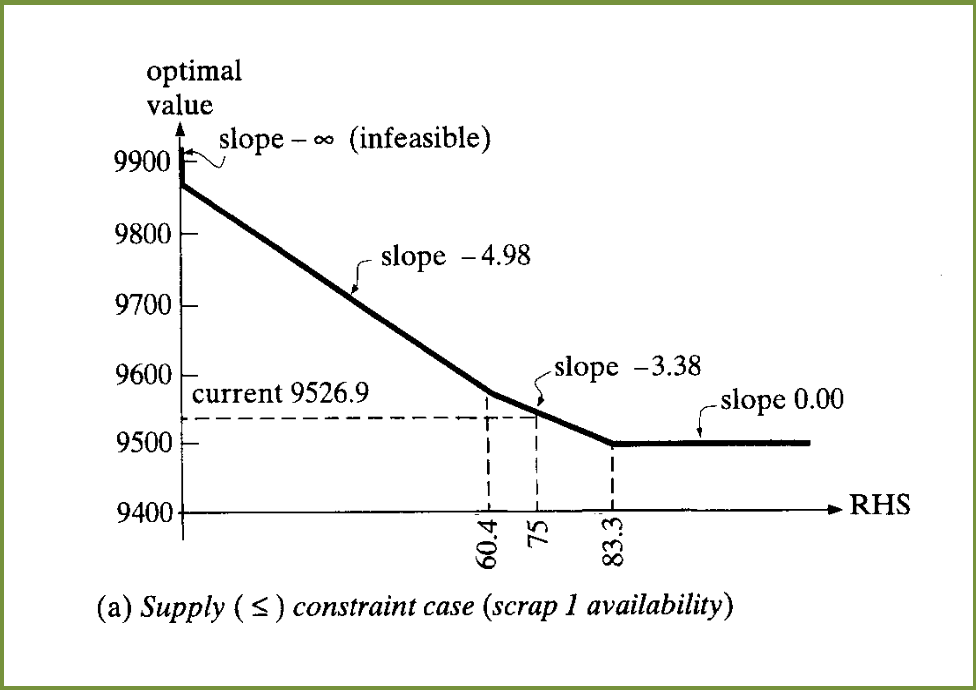


Figura 2.8: Coste óptimo en función de cambios en b_2.

- Según la Figura 2.8, el coste óptimo asociado es 9526.9 coronas suecas ($C_2(75) = 9526{,}9$).
- Una forma de hacer el análisis es representar la gráfica de la función

$$C_2(b_2)$$

coste óptimo en función de la disponibilidad de 'chatarra tipo I'.

- Como no tenemos la función $C_2(b_2)$ de forma explícita, podemos construir una *tabla de puntos* $(b_2, C_2(b_2))$ y representarla.
- Cada punto de la tabla se obtiene *resolviendo el PL* inicial, donde sólo va cambiando el término b_2.
- La *representación* de $C_2(b_2)$ puede encontrarse en Fig. 2.8.

- *Gráfica 'Chatarra tipo I':* Ver Figura 2.8.
- *Interpretación de la gráfica 'Chatarra tipo I':*
  - Al aumentar b_2 *relajamos* el problema y por tanto el coste óptimo mejora. A partir de un umbral ya no mejora más.

  - Al disminuir b_2 *tensamos* el problema y por tanto el coste óptimo empeora. A partir de un umbral el problema se vuelve infactible.
  - Es una función *lineal a trozos* (no derivable en los vértices).
  - La *pendiente* de esta función es constante por tramos.
  - Por ejemplo, entre 60.4 y 83.3 la pendiente es -3.38: Por cada unidad (Kg) que aumenta b_2 el coste óptimo mejora 3.38 unidades (coronas suecas).
  - La resolución del problema dual no nos daría toda la gráfica $C_2(b_2)$, sino, sólo la *tasa de cambio* asociada a $b_2 = 75$, es decir, $C_2'(75) = -3{,}38$.
- *Cambios en la cantidad de cromo:* ($b_1 = 10$) Análogamente. Rardin, pag. 306, Fig. 7.3(b).

Solución: Rardin, pag. 306, Fig. 7.3

General

- *Variables duales:*
  - Son las variables del problema dual.
  - Tenemos una variable dual v_i por cada *restricción* del problema primal, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$.
  - Cada variable dual óptima representa la *tasa de cambio* del coste óptimo respecto a cambios en el término de la derecha de la restricción correspondiente.
  - Cada variable dual óptima representa la *pendiente* de $C_i(b_i)$:

$$v_i^* = C_i'(b_i),$$

  (excepto en los puntos no derivables).
- *La gráfica de $C_i(b_i)$ es demasiado cara (en tiempo de CPU):* Pues para construirla tenemos que resolver una gran cantidad de PL's. Además en general podemos necesitar m gráficas:

$$C_1(b_1), \ldots, C_m(b_m).$$

- *El problema dual como alternativa:* El problema dual nos dará sólo los valores de la tasa de cambio del coste óptimo correspondiente al $\bar{b}$ concreto de nuestro problema:

$$C_1'(\bar{b}_1), \ldots, C_m'(\bar{b}_m).$$

2.6.3. Signo de una variable dual

Ejemplo 16 (Refinería, Rardin, pag. 317)

Datos:

- Ref: Rardin, pag 317.
- Usamos siguientes unidades: Kb (mil barriles), Kd (mil dólares).
- El PL para minimizar el *coste de refinado diario* es:

$$
\begin{array}{llllll}
\min & 20x_1 & +15x_2 & & & \text{(Kd)} \\
\\
\text{s. a.} & 0{,}3x_1 & +0{,}4x_2 & \geq & 2 & : v_1 \quad \text{(Demanda de gasolina, Kb)} \\
 & 0{,}4x_1 & +0{,}2x_2 & \geq & 1{,}5 & : v_2 \quad \text{(Demanda de fuel de avión, Kb)} \\
 & 0{,}2x_1 & +0{,}3x_2 & \geq & 0{,}5 & : v_3 \quad \text{(Demanda de lubricante, Kb)} \\
 & 1x_1 & & \leq & 9 & : v_4 \quad \text{(Disponibilidad productor saudí, Kb)} \\
 & & +1x_2 & \leq & 6 & : v_5 \quad \text{(Disponibilidad productor venezolano, Kb)} \\
 & x \geq 0, & & & &
\end{array}
$$

donde:

x_i Representa la cantidad de petróleo refinado de tipo $i \in I := \{1, 2\}$, (en miles de *barriles).* El petróleo tipo 1 viene de Arabia Saudí y el petróleo tipo 2 viene de Venezuela.

a_{ij} Coeficientes técnicos de *transformación.* Por ejemplo $a_{11} = 0{,}3$ significa que por cada unidad de petróleo de tipo 1, producimos $0{,}3$ unidades de gasolina.

Objetivo: Analizar qué *signo* debe tener la variable dual v_4^*.

Operaciones 16:

- Al aumentar $b_4 = 9$ el coste óptimo permanece igual o mejora (disminuye).

- $C_4'(b_4) \leq 0$, por lo que $v_4^* \leq 0$.

Solución: $v_4^* \leq 0$.

General Las variable dual asociada a la restricción i de un PL tiene el signo siguiente:

Primal	*Restricción i* $\leq$	*Restricción i* $\geq$	*Restricción i* $=$
Min	$v_i \leq 0$	$v_i \geq 0$	Sin restricción de signo
Max	$v_i \geq 0$	$v_i \leq 0$	Sin restricción de signo

2.6.4. Variables duales como precios sombra

Ejemplo 17 (Refinería)

Datos:

- Ref.: Rardin, pag 317

- El PL para minimizar los *costes* de refinado es:

$$
\begin{array}{llllll}
\min & 20x_1 & +15x_2 & & & \text{(Kd)} \\
\\
\text{s. a.} & 0{,}3x_1 & +0{,}4x_2 & \geq 2 & : v_1 & \text{(Demanda de gasolina, Kb)} \\
& 0{,}4x_1 & +0{,}2x_2 & \geq 1{,}5 & : v_2 & \text{(Demanda de fuel de avión, Kb)} \\
& 0{,}2x_1 & +0{,}3x_2 & \geq 0{,}5 & : v_3 & \text{(Demanda de lubricante, Kb)} \\
& 1x_1 & & \leq 9 & : v_4 & \text{(Disponibilidad productor saudí, Kb)} \\
& & +1x_2 & \leq 6 & : v_5 & \text{(Disponibilidad productor venezolano, Kb)} \\
& x \geq 0, & & & &
\end{array}
$$

- Hemos pagado el petróleo saudí a 20 $/barril.

Objetivo: Analizar a qué *precio* deberíamos adquirir otros mil barriles de petróleo saudí.

Operaciones 17:

- Deberíamos pagar como máximo, el ahorro que nos va a producir en el coste óptimo asociado a nuestra producción.
- Deberíamos pagar v_4^*.
- v_4^* es por tanto el *precio (sombra)* del petróleo saudí (relativo a nuestro sistema de producción).

Solución: El precio no debería ser superior a v_4^*.

General *Precio sombra de un recurso o de un producto:* La variable dual óptima v_i^* puede interpretarse como *precio sombra* del producto o recurso asociado a la restricción i.

2.7. Formulación del problema dual

Ref: Rardin, pag. 324.

- Asociado a cada PL (primal) hay un problema que lo denominamos dual.
- El problema dual también tiene estructura de programa lineal (PL).
- El problema dual nos ayudará en el *análisis de sensibilidad* del problema primal.
- Por cada restricción primal tenemos una variable dual v_i.

2.7.1. Formulación del problema dual

Ejemplo 18

Objetivo: Dado el siguiente PL (primal) formula su *dual.*

Datos:

$$\begin{array}{rlllcr} (P)\,\text{mín} & +7x_1 & & +44x_3 & & \\ \text{s. a.} & -2x_1 & -4x_2 & +1x_3 & \leq & 15, \\ & +1x_1 & +4x_2 & & \geq & 5, \\ & +5x_1 & -1x_2 & +3x_3 & = & -11, \\ & x_1 \leq 0, & x_2 \gtrless 0, & x_3 \geq 0. & & \end{array}$$

Operaciones 18:

$$\begin{array}{rlllcr} (D)\,\text{máx} & +15v_1 & +5v_2 & -11v_3 & & \\ \text{s. a.} & -2v_1 & +1v_2 & +5v_3 & \geq & 7, \\ & -4v_1 & +4v_2 & -1v_3 & = & 0, \\ & +1v_1 & & +3v_3 & \leq & 44, \\ & v_1 \leq 0, & v_2 \geq 0, & v_3 \gtrless 0. & & \end{array}$$

Solución: El dual de (P) es (D).

General (Formato expandido)

$$\begin{array}{lll} (P) & & \\ \text{mín} & \sum_j c_j x_j & \\ \text{s. a.} & \sum_j a_{ij} x_j = b_i, & i \in I_1 \\ & \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i, & i \in I_2 \\ & \sum_j a_{ij} x_j \geq b_i, & i \in I_3 \\ & x_j \geq 0, & j \in J \end{array} \qquad \begin{array}{lll} (D) & & \\ \text{máx} & \sum_i b_i v_i & \\ \text{s. a.} & v_i \lessgtr 0, & i \in I_1 \\ & v_i \leq 0, & i \in I_2 \\ & v_i \geq 0, & i \in I_3 \\ & \sum_i a_{ij} v_i \leq c_j, & j \in J \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \sum_j c_j x_j & \\ \text{s. a.} & \sum_j a_{ij} x_j = b_i, & i \in I_1 \\ & \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i, & i \in I_2 \\ & \sum_j a_{ij} x_j \geq b_i, & i \in I_3 \\ & x_j \geq 0, & j \in J \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{mín} & \sum_i b_i v_i & \\ \text{s. a.} & v_i \lessgtr 0, & i \in I_1 \\ & v_i \geq 0, & i \in I_2 \\ & v_i \leq 0, & i \in I_3 \\ & \sum_i a_{ij} v_i \geq c_j, & j \in J \end{array}$$

	MINIMIZACION DE PROBLEMA		MAXIMIZACION DE PROBLEMA	
Variables	$\geqslant 0$	$\longleftrightarrow$	$\leqslant$	Restricciones
	$\leqslant 0$	$\longleftrightarrow$	$\geqslant$	
	No restringido	$\longleftrightarrow$	$=$	
Restricciones	$\geqslant$	$\longleftrightarrow$	$\geqslant 0$	Variables
	$\leqslant$	$\longleftrightarrow$	$\leqslant 0$	
	$=$	$\longleftrightarrow$	No restringido	

Tabla 2.1: Relación entre las restricciones de los PL primal y dual.

Ejemplo 19

Objetivo: Dado el siguiente PL formula su *dual.*

Datos:

$$\begin{array}{rlcl} (P)\,\text{mín} & \begin{pmatrix} +7 & +0 & +44 \end{pmatrix} & x & \\ \text{s. a.} & \begin{pmatrix} -2 & -4 & +1 \\ +1 & +4 & 0 \\ +5 & -1 & +3 \end{pmatrix} & x & = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 & & \end{array}$$

Operaciones 19:

$$\begin{array}{rlcl} (D)\,\text{máx} & \begin{pmatrix} +15 & +5 & -11 \end{pmatrix} & v & \\ \text{s. a.} & \begin{pmatrix} -2 & +1 & +5 \\ -4 & +4 & -1 \\ +1 & 0 & +3 \end{pmatrix} & v & \leq \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 44 \end{pmatrix} \\ & v \gtrless 0 & & \end{array}$$

Solución: El dual de (P) es (D).

General *Formato matricial:*

$$\begin{array}{llcll} (P) & & \quad & (D) & \\ & & & & \\ \text{mín} & c'x & & \text{máx} & b'v \\ \text{s. a.} & Ax = b & & \text{s. a.} & v, \quad \text{sin restricción de signo} \\ & x \geq 0 & & & A'v \leq c \\ & & & & \\ \text{máx} & c'x & & \text{mín} & b'v \\ \text{s. a.} & Ax = b & & \text{s. a.} & v, \quad \text{sin restricción de signo} \\ & x \geq 0 & & & A'v \geq c \end{array}$$

2.7.2. Dual del dual de un PL

Ejemplo 20

Objetivo: Obtener el *dual del dual* de un PL estandar.

Operaciones 20:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & (D) & (D^2) \\
\\
\begin{array}{ll} \text{mín} & c'x \\ \text{s. a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} &
\begin{array}{ll} \text{máx} & b'v \\ \text{s. a.} & v \lesseqgtr 0 \\ & A'v \leq c \end{array} &
\begin{array}{ll} \text{mín} & c'x \\ \text{s. a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}
\end{array}
$$

Solución: El dual del dual de (P) es $(D^2) = (P)$.

General Dado un PL, el dual del dual es el primal, $(D^2) = (P)$.

2.8. Relaciones primal-dual

Las relaciones primal-dual que veremos en esta sección son las siguientes (Ref: Rardin, pag. 329).

- Teoremas de dualidad en programación lineal.
- Holguras complementarias.
- Casos factible, infactible y no acotado.

2.8.1. Teoremas de dualidad

- *Teorema débil de dualidad:*
  - Consideramos un PL versión *minimización* (P) y su dual (D).
  - Consideramos $\bar{x}$ y $\bar{v}$ *soluciones factibles* de (P) y (D), respectivamente.
  - Entonces, la función objetivo dual en $\bar{v}$ es una *cota inferior* a la función objetivo primal en $\bar{x}$ y viceversa:
  $$b'\bar{v} \leq c'\bar{x}.$$
- *Teorema fuerte de dualidad:*
  - Consideramos un PL (P) y su dual (D).
  - Consideramos $\bar{x}$ y $\bar{v}$ *soluciones factibles* de (P) y (D), respectivamente.
  - Si cualquiera de las dos soluciones es óptima, la otro también y además sus *valores óptimos* respectivos coinciden:
  $$b'\bar{v} = c'\bar{x}.$$

Ejemplo 21

Datos:

$$\begin{array}{rlllcr}
(P)\,\text{mín} & +30x_1 & & +5x_3 & & \\
\text{s. a.} & 1x_1 & -1x_2 & +1x_3 & \geq & 1, \\
 & +3x_1 & +1x_2 & & = & 4, \\
 & & +4x_2 & +1x_3 & \leq & 10, \\
 & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0. & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlllcr}
(D)\,\text{máx} & +1v_1 & +4v_2 & +10v_3 & & \\
\text{s. a.} & +1v_1 & +3v_2 & & \leq & 30, \\
 & -1v_1 & +1v_2 & +4v_3 & \leq & 0, \\
 & +1v_1 & & +1v_3 & \leq & 5, \\
 & v_1 \geq 0, & v_2 \gtrless 0, & v_3 \leq 0. & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\bar{x} = & (1 \quad 1 \quad\ \ 1) \\
\bar{v} = & (2 \quad 6 \quad -1)
\end{array}$$

Objetivo:

1. Comprueba el *teorema débil de dualidad* con $\bar{x}$ y $\bar{v}$.
2. ¿Son óptimos los puntos $\bar{x}$ y $\bar{v}$.

Operaciones 21:

1. Vamos a comprobar el teorema débil de dualidad
   - El punto $\bar{x}$ es factible primal pues:
     - $\bar{x} \geq 0$.
     - Además, $\bar{x}$ cumple las restricciones:

$$\begin{array}{lllclcr}
+1(1) & -1(1) & +1(1) & = & 1 & \geq & 1, \\
+3(1) & +1(1) & & & & = & 4, \\
 & +4(1) & +1(1) & = & 5 & \leq & 10,
\end{array}$$

   - Análogamente se ve que $\bar{v}$ es factible dual.
   - Teorema débil de dualidad: ¿$b'\bar{v} \leq c'\bar{x}$?

$$\begin{array}{lclllcr}
b'\bar{v} & = & 1(2) & +4(6) & +10(-1) & = & 16 \\
c'\bar{x} & = & 30(1) & & +5(1) & = & 35
\end{array}$$

2. Por el *teorema fuerte de dualidad,* los puntos $\bar{x}$ y $\bar{v}$ no pueden ser óptimo primal y óptimo dual simultáneamente pues

$$c'\bar{x} \neq b'\bar{v}.$$

(Sin embargo, eso no descarta que cada uno de ellos pudiera ser óptimo.)

Solución:

1. Observamos que los puntos $\bar{x}$ y $\bar{v}$ cumplen el *teorema débil de dualidad.*
2. Por el *teorema fuerte de dualidad,* al menos uno de los dos puntos no es óptimo.

2.8.2. Casos factible, infactible y no acotado

Como consecuencia de los teoremas de dualidad, dado un PL (P) (versión minimización) y su dual (D):

- La función objetivo de (P) tiene un valor *óptimo finito.* $\Leftrightarrow$ La función objetivo de (D) tiene un valor *óptimo finito.*
- La función objetivo de (P) *no está acotada* (inferiormente). $\Rightarrow$ El problema (D) es *infactible.*
- La función objetivo de (D) *no está acotada* (superiormente). $\Rightarrow$ El problema (P) es *infactible.*

Capítulo 3

Programación lineal entera

3.1. Modelos de la programación lineal entera

Objetivo:

- El objetivo de esta tema es aprender a *formular problemas* de ‘programación lineal entera’ (PLE), también llamada ‘optimización lineal entera’.
- La PLE corresponde a los problemas de Programación Lineal (PL) donde además se impone la condición de que algunas o todas las variables sean *enteras* (del conjunto $\mathbb{Z}$).
- A menudo simplificaremos la expresión ‘tenemos un problema de PLE’ por ‘tenemos un PLE’.
- Una vez formulado el problema, usaremos *software de optimización* para su resolución.

Apartados:

- Problema de la mochila.
- Asignación de presupuestos.
- Diseño de redes.
- Localización de plantas.
- Problema del viajante.
- Problema de asignación.
- Problema de emparejamiento.

3.2. Problema de la mochila

Ejemplo 22 (Campeonato de Fórmula Indy)

Datos:

- Un equipo de Fórmula Indy se plantea qué *mejoras* incorporar a su coche de competición para incrementar la velocidad punta (sin salirse del presupuesto del equipo).
- *Posibles mejoras:*

Mejora Nº	1	2	3	4	5	6
Coste ($\times 10^3$ $)	10.2	6.0	23.0	11.1	9.8	31.6
aumento de la velocidad (mph)	8	3	15	7	10	12

- *Presupuesto total:* 35000 $.

Objetivo: Maximizar la *velocidad punta* del mencionado coche, dentro del presupuesto disponible.

Operaciones 22:

- Definimos las siguientes *variables de decisión:*

  $x_j :=$ 1, si añadimos la mejora j al coche (0 en otro caso).

- *Formulación* el problema:

$$\begin{array}{ll} \max & 8x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 7x_4 + 10x_5 + 12x_6 \\ & \text{(Aumento de velocidad (mph))} \\ \text{s. a.} & 10{,}2x_1 + 6{,}0x_2 + 23{,}0x_3 + 11{,}1x_4 + 9{,}8x_5 + 31{,}6x_6 \leq 35, \\ & \text{(Presupuesto)} \\ & x \in \{1, 0\}^6. \end{array}$$

Solución: Una solución óptima es elegir las *mejoras* 1, 4 y 5 con un aumento de *velocidad* punta de 25 mph.

General (Problema de la mochila) El ejemplo que acabamos de ver corresponde al llamado ‘problema de la mochila’ (en inglés ‘Knapsack problem’).

- *Objetivo:* El objetivo en el problema de la mochila es seleccionar un *subconjunto óptimo* de objetos, de características, de proyectos, de inversiones, etc. bajo una única restricción.
- *Formulación:* El problema de la mochila corresponde a un problema de *programación lineal entera* pura o binaria con una única restricción.

$$\begin{array}{ll} \min & c'x \\ \text{s. a.} & a'x \leq b, \\ & x \in \{0,1\}^n \qquad (x \in \mathbb{N}^n), \end{array}$$

donde c' es el vector c *transpuesto.*

Nota. Este tema también se puede consultar y/o ampliar en el Capítulo 11 del siguiente libro: Rardin, R. L., ‘Optimization in operations research’, Editorial Prentice Hall, 1998.

3.3. Modelos de asignación del presupuesto

- *Objetivo:* Queremos seleccionar el mejor *reparto de un presupuesto* entre n proyectos o inversiones bajo m restricciones.
- *Formulación:* Generaliza el *problema de la mochila:*

$$\begin{array}{ll} \min & c'x \\ \text{s. a.} & a^i x \leq b_i, \quad i \in I := \{1, \ldots, m\}, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

donde $x_j = 1$ si el proyecto es seleccionado (0 en otro caso).

3.4. Modelos de la optimización discreta

- El problema de la mochila y el problema de asignación de presupuestos, son ejemplos de *optimización discreta.*
- La optimización discreta corresponde a la parte de la optimización donde alguna o todas variables de un problema deben tomar *valores enteros* (del conjunto $\mathbb{Z}$).
- Un caso particular de la optimización discreta es la *Programación Lineal Entera* (PLE).
- En la PLE tenemos un PL donde alguna o todas las variables deben pertenecer al *conjunto de los enteros.*

$$\begin{array}{ll} \min & c'x \\ \text{s. a.} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \\ & x_j \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } j \in J_0. \end{array}$$

- Uno de los casos más comunes es cuando tenemos variables *binarias,* es decir, $x_j \in \{0, 1\}$.

3.5. Diseño de redes

Ejemplo 23

Datos:

- Se quiere instalar *TV por cable* en dos ciudades.
- Para ello se está *diseñando la red* que conectará el centro emisor con las dos ciudades.
- Para diseñar dicha red se barajan *dos posibilidades* para cada ciudad: Una conexión directa con el centro emisor, o pasar por un nodo intermedio.
- En la Figura 3.1 tenemos los posibles *nodos,* los posibles *arcos* y sus *costes* respectivos.
- La *demanda* de cada ciudad es 1 y la *oferta* del centro emisor es 2.
- La *capacidad* del arco (1,2) es 2 y la capacidad del resto de arcos es 1.

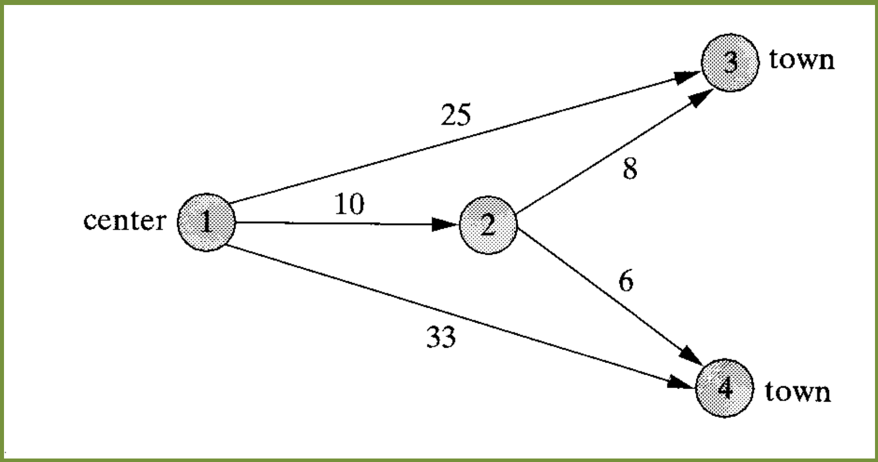


Figura 3.1: Posibles arcos de la red de TV por cable.

Objetivo: Diseñar la *red* de mínimo *coste.*

Operaciones 23:

- Definimos las siguientes *variables de decisión:*
  - x_{ij} := Cantidad del *flujo* que pasa por el arco (ij).
  - y_{ij} := 1, si *instalamos* el arco (ij) (0 en otro caso).
- Podemos *modelizar* este problema como sigue:

$$
\begin{array}{lll}
\min & 10y_{12} + 25y_{13} + 33y_{14} + 8y_{23} + 6y_{24} & \text{(coste)} \\
\text{s. a.} & -x_{12} - x_{13} - x_{14} = -2, & \text{(nodo 1)} \\
 & x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0, & \text{(nodo 2)} \\
 & x_{13} + x_{23} = 1, & \text{(nodo 3)} \\
 & x_{14} + x_{24} = 1, & \text{(nodo 4)} \\
 & 0 \leq x_{12} \leq 2y_{12}, \quad 0 \leq x_{13} \leq y_{13}, & \text{('interruptores')} \\
 & 0 \leq x_{14} \leq y_{14} & \\
 & 0 \leq x_{23} \leq y_{23}, \quad 0 \leq x_{24} \leq y_{24}, & \\
 & y_{ij} \in \{0,1\}. &
\end{array}
$$

Solución: Sin resolver.

General

- *Diseño de redes:*
  - *Objetivo:* El objetivo en el diseño de redes es decidir qué *arcos* de una red abrimos de forma que el coste de servicio más costes fijos sea mínimo.
  - *Formulación:* El diseño de redes corresponde a un *PL mixto* con variables binarias. Variables y datos:

$\mathcal{A}$ conjunto de *arcos* de la red,
ij par de índices para los arcos de $\mathcal{A}$,
$\mathcal{V}$ conjunto de *nodos* de la red,
k índice para los nodos de $\mathcal{V}$,
x_{ij} *flujo* del arco ij,
y_{ij} es 1 si decidimos conectar i con j,
b_k *demanda* de k,
c_{ij} *coste* por unidad de flujo en el arco ij,
f_{ij} *coste* de conectar i con j,
u_{ij} *capacidad* del arco ij.

$$\begin{array}{llll}
\min_{x,y} & \sum_{ij\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij} + \sum_{ij\in\mathcal{A}} f_{ij}y_{ij}, & \text{(coste total)} & \\
\text{s. a.} & \sum_{ik\in\mathcal{A}} x_{ik} - \sum_{kj\in\mathcal{A}} x_{kj} = b_k & \text{para todo } k, & \text{(demanda)} \\
 & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}y_{ij} & \text{para todo } ij, & \text{(capacidad)} \\
 & y_{ij} \in \{0,1\} & \text{para todo } ij. &
\end{array}$$

3.6. Localización de plantas

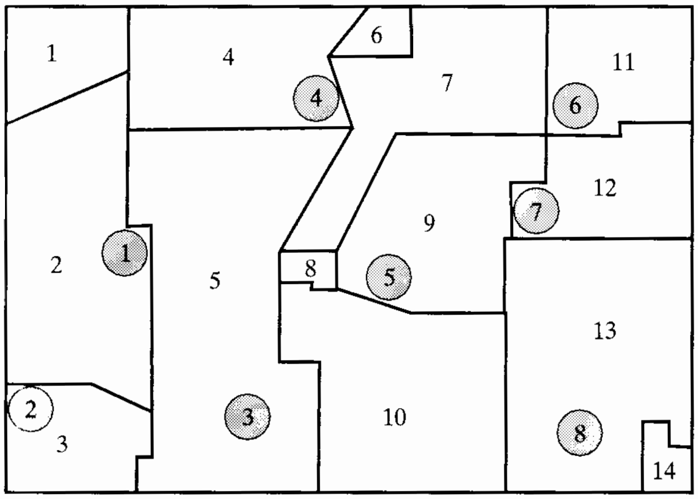
Ejemplo 24

Datos:

- ATT quiere planificar la *localización* de sus centros de telemárketing.
- Caso ficticio inspirado en Spencer, T., Brigandi, A.J., Dargon, D.R. and Sheehan, M.J. AT&T's telemarketing site selection system offers customer support. *Interfaces* 20, 1 (1990) pp. 83-96.
- Concretamente, ATT quiere decidir *dónde instala* sus centros de telemárketing.
- Los clientes de ATT *llaman gratis* a dichos centros para hacer reservas y compras por teléfono.
- Los clientes llaman desde diferentes *zonas geográficas* con un coste por llamada muy heterogéneo.

- Los *costes de explotación* diarios corresponden a los costes de las llamadas de los clientes más los costes fijos de los centros de telemárketing.
- Cada centro puede atender como *máximo* 5000 llamadas/día y debe atender como *mínimo* 1500 llamadas/día.
- Parámetros:

  i índice para las posibles *localizaciones* de los centros. $i \in I := \{1, \ldots, 8\}$.
  j índice para las *zonas* de clientes. $j \in J := \{1, \ldots, 14\}$.
  c_{ij} *coste* de atender en el centro i una llamada de la zona j,
  d_j *demanda* diaria de llamadas desde la zona j,



i	**Fixed Cost**
1	2400
2	7000
3	3600
4	1600
5	3000
6	4600
7	9000
8	2000

Figura 3.2: *Zonas* geográficas, posibles *localizaciones* de los centros AT&T y *costes* fijos diarios ($).

	Possible Center Location, *i*								
Zone, *j*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Call Demand**
1	1.25	1.40	1.10	0.90	1.50	1.90	2.00	2.10	250
2	0.80	0.90	0.90	1.30	1.40	2.20	2.10	1.80	150
3	0.70	0.40	0.80	1.70	1.60	2.50	2.05	1.60	1000
4	0.90	1.20	1.40	0.50	1.55	1.70	1.80	1.40	80
5	0.80	0.70	0.60	0.70	1.45	1.80	1.70	1.30	50
6	1.10	1.70	1.10	0.60	0.90	1.30	1.30	1.40	800
7	1.40	1.40	1.25	0.80	0.80	1.00	1.00	1.10	325
8	1.30	1.50	1.00	1.10	0.70	1.50	1.50	1.00	100
9	1.50	1.90	1.70	1.30	0.40	0.80	0.70	0.80	475
10	1.35	1.60	1.30	1.50	1.00	1.20	1.10	0.70	220
11	2.10	2.90	2.40	1.90	1.10	2.00	0.80	1.20	900
12	1.80	2.60	2.20	1.80	0.95	0.50	2.00	1.00	1500
13	1.60	2.00	1.90	1.90	1.40	1.00	0.90	0.80	430
14	2.00	2.40	2.00	2.20	1.50	1.20	1.10	0.80	200

Tabla 3.1: *Coste* por llamada ($) y *demanda* diaria de llamadas desde cada zona.

f_i *coste* fijo diario de la localización i,

u_i *capacidad* de servicio (diario) de la localización i.

- En este ejemplo $u_i = 5000$ llamadas para todos los centros.
- Además, por motivos económicos, cada centro debe atender un *mínimo* de 1500 llamadas por día.

Objetivo: Minimizar el *coste de explotación diario* de los centros de telemárketing.

Operaciones 24:

- Definimos las siguientes *variables de decisión:*
  - x_{ij} := Fracción de la demanda del cliente j satisfecha por el centro i.
  - y_i := 1, si abrimos el centro i (0 en otro caso).
- Podemos *modelizar* este problema como sigue:

$$
\begin{array}{llll}
\min_{x,y} & \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{14}(c_{ij}d_j)x_{ij} & +\sum_{i=1}^{8} f_i y_i, & \text{(coste total)}\\
\text{s. a.} & \sum_{i=1}^{8} x_{ij} = 1 & \text{para todo } j \in J, & \text{(demanda)}\\
 & \sum_{j=1}^{14} d_j x_{ij} \geq 1500 y_i & \text{para todo } i \in I, & \text{(capacidad mínima)}\\
 & \sum_{j=1}^{14} d_j x_{ij} \leq 5000 y_i & \text{para todo } i \in I, & \text{(capacidad máxima)}\\
 & x_{ij} \geq 0 & \text{para todo } i \in I, j \in J, & \\
 & y_i \in \{0,1\} & \text{para todo } i \in I. &
\end{array}
$$

Solución: Se puede ver que una solución óptima viene dada por:

$$
\begin{array}{l}
y_4^* = y_8^* = 1\\
y_1^* = y_2^* = y_3^* = y_5^* = y_6^* = y_7^* = 0.
\end{array}
$$

Las *zonas* que sirve el centro 4 son 1, 2, 4, 5, 6 y 7. El resto son servidas por el centro 8. El *coste óptimo* es de 10135 $ al día.

General (Localización de plantas) Este ejemplo corresponde a un problema denominado ‘localización de plantas’.

- *Objetivo:* El objetivo en la localización de plantas es decidir qué plantas (nodos) abrimos de forma que el coste de explotación sea mínimo.

- *Formulación:* La localización de plantas corresponde a un PLE mixto con variables binarias.

$$
\begin{array}{llll}
\min_{x,y} & \sum_i \sum_j c_{ij} d_j x_{ij} & + \sum_i f_i y_i, & \text{(coste total)} \\
\text{s. a.} & \sum_i x_{ij} = 1 & \text{para todo } j, & \text{(satisfacción de la demanda)} \\
 & \sum_j d_j x_{ij} \leq u_i y_i & \text{para todo } i, & \text{(restricciones de capacidad)} \\
 & x_{ij} \geq 0 & \text{para todo } i, j, & \\
 & y_i \in \{0, 1\} & \text{para todo } i. &
\end{array}
$$

Notar que no se impone que las variables x_{ij} sean enteras.

3.7. Problema del viajante

Ejemplo 25 (Problema del viajante)

Datos:

- Consideramos la red de la Figura 3.3 donde tenemos una red con *9 arcos* y *6 nodos* junto con sus respectivas *distancias.*

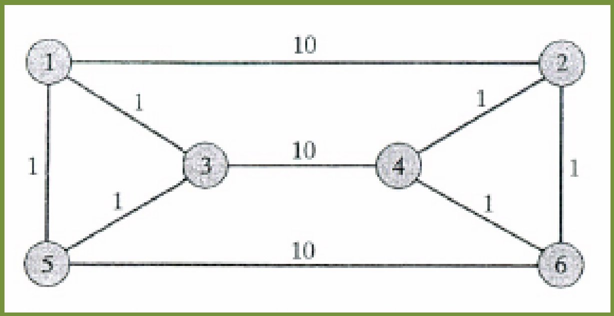


Figura 3.3: Red del problema del viajante.

- Queremos encontrar un *tour* o ruta de longitud mínima que partiendo del nodo 1 visite exactamente una vez el resto de los nodos y que acabe en el nodo 1.

Objetivo: De cara a tener los *ingredientes* para formular un PLE binario para resolver este problema:

1. Define las *variables de decisión.*
2. Define la *función objetivo.*
3. Define las *restricciones* que garanticen que por cada nodo pasamos exactamente una vez (restricciones para una 'única visita').
4. Además de las anteriores restricciones, ¿necesitamos *restricciones adicionales* para completar la formulación de este problema?

Operaciones 25:

1. Definimos las siguientes *variables de decisión:*

   $x_{ij} := 1$ si después del nodo i vamos al nodo j, (0, en otro caso) para todo par $i \neq j$.

2. De esta manera podemos definir la *función objetivo* a minimizar:

$$\begin{aligned} z(x) = 10x_{12} + x_{13} + x_{15} \\ + 10x_{21} + x_{24} + x_{26} \\ + x_{31} + x_{35} + 10x_{34} \\ + 10x_{43} + x_{42} + x_{46} \\ + x_{51} + x_{53} + 10x_{56} \\ + x_{62} + x_{64} + 10x_{65} \end{aligned}$$

3. Podemos resolver la *tercera cuestión* como sigue:

   - Primero garantizamos que a cada nodo *llegamos* una única vez:

$$x_{21} + x_{31} + x_{51} = 1 \qquad \text{(nodo 1)}$$
$$x_{12} + x_{42} + x_{62} = 1 \qquad \text{(nodo 2)}$$
$$x_{13} + x_{43} + x_{53} = 1 \qquad \text{(nodo 3)}$$
$$x_{24} + x_{34} + x_{64} = 1 \qquad \text{(nodo 4)}$$
$$x_{15} + x_{35} + x_{65} = 1 \qquad \text{(nodo 5)}$$
$$x_{26} + x_{46} + x_{56} = 1 \qquad \text{(nodo 6)}$$

   - A continuación garantizamos que de cada nodo *salimos* una única vez:

$$x_{12} + x_{13} + x_{15} = 1 \qquad \text{(nodo 1)}$$
$$x_{21} + x_{24} + x_{26} = 1 \qquad \text{(nodo 2)}$$
$$x_{31} + x_{34} + x_{35} = 1 \qquad \text{(nodo 3)}$$
$$x_{42} + x_{43} + x_{46} = 1 \qquad \text{(nodo 4)}$$
$$x_{51} + x_{53} + x_{56} = 1 \qquad \text{(nodo 5)}$$
$$x_{62} + x_{64} + x_{65} = 1 \qquad \text{(nodo 6)}$$

4. Podemos resolver la *cuarta cuestión* como sigue:

    - Viendo la Figura 3.3 está claro que la *ruta más económica* que cumple las anteriores restricciones (pasar exactamente una vez por cada nodo) es la solución que forma los *subtours* $1-3-5$ y $2-4-6$, cuyas variables tienen los siguientes valores:

    $$x_{13} = x_{35} = x_{51} = 1 \qquad \text{(subtour } 1-3-5\text{)}$$

    $$x_{24} = x_{46} = x_{62} = 1 \qquad \text{(subtour } 2-4-6\text{)}$$

    y el resto de variables igual a 0.

    - Por lo tanto las restricciones primeras ('visita única') deben *complementarse* con otras restricciones que eliminen los posibles subtours.

    - En este caso podríamos añadir la siguiente restricción

    $$x_{12} + x_{34} + x_{56} \geq 1$$

    que evita los anteriores subtours obligando a que haya, al menos, un arco entre ellos (ver Figura 3.3).

Solución:

1. $x_{ij} := 1$ si después del nodo i vamos al nodo j, (0, en otro caso) para todo par $i \neq j$.
2. Ver apartado 'Operaciones'.
3. Ver apartado 'Operaciones'.
4. Sí, necesitamos además, restricciones que eliminen las soluciones con *subtours.*

General (Problema del viajante)

- *Objetivo:* El problema del viajante busca un *tour* de longitud mínima que visite exactamente una vez todos los nodos de un grafo y que acabe en el nodo origen. En inglés: 'Travelling Salesman Problem' *(TSP).*

- *Casos simétrico y asimétrico:* En el caso simétrico tenemos que las distancias c_{ij} y c_{ji} son iguales. Si no es así, estamos en el caso asimétrico.

- *Formulaciones:*

    - Existen varias formulaciones para el TSP (equivalentes).
    - Las formulaciones del TSP que presentamos aquí sirven tanto para el caso *simétrico* como para el caso *asimétrico.*

- Existen formulaciones propias del caso simétrico.

- *Formulación PLE binaria (caso asimétrico o simétrico):* La formulación que hemos visto en el ejemplo anterior se puede sintetizar como sigue:

x_{ij} es 1 si después de i visitamos j (0 en otro caso),

c_{ij} *distancia* de i a j.

S Subconjunto de *nodos* de la red.

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_i \sum_{j \neq i} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{s. a.} & \sum_j x_{ij} = 1 & \text{para todo } i, \\
& \sum_i x_{ij} = 1 & \text{para todo } j, \\
& \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1 & \text{para todo } S \neq \emptyset, \\
& & \text{(Eliminación de subtours)} \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & \text{para todo } ij.
\end{array}
$$

Procedimiento de resolución:

- En general, dado un TSP, el número de todas sus posibles restricciones de eliminación de subtours es muy elevado.
- A la hora de *resolver* un TSP, una forma de proceder consiste en resolver una versión *relajada* del TSP que no tiene en cuenta las restricciones de eliminación de subtours.
- Si la solución óptima así encontrada contiene *subtours,* se vuelve a resolver el TSP relajado pero añadiendo la restricción o restricciones que eviten los subtours encontrados (tal como hemos hecho en el ejemplo anterior).
- Este procedimiento se repite de forma *iterativa* hasta que la solución óptima del problema relajado no tenga subtours.

3.8. Problema de asignación

- *Objetivo:* El objetivo es el emparejamiento de los elementos de dos conjuntos con el *mismo cardinal.* Ejemplo: Asignar tareas T_1, T_2 y T_3 a máquinas M_1, M_2 y M_3.

- *Restricciones de asignación:*
$x_{ij} = 1$ si la tarea i es asignada a máquina j ($x_{ij} = 0$ en otro caso).

$$
\begin{array}{ll}
\sum_j x_{ij} = 1 & \text{para toda tarea } i, \\
\sum_i x_{ij} = 1 & \text{para toda máquina } j, \\
x_{ij} \in \{0, 1\} & \text{para todo } ij.
\end{array}
$$

- *Función objetivo:* Bajo las anteriores restricciones de asignación, minimizamos la siguient *función objetivo*
$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij},$$
donde c_{ij} es el coste de asignar la tarea i a la máquina j.

- *Dificultad computacional:*
  - El problema de asignación se resuelven de forma muy *eficiente* dado que tiene estructura de problema de flujos en redes que es un caso particulares de problema PL.
  - Es decir, aunque el problema de asignación es un PLE, tiene la misma dificultad computacional que un PL.

3.9. Problema de emparejamiento

- *Objetivo:* El objetivo es el emparejamiento de los elementos de un conjunto de *cardinal par.*

- *Formulación:* El problemas de emparejamiento corresponde a un *PL binario.* Variables y datos:

  x_{ij} es 1 si asociamos i con j ($i < j$, para contar sólo una vez cada arco).

  c_{ij} *coste* del emparejamiento ij.

$$\begin{array}{lll}
\min_x & \displaystyle\sum_i \sum_{j:j>i} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{s. a.} & \displaystyle\sum_{j:j<i} x_{ji} + \sum_{j:j>i} x_{ij} = 1 & \text{para todo } i, \\
 & x_{ij} \in \{0,1\} & \text{para todo } i, i < j.
\end{array}$$

Capítulo 4

Teoría de la decisión: Decisiones multiobjetivo

4.1. Introducción al análisis de decisiones

- El 'Análisis de decisiones' y la 'Optimización' están íntimamente *relacionadas.*
- En general se desea tomar la 'mejor' decisión según uno o varios criterios, es decir, se desea tomar la *decisión óptima* según uno o varios criterios.
- Por lo tanto, los *métodos de optimización* de los capítulos anteriores (programación lineal (PL) y programación lineal entera (PLE)) pueden ser de gran ayuda a la hora de tomar decisiones.
- Tanto la PL como la PLE son métodos de optimización *monoobjetivo,* pues consideran sólo un criterio u objetivo (coste, beneficio, etc.).
- Sin embargo, tal como veremos en el próximo ejemplo, en muchos casos la toma de decisiones implica considerar varios criterios u objetivos (decisiones *multiobjetivo).*

Nota. Este tema también se puede consultar y/o ampliar en:

- El Capítulo 8 del siguiente libro: Rardin, R. L., 'Optimization in operations research', Editorial Prentice Hall, 1998.
- Los Capítulos 2 y 4 del siguiente libro: C. Beltran-Royo. 'Decisiones Óptimas: Cómo Optimizar las Cuestiones de la Vida Cotidiana', CreateSpace (Amazon), EEUU, 2013.

Ejemplo 26

Datos:

- *María* es representante comercial de una prestigiosa marca de relojes suizos.
- Su trabajo consiste en *visitar* a los diferentes clientes que la firma posee en las principales ciudades de España y Portugal.

- Por ese motivo María debe recorrer alrededor de *30000 Km* de autovía o autopista cada año.
- María, por un lado estima que cada hora de conducción tiene un valor de *40 euros.*
- Por otro lado, sabe que el *consumo* de su coche es de 8,0, 11,5 ó 15,7 litros cada 100 Km viajando a una velocidad de 100, 120 ó 140 Km/h, respectivamente.
- El precio del gasoil está en *1,50 euros/litro.*

Objetivo: El objetivo de María es decidir qué *velocidad* le conviene más al hacer sus desplazamientos por autovía o autopista, teniendo en cuenta el consumo de gasoil y el tiempo de desplazamiento.

Operaciones 26:

- Para tomar la anterior decisión, María se dispone a calcular la *velocidad* media óptima teniendo en cuenta el consumo de gasoil y el 'consumo' de tiempo.
- Para *simplificar* sólo va a considerar tres velocidades: 100, 120 y 140 km/h.
- En la Tabla 4.1 tenemos el *coste* anual en euros (gasoil y tiempo) para cada una de las tres velocidades.

Velocidad	**F1 Coste del gasoil**	**F2 Coste del tiempo**	**F3 Coste global**
100	3600	12000	15600
120	5175	10000	15175
140	7065	8571	15636

Tabla 4.1: Coste anual global (euros) en función de la velocidad (Km/h).

- La función objetivo *F3* se calcula como se detalla a continuación:
  - F1 = 1,50 · (30000 / 100) · *Consumo* asociado a la velocidad
  - F2 = 40 · (30000 / Velocidad)
  - F3 = F1 + F2
- Por ejemplo para la velocidad *120 Km/h:*
  - F1 = 1,50 · (30000 / 100) · 11,5 = 5175 euros.
  - F2 = 40 · (30000 / 120) = 10000 euros.
  - F3 = 5175 + 10000 = 15175 euros.

- Comparando los tres valores de F3 en la Tabla 4.1 vemos que la mejor *solución* es 120 Km/h.

Solución: Con los datos de María, la velocidad media óptima para viajar por autovía, es de *120 Km/h,* ocasionándole un gasto de *15175 euros/año.*

General (Decisiones multiobjetivo)

- Como ya hemos mencionado, en muchos casos la toma de decisiones implica considerar varios objetivos simultáneamente (decisiones *multiobjetivo).*
- En el ejemplo anterior ha sido posible transformar un problema con *dos criterios* (consumo de gasoil y consumo de tiempo) en un problema con un único criterio (consumo de euros).
- La idea ha sido expresar en la misma *unidad* (euros) el coste del gasoil y el coste del tiempo de trabajo de María.
- Por lo tanto, en algunos casos es posible transformar los objetivos involucrados en un único objetivo y utilizar la optimización *monoobjetivo.*
- En otros, tal como veremos en el siguiente ejemplo, es *difícil* o imposible transformar todos los criterios involucrados en un único criterio.

Ejemplo 27 (Banco Trébol)

Datos:

- El Banco Trébol tiene los siguientes *recursos* (en millones de euros):
  - capital *propio:* 20,
  - capital en *cuentas* corrientes: 150,
  - capital en *depósitos* a plazo fijo: 80.
- Está planificando su estrategia de *inversión* y en la Tabla 4.2 ha recopilado los datos de los posibles tipos de inversión:

Tipo de Inversión j	**Tasa de Rendimiento** (%)	**Tasa de Liquidez** (%)	**Tasa de Reservas** (%)	**¿Riego?**
1: Dinero en caja	0,0	100,0	0,0	No
2: Inversiones a corto plazo	4,0	99,5	0,5	No
3: Bonos del Estado (1 a 5 años)	4,5	96,0	4,0	No
4: Bonos del Estado (6 a 10 años)	5,5	90,0	5,0	No
5: Bonos del Estado (más de 10 años)	7,0	85,0	7,5	No
6: Préstamos a plazo	10,5	0,0	10,0	Sí
7: Préstamos hipotecarios	8,5	0,0	10,0	Sí
8: Préstamos comerciales	9,2	0,0	10,0	Sí

Tabla 4.2: Posibles *inversiones* para el Banco Trébol.

- La 'Tasa de *Rendimiento*' corresponde al rendimiento anual.
- La 'Tasa de *Liquidez*' refleja el grado de disponibilidad del dinero. Por ejemplo, una tasa del 90 % significa que sólo el 90 % del capital invertido en ese producto está disponible de forma inmediata.
- La 'Tasa de *Reserva*' sirve para constituir un fondo de reserva. Por ejemplo, una tasa del 10 % significa que el Banco debe dejar en el fondo de Reservas un capital igual al 10 % del capital invertido en ese producto.
- En la columna *'¿Riesgo?'* se indica si la inversión tiene cierto nivel de riesgo.

Objetivo: Define la *función objetivo* para cada uno de los siguientes tres objetivos:

1. Maximizar el *beneficio.*
2. Minimizar el coeficiente de *riesgo* (CRi):

$$\text{CRi} = \frac{\text{Inversiones con riesgo}}{\text{Capital propio}}$$

3. Minimizar el coeficiente de *reservas* (CRe):

$$\text{CRe} = \frac{\text{Fondo de reserva}}{\text{Capital propio}}$$

Operaciones 27:

- El primer paso es definir las *variables de decisión:*

$$x_j = \text{Millones de euros invertidos en el producto } j.$$

- A continuación vamos a expresar cada uno de los *objetivos* en función de las variables de decisión.

1. Considerando la 'Tasa de Rendimiento' podemos expresar el *beneficio* como:

$$\begin{aligned} \max \quad z_1(x) &= 0,000x_1 + 0,040x_2 + 0,045x_3 + 0,055x_4 \\ &+ 0,070x_5 + 0,105x_6 + 0,085x_7 + 0,092x_8 \quad \textit{(Beneficio)} \end{aligned}$$

2. El segundo objetivo corresponde a minimizar el 'coeficiente de riesgo':

$$\min \quad z_2(x) = \frac{1}{20}\,(x_6 + x_7 + x_8) \qquad \textit{(Riesgo)}$$

Notar que este objetivo entra en conflicto con el anterior objetivo (disminuir el riesgo implica disminuir el beneficio).

3. Considerando la 'Tasa de Reserva' podemos expresar el 'coeficiente de reserva' como:

$$\begin{aligned}\min \quad z_3(x) = \frac{1}{20} \, (&0,000x_1 + 0,005x_2 + 0,040x_3 + 0,050x_4 \\ &+ 0,075x_5 + 0,100x_6 + 0,100x_7 + 0,100x_8) \quad \textit{(Reservas)}\end{aligned}$$

Solución: Ver los anteriores apartados.

General (Decisiones multiobjetivo II)

- En muchos problemas de decisión, como en el ejemplo anterior, sería muy complicado si no imposible *transformar* todos los objetivos involucrados en un único objetivo.
- En este caso podemos usar las técnicas de optimización *multiobjetivo* que presentaremos en este capítulo.

Ejemplo 28 (Banco Trébol - continuación)

Datos:

- El Banco Trébol, además de los tres objetivos del ejemplo anterior, tiene que cumplir las siguientes *restricciones:*
  1. El banco desea *invertir* todo el capital disponible.
  2. Las *reservas* en efectivo deben ser al menos el 14 % del dinero actualmente depositado en las cuentas corrientes más el 4 % del dinero actualmente depositado a plazo fijo.
  3. La parte de la inversión considerada *líquida* debería ser al menos el 47 % del dinero actualmente depositado en las cuentas corrientes más el 36 % del dinero actualmente depositado a plazo fijo.
  4. El Banco desea invertir al menos un 5 % en cada uno de los 8 productos de cara a *diversificar* su inversión.
  5. Al menos el 30 % debería destinarse a *préstamos* comerciales.

Objetivo: Formula un problema de programación lineal multiobjetivo para *optimizar* las inversiones del Banco Trébol.

Operaciones 28:

$$
\begin{array}{lll}
\max & z_1(x) & \text{(Beneficio)} \\
\min & z_2(x) & \text{(Riesgo)} \\
\min & z_3(x) & \text{(Reservas)} \\
\text{s.a.} & x_1 + \ldots + x_8 = 20 + 150 + 80 & \text{(Invertir todo)} \\
& x_1 \geq 0,14 \cdot 150 + 0,04 \cdot 80 & \text{(Reservas)} \\
& 1,000x_1 + 0,995x_2 + 0,960x_3 + 0,900x_4 + & \\
& +0,850x_5 \geq 0,47 \cdot 150 + 0,36 \cdot 80 & \text{(Liquidez)} \\
& x_j \geq 0,05 \cdot (20 + 150 + 80) \quad \forall j = 1, \ldots, 8 & \text{(Diversificación)} \\
& x_8 \geq 0,30 \cdot (20 + 150 + 80) & \text{(Prestamos)} \\
& x \geq 0 &
\end{array}
$$

Notar que la restricción de 'Liquidez' está escrita en dos líneas debido a su excesiva longitud.

Solución: Ver el apartado anterior.

General (Programación lineal multiobjetivo)

- Un problema de programación lineal *multiobjetivo* se caracteriza por:
  - Tener varias *funciones objetivo* que han de optimizarse (maximizar o minimizar según convenga).
  - La *región factible* es idéntica a la región factible de un problema PL monoobjetivo, es decir, definido a partir de restricciones lineales de igualdad o de desigualdad junto con cotas para las variables.

4.2. Puntos eficientes y frontera eficiente

General

- *Punto eficiente:*
  - Dado un problema de optimización multiobjetivo, un punto factible es *eficiente* si al moverlo dentro de la región factible para mejorar algún objetivos, tenemos que empeorar al menos otro objetivo.

- Un punto eficientes se denominan también punto óptimo de *Pareto,* o punto *no dominado.*
- Análogamente, un punto no eficiente de denomina también punto *dominado.*

- *Frontera eficiente:*
  - Es el conjunto formado por todos los puntos eficientes.
  - Se denomina también *frontera de Pareto* .
  - La frontera de Pareto que acabamos de ver está representada en el espacio de decisiones $(x_1, \ldots, x_n)$.
  - Como veremos más adelante, también podemos representar la correspondiente frontera de Pareto en el espacio de objetivos $(z_1, \ldots, z_m)$.

Ejemplo 29

Datos:

- Consideramos el *PL multiobjetivo* siguiente:

$$\begin{array}{rl} \max & z_1(x) = +3x_1 + 1x_2 \\ \max & z_2(x) = -1x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 3 \end{array}$$

Objetivo:

1. Analiza si los *puntos* $x = (2, 2)$ y $y = (3, 0)$ son eficientes.
2. Determina la *frontera eficiente* para este PL multiobjetivo.

Operaciones 29:

- $y = (3, 0)$ es un *punto dominado,* como puede apreciarse en la Figura 4.1 o como puede verse en el siguiente razonamiento:
  - El vector de objetivos para y es $z = (z_1(y), z_2(y)) = (9, -3)$.
  - Podemos considerar el nuevo punto factible $y' = (3, 1)$, cuyo vector de objetivos es $z = (z_1(y'), z_2(y')) = (10, -1.)$
  - De hecho y' es mejor que y en los dos objetivos.
- En la Figura 4.2 vemos que $x = (2, 2)$ es un *punto eficiente* (dentro de la región factible no podemos mejorar ninguno de los dos objetivos sin empeorar el otro).

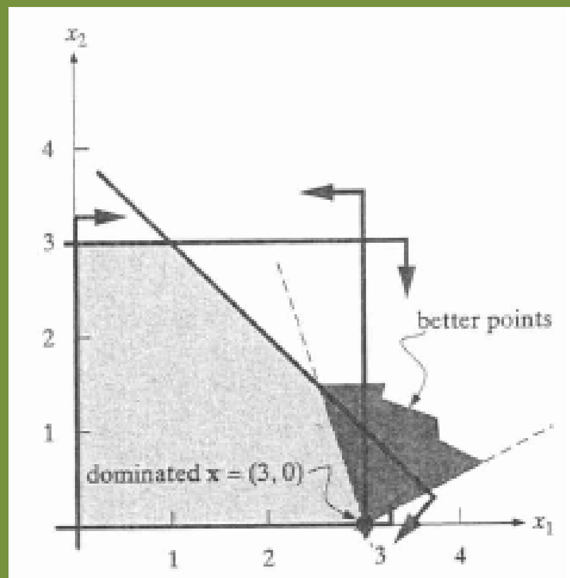


Figura 4.1: El punto $y = (3,\ 0)$ es un punto *dominado.*

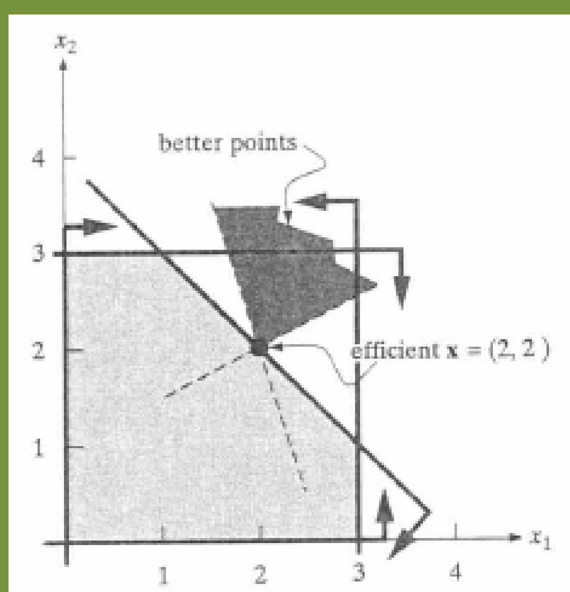


Figura 4.2: El punto $x = (2,\ 2)$ es un punto *eficiente.*

- No es difícil ver que en este ejemplo la *frontera eficiente* es la línea poligonal descrita por los puntos:

$$(3,1) \to (1,3) \to (0,3).$$

Solución: El punto x es eficiente, el punto y está dominado y la frontera eficiente corresponde a la línea poligonal descrita por los puntos:

$$(3,1) \to (1,3) \to (0,3).$$

(ver Figura 4.2)

General (Análisis gráfico de la optimalidad de Pareto)

- Dado un programa lineal multiobjetivo (PLM) con dos variables, podemos determinar si un punto factible x es un *óptimo de Pareto* mediante los siguientes pasos:

  1. Representamos el *conjunto factible* y el punto x.
  2. Representamos las *rectas* perpendiculares a los vectores de las funciones objetivo y que pasan por el punto x.
  3. Buscamos los *semiespacios* de crecimiento de cada función objetivo.
  4. Consideramos el *cono* K formado por la intersección los semiespacios de crecimiento (su vértice es el punto x).
  5. Si el cono K y la región factible tienen a x como único punto en común, entonces x es un punto *óptimo de Pareto* o punto eficiente del PLM.
  6. En caso contrario x es no es eficiente (está *dominado* por otros puntos factibles).

Ejemplo 30

Datos: Continuamos con el ejemplo anterior.

Objetivo: Representa la frontera de Pareto en el espacio de los objetivos $(z_1(x), z_2(x))$. Notar que en el ejemplo anterior hemos calculado la frontera de Pareto en el espacio de las variables de decisión (x_1, x_2).

Operaciones 30:

- En primer lugar resolvemos el PLM pero sólo optimizando respecto la función objetivo $z_1(x)$ (e ignorando $z_2(x)$).
- Optimizando respecto $z_1(x)$ obtenemos el *punto óptimo* $x^1 = (3,1)$, cuyo valor para las dos funciones objetivo es $z^1 = (10, -1)$.
- Hacemos lo mismo para la segunda función objetivo $z_2(x)$, y obtenemos el *punto óptimo* $x^2 = (0,3)$ cuyo valor para las dos funciones objetivo son $z^2 = (3,6)$.

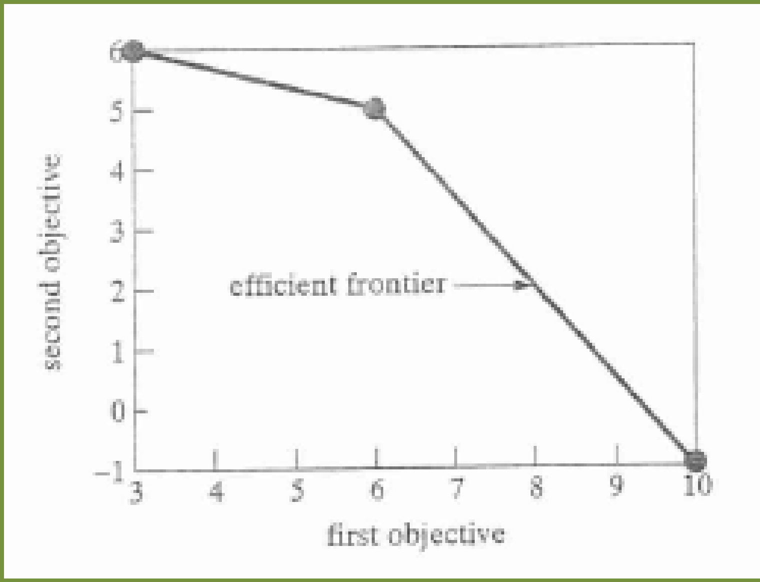


Figura 4.3: Frontera de *Pareto* o frontera eficiente (en el espacio de los de los objetivos (z_1, z_2)).

- La frontera de Pareto en el espacio de los dos objetivos es una *línea poligonal* que une los puntos z^1 y z^2 y que podemos esquematizar como:

$$(10, -1) \to (z_1(\theta), \theta) \to (3, 6)$$

donde θ varía en el intervalo $[-1, 6]$.

- Por lo tanto, una forma de obtener la frontera de Pareto, en el espacio de los objetivos (z_1, z_2), es resolver el siguiente problema de PL

$$\begin{array}{rl} \max & z_1(x) \\ \text{s. a} & z_2(x) = \theta \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 3 \end{array}$$

para todos valores de θ en el intervalo $[-1, 6]$.

- En teoría habría que resolver una colección infinita de PLs pero en general será suficiente resolver el anterior problema sólo para un número *finito* de puntos (discretización representativa de $[-1, 6]$).

Solución: En la Figura 4.3 podemos ver la frontera de Pareto así obtenida.

4.3. Optimización multiobjetivo por suma ponderada de objetivos

Ejemplo 31 (Suma ponderada de objetivos)

Datos: Consideramos el siguiente *PLM:*

$$\begin{array}{rll} \min & z_1(x) = +3x_1 + 1x_2 & \text{(horas)} \\ \max & z_2(x) = -1x_1 + 2x_2 & \text{(euros)} \\ \max & z_3(x) = +2x_1 & \text{(kg)} \\ \text{s. a.} & x_1 + x_2 \leq 4 & \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 & \\ & 0 \leq x_2 \leq 3. & \end{array}$$

Objetivo: Transforma el anterior PLM en un PL mediante la *suma ponderada* de objetivos, usando los pesos $\gamma_1 = 2$ PC / hora, $\gamma_2 = 3$ PC / euro y $\gamma_3 = 10$ PC / kg, donde PC significa 'Puntos de Coste'.

Operaciones 31:

- En primer lugar transformamos los operadores 'max' en 'min'.

$$\begin{array}{rl} \min & z_1(x) = +3x_1 + 1x_2 \\ \min & -z_2(x) = +1x_1 - 2x_2 \\ \min & -z_3(x) = -2x_1 \\ \text{s. a} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 3. \end{array}$$

- En segundo lugar calculamos la nueva función objetivo

$$\begin{aligned} z(x) &= \sum_{i=1}^{3} \gamma_i z_i(x) \\ &= 2z_1(x) + 3[-z_2(x)] + 10[-z_3(x)] \\ &= 2[+3x_1 + 1x_2] + 3[+1x_1 - 2x_2] + 10[-2x_1] \\ &= -11x_1 - 4x_2. \end{aligned}$$

- Notar que las unidades de $z(x)$ son PC:

$$\begin{aligned} z(x) &= 2\frac{\text{PC}}{\text{hora}} \cdot z_1(x)\text{ hora} + 3\frac{\text{PC}}{\text{euro}} \cdot [-z_2(x)]\text{ euro} \\ &\quad +10\frac{\text{PC}}{\text{kg}} \cdot [-z_3(x)]\text{ kg} \\ &= -11x_1 - 4x_2 \quad \text{PC} \end{aligned}$$

Solución: El correspondiente PL es

$$\begin{array}{lll} \min & z(x) = -11x_1 - 4x_2 & \text{(PC)} \\ \text{s. a.} & x_1 + x_2 \le 4 & \\ & 0 \le x_1 \le 3 & \\ & 0 \le x_2 \le 3 & \end{array}$$

General (Optimización multiobjetivo por suma ponderada de objetivos)

- Consideramos el siguiente *PL multiobjetivo* (PLM)

$$\begin{array}{lll} \min & z_1(x) & (\text{Unidad}_1) \\ & \vdots & \\ \min & z_m(x) & (\text{Unidad}_m) \\ \text{s. a} & Ax \le b & \\ & x \ge 0, & \end{array}$$

donde $z_i(x) = c_{i1}x_1 + \ldots + c_{in}x_n$ para cada $i \in \mathcal{I} = \{1, \ldots, m\}$.

- Una forma de *resolver* este problema es usando la técnica de la *suma ponderada* de objetivos:

$$\begin{array}{ll} \min & z(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \gamma_i z_i(x) \\ \text{s. a} & Ax \le b \\ & x \ge 0, \end{array}$$

donde cada peso γ_i es un escalar estrictamente *positivo* para todo $i \in \mathcal{I}$.

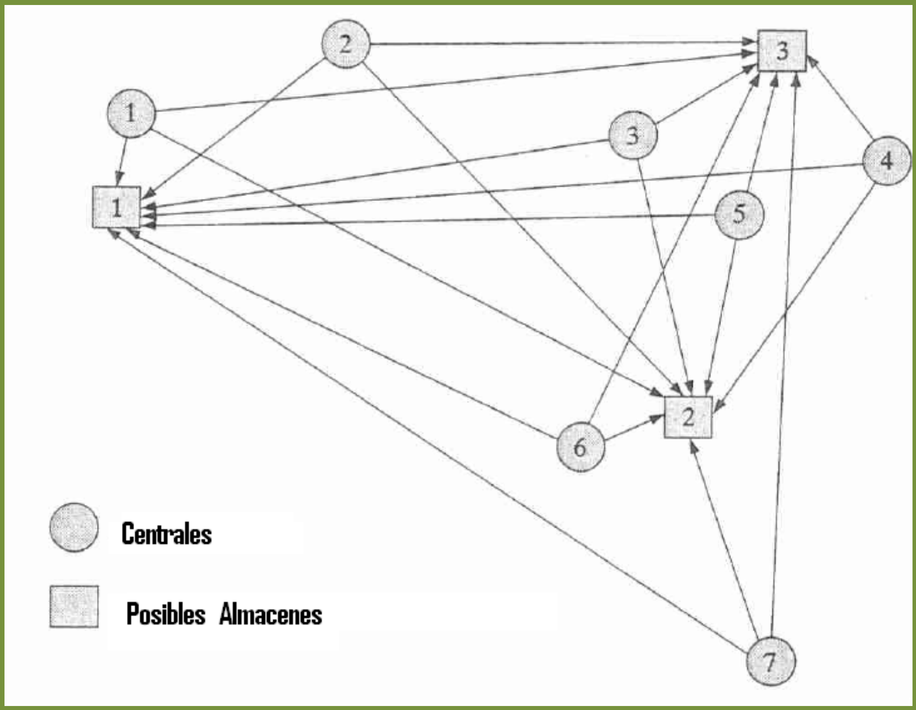


Figura 4.4: *Centrales* y posibles *almacenes.*

- Los pesos γ_i sirven para dar mayor o menor *importancia* a su correspondiente objetivo $z_i(x)$.
- Las unidades de cada γ_i son: 'Puntos de Coste por Unidad$_i$', es decir, PC / Unidad$_i$.
- Por lo tanto, las unidades de la función objetivo son 'Puntos de Coste' (PC).
- El decisor debe seleccionar estos pesos dependiendo de su *criterio* y de las *circunstancias.*
- Si en el problema tenemos el operador 'max z(x)' tenemos que transformarlo en 'min [-z(x)]', de forma que todos los operadores del problema PLM sean de *minimización.*

General (Suma ponderada de objetivos y optimalidad de Pareto)

Propiedad: Toda solución óptima obtenidas mediante la suma ponderada de objetivos es solución óptima de *Pareto.*

Ejemplo 32 (Eliminación de residuos peligrosos)

Datos:

- Una compañía propietaria de siete *centrales* nucleares está decidiendo en coordinación con el gobierno la localización de dos *almacenes* de residuos nucleares.
- En la Figura 4.4 tenemos representadas la *localización* de las siete centrales y las tres *posibles localizaciones* para los dos almacenes nucleares.
- Cuando los almacenes estén construidos, los *residuos* serán transportados desde las centrales a los almacenes mediante camiones utilizando la red publica de *carreteras.*

TABLE 8.2 Hazardous Waste Example

Source i		Site $j = 1$ $k = 1$	Site $j = 1$ $k = 2$	Site $j = 2$ $k = 1$	Site $j = 2$ $k = 2$	Site $j = 3$ $k = 1$	Site $j = 3$ $k = 2$	Supply
1	Distance	200	280	850	1090	900	1100	1.2
	Population	50	15	300	80	400	190	
2	Distance	400	530	730	860	450	600	0.5
	Population	105	60	380	210	350	160	
3	Distance	600	735	550	600	210	240	0.3
	Population	300	130	520	220	270	140	
4	Distance	900	1060	450	570	180	360	0.7
	Population	620	410	700	430	800	280	
5	Distance	600	640	390	440	360	510	0.6
	Population	205	180	440	370	680	330	
6	Distance	900	1240	100	120	640	800	0.1
	Population	390	125	80	30	800	410	
7	Distance	1230	1410	400	460	1305	1500	0.2
	Population	465	310	180	105	1245	790	

Figura 4.5: Datos sobre *distancia* (millas) y *población* (miles de personas).

- Se persiguen dos *objetivos:*
  - Minimizar la *distancia* de las centrales a los almacenes (coste transporte: combustible y tiempo empleado).
  - Minimizar el tránsito por áreas con mayor *población* (gente expuesta al riesgo de mercancías peligrosas y riesgo de accidentes de tráfico en zonas con mayor densidad de tráfico).
- En la tabla de la Figura 4.5 tenemos los siguientes *parámetros:*
  - $i =$ índice para las *centrales,* $i \in \mathcal{I} = \{1, \ldots, 7\}$.
  - $j =$ índice para las *localizaciones,* $j \in \mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$.
  - $k =$ índice para las *rutas,* $k \in \mathcal{K} = \{1, 2\}$.
  - $s_i =$ ('Supply') cantidad (toneladas) esperada de *residuos* en la central $i \in \mathcal{I}$.
  - $d_{ijk} =$ *Distancia* (millas) de la central i a la localización j a través de la ruta k, para todos los $i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K}$.
  - $p_{ijk} =$ *Población* (en miles de personas) a lo largo de la ruta k que va de la central i a la localización j, para todos los $i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K}$.
  - *Notar* que para cada caso la ruta $k = 1$, comparada con la ruta $k = 2$, es más corta pero involucra más población.

Objetivo: *Formular* el PL multiobjetivo para ayudar a decidir la *localización* los dos almacenes de residuos nucleares.

Operaciones 32:

- El primer paso es definir las *variables de decisión:*

$$
\begin{aligned}
y_j &= 1 \text{ si la localización } j \text{ es elegida,} \qquad j \in \mathcal{J}\\
y_j &= 0 \text{ si la localización } j \text{ no es elegida,} \qquad j \in \mathcal{J}\\
x_{ijk} &= \text{cantidad de residuo transportado de la central } i\\
&\quad \text{al almacén } j \text{ por la ruta } k\\
&\quad i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K}.
\end{aligned}
$$

- El segundo paso es formular el PL multiobjetivo:

$$
\begin{array}{lll}
\min & z_1(x) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}} \sum_{k\in\mathcal{K}} d_{ijk} x_{ijk} & \textit{(Distancia)}\\
\min & z_2(x) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}} \sum_{k\in\mathcal{K}} p_{ijk} x_{ijk} & \textit{(Población)}\\
\text{s.a.} & \sum_{j\in\mathcal{J}} \sum_{k\in\mathcal{K}} x_{ijk} = s_i, \qquad i \in \mathcal{I} & \textit{(Residuos)}\\
& \sum_{j\in\mathcal{J}} y_j = 2 & \textit{(2 almacenes)}\\
& x_{ijk} \le s_i y_j, \qquad i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K} & \\
& x_{ijk} \ge 0, \qquad i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K} & \\
& y_j \in \{0,\ 1\} \qquad j \in \mathcal{J}. &
\end{array}
$$

Solución: Ver el apartado anterior.

Ejemplo 33 (Eliminación de residuos peligrosos - continuación)

Datos: Continuamos con el ejemplo anterior.

Objetivo:

1. Formular el anterior problema de optimización multiobjetivo como un problema monoobjetivo mediante la *suma ponderada* de sus objetivos.
2. *Resolver* el anterior problema comparando varias ponderaciones de las funciones objetivo $z_1(x)$ y $z_2(x)$.

Operaciones 33:

1. Mediante los *pesos positivos* γ_1 y γ_2 podemos expresar en una única función objetivo los objetivos 'Distancia' y 'Población'.

$$
\begin{array}{lll}
\min & z(x) = \gamma_1\, z_1(x) + \gamma_2\, z_2(x) & \textit{(Distancia} \\
 & & \textit{ y población)} \\
\text{s.a.} & \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{k \in \mathcal{K}} x_{ijk} = s_i, \quad i \in \mathcal{I} & \textit{(Residuos)} \\
 & \sum_{j \in \mathcal{J}} y_j = 2 & \textit{(Dos almacenes)} \\
 & x_{ijk} \leq s_i y_j, \quad i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K} & \\
 & x_{ijk} \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K} & \\
 & y_j \in \{0,\ 1\} \quad j \in \mathcal{J}. &
\end{array}
$$

2. Dando valores *positivos* a los pesos γ_1 y γ_2 obtenemos un PL.

   - En la Tabla 4.3 tenemos los resultados obtenidos para diferentes pesos (estos resultados se han obtenido mediante un solver para LP).
   - La etiqueta *'Millas×Tm'* corresponde a multiplicar 'Millas' por 'Toneladas' en el término $d_{ijk}x_{ijk}$ que aparece en $z_1(x)$.
   - La etiqueta *'Población×Tm'* corresponde a multiplicar 'Personas' por 'Toneladas' en el término $p_{ijk}x_{ijk}$ que aparece en $z_2(x)$.
   - En el caso 1, donde el objetivo 'distancia' tiene un peso 10 veces superior al objetivo 'población', todos los residuos son enviados por las rutas con índice $k = 1$ *(rutas más cortas,* pero con más población).
   - En el caso 5, ocurre lo contrario.
   - En todos los casos la *localización óptima* de los dos almacenes es en las localizaciones 1 y 3, excepto para el caso 3.

Solución:

1. Ver en el apartado 'Operaciones'.
2. Ver Tabla 4.3. Con estos datos la compañía, en coordinación con el gobierno, puede tomar una decisión.

Caso			Millas×Tm	Millas×Tm	Total Millas×Tm	Total Población×Tm	Loc. Óptimas
	γ_1	γ_2	$k=1$	$k=2$	z_1^*	z_2^*	
1	10	1	1155	0	1155	1334	1 3
2	10	5	754	591	1345	782	1 3
3	10	10	1046	404	1450	607	1 2
4	5	10	440	1114	1554	533	1 3
5	1	10	0	1715	1715	468	1 3

Tabla 4.3: *Localización óptima* de los dos almacenes en función de los pesos γ_1 y γ_2.

4.4. Optimización multiobjetivo por metas

Ejemplo 34 (Optimización por metas)

Datos: Consideramos el siguiente problema multiobjetivo por *metas:*

$$\begin{array}{rl}
\text{meta} & z_1(x) = +3x_1 + 1x_2 \leq 10 \\
\text{meta} & z_2(x) = -1x_1 + 2x_2 \geq 5 \\
\text{meta} & z_3(x) = +2x_1 = 8 \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & 0 \leq x_1 \leq 3 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 3.
\end{array}$$

Objetivo: Formular el anterior problema mediante un PL introduciendo *variables de deficiencia* ponderadas según los siguientes pesos $\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 3$ y $\gamma_3^+ = 10, \gamma_3^- = 5$.

Operaciones 34:

- En primer lugar, introducimos tres *variables de deficiencia* $d_i \geq 0$:

$$\begin{aligned}
z_1(x) = +3x_1 + 1x_2 - d_1 &\leq 10 \\
-z_2(x) = +1x_1 - 2x_2 - d_2 &\leq -5 \\
z_3(x) = +2x_1 + d_3^+ - d_3^- &= 8
\end{aligned}$$

- Notar que hemos multiplicado por -1 la segunda desigualdad para tenerla expresada en la versión de $\leq$.
- Notar que para definir z_3 usamos dos variables de deficiencia, por tratarse de una restricción de igualdad.

- En segundo lugar definimos la *función objetivo,* como *suma ponderada* de las variables de deficiencia:

$$z(x) = 2d_1 + 3d_2 + 10d_3^+ + 5d_3^-.$$

Solución: El correspondiente PL es

$$\begin{array}{ll} \min & 2d_1 + 3d_2 + 10d_3^+ + 5d_3^- \\ \text{s. a} & 3x_1 + 1x_2 - d_1 \leq 10 \\ & 1x_1 - 2x_2 - d_2 \leq -5 \\ & +2x_1 + d_3^+ - d_3^- = 8 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 3 \\ & d \geq 0. \end{array}$$

General (Optimización multiobjetivo por metas)

- Las metas pueden considerarse *restricciones suaves* (no es imprescindible que se cumplan), es decir, intentamos calcular una solución que las cumpla en el mayor grado posible.
- Consideramos el siguiente problema multiobjetivo por *metas:*

$$\begin{array}{rl} \text{meta} & z_1(x) \leq m_1 \\ & \vdots \\ \text{meta} & z_m(x) \leq m_m \\ \text{s. a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

donde $z_i(x) = c_{i1}x_1 + \ldots + c_{in}x_n$ para cada $i \in \mathcal{I} = \{1, \ldots, m\}$.

- Podemos resolver este problema multiobjetivo transformándolo en un problema PL:
  - Introducimos *variables de deficiencia* d_i mediante sendas restricciones.
  - Minimizar la *suma ponderada* de la variables de deficiencia.

$$\begin{array}{ll} \min & z(d) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \gamma_i d_i \\ \text{s. a} & z_1(x) - d_1 \leq m_1 \\ & \vdots \\ & z_m(x) - d_m \leq m_m \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \; d \geq 0 \end{array} \tag{4.1}$$

donde cada peso γ_i es un escalar estrictamente *positivo* para todo $i \in \mathcal{I}$.

- Los pesos γ_i sirven para dar mayor o menor *importancia* a su correspondiente meta.

- El decisor debe seleccionar los pesos y las metas dependiendo de su *criterio* y de las *circunstancias.*

- Si en el problema tenemos una meta con desigualdad de $\geq$, tenemos que transformarla en una desigualdad de $\leq$ multiplicando los coeficientes de la desigualdad por -1.

- Si una meta es de igualdad, por ejemplo $z_0(x) = m_0$, tendremos que asignarles dos variables de deficiencia positivas: d_0^+ y d_0^- :

$$z_0(x) + d_0^+ - d_0^- = m_0.$$

- Notar que las unidades de los pesos γ_i son 'Puntos de Coste por Unidad$_i$', es decir, PC / Unidad$_i$.

- Por tanto, las unidades de la función objetivo $z(d)$ son PC.

General (optimización por metas y optimalidad de Pareto)

- La optimización multiobjetivo por metas es un método *popular* entre los decisores, pues el trabajar con metas resulta intuitivo.

- Pero, en la optimización multiobjetivo por metas *no tenemos garantías* de que la solución óptima obtenida sea una solución óptima de Pareto.

- Explicación: una vez que las metas están satisfechas, el algoritmo no busca puntos mejores.

Ejemplo 35 (Banco Trébol - continuación)

Datos:

- Consideramos de nuevo el ejemplo del Banco Trébol.
- Lo que pretendemos ahora es resolver este problema multiobjetivo de forma que alcancemos las siguientes *'metas':*
  - Un *beneficio* de al menos 18,5 millones de euros.
  - Un coeficiente de *riesgo* menor o iqual que 7,0.
  - Un coeficiente de *reservas* menor o iqual que 0,8.

Objetivo: Introducir estas tres *metas* en la formulación del problema.

Operaciones 35:

- Podemos formular el problem a como sigue:

$$
\begin{array}{lll}
\textit{meta} & z_1(x) \geq 18,5 & \text{(Beneficio)} \\
\textit{meta} & z_2(x) \leq 7,0 & \text{(Riesgo)} \\
\textit{meta} & z_3(x) \leq 0,8 & \text{(Reservas)} \\
\text{s.a.} & x_1 + \ldots + x_8 = 20 + 150 + 80 & \text{(Invertir todo)} \\
 & x_1 \geq 0,14 \cdot 150 + 0,04 \cdot 80 & \text{(Reservas)} \\
 & 1,000x_1 + 0,995x_2 + 0,960x_3 + 0,900x_4 + & \\
 & + 0,850x_5 \geq 0,47 \cdot 150 + 0,36 \cdot 80 & \text{(Liquidez)} \\
 & x_j \geq 0,05 \cdot (20 + 150 + 80) \; j = 1, \ldots, 8 & \text{(Diversificación)} \\
 & x_8 \geq 0,30 \cdot (20 + 150 + 80) & \text{(Comerciales)} \\
 & x \geq 0, &
\end{array}
$$

- Las funciones objetivo z_1, z_2 y z_3 fueron definidas al principio de este capítulo.
- La restricción de 'Liquidez' está escrita en dos líneas debido a su excesiva longitud.

Solución: Ver el apartado 'Operaciones'.

Ejemplo 36 (Banco Trébol - continuación)

Datos:

- Vamos a concluir el ejemplo del Banco Trébol.
- Recordamos que lo que pretendemos es resolver este problema multiobjetivo de forma que alcancemos las siguientes *metas* :
  - Un *beneficio* de al menos 18,5 millones de euros.
  - Un coeficiente de *riesgo* menor que 7,0 (sin unidades).
  - Un coeficiente de *reservas* menor que 0,8 (sin unidades).

Objetivo:

1. Formular el problema PL para resolver este problema multiobjetivo, dando *igual importancia* a todas las metas.
2. Calcular una *solución óptima* para el problema PL.
3. Repetir los dos apartados anteriores, pero dando 10 veces *más importancia* a la meta 'reservas' que a las otras dos metas.

Operaciones 36:

1. Podemos formular el *problem PL* como sigue:

$$
\begin{array}{lll}
\min & z(d) = d_1 + d_2 + d_3 & \\
\text{s.a.} & -z_1(x) - d_1 \leq -18,5 & \text{(Beneficio)} \\
& z_2(x) - d_2 \leq 7,0 & \text{(Riesgo)} \\
& z_3(x) - d_3 \leq 0,8 & \text{(Reservas)} \\
& x_1 + \ldots + x_8 = 20 + 150 + 80 & \text{(Invertir todo)} \\
& \vdots & \\
& x \geq 0, \quad d \geq 0. &
\end{array}
$$

   Notar que en la función objetivo tenemos de forma implícita los pesos $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$, es decir, damos la misma importancia a todas las metas. Notar también, que la restricción de 'Liquidez' está escrita en dos líneas debido a su excesiva longitud.

2. Mediante *software* de optimización podemos resolver el anterior problema PL (ver columna 'Caso 1' de la Tabla 4.4).

3. En este caso sólo tendríamos que *actualizar* la función objetivo a

$$z(d) = d_1 + d_2 + 10d_3,$$

   y resolver el correspondiente problema PL (ver columna 'Caso 2' de la Tabla 4.4).

Solución:

1. Ver apartado 'Operaciones'.
2. Ver columna 'Caso 1' de la Tabla 4.4.
3. Ver columna 'Caso 2' de la Tabla 4.4.

	Caso 1	**Caso 2**
γ_1 : Peso para el beneficio	1	1
γ_2 : Peso para el coeficiente riesgo	1	1
γ_3 : Peso para el coeficiente de reservas	1	10
$z_1(x^*)$: Beneficio ($\geq 18,50$)	18,50	17,53
d_1^*	0,00	0,97
$z_2(x^*)$: Riesgo ($\leq 7,00$)	7,00	7,00
d_2^*	0,00	0,00
$z_3(x^*)$: Reservas ($\leq 0,80$)	0,93	0,82
d_3^*	0,13	0,02
x_1^*: Dinero en caja	24,20	24,20
x_2^*: Inversiones a corto plazo	16,03	48,30
x_3^*: Bonos del Estado (1 a 5 años)	12,50	12,50
x_4^*: Bonos del Estado (6 a 10 años)	12,50	12,50
x_5^*: Bonos del Estado (más de 10 años)	44,77	12,50
x_6^*: Préstamos a plazo	52,50	52,50
x_7^*: Préstamos hipotecarios	12,50	12,50
x_8^*: Préstamos comerciales	75,00	75,00

Tabla 4.4: *Resultados* para dos conjuntos de pesos: $\gamma = (1, 1, 1)$ y $\gamma = (1, 1, 10)$.

Capítulo 5

Gestión de proyectos

5.1. Método del camino crítico

Nota: Este método, en inglés, se denomina *'Critical Path Method'* (CPM).

Ejemplo 37 (Construcción de un almacén)

Datos:

- Consideramos el *proyecto* para la construcción de un almacén.
- Dicho proyecto consta de *9 actividades* que siguen cierto orden de precedencia (Tabla 5.1).

k	**Actividad**	**Duración** a_k **(días)**	**Actividades Precedentes**
1	Cimientos	15	–
2	Alcantarillas	5	–
3	Base de hormigón	4	1, 2
4	Estructura y paredes	3	3
5	Tejado	7	4
6	Instalación eléctrica primaria	10	4
7	Calefacción y aire acondicionado	13	2, 4
8	Tabiques	18	4, 6, 7
9	Acabados interiores	20	5, 8

Tabla 5.1: *Duración* de las actividades para la construcción del almacén.

- En la Tabla 5.1 tenemos a_k, la *duración* estimada de cada actividad (días).

Objetivo: Representa la *red* asociada a este proyecto.

Operaciones 37: En la Fig. 5.1 podemos ver la *red* del proyecto.

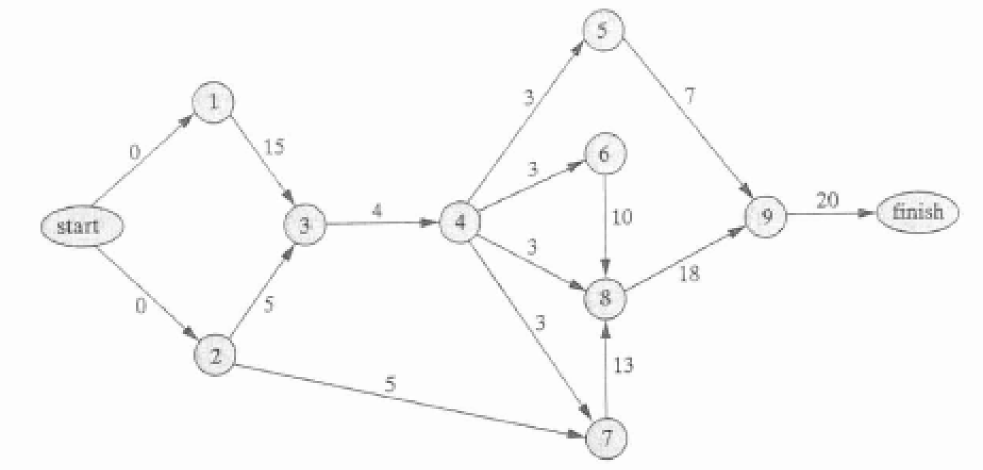


Figura 5.1: *Red* del proyecto 'Construcción de un almacén'.

- Cada *nodo* representa una actividad.
- De cada actividad k sale uno o varios *arcos* de longitud a_k dirigidos a cada actividad sucesora.
- Los nodos que no tienen predecesores se unen al denominado *'nodo inicial'* (nodo 0) mediante un arco de longitud cero.
- Lo nodos que no tienen sucesores se unen al denominado *'nodo final'* .

Solución: En la Figura 5.1 tenemos representada la *red* del proyecto.

General (red de un proyecto)

- De cara a *gestionar* un proyecto, nos será muy útil representar la denominada *red* del proyecto donde:
  - Cada *nodo* representa una actividad.
  - De cada *actividad* k sale uno o varios arcos de longitud a_k dirigidos a cada actividad sucesora.
  - Lo nodos que no tienen predecesores se unen al denominado *'nodo inicial'* (nodo 0) mediante un arco de longitud cero.
  - Lo nodos que no tienen sucesores se unen al denominado *'nodo final'*.

General (tiempos de un proyecto I)

- A la hora de *gestionar* un proyecto nos puede interesar:
  - Estimar la *duración* total del proyecto.

- Planificar la *compra* de materiales.
- Planificar la *contratación* de los correspondientes especialistas.
- Planificar las correspondientes *licencias* y estudios.
- Etc.

- Por estos motivos nos interesa *conocer:*
  - El *tiempo total* estimado que durará la ejecución del proyecto.
  - Para cada actividad del proyecto, el tiempo mínimo que debe pasar antes de que podamos iniciarla *(tiempo de inicio temprano).*
  - Notar que si el 'tiempo de inicio temprano' de una actividad es t días significa que podemos empezarla al inicio del día $t + 1$.

- Dada la red de un proyecto, se denomina *'camino crítico'* para la actividad p al camino más largo del nodo 0 al nodo p.
  - La longitud del camino crítico para la actividad p nos da su *tiempo de inicio temprano.*
  - Por lo tanto, la *duración total* de un proyecto, corresponde a la longitud del camino critico más largo (camino crítico hasta el 'nodo final').

Nota. Este tema también se puede consultar y/o ampliar en el Capítulo 9 del siguiente libro: Rardin, R. L., 'Optimization in Operations Research', Editorial Prentice Hall, 1998.

Ejemplo 38 (Construcción de un almacén - continuación)

Datos:

- En la Tabla 5.1 tenemos a_k la *duración* estimada de cada actividad (días) junto con las respectivas actividades precedentes.
- El *tiempo de inicio temprano* para una actividad p, que denotamos por $v[p]$, podemos calcularlo con la siguiente fórmula recursiva:

$$v[p] = \max\{v[i] + a_i \mid i \text{ es un predecesor de } p\}$$

- Denotamos por $d[p]$ el valor de i para el que se alcanza el anterior *máximo.*
- d[p] es el *predecesor* de p en su camino crítico.

Objetivo: Calcula el *tiempo* de inicio temprano y el *camino* crítico para cada una de las actividades requeridas para construir el almacén.

Operaciones 38:

- En la Figura 5.1 tenemos la *red* del proyecto.
- En la Tabla 5.2 tenemos el *tiempo* de inicio temprano y el *camino* crítico, para cada actividad.

k	**Actividad**	**Inicio Temprano**	**Camino Crítico**
1	Cimientos	0	0 - 1
2	Alcantarillas	0	0 - 2
3	Base de hormigón	15	0 - 1 - 3
4	Estructura y paredes	19	0 - 1 - 3 - 4
5	Tejado	22	0 - 1 - 3 - 4 - 5
6	Instalación eléctrica primaria	22	0 - 1 - 3 - 4 - 6
7	Calefacción y aire acondicionado	22	0 - 1 - 3 - 4 - 7
8	Tabiques	35	0 - 1 - 3 - 4 - 7 - 8
9	Acabados interiores	53	0 - 1 - 3 - 4 - 7 - 8 - 9

Tabla 5.2: *Inicio* temprano (días) de las actividades para la construcción del almacén.

- Veamos cómo se han realizado los *cálculos* para obtener estos resultados.
  - Los *tiempos* de inicio temprano para las actividades 1 y 2 son 0, pues no tienen actividades precedentes. Escribiremos

$$v[1] = 0 \quad \text{y} \quad v[2] = 0 \quad \text{(día).}$$

  - Su *nodo* precedente es el nodo 0, por lo que

$$d[1] = 0 \quad \text{y} \quad d[2] = 0 \quad \text{(nodo).}$$

- Veamos cómo se calcula el tiempo de inicio temprano para la *actividad 3*.
  - Las actividades que la *preceden* son la 1 y la 2, cuya duración es 15 y 5 días, respectivamente.
  - Por lo tanto, podremos *iniciar* la actividad 3 como muy pronto después de 15 días:

$$\begin{aligned} v[3] &= \max\{v[1] + a_1, v[2] + a_2\} \\ &= \max\{0 + 15, 0 + 5\} \\ &= 15 \quad \text{días} \\ d[3] &= 1. \end{aligned}$$

  - Así, el *camino* crítico de la actividad 3 es: 0 - 1 - 3.

- Para la *actividad 4,* su camino crítico es 0 - 1 - 3 - 4, pues:

$$\begin{aligned} v[4] &= \max\{v[3]+4\} = 19 \quad \text{días} \\ d[4] &= 3. \end{aligned}$$

- Para la *actividad 7,* su camino crítico es 0 - 1 - 3 - 4 - 7 pues:

$$\begin{aligned} v[7] &= \max\{v[2]+5, v[4]+3\} \\ &= \max\{0+5, 19+3\} \\ &= 22 \quad \text{días} \\ d[7] &= 4. \end{aligned}$$

- Y así sucesivamente...

Solución: El *tiempo* de inicio temprano y el *camino* crítico para cada una de las actividades puede encontrarse en la Tabla 5.2.

General (Método del camino crítico)

- *Input:*
  1. a_k : *duración* estimada de la actividad $k \in \mathcal{K} = \{1, \ldots, K\}$.
  2. Conjunto de actividades *predecesoras* de cada actividad $k \in \mathcal{K}$.
- *Output:*
  1. $v[k]$: *Tiempo de inicio temprano* de la actividad $k \in \mathcal{K}$.
  2. $d[k]$: *Predecesor* de la actividad k en el camino crítico de $k \in \mathcal{K}$.
  3. *Caminos críticos* (a partir de $d[k]$).
  4. *Duración* estimada de todo el proyecto: $v[K+1]$, donde $K+1$ es el 'nodo final'.
- *Paso 0:* Inicialización.
  1. *Numerar* los nodos de forma que los arcos (i, j) de la red del proyecto cumpla $i < j$.
  2. *Inicializar* $v[0] = 0$.
- *Paso 1:* Criterio de parada.
  1. Si ya hemos calculado el tiempo de inicio temprano para el 'nodo final' *paramos.*
  2. En caso contrario, sea p el *nodo* no procesado con la etiqueta más pequeña.
- *Paso 2:* Procesado.

1. Calcular el *tiempo de inicio temprano* para p

$$v[p] \quad = \quad \max\{v[i] + a_i \mid i \text{ es un predecesor de } p\} \tag{5.1}$$

2. Guardar en $d[p]$ el valor de i para el que se alcanza el anterior *máximo.*
3. d[p] es el *predecesor* de p en su camino crítico.
4. Volver al *Paso 1.*

General (Tiempos de un proyecto II)

- A la hora de *gestionar* un proyecto también nos interesa conocer:
  - La fecha límite de *finalización* del proyecto.
  - El momento en que, como muy tarde, cada actividad que compone el proyecto podrá iniciarse *(tiempo de inicio tardío).*
  - Si iniciamos cualquier actividad después de su tiempo de inicio tardío, no será posible finalizar el proyecto dentro del *plazo* marcado por la fecha límite.
  - *Notar* que dada una actividad con un tiempo de inicio temprano de t_0 días y un tiempo de inicio tardío de t_1 días, el momento en que podemos iniciar dicha actividad puede ser en cualquier momento de los días del *intervalo* $[t_0 + 1,\ t_1]$ o también al inicio del dia $t_1 + 1$.
- *Cálculo del tiempo de inicio tardío:*
  - A partir de la longitud del *camino más largo* desde el nodo p hasta el nodo final, podemos calcular el tiempo de inicio tardío para la actividad p.
  - Para calcular el *tiempo de inicio tardío* para la actividad p, que denotamos por $\hat{v}[p]$, podemos usar la siguiente fórmula recursiva:

    $$\hat{v}[p] = \min\{\hat{v}[i] \mid i \text{ es un sucesor de } p\} - a_p$$

    Notar que a_p está fuera de la minimización y no depende de i (comparar con ecuación (5.1)).
  - Denotamos por $\hat{d}[p]$ el valor de i donde se alcanza el anterior *mínimo.*
- *Notación:*
  - $\hat{v}[k]$: *Tiempo de inicio tardío* de la actividad $k \in \mathcal{K}$.
  - $\hat{d}[k]$: *Sucesor* de k en el camino más largo de k al nodo final, $k \in \mathcal{K}$.
- *Holgura del tiempo de inicio:*
  - Denotamos por $h[k]$ esta holgura.
  - Es la *diferencia* entre el tiempo de inicio tardío y el tiempo de inicio temprano: $h[k] = \hat{v}[k] - v[k]$.
  - Es lo máximo que se puede *retrasar* una actividad para terminar el proyecto dentro de plazo.

- *Actividades críticas:*
  - Son las actividades con una holgura de tiempo de inicio igual a *cero.*
  - El retraso en una actividad crítica conlleva no poder terminar el proyecto dentro de *plazo.*

Ejemplo 39 (Construcción de un almacén - continuación)

Datos:

- Continuamos con el *proyecto* para construir un almacén.
- Suponemos que el *plazo* límite para ejecutar el proyecto es de 80 días.

Objetivo: Para cada actividad, calcula el *tiempo* de inicio tardío, la *holgura* del tiempo de inicio y analiza si alguna actividad es *crítica.*

Operaciones 39:

- En la Figura 5.1 tenemos la *red* del proyecto.
- En la Tabla 5.3 tenemos el *tiempo* de inicio tardío y la *holgura* del tiempo de inicio, para cada actividad.

k	**Actividad**	**Inicio Temprano**	**Inicio Tardío**	**Holgura**
1	Cimientos	0	7	7
2	Alcantarillas	0	17	17
3	Base de hormigón	15	22	7
4	Estructura y paredes	19	26	7
5	Tejado	22	53	31
6	Instalación eléctrica primaria	22	32	10
7	Calefacción y aire acondicionado	22	29	7
8	Tabiques	35	42	7
9	Acabados interiores	53	60	7

Tabla 5.3: *Holgura* en días del momento para iniciar las actividades.

- Veamos cómo se han realizado los *cálculos* para obtener estos resultados.
- Dado que el plazo límite para ejecutar el proyecto es de 80 días, el *tiempo* de inicio tardío para el nodo final es 80 días, es decir, $\hat{v}[10] = 80$ días.

- Para la *actividad 9* tenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{v}[9] &= \min\{\hat{v}[10]\} - a_9 = 80 - 20 = 60 \quad \text{días} \\
\hat{d}[9] &= 10 \\
h[9] &= \hat{v}[9] - v[9] = 60 - 53 = 7 \quad \text{días.}
\end{aligned}$$

- De forma análoga, los *tiempos* de inicio tardío para las actividades 5, 6, 7 y 8, son 53, 32, 29 y 42 días, respectivamente (los cálculos se dejan como ejercicio).

- Para la *actividad 4* tenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{v}[4] &= \min\{\hat{v}[5], \hat{v}[6], \hat{v}[7], \hat{v}[8]\} - a_4 \\
&= \min\{53, 32, 29, 42\} - 3 \\
&= 29 - 3 = 26 \quad \text{días} \\
\hat{d}[4] &= 7 \\
h[4] &= \hat{v}[4] - v[4] = 26 - 19 = 7 \quad \text{días.}
\end{aligned}$$

- Y así sucesivamente...

- En la Tabla 5.3 vemos que no hay actividades con *holgura* de tiempo de inicio igual a cero.

- Por lo tanto no hay actividades *críticas.*

Solución: El *tiempo* de inicio tardío y la *holgura* del tiempo de inicio para cada una de las actividades, puede encontrarse en la Tabla 5.3, donde puede verse que no hay actividades críticas.

5.2. Gestión de proyectos mediante programación lineal

- Numerosos aspectos de la gestión de proyectos pueden ser abordados mediante la *programación lineal* (PL) y la programación lineal entera (PLE).

- En particular, el cálculo y la gestión de los *tiempos* asociados para la gestión de un proyecto pueden ser abordados mediante PL tal como veremos en la siguiente sección.

- Otros aspectos de la gestión de proyectos que también pueden ser abordados mediante PL y/o PLE son:

- Asignación de *recursos* (operarios, máquinas, etc.) a las actividades de un proyecto.
- *Selección* de los proyectos más interesantes de un conjunto de proyectos candidatos.
- *Planificación* de la ejecución de un proyecto.
- Etc.

5.2.1. Gestión de los tiempos de un proyecto mediante programación lineal

Ejemplo 40 (Construcción de un almacén - continuación)

Datos: Consideramos el proyecto para la *construcción* de un almacén, visto en las secciones anteriores.

Objetivo: *Modeliza* mediante un problema de programación lineal (PL):

1. El cálculo del *tiempo de inicio temprano* para la actividad 4.
2. El cálculo del *tiempo de inicio tardío* para la actividad 4.
3. El cálculo de la *duración mínima* del proyecto.

Operaciones 40:

1. La *primera* cuestión puede resolverse como sigue:
   - Sea t_k el *tiempo* de inicio de la actividad $k \in \{0, \ldots, 10\}$ ($k = 0$ corresponde al 'nodo inial' y $k = 10$ corresponde al 'nodo final').
   - El cálculo del *tiempo de inicio temprano* para la actividad 4 puede modelizarse como

sigue:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & t_4 \\
s.a \quad & t_1 \geq 0 \\
& t_2 \geq 0 \\
& t_3 \geq t_1 + 15 \\
& t_3 \geq t_2 + 5 \\
& t_4 \geq t_3 + 4 \\
& \ldots \\
& t_{10} \geq t_9 + 20 \\
& t_{10} \leq 80 \\
& t \geq 0
\end{aligned}
$$

2. Para el cálculo del *tiempo de inicio tardío* para la actividad 4 sólo haría falta cambiar min por max en el anterior PL.

3. El cálculo de la *duración mínima* del proyecto, en el PL del primer caso deberíamos cambiar $min \quad t_4$ por $min \quad t_{10}$.

Solución: Ver apartado 'Operaciones'.

General (Gestión de tiempos mediante PL)

- En las secciones anteriores hemos supuesto que la duración de una actividad era un *dato*.
- Sin embargo, la duración de una actividad dependerá de los *recursos* que destinemos para ejecutarla (número de máquinas, número de operarios, etc.)
- Al mismo tiempo, el *coste* de una actividad en general decrece con la duración (no hay que pagar horas extras, etc.)
- Una forma sencilla de *modelizar* el coste para realizar una actividad en función del tiempo de ejecución x_k es

  $$c_k(x_k) = n_k - m_k x_k \qquad k \in \mathcal{K} = \{0, 1, \ldots, K+1\},$$

  donde n_k y m_k son positivos y x_k es una variable de decisión (cuando era un dato lo hemos llamado a_k).

- Sea t_k el *tiempo* de inicio de la actividad $k \in \mathcal{K}$ (0 corresponde al 'nodo inial' y $K+1$ corresponde al 'nodo final').
- Sea $\mathcal{J}(k)$ el conjunto de actividades *predecesoras* de la actividad $k \in \mathcal{K}$.
- De cara a calcular el *coste* mínimo de ejecución para un proyecto podemos definir el siguiente *PL*

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{k\in\mathcal{K}} c_k(x_k) & \\
s.a & t_1 = 0 & \\
 & t_k \geq t_j + x_j & k \in \mathcal{K}, j \in \mathcal{J}(k) \\
 & \underline{x}_k \leq x_k \leq \overline{x}_k & k \in \mathcal{K} \\
 & t_{K+1} \leq \bar{t}_{K+1} & \\
 & t \geq 0. &
\end{array}
$$

5.3. Diagrama de Gantt

General

- El diagrama de Gantt es una herramienta *gráfica* para la gestión de proyectos (ver Figura 5.2).
- Su objetivo es mostrar el *tiempo* de dedicación previsto para las actividades de un proyecto.
- Su formato básico es:
  - Representar en el eje X el *tiempo.*
  - Representar en el eje Y las *actividades* del proyecto.
  - Representar por medio de una barra horizontal el *comienzo* y la *duración* de cada actividad.
- Para la gestión de proyectos complejos (superiores a *25* actividades) se requiere además el uso de técnicas basadas en *redes* de precedencia (como el método del camino crítico).

5.4. Contexto aleatorio

- Todos los cálculos hechos hasta ahora se han basado en datos *estimados.*
- Por ejemplo, a_k corresponde a la duración estimada de la actividad k.
- Sin embargo, la duración de una actividad está sujeta a *incertidumbre* por lo que puede ser modelizada como una variable aleatoria.
- En este contexto aleatorio, de cara a gestionar un proyecto podemos usar el método denominado *PERT* (Project Evaluation and Review Techniques)

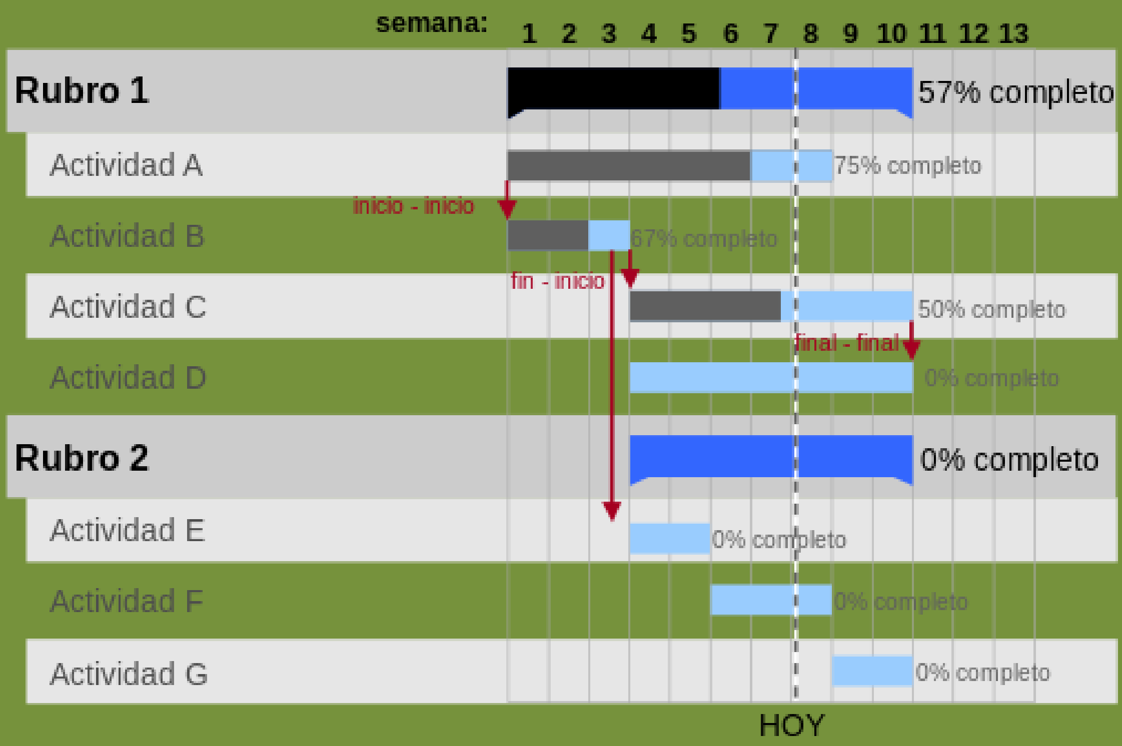


Figura 5.2: *Diagrama de Gantt.*

- El método PERT tiene los mismos *objetivos* que el método del camino crítico (tiempos de inicio temprano y tardío, duración mínima del proyecto, etc.)
- La diferencia fundamental es que el método PERT tiene en cuenta que la duración de cada actividad es *aleatoria.*
- El método PERT puede consultarse, por ejemplo, en el libro 'Investigación de Operaciones', F. S. Hillier, G. J. Lieberman, Ed. McGraw-Hill (2002).

Capítulo 6

Control estadístico de la calidad

6.1. Introducción

General (Relevancia de la calidad)

- Entendemos 'calidad' como sinónimo de *'aptitud para el uso'* presente y futuro.
- Muchos de nosotros hemos tenido experiencias de *mala calidad* al adquirir un producto o un servicio.
- Nuestra sensación es peor cuando los empleados no están autorizados o dispuestos a corregir problemas de calidad.
- Las consecuencia principal de tal actitud es la *perdida de clientes* (a corto y medio plazo).
- Las empresas con *éxito* entienden que la calidad tiene gran *impacto* en sus negocios y por esta razón fomentan políticas para controlar/mejorar la calidad de sus productos.

Nota. Este tema también se puede consultar y/o ampliar en el Capítulo 8 del siguiente libro: Montgomery, D. C., Runger, G. C., and Hubele, N. F. 'Engineering Statistics', Editorial Wiley, 2006.

General (Mejora de la calidad y Estadística)

- Para muchos consumidores dos de los factores más importantes de cara valorar un producto o servicio son:
  - *Precio:* los clientes buscamos el 'low cost'.
  - *Calidad:* tanto en el diseño como en la fabricación.
- Para lograr estos dos objetivos los métodos estadísticos son de gran importancia. La Estadística aplicada a la mejora de la calidad se basa en dos *herramientas* fundamentales:
  - *'Diseño de experimentos en ingeniería',* útil en el proceso de desarrollo de los productos (lo veremos en el próximo capítulo).
  - *'Control estadístico de procesos',* útil para monitorizar los procesos de producción (lo veremos en ese capítulo).

General (Control estadístico de procesos)

- El ‘control estadístico de procesos’ es sinónimo de *‘control estadístico de la calidad’.*
- Un proceso es una combinación única de herramientas, métodos, materiales y personal dedicados a la labor de producir un *resultado medible.*
- Por ejemplo, una *línea de producción* para ensamblar los componentes de un PC es un proceso.
- Todos los procesos tienen una *variabilidad* inherente que puede evaluarse por medio de métodos estadísticos. Por ejemplo:
    - Los sucesivos *productos* fabricados en un proceso de producción no son exactamente idénticos.
    - Los *tiempos* que tardan los usuarios en recibir un determinado servicio tampoco son idénticos,
    - etc.
- Se considera que este tipo de variación, llamada *variación aleatoria,* es inherente al sistema.
- Hay otro tipo de variación que no es inherente al sistema. Por ejemplo:
    - La *avería* de una máquina de la cadena de producción pude producir productos defectuosos.
    - Una materia prima *defectuosa* puede originar también productos defectuosos.
- Este tipo de variación, llamada *variación asignable,* debe ser asignada a una causa para ser corregida.
- Cuando la única variación presente es aleatoria, se dice que el proceso está *bajo control.*
- En caso contrario se dice que el proceso está *fuera de control.*
- El objetivo del control estadístico de procesos consiste en *monitorizar* si un proceso está bajo control.
- El control estadístico de procesos utiliza diferentes *herramientas estadísticas,* como el histograma, y especialmente los gráficos de control.

General (Gráficos de control)

- En la Figura 6.1 tenemos un *gráfico de control* típico.

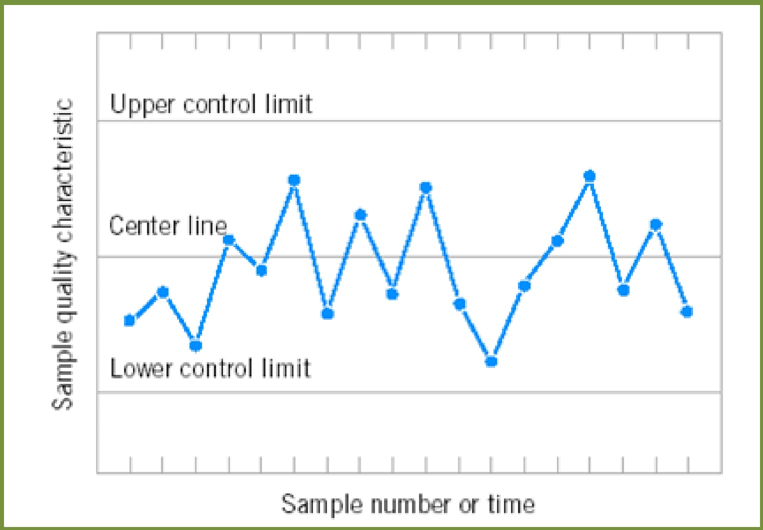


Figura 6.1: Gráfico de control típico.

- El objetivo de los gráficos de control es reconocer si un proceso particular está *bajo control.*
- Los tipos de gráficos de control que se consideran vienen determinados por tres valores:
  - Límite de control *superior* (UCL, 'upper control limit').
  - Límite de control *inferior* (LCL, 'lower control limit').
  - Línea *central* (CL, 'center line').
- Si para controlar un proceso industrial usamos, por ejemplo, la media muestral $\bar{X}$, entonces para utilizar los gráficos de control:
  - Primero se toman diferentes muestras de la *magnitud* o característica del proceso industrial que se quiere estudiar.
  - Después de calcula la *media* para cada muestra y se representa en el gráfico de control.
  - Cuando una de estas medias muestrales cae fuera de los límites de control se concluye que el proceso está *fuera de control.*
  - En este caso, los *límites de control* se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_{\bar{X}} + k\,\sigma_{\bar{X}} \\ CL &= \mu_{\bar{X}} \\ LCL &= \mu_{\bar{X}} - k\,\sigma_{\bar{X}} \end{aligned}$$

    donde habitualmente se toma $k = 3$, $\mu_{\bar{X}}$ es el valor esperado de $\bar{X}$ y $\sigma_{\bar{X}}$ su desviación típica.
- En las siguientes secciones veremos los siguientes tipos de gráfico de control:
  - *Gráficos de control $\bar{X}$* (para controlar la media).
  - *Gráficos de control R* (para controlar la varianza).

6.2. Gráficos de control X y R

Ejemplo 41 (Fabricación de aros para pistón)

Datos:

- Consideramos la fabricación de *aros para pistón* de motor.
- Una característica crítica en la calidad de un aro es su *diámetro interno*.
- Debido a las *variaciones* en su proceso de producción, podemos modelizar este diámetro como una variable aleatoria.
- Sea X la *variable aleatoria* 'diámetro interno' (en mm).
- Suponemos que la distribución de X es *Normal* de media $\mu = 74$ mm y desviación típica $\sigma = 0{,}01$ mm. Es decir:
$$X \sim N(\mu = 74, \sigma = 0{,}01).$$
- En un control de calidad se toman 16 *muestras* de tamaño $n = 5$ y se calcula las correspondientes medias muestrales (ver Tabla 6.1).

Muestra i	**Media Muestral** $\bar{x}_i$
1	73,9930
2	74,0080
3	73,9980
4	74,0060
5	73,9990
6	74,0102
7	74,0045
8	73,9870
9	74,0011
10	74,0062
11	73,9957
12	73,9946
13	74,0071
14	74,0090
15	73,9968
16	74,0081

Tabla 6.1: *Media* de X para las 16 muestras (en mm).

Objetivo:

1. Calcula el límite de control superior *(UCL),* el límite de control inferior *(LCL),* y el valor de la línea central *(CL)* asociados a $\bar{X}$.
2. *Representa* el gráfico de control $\bar{X}$.

Operaciones 41:

1. Podemos resolver la primera cuestión como sigue:

   - En primer lugar necesitamos calcular la *media* y la *desviación típica* de la media muestral $\bar{X}$:

   - Sabemos que $\mu_{\bar{X}} = \mu = 74$ y que

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}01}{\sqrt{5}} = 0{,}0045.$$

   - Por lo tanto:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} = 74 + 3 \cdot 0{,}0045 = 74{,}0135 \\ LCL &= \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} = 74 - 3 \cdot 0{,}0045 = 73{,}9865 \\ CL &= \mu_{\bar{X}} = \mu = 74 \end{aligned}$$

Solución:

1. Los límites pedidos son $UCL = 74{,}0135$, $LCL = 73{,}9865$ y $LC = 74$ (mm).
2. El gráfico de control $\bar{X}$ lo tenemos en la Figura 6.2.

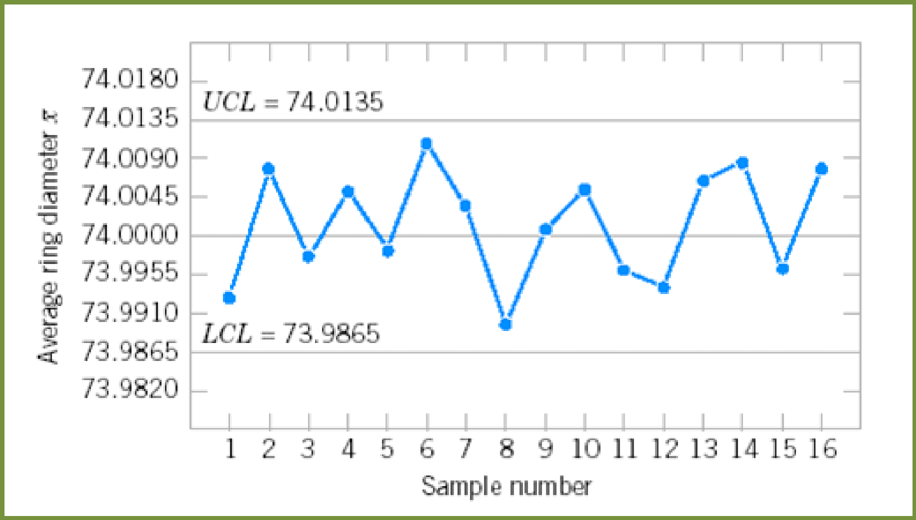


Figura 6.2: *Gráfico de control* $\bar{X}$.

General (gráficos de control $\bar{X}$ con media y desviación conocidas)

- Los gráficos de control $\bar{X}$ se denominan también 'gráficos de control *Shewhart*' (pronunciado como 'Shu-jart') en honor al ingeniero que introdujo ente tipo de gráficos.

- Se considera un *proceso* (fabricación, servicio, etc.) y se estudia una de sus magnitudes modelizada mediante una variable aleatoria X con media μ y con desviación típica σ.

- El gráfico de control $\bar{X}$ se utiliza para detectar posibles *deslizamientos* de la media μ.
- En este apartado suponemos que *conocemos* μ y σ.
- Para *representar* el gráfico de control $\bar{X}$ necesitamos los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_{\bar{X}} + 3\,\sigma_{\bar{X}} \\ CL &= \mu_{\bar{X}} \\ LCL &= \mu_{\bar{X}} - 3\,\sigma_{\bar{X}} \end{aligned}$$

  donde $\mu_{\bar{X}}$ es el valor esperado de $\bar{X}$ y $\sigma_{\bar{X}}$ su desviación típica.

- Sabemos que $\mu_{\bar{X}} = \mu$ y que

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

  donde n es el *tamaño muestral.*

Ejemplo 42 (Fabricación de aros para pistón - continuación)

Datos: Continuamos con el ejemplo anterior.

Objetivo:

1. ¿Podemos decir que el proceso de fabricación de aros de pistón está *'bajo control'?*
2. Suponiendo que el proceso de fabricación de aros esté bajo control ¿cuál es la *probabilidad* de que la media muestral caiga fuera de los límites de control?

Operaciones 42:

1. Sí, pues como se ve en el *gráfico de control* $\bar{X}$ (Figura 6.2) todas las medias muestrales caen dentro de los límites de control.
2. Podemos resolver la segunda cuestión como sigue:
   - Teniendo en cuenta que X es una variable aleatoria *Normal* entonces también lo es $\bar{X}$.
   - Además, dado que el proceso está *bajo control,* no ha habido cambios ni en la media ni en la desviación típica y así

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{X}} &= \mu = 74 \\ \sigma_{\bar{X}} &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}01}{\sqrt{5}} = 0{,}0045. \end{aligned}$$

- Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
& P(LCL \leq \bar{X} \leq UCL) \\
& = P(73{,}9865 \leq \bar{X} \leq 74{,}0135) \\
& = P\left(\frac{73{,}9865 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{74{,}0135 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right) \\
& = P(-3 \leq Z \leq 3) \\
& = P(Z \leq 3) - P(Z \leq -3) \\
& = \Phi(3) - \Phi(-3) \\
& = \Phi(3) - [1 - \Phi(3)] \\
& = 0,9987 - [1 - 0,9987] \\
& = 0{,}9974,
\end{aligned}
$$

  donde Z es una variable aleatoria *Normal estándar.*

- En consecuencia la *probabilidad* de estar fuera del anterior intervalo es $1-0{,}9974 = 0{,}0026$

Solución:

1. *Sí,* pues la media muestral de cada muestra cae dentro de los límites de control y de forma aleatoria alrededor de la media.
2. La *probabilidad* de que la media muestral caiga fuera de los límites de control es del $0{,}27\,\%$ (1 de cada 370) suponiendo que el proceso de fabricación de aros está bajo control.

General (Gráficos de control $\bar{X}$ y contraste de hipótesis)

- En el ejemplo anterior hemos visto que aunque el sistema esté bajo control tenemos una probabilidad del $0{,}27\,\%$ de declararlo fuera de control *(error del tipo I).*

- En esencia los gráficos de control equivalen a realizar una secuencia de *contrastes de hipótesis* (tantos como muestras).

- Para cada muestra implícitamente realizamos el siguiente contraste de hipótesis:

$$
\begin{array}{lll}
H_0: & \text{media} = \mu & \text{(sistema bajo control)} \\
H_1: & \text{media} \neq \mu & \text{(sistema fuera de control)}
\end{array}
$$

  al nivel de significación $\alpha = P(\,|\,Z\,| > \ 3\,) = 0{,}0027.$

- Recordamos que el *nivel de significación* α mide el riesgo de tipo I (probabilidad de equivocarnos al aceptar una H_1 falsa), es decir,

$$\begin{aligned}\alpha &= P\Big(\text{Declarar que el sistema está } \textit{fuera de control,}\\ &\quad \text{cuando el sistema está bajo control}\Big)\\ &= 0{,}0027.\end{aligned}$$

General (Gráficos de control $\bar{X}$ con media y desviación desconocidas)

- Hasta ahora hemos supuesto que la magnitud estudiada X, tenía un distribución *Normal* con media μ y desviación típica σ *conocidas.*

- En general, por el *teorema central del límite,* podemos suponer la hipótesis de normalidad (además de poder hacer los correspondientes test de normalidad).

- Sin embargo, los parámetros μ y σ normalmente son *desconocidos* y tendremos que estimarlos.

- Podemos estimar μ mediante la denominada *'gran media'* o *'media de medias':*

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{X}_i,$$

  donde m es el número de muestras y $\bar{X}_i$ es la media para la muestra i.

- Para cuantificar la *variabilidad* del proceso, aunque se puede estimar la desviación típica, en este contexto se utiliza más el *rango promedio:*

$$\bar{R} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}R_i,$$

  donde R_i es el rango de la muestra i (valor mayor menos valor menor de la muestra).

- En caso de desconocer μ y σ, para representar el *gráfico de control* $\bar{X}$ necesitamos los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}UCL &= \bar{\bar{x}} + A_2(n)\,\bar{r}\\ CL &= \bar{\bar{x}}\\ LCL &= \bar{\bar{x}} - A_2(n)\,\bar{r}\end{aligned}$$

  donde n es el tamaño de cada muestra, $A_2(n)$ puede encontrarse en la *Tabla Apéndice.3,* $\bar{\bar{x}}$ y $\bar{r}$ son los valores observados de la gran media y del rango promedio, respectivamente.

General (Gráficos de control R)

- Los gráficos de control $\bar{X}$ están diseñados para detectar posibles deslizamientos de la *media* poblacional μ.

- Por otro lado, nos puede interesar recoger los cambios producidos en la *desviación típica* poblacional σ (para analizar la variabilidad del proceso).

- En estos casos se puede usar el *gráfico de control S* que se basa en la desviación típica muestral S (implícitamente estamos suponiendo que desconocemos σ).

- Sin embargo, en la práctica se usa más frecuentemente el *gráfico de control R* basado en el rango, que también permite monitorizar la variabilidad.

- Para representar el *gráfico de control R* necesitamos los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} UCL &= D_4(n)\,\bar{r} \\ CL &= \bar{r} \\ LCL &= D_3(n)\,\bar{r} \end{aligned}$$

donde n es el tamaño de cada muestra, $D_3(n)$ y $D_4(n)$ pueden encontrarse en la *Tabla Apéndice.3* y $\bar{r}$ es el valor observado del rango promedio.

Ejemplo 43 (Fabricación de turbinas)

Datos:

- En la fabricación de motores de avión la *turbina* es un elemento fundamental.
- Éstas se fabrican mediante un proceso de *fundición* de precisión.
- Una magnitud importante es la *apertura de las paletas* de las turbinas, que denotamos por X.
- La finalidad del siguiente control de calidad es verificar la *estabilidad* estadística de este proceso de fabricación de turbinas.
- En la tabla de la Figura 6.3 tenemos los datos de 20 *muestras* aleatorias de tamaño 5 para X.

Sample Number	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x	r
1	33	29	31	32	33	31.6	4
2	33	31	35	37	31	33.4	6
3	35	37	33	34	36	35.0	4
4	30	31	33	34	33	32.2	4
5	33	34	35	33	34	33.8	2
6	38	37	39	40	38	38.4	3
7	30	31	32	34	31	31.6	4
8	29	39	38	39	39	36.8	10
9	28	33	35	36	43	35.0	15
10	38	33	32	35	32	34.0	6
11	28	30	28	32	31	29.8	4
12	31	35	35	35	34	34.0	4
13	27	32	34	35	37	33.0	10
14	33	33	35	37	36	34.8	4
15	35	37	32	35	39	35.6	7
16	33	33	27	31	30	30.8	6
17	35	34	34	30	32	33.0	5
18	32	33	30	30	33	31.6	3
19	25	27	34	27	28	28.2	9
20	35	35	36	33	30	33.8	6
						$\bar{\bar{x}} = 33.32$	$\bar{r} = 5.8$

Figura 6.3: *Apertura* de las paletas de las turbinas.

- Los datos de la tabla se han *codificado* usando los últimos dos dígitos de la correspondiente observación.
- Por *ejemplo* el primer dato es 33 y representa el valor observado 0,5033 pulgadas.

Objetivo:

1. *Representa* el gráfico de control $\bar{X}$.
2. Representa el gráfico de control R.

Operaciones 43:

1. La primera cuestión la podemos resolver como sigue:

- Para representar el *gráfico de control $\bar{X}$* necesitamos los siguientes parámetros:

$$
\begin{aligned}
UCL &= \bar{\bar{x}} + A_2(n)\,\bar{r} = 33,32 + 0,577 \cdot 5,8 = 36,67 \\
CL &= \bar{\bar{x}} = 33,32 \\
LCL &= \bar{\bar{x}} - A_2(n)\,\bar{r} = 33,32 - 0,577 \cdot 5,8 = 29,97
\end{aligned}
$$

  donde $n = 5$ es el tamaño de cada muestra.

- El gráfico de control $\bar{X}$ lo podemos ver en la Figura 6.4.

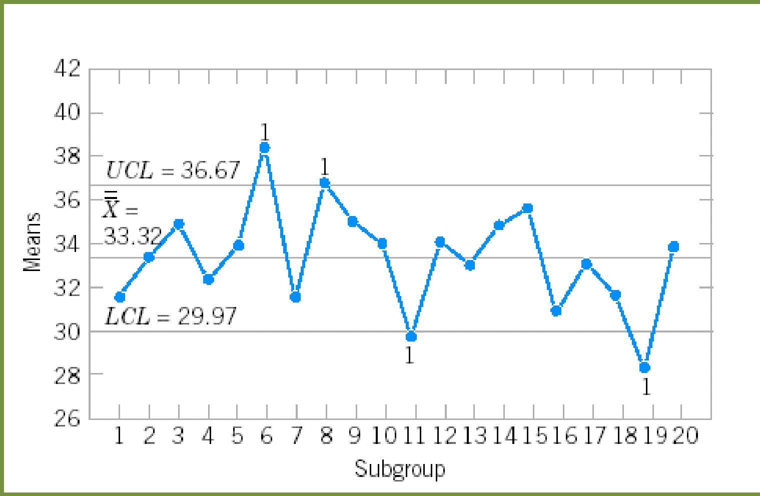


Figura 6.4: *Gráfico de control $\bar{X}$.*

2. La segunda cuestión la podemos resolver como sigue:

- Para representar el *gráfico de control R* necesitamos los siguientes parámetros:

$$
\begin{aligned}
UCL &= D_4(n)\,\bar{r} = 2,115 \cdot 5,8 = 12,27 \\
CL &= \bar{r} = 5,8 \\
LCL &= D_3(n)\,\bar{r} = 0 \cdot 5,8 = 0.
\end{aligned}
$$

- El gráfico de control R lo podemos ver en la Figura 6.5.

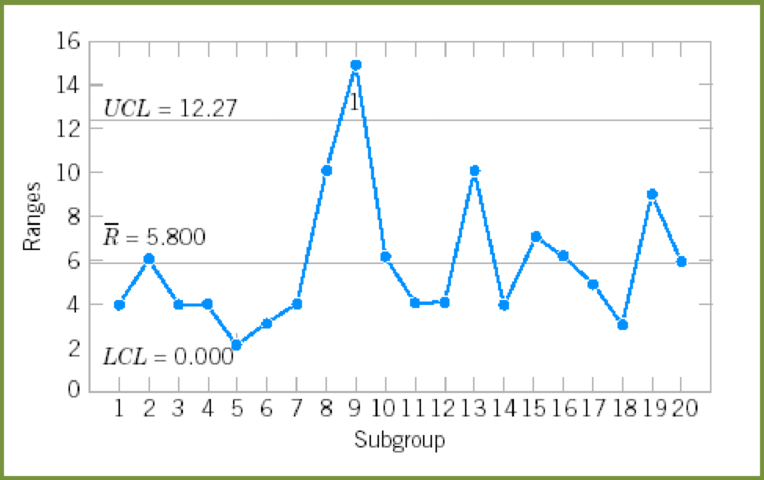


Figura 6.5: *Gráfico de control R.*

Solución: Ver Figuras 6.4 y 6.5.

Ejemplo 44 (Fabricación de turbinas - continuación)

Datos:

- En las Figuras 6.4 y 6.5 podemos observar que:
  - En el gráfico de control $\bar{X}$ las muestras 6, 8, 11 y 19 están *fuera de los límites.*
  - En el gráfico de control R la muestra 9 está fuera de los límites.
  - En total tenemos *cinco* observaciones patológicas entre los dos gráficos.
- Supongamos que se han podido determinar las causas que han producido estas variaciones y que se han *subsanado.*

Objetivo:

1. Representa el nuevo gráfico de control $\bar{X}$ que no tenga en cuenta estas cinco *observaciones patológicas.*
2. Idem para el nuevo gráfico de control R.

Operaciones 44:

1. La primera cuestión la podemos resolver como sigue:

   - Una vez eliminadas las cinco observaciones patológicas, los *nuevos parámetros* para el gráfico $\bar{X}$ son:

$$
\begin{aligned}
UCL &= \bar{\bar{x}} + A_2(5)\,\bar{r} = 33,21 + 0,577 \cdot 5,0 = 36,10 \\
CL &= \bar{\bar{x}} = 33,21 \\
LCL &= \bar{\bar{x}} - A_2(5)\,\bar{r} = 33,21 - 0,577 \cdot 5,0 = 30,33.
\end{aligned}
$$

- El gráfico de control $\bar{X}$ *actualizado* lo podemos ver en la Figura 6.6.

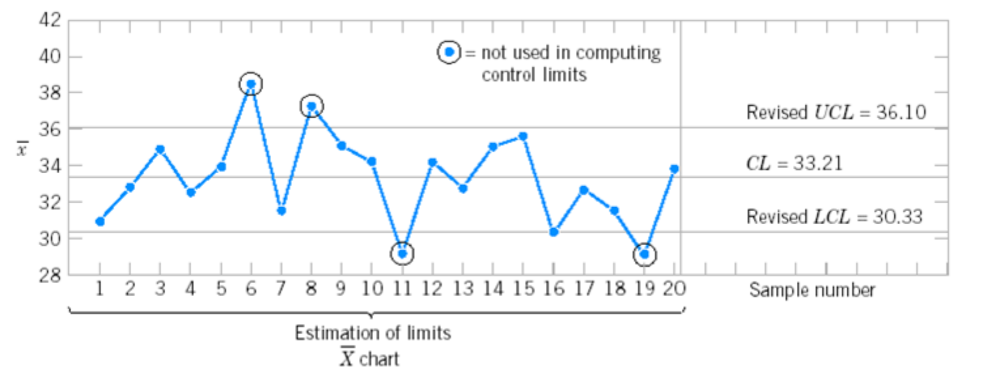


Figura 6.6: Gráfico de control $\bar{X}$ *actualizado*

2. La segunda cuestión la podemos resolver como sigue:

   - Análogamente, una vez eliminadas las cinco observaciones patológicas, los *nuevos parámetros* para el correspondiente gráfico R son:

$$\begin{aligned} UCL &= D_4(5)\,\bar{r} = 2,115 \cdot 5,0 = 10,57 \\ CL &= \bar{r} = 5,0 \\ LCL &= D_3(5)\,\bar{r} = 0 \cdot 5,0 = 0. \end{aligned}$$

   - El gráfico de control R *actualizado* lo podemos ver en la Figura 6.7.

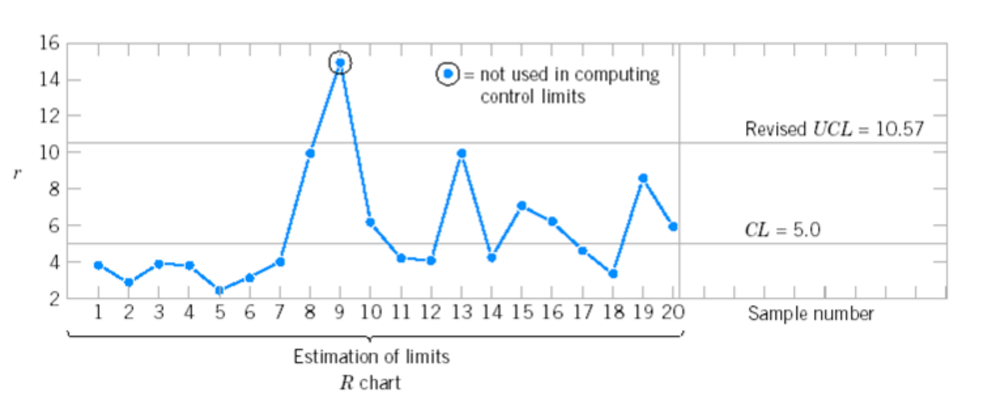


Figura 6.7: Gráficos de control R *actualizado*

Solución: Ver Figuras 6.6 y 6.7.

General (Protocolo para usar los gráficos de control $\bar{X}$ y R)

- Al usar estos gráficos de control normalmente necesitaremos *dos etapas.*
- *Etapa 1:* En esta etapa se *calibran* sus parámetros.
  1. Para ello usamos m *muestras* de tamaño n. Se recomienda tomar m entre 20 y 25, y n entre 4 y 6.
  2. Se analiza mediante un gráfico de control R si la variabilidad del proceso es *constante.* Si no lo es se analizan y corrigen las causas.
  3. Se analiza mediante un gráfico de control $\bar{X}$ si el proceso está *bajo control.* Si no lo está se analizan y corrigen las causas.
  4. Si hay observaciones *patológicas,* en cualquiera de los gráficos, se eliminan de la muestra (muestra actualizada) y se recalculan los parámetros de los gráficos de control a partir de la muestra actualizada. Se vuelve a la Etapa 1.2.
  5. Si no hay observaciones patológicas, se considera que el proceso está *bajo control* y que el nivel de variabilidad es *constante.*
- *Etapa 2:* En esta etapa se usan los gráfico de control $\bar{X}$ y R para *monitorizar* el estado del proceso de fabricación.
  1. Para cada *nueva muestra* analizada, el valor de $\bar{x}$ y $\bar{r}$ se representa en su correspondiente gráfico.
  2. De forma periódica se revisan los *límites de control* de los dos gráficos.

6.3. Capacidad de un proceso

Veremos dos casos:

- Caso con la media *centrada.*
- Caso con la media *no centrada.*

6.3.1. Capacidad de un proceso con la media centrada

Ejemplo 45 (Fabricación de turbinas - continuación)

Datos:

- Estamos considerando el proceso de fabricación de *turbinas* para motor de avión.
- En este proceso se consideran *aceptables* las turbinas con una apertura de paletas nominal de 0,5030 pulgadas y una tolerancia de $\pm$ 0,0010 pulgadas.
- Por lo tanto se considera aceptable una apertura de paletas en el *intervalo* [0,5020 , 0,5040] pulgadas.
- *Codificando* los datos respecto a los dos últimos decimales (los que realmente varían), se considera aceptable una apertura de paletas en el intervalo [20 , 40].

- Estos dos valores se denominan 'límite *inferior* de la especificación' y 'límite *superior* de la especificación':
    - LSL = 20 ('Lower Specification Limit')
    - USL = 40 ('Upper Specification Limit')
- Recordamos que el *rango* promedio era $\bar{r} = 5,0 \cdot 10^{-4}$ pulgadas y que el *tamaño* de cada muestra era $n = 5$.

Objetivo:

1. Dados los datos sobre la apertura de las paletas recogidos en la Tabla 6.3, representa el correspondiente *diagrama de tolerancia* e histograma.
2. Estima la *desviación típica* de la variable aleatoria X (apertura de paletas).
3. Estima el *coeficiente de capacidad* de este proceso.
4. Estima qué *proporción* del intervalo dado por las especificaciones es cubierto por los resultados del proceso.

Operaciones 45:

1. Ver Figuras 6.8 y 6.9.

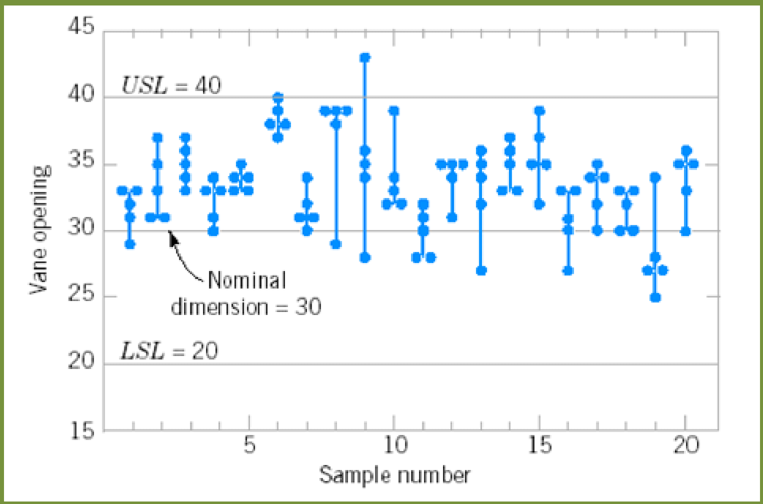


Figura 6.8: *Diagrama de tolerancia* de la apertura de las paletas.

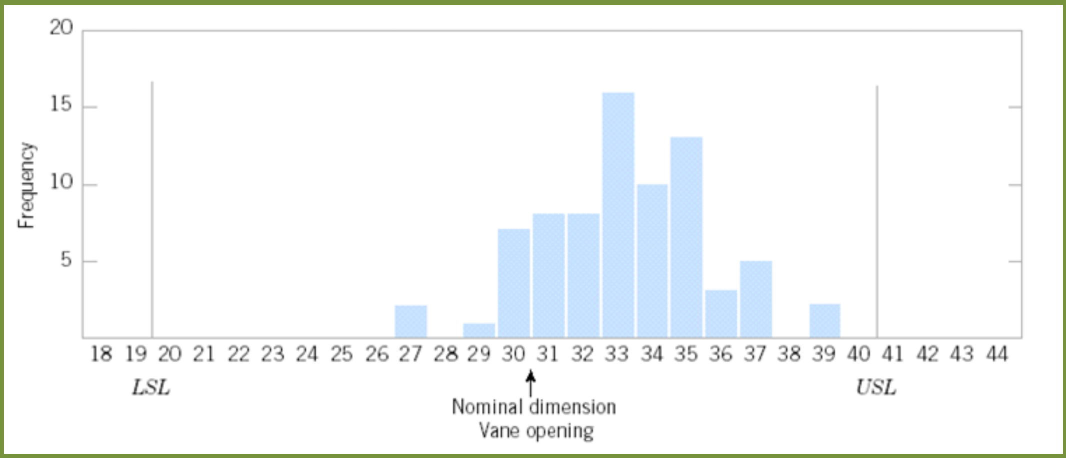


Figura 6.9: *Histograma* de la apertura de las paletas.

2. La *desviación típica* puede estimarse mediante la siguiente fórmula:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{r}}{d_2(n)} = \frac{5,0}{2,326} = 2,15$$

donde el parámetro $d_2(n)$ puede obtenerse en la *Tabla Apéndice.3*.

3. Por otro lado, el *coeficiente de capacidad* puede estimarse mediante la siguiente fórmula:

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{40 - 20}{6 \cdot 2,15} = 1,55.$$

4. Dado que más del 99 % de los productos fabricados pertenecen al intervalo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ de amplitud 6σ, la *proporción* pedida puede estimarse como

$$\frac{6\hat{\sigma}}{USL - LSL} = \frac{6 \cdot 2,15}{40 - 20} = 0,645$$

que no es más que $1/\hat{C}_p$ (ver Figura 6.9).

Solución:

1. Ver Figuras 6.8 y 6.9.
2. La estimación para la *desviación típica* es $\hat{\sigma} = 2,15 \times 10^{-4}$ pulgadas.
3. La estimación para el *coeficiente de capacidad* es $\hat{C}_p = 1,55$ (sin unidades).
4. El proceso ocupa un 64,5 % del intervalo de especificaciones (este valor es una *estimación).*

General (capacidad de un proceso)

- Analizar la 'capacidad de un proceso' significa analizar su *rendimiento* (suponiendo que está operando bajo control).

- Uno de sus objetivos principales es *predecir* la proporción de productos fabricados que *cumplirá* con las especificaciones.
- Las *especificaciones* vienen dadas por un límite inferior y un límite superior: LSL y USL, respectivamente.
- Como hemos dicho, analizar la capacidad de un proceso sólo tiene sentido si el proceso está *bajo control.*
- Para analizar la capacidad de un proceso tenemos *herramientas* gráficas y numéricas.
- Entre las herramientas gráficas destacamos:
  - El *histograma.*
  - El *gráfico de tolerancia,* donde representamos cada muestra en un eje vertical (ver Figura 6.8).
  - El gráfico de tolerancia no tiene que *confundirse* ni mezclarse con los gráficos de control $\bar{X}$ y R.
- Entre las herramientas numéricas tenemos:
  - Una estimación de la *media* μ mediante la denominada 'gran media' o 'media de medias':

    $$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{X}_i,$$

    donde m es el número de muestras y $\bar{X}_i$ es la media para la muestra i.
  - Una estimación de *desviación típica* σ mediante:

    $$\hat{\sigma} = \frac{\bar{r}}{d_2(n)}$$

    donde n es el tamaño de cada muestra y el parámetro $d_2(n)$ puede obtenerse en la Tabla Apéndice.3.
  - El *'coeficiente de capacidad del proceso':*

    $$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma},$$

    que en caso de desconocer σ puede ser estimado por

    $$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}}.$$

    - En inglés C_p se denomina 'Process Capability Ratio' (PCR) - ver Figura 6.10.

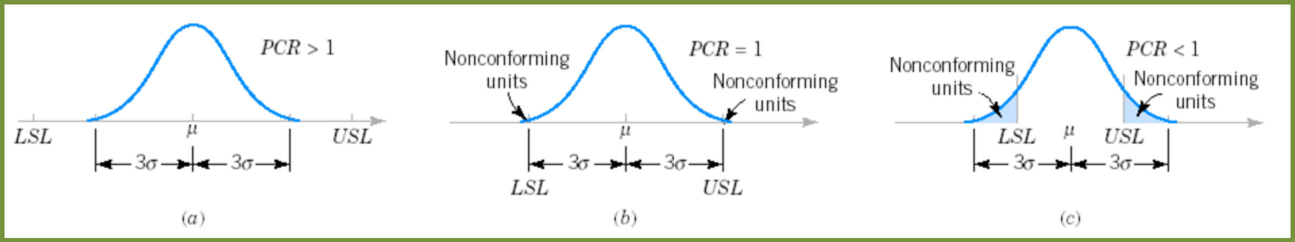


Figura 6.10: Productos *defectuosos* y coeficiente de capacidad C_p (PCR).

- $1/C_p$ tiene una *interpretación* natural, pues representa la proporción del intervalo de especificaciones ocupado por los valores del proceso.
- $C_p \geq 1$ indica que prácticamente todos los productos fabricados *cumplirán* con las especificaciones (ver Figura 6.10, gráficas a) y b)).
- $C_p < 1$ indica que un número relevante de productos fabricados *no cumplirán* las especificaciones(ver Figura 6.10 gráfica c)).

6.3.2. Capacidad de un proceso con la media no centrada

Ejemplo 46 (Fabricación de turbinas - continuación)

Datos:

- En la Figura 6.9 podemos observar que el proceso no está centrado en 30, el *valor nominal* para la apertura de paletas.
- En este caso la *capacidad real* del proceso es menor que la capacidad indicada por C_p por lo que es recomendable usar el 'coeficiente de capacidad *ajustado*' C_{pk}.

Objetivo:

1. *Estimar* el 'coeficiente de capacidad ajustado' de este proceso.
2. *Comparar* el 'coeficiente de capacidad ajustado' con el 'coeficiente de capacidad' y sacar conclusiones.
3. Estimar qué *proporción* de productos fabricados no cumplirán las especificaciones.

Operaciones 46:

1. El coeficiente de capacidad *ajustado* puede estimarse mediante la siguiente fórmula:

$$
\begin{aligned}
\hat{C}_{pk} &= \min\left[\frac{USL-\bar{\bar{x}}}{3\hat{\sigma}}, \frac{\bar{\bar{x}}-LSL}{3\hat{\sigma}}\right] \\
&= \min\left[\frac{40-33,21}{3\cdot 2,15}, \frac{33,21-20}{3\cdot 2,15}\right] \\
&= \min\,[1,05\ ,\ 2,05] \\
&= 1,05
\end{aligned}
$$

2. La discrepancia entre $\hat{C}_{pk} = 1,05$ y $\hat{C}_p = 1,55$ indica que el proceso está *desplazado* del centro del intervalo de especificaciones. Hay suficientes indicios para *revisar* el proceso de producción.

3. Para la tercera cuestión hemos de tener en cuenta:

- La proporción de productos que están por *debajo* del límite inferior LSL puede estimarse con el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
P(X < LSL) &\approx P\left(Z < \frac{LSL - \bar{\bar{x}}}{\hat{\sigma}}\right) \\
&= P\left(Z < \frac{20 - 33,21}{2{,}15}\right) \\
&= P(Z < -6,14) \\
&\approx 0
\end{aligned}$$

- La proporción de productos que están por *encima* del límite superior USL puede estimarse con el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
P(X > USL) &\approx P\left(Z > \frac{USL - \bar{\bar{x}}}{\hat{\sigma}}\right) \\
&= P\left(Z > \frac{40 - 33,21}{2{,}15}\right) \\
&= P(Z > 3,16) \\
&= 1 - 0,9992 \\
&= 0,0008
\end{aligned}$$

Solución:

1. Una estimación del coeficiente de capacidad *ajustado* es $\hat{C}_{pk} = 1,05$.
2. El proceso está *desplazado* del centro del intervalo de especificaciones.
3. Se estima que un 0,08 % de las turbinas *no cumplirá* las especificaciones.

General (coeficiente de capacidad ajustado)

- El coeficiente de capacidad C_p presupone que μ está en el *centro* del intervalo de especificaciones (es decir μ coincide con la especificación nominal).
- Cuando no se da ese caso, como en el ejemplo anterior, es mejor usar el coeficiente de capacidad *ajustado* C_{pk} :
$$C_{pk} = \min\left[\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right],$$
que en caso de desconocer μ y σ pueden ser reemplazadas por sus estimaciones $\bar{\bar{x}}$ y $\hat{\sigma}$ para así obtener la *estimación* $\hat{C}_{pk}$.

General (Proporción de productos defectuosos)

- Como ya mencionamos, uno de los objetivos principales al analizar la capacidad de un proceso es *predecir* la proporción de productos defectuosos.
- Un producto es *defectuoso* cuando la variable de control X no cumple con las especificaciones, es decir, no está en el intervalo $[LSL\ ,\ USL]$.
- La *proporción* de productos defectuosos puede obtenerse sumando las dos probabilidades siguientes:

$$P(X < LSL) = P\left(Z < \frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \tag{6.1}$$

$$P(X > USL) = P\left(Z > \frac{USL - \mu}{\sigma}\right), \tag{6.2}$$

donde Z tiene una distribución normal estándar.

- Si en las anteriores fórmulas *desconocemos* μ y σ podemos realizar un cálculo aproximando usando su estimación $\bar{\bar{x}}$ y $\hat{\sigma}$, respectivamente.
- Por lo tanto, para controlar si la *'variación aleatoria'* de un proceso es aceptable o no con respecto a las especificaciones tenemos dos opciones:
  1. Calcular la *proporción* de productos defectuosos mediante las fórmulas (6.1-6.2).
  2. Calcular el *coeficiente de capacidad* C_p o C_{pk}.

6.4. Metodología Seis Sigma

Ejemplo 47 (Fabricación de turbinas - continuación)

Datos: En el ejemplo anterior hemos visto que el proceso de fabricación de turbinas tiene un *coeficiente de capacidad* ajustado $C_{pk} = 1,05$.

Objetivo: Analizar si este proceso de fabricación de turbinas tiene una eficiencia de *6 sigma:*

1. Gráficamente.
2. Numéricamente.

Operaciones 47:

1. El primer apartado puede resolverse como sigue:
   - Un proceso tiene una eficiencia 6 sigma cuando la *media* del proceso está a una distancia 6σ del límite de especificación más cercano.

- En la Figura 6.9 puede verse que la media del proceso está aproximadamente a una *distancia* de 3σ del límite de especificación superior.
- Por lo tanto este proceso *no tiene* una eficiencia 6 sigma.

2. El segundo apartado puede resolverse como sigue:

   - Un proceso tiene una eficiencia 6 sigma cuando tiene un *coeficiente de capacidad* ajustado $C_{pk} = 2{,}0$.
   - Dado que en este proceso $C_{pk} = 1,06$, podemos afirmar que el proceso *no tiene* una eficiencia 6 sigma.

Solución: El proceso de fabricación de turbinas no tiene una eficiencia de 6 sigma.

General (Seis Sigma)

- Como ya hemos mencionado, para medir si la *'variación aleatoria'* de un proceso bajo control es aceptable o no con respecto a las especificaciones (LSL y USL), una opción es usar el *coeficiente de capacidad* C_p o C_{pk}.
- Si μ está en el *centro* del intervalo de especificaciones entonces podemos usar C_p e imponer $C_p \geq 1$. Muchas compañías añaden un *margen de seguridad* y usan:
  - $C_p = 1,33$ como valor *mínimo* aceptable.
  - $C_p = 1,66$ como valor mínimo aceptable para características *críticas* del producto (seguridad, resistencia, etc.)
- Si μ *no está* en el centro del intervalo de especificaciones entonces es mejor usar C_{pk}:
  - En general debe cumplirse que $C_{pk} \geq 1$.
  - Algunas compañías imponen $C_{pk} = 2,0$ para los procesos internos y para los procesos de los proveedores.
- Proceso con eficiencia *6 sigma.*
  - Un proceso con $C_{pk} = 2,0$ se dice que tiene una eficiencia 6 sigma.
  - En ese caso la *distancia* de μ, la media del proceso, al límite de especificación más cercano (LSL o USL) es de 6 veces σ (ver Figura 6.11).

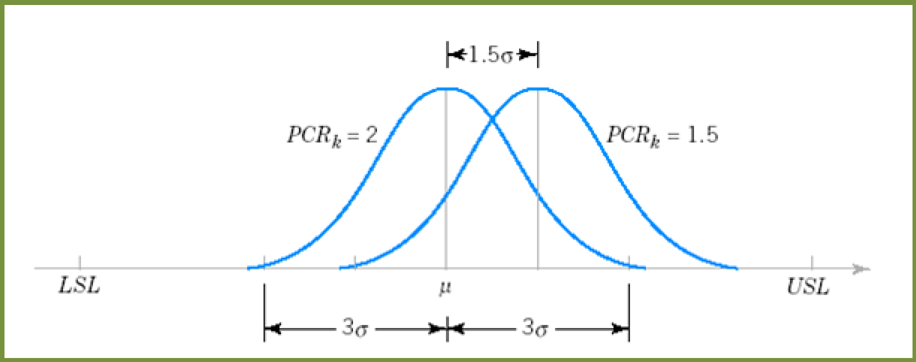


Figura 6.11: Media de un proceso *Seis Sigma* desplazada 1,5 desviaciones típicas.

- Bajo estas condiciones la proporción de productos *defectuosos* es prácticamente 0 %.
- Sin embargo, es difícil que la media del proceso no sufra *desplazamientos.*
- La *ventaja* de la eficiencia 6 sigma radica en que incluso si la media del proceso se desplaza 1,5σ hacia el límite de especificación más cercano:
  - La proporción de productos defectuosos es *muy baja* (3,4 productos por millon)
  - C_{pk} pasa de 2,0 a 1,5:
$$C_{pk} = \frac{6\sigma - 1,5\sigma}{3\sigma} = 1,5.$$

- *Metodología 'Seis Sigma':*
  - En inglés se denomina *'Six Sigma'*.
  - Es una metodología de *mejora de procesos,* centrada en la reducción de la variabilidad de los mismos de cara a eliminar los defectos en productos o servicios al cliente.
  - Su *meta* es llegar a procesos con una eficiencia 6 sigma.
  - La metodología Seis Sigma se caracteriza por *5 etapas* concretas:
    - Definir el *problema* o el defecto
    - Medir y recopilar *datos*
    - Analizar datos
    - Mejorar
    - Controlar
  - La metodología Seis Sigma se ha vuelto muy popular entre las *grandes empresas* debido a sus buenos resultados.

General (Otros gráficos de control)

- Hemos visto los gráficos de control $\bar{X}$ y R.
- Existen otros tipos de gráficos de control como por ejemplo:
  - *Gráficos de control P* para analizar la proporción de productos defectuosos.
  - *Gráficos de control U* para analizar la cantidad de defectos por unidad de producto.
- Para más detalles se puede consultar por ejemplo el Capítulo 8 del siguiente libro: Montgomery, D. C., Runger, G. C., and Hubele, N. F. 'Engineering Statistics', Editorial Wiley, 2006.

Capítulo 7

Diseño de experimentos en ingeniería

7.1. Diseño de experimentos y control de la calidad

Ejemplo 48 (Resistencia de una fibra sintética)

Datos:

- Consideramos un proceso de fabricación de una *fibra sintética.*
- En particular estamos interesados en mejorar su *resistencia* a la rotura.
- Conjeturamos las *hipótesis* de que dicha resistencia depende de dos factores: *temperatura* (T) y *presión* (P) a la que se fabrica.

Objetivo: *Diseñar un experimento* en el que manipulando diferentes niveles de T y P:

- *Experimentemos* sobre el efecto que tienen estos dos factores en la resistencia.
- *Analicemos* los resultados con técnicas estadísticas.
- Saquemos *conclusiones* sobre la validez de la hipótesis inicial.

Solución: En este tema veremos una introducción a cómo abordar este tipo de cuestiones.

General (Diseño de experimentos y control de la calidad)

- Tal como hemos visto en el ejemplo anterior, muchas de las *variables* que intervienen en un proceso de fabricación se pueden controlar.
- Son las denominadas *variables de control,* como por ejemplo la presión, la temperatura, la velocidad de la cadena de montaje, etc.
- Controlando estas variables se pretende por un lado controlar y mejorar la *calidad* del producto:
  - Productos más *adecuados* para realizar su función.
  - Productos más *fiables* y duraderos.
  - Productos con menos *variabilidad* respecto a las especificaciones nominales de fabricación (productos más *homogéneos).*

- Por otro lado se pretende mejorar la *productividad:*
  - Reducir el *tiempo para desarrollar* de nuevos productos.
  - Reducir los *costes* de producción:
    - Reducir los *tiempos de producción* (más productos en menos tiempo).
    - Reducir el coste de las *materias primas.*
- Todo *proceso de experimentación* en ingeniería se compone de *cuatro etapas:*
  1. *Conjeturar una hipótesis* sobre el proceso de producción.
  2. *Experimentar* para obtener información sobre la conjetura.
  3. *Analizar* estadísticamente la información del experimento para ver si es significativa.
  4. *Sacar conclusiones* sobre si la conjetura inicial es cierta o hay que adaptarla a los resultados obtenidos y quizás realizar un nuevo experimento.

Nota. Este tema también se puede consultar y/o ampliar en el Capítulo 7 del siguiente libro: Montgomery, D. C., Runger, G. C., and Hubele, N. F. 'Engineering Statistics', Editorial Wiley, 2006.

7.2. Introducción a los experimentos factoriales

Ejemplo 49 (Fabricación de circuitos integrados)

Datos:

- Consideramos un proceso de fabricación de *circuitos integrados.*
- En una de las caras del circuito integrado, o substrato, se hace crecer una *capa uniforme* de material semiconductor y de poco grosor (medido en micrómetros μm).
- Aplicando un *vapor rico en arsénico* se consigue esta capa, cuyo *grosor* conjeturamos que depende de dos factores:
  1. El *tiempo* de aplicación del vapor.
  2. El *nivel de arsénico* en el vapor aplicado.
- Para estudiar esta conjetura se diseña el siguiente *experimento:*
  - Podemos realizar un experimento que analice los *factores:* A (tiempo de aplicación) y B (nivel de arsénico).
  - Para cada factor, se consideran *dos niveles* etiquetados con $+$ (nivel alto) y con $-$ (nivel bajo):
    - *Factor A:*

$$\begin{aligned} + &= \text{tiempo de aplicación largo} \\ - &= \text{tiempo de aplicación corto.} \end{aligned}$$

    - *Factor B:*

$$\begin{aligned} + &= \text{nivel de arsénico del 59 \%} \\ - &= \text{nivel de arsénico del 55 \%.} \end{aligned}$$

- Para que el experimento sea significativo se decide tomar $n = 4$ *muestras* para cada caso (hay que repetir el experimento 4 veces para cada caso).
- En la Tabla 7.1 tenemos los *resultados* del experimento.

Combinación de Niveles	**Grosor Muestra 1**	**Grosor Muestra 2**	**Grosor Muestra 3**	**Grosor Muestra 4**	**Suma Total**	**Media** (μm)	**Varianza** (μm^2)
(1)	14,037	14,165	13,972	13,907	56,081	14,020	0,0121
a	14,821	14,757	14,843	14,878	59,299	14,825	0,0026
b	13,880	13,860	14,032	13,914	55,686	13,922	0,0059
ab	14,888	14,921	14,415	14,932	59,156	14,789	0,0625

Tabla 7.1: *Grosor* de la capa uniforme (en μm).

- En esta tabla los 4 *símbolos* (1), a, b y ab tienen la siguiente interpretación:
  - (1) representa que los dos factores están en su nivel *bajo*.
  - a representa que sólo el factor A está en su nivel *alto* (b análogamente).
  - ab representa los dos factores A y B están en su nivel *alto*.

Objetivo:

- Estimar el *efecto* que cada factor A y B produce en el grosor alcanzado por la capa del circuito integrado.
- Estudiar el nivel de *interacción* entre estos dos factores.

Operaciones 49:

- Definimos la variable respuesta

  $Y =$ 'Grosor alcanzado por la capa uniforme' (en μm).

- Sea $\bar{y}_{A+}$ el *grosor promedio* alcanzado por la capa cuando el factor A está en su nivel alto (ver Tabla 7.1, columna 'Suma Total'):

$$\bar{y}_{A+} = \frac{a : 4 + ab : 4}{2} = \frac{59,299 : 4 + 59,156 : 4}{2} = 14,807.$$

- Sea $\bar{y}_{A-}$ el *grosor promedio* alcanzado por la capa cuando el factor A está en su nivel bajo (ver Tabla 7.1, columna 'Suma Total'):

$$\bar{y}_{A-} = \frac{b : 4 + (1) : 4}{2} = \frac{55,686 : 4 + 56,081 : 4}{2} = 13,971.$$

- *Notar* que dividimos por 4 pues hemos repetido 4 veces el experimento y por lo tanto tenemos 4 muestras.

- Podemos estimar el efecto principal del *factor A* mediante la siguiente fórmula:

$$A = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} = 0,836.$$

- Análogamente el efecto principal del *factor B* puede calcularse como (notar que $\frac{1}{4}$ es equivalente a ': 4' usado en el caso anterior):

$$\begin{aligned} B &= \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{b+ab}{2} - \frac{a+(1)}{2}\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{55,686+59,156}{2} - \frac{59,299+56,081}{2}\right] \\ &= -0,067. \end{aligned}$$

- Finalmente la *interacción* entre los factores A y B se puede estimar mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{4}\left[\frac{\Delta_{(b \mid a)}}{2} - \frac{\Delta_{(b \mid \text{no } a)}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{ab-a}{2} - \frac{b-(1)}{2}\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{59,156-59,299}{2} - \frac{55,686-56,081}{2}\right] \\ &= 0,032, \end{aligned}$$

donde $\Delta_{(b \mid a)}$ es el efecto de b en *presencia* de a y $\Delta_{(b \mid \text{no } a)}$ es el efecto de b en *ausencia* de a.

Solución:

- El efecto del *tiempo de aplicación* del gas es considerable y positivo ($A = 0,836$ μm).
- Sin embargo, el efecto del *nivel de arsénico* en el gas aplicado es bajo ($B = -0,067$ μm).
- Igualmente, la *interacción* entre los dos factores es baja ($AB = 0,032$ μm).

General (Experimentos factoriales 2^2)

- En el ejemplo anterior hemos visto un experimento de dos factores con dos niveles *(experimento factorial* 2^2).
- En todo experimento se define una *variable respuesta* Y como la magnitud que queremos analizar.

- El objetivo es analizar si la variable respuesta:
  - Es *afectada* por los factores.
  - Existe *interacción* (dependencia) entre los factores.
- En estos experimentos se consideran *dos factores* A y B y *dos niveles* para cada factor que se etiquetan con '+' (nivel alto) y con ' $-$ ' (nivel bajo).
- Debemos analizar las $2^2 = 4$ *combinaciones* de los 2 niveles de cada factor que representamos por los símbolos $(1), a, b$ y ab :
  - *(1)* Representa que los dos factores están en su nivel *bajo.*
  - a representa que sólo el factor A está en su nivel *alto.*
  - b representa que sólo el factor B está en su nivel *alto.*
  - ab representa los dos factores A y B están en su nivel *alto.*
- El experimento se *repite* n veces (cuanto mayor es n los resultados del experimento son más robustos).
- En cada repetición del experimento deben hacerse *4 pruebas:* una para cada una de las combinaciones (1), a, b y ab.
- En los cálculos, los símbolos (1), a, b y ab también representan la *suma total* de los resultados obtenidos para cada combinación de niveles, después de haber repetido el experimento n veces (columna 'Suma Total' de la Tabla 7.1).
- Podemos estimar el efecto principal del *factor A* mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} A &= \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{a+ab}{2} - \frac{b+(1)}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2n}\left[a+ab-b-(1)\right] \end{aligned}$$

  donde $\bar{y}_{A+}$ es el *valor promedio* de la magnitud bajo estudio cuando el factor A está en su nivel alto ($\bar{y}_{A-}$ análogamente).
- Análogamente, podemos estimar el efecto principal del *factor B* mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} B &= \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{b+ab}{2} - \frac{a+(1)}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2n}\left[b+ab-a-(1)\right]. \end{aligned}$$

- Finalmente la *interacción* entre los factores A y B se puede estimar mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{n}\left[\frac{\Delta_{(b\,\mid\,a)}}{2} - \frac{\Delta_{(b\,\mid\,\text{no }a)}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{ab-a}{2} - \frac{b-(1)}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2n}\left[ab+(1)-a-b\right]. \end{aligned}$$

donde $\Delta_{(b\,\mid\,a)}$ el el efecto de b en *presencia* de a y $\Delta_{(b\,\mid\,\text{no }a)}$ es el efecto de b en *ausencia* de a.

General (Experimentos factoriales)

- Los experimentos factoriales 2^2 son un *caso particular* de los experimentos factoriales 2^k donde se consideran k factores y 2 niveles por factor.
- En el caso de tener sólo dos niveles el diseño del experimento y su análisis es básicamente el mismo tanto para niveles *cuantitativos* como para niveles *cualitativos*.
- En un experimento factorial 2^k en cada realización del experimento se analizan las $2\times 2\times\cdots\times 2 = 2^k$ posibles *combinaciones* de los 2 niveles de cada factor.
- El diseño 2^k es particularmente útil al *inicio* del trabajo experimental cuando habiendo muchos posibles factores conviene descartar los que no son relevantes.
- Si se consideran $r > 2$ *niveles* por factor, entonces tenemos los experimentos factoriales r^k.

7.3. Experimentos factoriales y regresión

Veremos los siguientes apartados:

- *Modelo* de regresión (no lineal).
- *Inferencia* sobre el modelo de regresión.

7.3.1. Modelo de regresión (no lineal)

Ejemplo 50 (Fabricación de circuitos integrados - cont.)

Datos:

- Continuamos con el ejemplo anterior con la finalidad de asociarle un modelo de regresión.
- Consideramos el siguiente *modelo de regresión* (no lineal)

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \epsilon.$$

- En este modelo:
  - Y es la *variable respuesta* o dependiente y las variables x_j son las *variables explicativas* o independientes.
  - Y representa el *grosor* de la capa uniforme de material semiconductor del circuito integrado.
  - x_1 representa el *tiempo de aplicación* del vapor rico en arsénico (factor A).
  - x_2 representa el *nivel de arsénico* en el vapor aplicado (factor B).
  - En este contexto los niveles alto (+) y bajo ($-$) de cada factor se *codifican* mediante los valores $x_i = +1$ y $x_i = -1$ para $i = 1, 2$.
  - x_1x_2 representa la *interacción* entre los dos factores A y B.
- La correspondiente *función de regresión* tiene la siguiente expresión:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_1 x_2.$$

Objetivo:

1. Calcular los *coeficientes* de la función de regresión.
2. Calcular el valor de $\hat{y}$ para $(x_1, x_2) = (1,\ 1)$ e *interpretar* el resultado con relación al experimento factorial del ejemplo anterior donde las posibles combinaciones eran $(1), a, b$ y ab.

Operaciones 50:

1. La primera cuestión se puede resolver como sigue:

   - Se puede demostrar que en este contexto β_0 es la *media de las 4 medias* (una por cada combinación de niveles):

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \bar{\bar{y}} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\bar{y}_i \\ &= \frac{1}{4}(14,020 + 14,825 + 13,922 + 14,789) \\ &= 14,389.\end{aligned}$$

     (los valores de $\bar{y}_i$ pueden encontrase en la Tabla 7.1, columna 'Media'.)

   - También se puede demostrar que el resto de los *coeficientes* de regresión corresponden a los efectos de los factores y a la interacción divididos entre 2:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{A}{2} = \frac{0,836}{2} \\ \hat{\beta}_2 &= \frac{B}{2} = \frac{-0,067}{2} \\ \hat{\beta}_3 &= \frac{AB}{2} = \frac{0,032}{2}\end{aligned}$$

2. La segunda cuestión se puede resolver como sigue:

   - La *función de regresión* es:

$$\hat{y}(x) = 14,389 + \frac{0,836}{2}\, x_1 + \frac{-0,067}{2}\, x_2 + \frac{0,032}{2}\, x_1 x_2$$

$$= 14,389 + 0,418\, x_1 - 0,0335\, x_2 + 0,016\, x_1 x_2.$$

   - Por lo tanto

$$\hat{y}(1,\ 1) = 14,389 + 0,418 - 0,0335 + 0,016 = 14,789.$$

   - Por otro lado, en la Tabla 7.1 podemos observar que el grosor promedio del caso ab es también 14,789 μm.

Solución:

1. La *función de regresión* tiene la siguiente expresión:

$$\hat{y}(x) = 14,389 + 0,418\, x_1 - 0,0335\, x_2 + 0,016\, x_1 x_2.$$

2. $\hat{y}(x)$ es una estimación del *grosor promedio* asociado a los factores codificados en x. Así:
   - $\hat{y}(1,\ 1)$ es una estimación del grosor promedio correspondiente a la combinación ab,
   - $\hat{y}(1, -1)$ es una estimación del grosor promedio correspondiente a la combinación a, etc.

General (Modelo de regresión no lineal)

- Asociado a todo experimento factorial 2^2 tenemos un *modelo de regresión* (no lineal):

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \epsilon.$$

  donde

  - Y es la variable respuesta o dependiente y las variables x_j son las variables explicativas o independientes.
  - Y representa la *magnitud* bajo estudio.
  - x_1 representa el *factor A*.
  - x_2 representa el *factor B*.
  - $x_1 x_2$ representa la *interacción* entre los dos factores A y B.
  - ϵ es el *error* aleatorio cuya distribución se supone $N(0, \sigma)$.

- En este contexto los niveles alto (+) y bajo ($-$) de cada factor se *codifican* mediante los valores $x_i = +1$ y $x_i = -1$ para $i = 1, 2$.
- La correspondiente *función de regresión* tiene la siguiente expresión

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_1 x_2,$$

  donde $\hat{y}(x)$ es una estimación del valor esperado de Y en función de x.

- Se puede demostrar que en este contexto los coeficientes $\hat{\beta}$ se pueden calcular como sigue:
  - β_0 es la *gran media* de las 4 medias (una por cada combinación de niveles):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{\bar{y}} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \bar{y}_i.$$

  - El resto de los *coeficientes* de regresión corresponden a los efectos de los factores y a la interacción, divididos entre 2:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{A}{2} = \frac{1}{4n}\left[a + ab - b - (1)\right] \\
\hat{\beta}_2 &= \frac{B}{2} = \frac{1}{4n}\left[b + ab - a - (1)\right] \\
\hat{\beta}_3 &= \frac{AB}{2} = \frac{1}{4n}\left[ab + (1) - a - b\right].
\end{aligned}$$

7.3.2. Inferencia sobre el modelo de regresión

Ejemplo 51 (Fabricación de circuitos integrados - cont.)

Datos: En el ejemplo anterior hemos visto que podemos estimar el promedio del *grosor* Y de la capa uniforme en el circuito integrado mediante la siguiente función no lineal:

$$\hat{y}(x) = 14,389 + 0,418\, x_1 - 0,0335\, x_2 + 0,016\, x_1 x_2$$

donde

- x_1 representa el *factor A* $(x_1 \in \{-1, +1\})$.
- x_2 representa el *factor B* $(x_2 \in \{-1, +1\})$.

Objetivo: Analizar si en esta función todos los coeficientes son *relevantes* (distintos de 0) o por el contrario podemos prescindir de alguno de ellos (tomar $\alpha = 0{,}05$).

Operaciones 51:

- Para analizar la *relevancia* de β_0 vamos a resolver el siguiente contraste:

$$H_0: \quad \beta_0 = 0$$

$$H_1: \quad \beta_0 \neq 0.$$

- Calculamos $\hat{\sigma}^2$ (una estimación de la *varianza* de Y):

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\hat{\sigma}_i^2 \\ &= \frac{1}{4}(0,0121 + 0,0026 + 0,0059 + 0,0625) \\ &= 0,0208\end{aligned}$$

  (Los valores de $\hat{\sigma}_i^2$ pueden encontrarse en la columna 'Varianza' de la Tabla 7.1).

- Calculamos una estimación del *error estándar* (el mismo error estándar para todos los coeficientes):

$$se(\text{coeficiente}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{0,0208}{4}} = 0,03605$$

- Hemos estimado $\hat{\beta}_0 = 14,389$.

- Calculamos el *estadístico*

$$t_0 = \frac{\text{coeficiente}}{se(\text{coeficiente})} = \frac{14,389}{0,03605} = 399.$$

- Para calcular el P-valor usamos la siguiente fórmula:

$$\text{P-valor} = P(T_0 < -t_0) + P(T_0 > t_0),$$

  donde T_0 es una variable aleatoria t de Student con $4(n-1) = 12$ grados de libertad.

- Para $t_0 = 399$ obtenemos *P-valor* = 0 (valor obtenido consultando la tabla de la distribución t de Student con 12 grados de libertad - Tabla Apéndice.2).

- Dado que el P-valor es menor que el *nivel de significación* prefijado $0,05$, aceptamos H_1.

- Es decir, β_0 es distinto de 0 y por tanto es *relevante.*

- En la Tabla 7.2 tenemos los resultados para todos los coeficientes.

Coef.	**Estimación**	**Error estándar**	t_0	**P-valor**	$H_1 : \beta_i \neq 0$
β_0	14,389	0,03605	399	0.00	Aceptamos
β_1	0,4180	0,03605	11,60	0.00	Aceptamos
β_2	-0,0335	0,03605	-0,93	$>$ 0,30	Rechazamos
β_3	0,0160	0,03605	0,44	$>$ 0,50	Rechazamos

Tabla 7.2: *P-valor* de los coeficientes de regresión.

- Los resultados de la columna *P-valor* se han obtenido con una tabla de la distribución t de Student (12 grados de libertad).
- Por ejemplo, el P-valor asociado a β_3 se ha calculado como sigue:

$$P(T_0 > 0,44) > P(T_0 > 0,695) = 0,25.$$

  Por lo tanto

$$\text{P-valor de } 0{,}44 = 2 \cdot P(T_0 > 0,44) > 0,50.$$

- A partir de los P-valores aceptamos que los coeficientes distintos de 0 son β_0 y β_1.

Solución: Aceptamos que los coeficientes distintos de 0 son β_0 y β_1, por lo que podemos *simplificar* nuestro modelo de regresión a

$$\hat{y}(x) \;=\; 14,389 \;+0,418\, x_1.$$

Notar que en el contexto de los experimentos factoriales no nos hace falta volver a calcular β_0 y β_1 una vez que hemos descartado los otros coeficientes (esto en general no es cierto en todos los modelos de regresión).

General (Relevancia de los coeficientes β)

- Dado el *modelo de regresión* (no lineal)

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \epsilon,$$

  nos puede interesar analizar si todos los coeficientes β son *relevantes* (distintos de 0) o por el contrario podemos prescindir de alguno de ellos.
- Podemos abordar esta cuestión mediante un *contraste de hipótesis* por cada coeficiente:

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad \beta_i = 0 \\ H_1 : &\quad \beta_i \neq 0 \end{aligned}$$

  para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.
- Para resolver este contraste podemos proceder como sigue:

  1. Calculamos $\hat{\sigma}^2$ (una estimación de la *varianza* de Y):

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_i^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \qquad\qquad i = 1, 2, 3, 4, \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \hat{\sigma}_i^2, \end{aligned}$$

donde:

n	es el número de *repeticiones* del experimento
i	es el índice para la *combinación* de niveles de los factores
j	es el índice para la *muestra* (repeticiones del experimento).

2. Calculamos una estimación del *error estándar* (el mismo error estándar para todos los coeficientes):

$$se(\text{coeficiente}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}$$

donde se son las siglas de 'Standard Error'.

3. Calculamos el estadístico

$$t_0 = \frac{\text{coeficiente}}{se(\text{coeficiente})}.$$

4. Se calcula el *P-valor* asociado a t_0 mediante la siguiente fórmula:

$$\text{P-valor } = P(T_0 < -t_0) + P(T_0 > t_0),$$

donde T_0 es una variable aleatoria t de Student con $4(n-1)$ grados de libertad.

5. Para realizar el anterior cálculo se consulta la tabla de la distribución t de Student (ver el Apéndice al final de estos apuntes).

6. Si el P-valor es menor que el *nivel de significación* α aceptamos H_1, es decir el correspondiente coeficiente es distinto de 0 y por tanto es relevante (valores usuales para α son 0,01, 0,05 y 0,10). En caso contrario rechazamos H_1.

Capítulo 8

Apéndice

En este apéndice tenemos las siguientes tablas:

- Tabla Apéndice.1. Distribución Normal estándar:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z).$$

- Tabla Apéndice.2. Distribución t de Student: La tabla da el valor de c, tal que

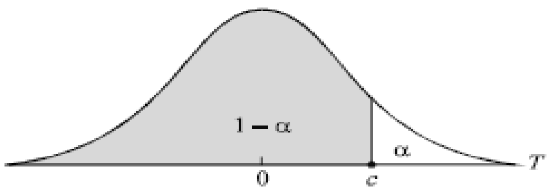
$$P(T \leq c) = 1 - \alpha.$$

- Tabla Apéndice.3. Factores para construir tablas de control $\bar{X}$ y R.

The Cumulative Distribution Function for the Standard Normal Distribution: Values of $\Phi(z)$ for nonnegative z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

TABLA DE LA DISTRIBUCION t-Student con n grados de libertad..



$1-\alpha$

n	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
¥	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

	$\overline{X}$ Chart			R Chart		
	Factors for Control Limits			Factors for Control Limits		
n^a	A_1	A_2	d_2	D_3	D_4	n
2	3.760	1.880	1.128	0	3.267	2
3	2.394	1.023	1.693	0	2.575	3
4	1.880	.729	2.059	0	2.282	4
5	1.596	.577	2.326	0	2.115	5
6	1.410	.483	2.534	0	2.004	6
7	1.277	.419	2.704	.076	1.924	7
8	1.175	.373	2.847	.136	1.864	8
9	1.094	.337	2.970	.184	1.816	9
10	1.028	.308	3.078	.223	1.777	10
11	.973	.285	3.173	.256	1.744	11
12	.925	.266	3.258	.284	1.716	12
13	.884	.249	3.336	.308	1.692	13
14	.848	.235	3.407	.329	1.671	14
15	.816	.223	3.472	.348	1.652	15
16	.788	.212	3.532	.364	1.636	16
17	.762	.203	3.588	.379	1.621	17
18	.738	.194	3.640	.392	1.608	18
19	.717	.187	3.689	.404	1.596	19
20	.697	.180	3.735	.414	1.586	20
21	.679	.173	3.778	.425	1.575	21
22	.662	.167	3.819	.434	1.566	22
23	.647	.162	3.858	.443	1.557	23
24	.632	.157	3.895	.452	1.548	24
25	.619	.153	3.931	.459	1.541	25

[a] $n > 25$: $A_1 = 3/\sqrt{n}$ where n = number of observations in sample.