

Projeto MS211

Splines Cúbicas

Paulo J. S. Silva <pjssilva@ime.unicamp.br>

20 de outubro de 2015
Entrega: 17 de novembro de 2015

1 Burocracia

A data de entrega do programa é 17 de novembro de 2015, uma terça-feira. O programa e o relatório deverá ser enviado até as 22:00h para o email do professor (pjssilva@ime.unicamp.br) com o campo assunto contendo apenas o texto **Projeto de MS211**. Programas atrasados não serão aceitos.

O código deve ser escrito em linguagem C, Matlab ou Julia. Todas as rotinas numéricas devem ser implementadas pelo aluno. Não é permitido o uso de rotinas numéricas prontas.

O programa deve ser feito, preferencialmente, em grupos de dois alunos. Caso um aluno queria fazer o trabalho sozinho deve pedir autorização para o professor por email até o dia 3 de novembro.

Os programas serão analisados por software especial para identificar plágio. Programas plagiados, seja de código disponível na Internet, de versões anteriores desse projeto, de outros alunos, receberão nota zero. A nota zero não isenta os alunos responsáveis por plágio de outras punições possíveis na universidade.

2 O que deve ser feito

Objetivo é escrever um programa que lê um arquivo de entrada chamado de **tabela.txt**. A primeira linha traz o número de pontos presentes no restante do arquivo, ou seja o valor de $n + 1$ de acordo com a notação estabelecida a seguir. As demais linhas do arquivo são compostas de dois números reais separados por um espaço em branco representando pares $(x, f(x))$ em que $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função que foi tabelada em pontos que equidistantes $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Assim, a segunda linha do arquivo representará o par x_0, f_0 , em que $f_0 = f(x_0)$. Já a terceira linha, o par x_1, f_1 em que $f_1 = f(x_1)$. Assim sucessivamente até x_n, f_n , que estará representado na última linha.

Usado os valores tabelados o programa deve calcular a interpolação spline cúbica natural (*natural cubic spline*) de f no intervalo $[a, b] = [x_0, x_n]$. O programa deve então gerar um arquivo chamado **splines.txt** com n linhas. Cada

linha deve contendo os coeficientes z_{i-1} e z_i que definem polinômio cúbico

$$s_i(x) = \frac{1}{h} z_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6} + \frac{1}{h} z_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6} + \frac{1}{h} \left[f_i - f_{i-1} + \frac{h^2}{6} (z_{i-1} - z_i) \right] (x - x_{i-1}) + f_{i-1} - \frac{h^2}{6} z_{i-1} \quad (1)$$

que interpola f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, \dots, n$. Lembre-se que como estamos falando de splines cúbicas *naturais*, então $z_0 = z_n = 0$. Os números devem ser apresentados em formato científico com 8 casas depois do ponto decimal. Em C , por exemplo, use o formato `("%.8e"`.

3 Detalhes da implementação

Um detalhe importante de implementação é que o sistema linear que deve ser resolvido para achar os coeficientes z_1, z_2, \dots, z_{n-1} que definem as splines cúbicas é tridiagonal simétrica. Ou seja tem associada a ele uma matriz na forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-2} & \\ & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \end{pmatrix},$$

para coeficientes adequados.

Assim o método para a resolução do sistema linear associado pode ser muito mais eficiente do que uma fatoração LU usual. De fato ao analisar a estrutura de zeros dessa matriz você poderá descobrir que a fatoração LU usual acaba tentando atualizar muitos valores somando zeros o que não modifica nada. Isso permite acelerar o processo evitando o cômputo e a soma com valores que já sabemos que serão zero.

Aproveitando esse fato é possível escrever uma variação simples da fatoração LU que roda em tempo proporcional a n ao invés dos $2/3(n-1)^3$ tradicional. Além disso as matrizes triangular inferior e superior também terão vários zeros. A inferior terá apenas a diagonal principal e a primeira subdiagonal. Já a superior a diagonal principal e a primeira superdiagonal. Isso mais uma vez pode ser aproveitado na resolução dos sistemas triangulares que segue a fatoração na resolução do sistema. Mais uma vez teremos um processo que demora tempo proporcional a n e não a n^2 como é comum na resolução de sistemas triangulares.

O seu código deve implementar essas pequenas variações na fatoração LU e na resolução de sistemas lineares de modo a garantir que o processo de cômputo dos coeficientes das splines demore um tempo total proporcional a n .

Você pode ler mais detalhes e em particular encontrar a derivação do sistema que deve ser resolvido na seção 8.6.2 do livro “Numerical Methods: Design, Analysis, and Computer Implementation of Algorithms” de Anne Greenbaum e Timothy Chartier.

4 O que deve ser entregue

Você deve entregar o código fonte do programa junto com um breve texto explicando como ele deve ser usado, em particular como compilá-lo se for um programa em C. Caso o código fonte seja composto por vários arquivos, aglutine-os em um único arquivo que pode ser no formato zip ou tar.gz.