Ортобазисний підхід визначення кінематики матеріальної точки на площині

Віталій Тартачний

25 листопада 2017 р.

Опис системи та основні поняття

Система (див. 1) складається з двох матеріальних точок 2 та 3, що здійснюють складний рух відносно базового референс-фрейму $(1x_1y_1z_1)$ з базисом $(\hat{\imath}_1, \hat{\jmath}_1, \hat{k}_1)$, при чому рух точки 3 залежить від руху точки 2. Характер руху плоский, тому для спрощення виведення та формування кінематичних рівнянь обмежемося набором з двох координат та відповідними одиничними векторами.

Оскільки референс-фрейм $(1x_1y_1z_1)$ базовий, а отже й нерухомий, визначимо основну його характеристику виходячи з нерухомості.

$$\frac{d\hat{\imath}_1}{dt} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d\hat{\jmath}_1}{dt} = 0 \tag{2}$$

Введемо також поняття векторного добутку (cross product) для двох 3-вимірних векторів $\vec{a} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ та $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ розміщених в ***деякому*** референс-фреймі з базисом $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$. Вибрані напрямки та величини вищенаведених векторів випливають з плоского характеру руху і будуть конкретизовані дальше по тексту. Отже векторний добуток векторів визначається наступним чином.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & a_z \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = a_z b_x \hat{\jmath} - a_z b_y \hat{\imath} \tag{3}$$

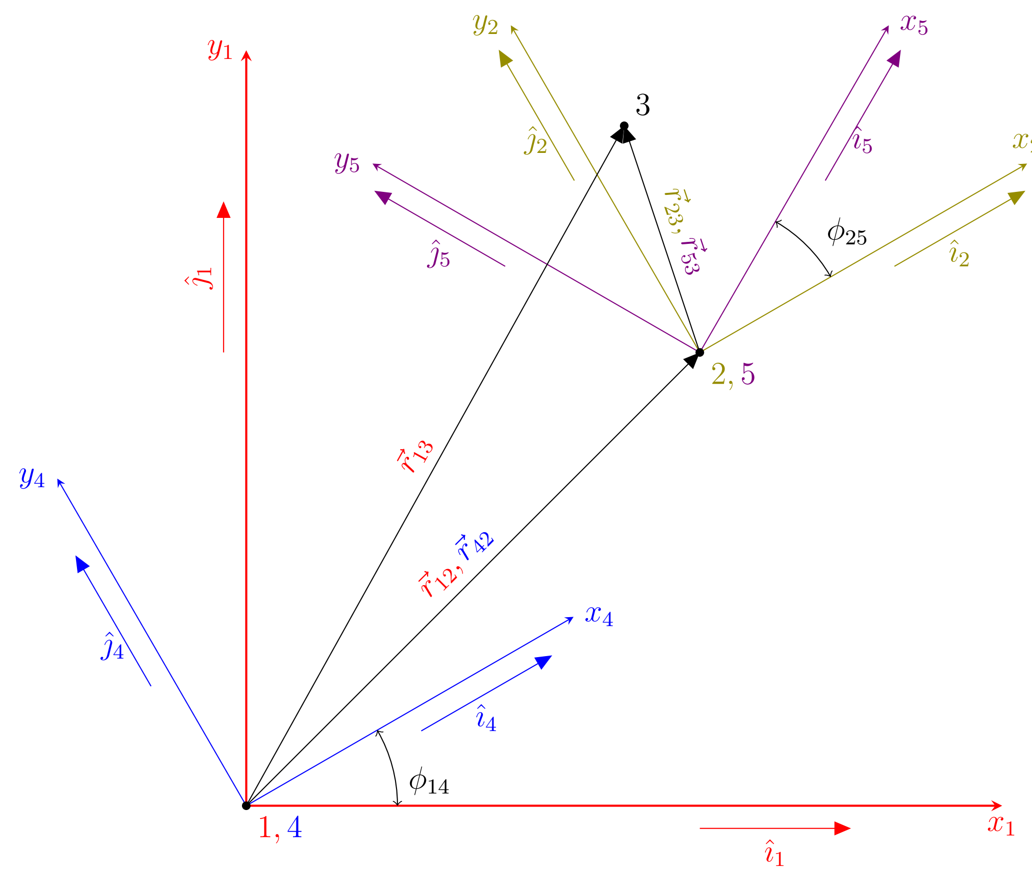

Рис. 1: Система матеріальних точок

Рух кожної з точок був розбитий на прості рухи (трансляційний T та ротаційний R). Для кожного з простих типів руху було введено свій окремий референс-фрейм. Таким чином рух системи визначається як композиція перетворень кожного з референс-фреймів відносно один одного. Структура референс-фреймів характеризується вкладеністю. Кожному референс-фрейму відповідає початок його координат позначений в нашому випадку цифрами.

$$1 \xrightarrow[\phi_{14}]{\mathrm{R}} 4 \xrightarrow[\vec{r}_{42}]{\mathrm{T}} 2 \xrightarrow[\phi_{25}]{\mathrm{R}} 5 \xrightarrow[\vec{r}_{53}]{\mathrm{T}} 3$$

Виведення рівняння швидкості

Основна мета знайти швидкість точки 3 відносно нашого базового референс-фрейму $(1x_1y_1z_1)$.

$$\frac{d\vec{r}_{13}}{dt}-?$$

Запишемо залежності між радіус-векторами та їхніми координатами відносно референс-фреймів.

$$\begin{array}{lll} \vec{r}_{12}=\vec{r}_{42} & \vec{r}_{12}=x_{12}\hat{\imath}_1+y_{12}\hat{\jmath}_1 & \vec{r}_{42}=x_{42}\hat{\imath}_4+y_{42}\hat{\jmath}_4 \\ \vec{r}_{23}=\vec{r}_{53} & \vec{r}_{23}=x_{23}\hat{\imath}_2+y_{23}\hat{\jmath}_2 & \vec{r}_{53}=x_{53}\hat{\imath}_5+y_{53}\hat{\jmath}_5 \end{array}$$

$$\vec{r}_{13}=\vec{r}_{12}+\vec{r}_{23}=\vec{r}_{42}+\vec{r}_{53} \tag{4}$$

Підставимо в рівняння 4 попередні залежності і отримаємо рівняння радіус вектора точки 3 відносно рухомих референс-фреймів.

$$\vec{r}_{13}=x_{42}\hat{\imath}_4+y_{42}\hat{\jmath}_4+x_{53}\hat{\imath}_5+y_{53}\hat{\jmath}_5 \tag{5}$$

Виведемо залежності одиничних веторів з попереднього рівняння відносно одиничних векторів базового референс-фрейму.

$$\hat{\imath}_4=\hat{\imath}_1 cos(\phi_{14})+\hat{\jmath}_1 sin(\phi_{14}) \tag{6}$$
$$\hat{\jmath}_4=-\hat{\imath}_1 sin(\phi_{14})+\hat{\jmath}_1 cos(\phi_{14}) \tag{7}$$

$$\hat{\imath}_5=\hat{\imath}_1 cos(\phi_{14}+\phi_{25})+\hat{\jmath}_1 sin(\phi_{14}+\phi_{25}) \tag{8}$$
$$\hat{\jmath}_5=-\hat{\imath}_1 sin(\phi_{14}+\phi_{25})+\hat{\jmath}_1 cos(\phi_{14}+\phi_{25}) \tag{9}$$

Для того щоб в подальшому можна було використати вищенаведені залежності слід знайти їхні похідні по часу. Похідні по часу рухомих одиничних векторів є ключовим в даному підході, і саме ці похідні по часу генерують найбільш неочевидні, нетривіальні результати в залежностях швидкостей та пришвидшень. Тому будемо проводити диференціювання повільно та покроково, пам'ятаючи про залежності 1 та 2 та про правила диференціювання складеної функції і добутку функцій.

$$\frac{d\hat{\imath}_4}{dt} = \frac{d\hat{\imath}_1}{dt}cos(\phi_{14}) - \hat{\imath}_1\dot{\phi}_{14}sin(\phi_{14}) + \frac{d\hat{\jmath}_1}{dt}sin(\phi_{14}) + \hat{\jmath}_1\dot{\phi}_{14}cos(\phi_{14})$$

$$\frac{d\hat{\imath}_4}{dt} = \dot{\phi}_{14}(-\hat{\imath}_1 sin(\phi_{14}) + \hat{\jmath}_1 cos(\phi_{14})) \quad (10)$$

$$\frac{d\hat{\jmath}_4}{dt} = -\frac{d\hat{\imath}_1}{dt}sin(\phi_{14}) - \hat{\imath}_1\dot{\phi}_{14}cos(\phi_{14}) + \frac{d\hat{\jmath}_1}{dt}cos(\phi_{14}) - \hat{\jmath}_1\dot{\phi}_{14}sin(\phi_{14})$$

$$\frac{d\hat{\jmath}_4}{dt} = -\dot{\phi}_{14}(\hat{\imath}_1 cos(\phi_{14}) + \hat{\jmath}_1 sin(\phi_{14})) \quad (11)$$

$$\frac{d\hat{\imath}_5}{dt} = \frac{d\hat{\imath}_1}{dt}cos(\phi_{14}+\phi_{25}) - \hat{\imath}_1(\dot{\phi}_{14}+\dot{\phi}_{25})sin(\phi_{14}+\phi_{25}) +$$

$$+ \frac{d\hat{\jmath}_1}{dt}sin(\phi_{14}+\phi_{25}) + \hat{\jmath}_1(\dot{\phi}_{14}+\dot{\phi}_{25})cos(\phi_{14}+\phi_{25})$$

$$\frac{d\hat{\imath}_5}{dt} = (\dot{\phi}_{14}+\dot{\phi}_{25})(-\hat{\imath}_1 sin(\phi_{14}+\phi_{25}) + \hat{\jmath}_1 cos(\phi_{14}+\phi_{25})) \quad (12)$$

$$\frac{d\hat{\jmath}_5}{dt} = -\frac{d\hat{\imath}_1}{dt}sin(\phi_{14}+\phi_{25}) - \hat{\imath}_1(\dot{\phi}_{14}+\dot{\phi}_{25})cos(\phi_{14}+\phi_{25}) +$$

$$+ \frac{d\hat{\jmath}_1}{dt}cos(\phi_{14}+\phi_{25}) - \hat{\jmath}_1(\dot{\phi}_{14}+\dot{\phi}_{25})sin(\phi_{14}+\phi_{25})$$

$$\frac{d\hat{\jmath}_5}{dt} = -(\dot{\phi}_{14}+\dot{\phi}_{25})(\hat{\imath}_1 cos(\phi_{14}+\phi_{25}) + \hat{\jmath}_1 sin(\phi_{14}+\phi_{25})) \quad (13)$$

Підставляючи в залежності 10, 11, 12, 13 співвідношення 7, 6, 9, 8 відповідно, отримаємо:

$$\frac{d\hat{\imath}_4}{dt} = \dot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_4 \quad (14)$$

$$\frac{d\hat{\jmath}_4}{dt} = -\dot{\phi}_{14}\hat{\imath}_4 \quad (15)$$

$$\frac{d\hat{\imath}_5}{dt} = (\dot{\phi}_{14}+\dot{\phi}_{25})\hat{\jmath}_5 \quad (16)$$

$$\frac{d\hat{\jmath}_5}{dt} = -(\dot{\phi}_{14}+\dot{\phi}_{25})\hat{\imath}_5 \quad (17)$$

Залишилося провести диференціювання рівняння 5 та підставити вищенаведені залежності.

$$\frac{d\vec{r}_{13}}{dt} = \frac{d(x_{42}\hat{\imath}_4 + y_{42}\hat{\jmath}_4 + x_{53}\hat{\imath}_5 + y_{53}\hat{\jmath}_5)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}_{13}}{dt} = \dot{x}_{42}\hat{\imath}_4 + x_{42}\frac{d\hat{\imath}_4}{dt} + \dot{y}_{42}\hat{\jmath}_4 + y_{42}\frac{d\hat{\jmath}_4}{dt} + \dot{x}_{53}\hat{\imath}_5 + x_{53}\frac{d\hat{\imath}_5}{dt} + \dot{y}_{53}\hat{\jmath}_5 + y_{53}\frac{d\hat{\jmath}_5}{dt}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}_{13}}{dt} = (\dot{x}_{42}\hat{\imath}_4 + \dot{y}_{42}\hat{\jmath}_4) + (\dot{x}_{53}\hat{\imath}_5 + \dot{y}_{53}\hat{\jmath}_5) + (x_{42}\dot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_4 - y_{42}\dot{\phi}_{14}\hat{\imath}_4) +& \\ + (x_{53}\dot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_5 - y_{53}\dot{\phi}_{14}\hat{\imath}_5) + (x_{53}\dot{\phi}_{25}\hat{\jmath}_5 - y_{53}\dot{\phi}_{25}\hat{\imath}_5) \quad (18)\end{aligned}$$

Рівняння 18 є шуканою залежністю в його повній і конкретизованій формі відносно нашої задачі. Окрім цього його можна записати в більш короткій та загальній формі. Для цього необхідно провести деякі нетривіальні заходи.

Визначимо вектори $\vec{\omega}_{14}$ та $\vec{\omega}_{25}$ наступним чином:

$$\vec{\omega}_{14} = 0\hat{\imath}_4 + 0\hat{\jmath}_4 + \dot{\phi}_{14}\hat{k}_4 = 0\hat{\imath}_5 + 0\hat{\jmath}_5 + \dot{\phi}_{14}\hat{k}_5 \quad (19)$$

$$\vec{\omega}_{25} = 0\hat{\imath}_5 + 0\hat{\jmath}_5 + \dot{\phi}_{25}\hat{k}_5 \quad (20)$$

Вищенаведені вектори називаються кутовими швидкостями. Застосуймо тепер операцію векторного добутку між кутовими швидкостями та радіус-векторами знайденими раніше за правилом 3. Також слід зауважити, що оскільки ми розглядаємо плоску задачу, то $\hat{k}4 = \hat{k}5$.

$$\vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{42} = \begin{vmatrix} \hat{\imath}_4 & \hat{\jmath}_4 & \hat{k}_4 \\ 0 & 0 & \dot{\phi}_{14} \\ x_{42} & y_{42} & 0 \end{vmatrix} = x_{42}\dot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_4 - y_{42}\dot{\phi}_{14}\hat{\imath}_4 \quad (21)$$

$$\vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{53} = \begin{vmatrix} \hat{\imath}_5 & \hat{\jmath}_5 & \hat{k}_5 \\ 0 & 0 & \dot{\phi}_{14} \\ x_{53} & y_{53} & 0 \end{vmatrix} = x_{53}\dot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_5 - y_{53}\dot{\phi}_{14}\hat{\imath}_5 \quad (22)$$

$$\vec{\omega}_{25} \times \vec{r}_{53} = \begin{vmatrix} \hat{\imath}_5 & \hat{\jmath}_5 & \hat{k}_5 \\ 0 & 0 & \dot{\phi}_{25} \\ x_{53} & y_{53} & 0 \end{vmatrix} = x_{53}\dot{\phi}_{25}\hat{\jmath}_5 - y_{53}\dot{\phi}_{25}\hat{\imath}_5 \quad (23)$$

Підставляючи залежності 21, 22 та 23 в 18 отримаємо остаточне рівняння швидкості точки 3 відносно базового референс-фрейму.

$$\frac{d\vec{r}_{13}}{dt} = (\dot{x}_{42}\hat{\imath}_4 + \dot{y}_{42}\hat{\jmath}_4) + (\dot{x}_{53}\hat{\imath}_5 + \dot{y}_{53}\hat{\jmath}_5) + \\ + \vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{42} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{25} \times \vec{r}_{53} \quad (24)$$

Спрощення та узагальнення рівняння швидкості

Введемо визначення для деяких термів з рівності 24.

$$\vec{v}_{42} = \dot{x}_{42}\hat{\imath}_4 + \dot{y}_{42}\hat{\jmath}_4 \quad (25)$$

$$\vec{v}_{53} = \dot{x}_{53}\hat{\imath}_5 + \dot{y}_{53}\hat{\jmath}_5 \quad (26)$$

$$\vec{\omega}_{15} = \vec{\omega}_{14} + \vec{\omega}_{25} \quad (27)$$

Перепишемо рівняння швидкості підставляючи вищенаведені заміни, та групуючи значення.

$$\frac{d\vec{r}_{13}}{dt} = (\vec{v}_{42} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{42}) + \vec{v}_{53} + \vec{\omega}_{15} \times \vec{r}_{53} \quad (28)$$

Кожен з термів з попереднього рівняння має свою назву, і саме в такому виді представленний в більшості літератури. Терм $\vec{v}_{42} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{42}$ називається *переносною швидкістю*. Терм $\vec{v}_{53}$ називається *відносною швидкістю*, або швидкістю точки відносно рухомого фрейму. Терм $\vec{\omega}_{15} \times \vec{r}_{53}$ не має особливої назви, а просто зазначається, що ця швидкість пов'язана з обертанням рухомого фрейму.

Визначення рівняння пришвидшення

Продиференціюємо наше отримане рівняння швидкості другий раз. Таким чином отримаємо рівняння пришвидшення.

$$\frac{d^2\vec{r}_{13}}{dt^2} = \frac{d(\vec{v}_{42} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{42} + \vec{v}_{53} + \vec{\omega}_{15} \times \vec{r}_{53})}{dt} \quad (29)$$

Для зручності продиференціюємо рівність по частинах, пам'ятаючи про про похідні по часу одиничних ортів, зазначених в попередніх розділах.

$$\frac{d\vec{v}_{42}}{dt} = \frac{d(\dot{x}_{42}\hat{\imath}_4 + \dot{y}_{42}\hat{\jmath}_4)}{dt} = \ddot{x}_{42}\hat{\imath}_4 + \dot{x}_{42}\dot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_4 + \ddot{y}_{42}\hat{\jmath}_4 - \dot{y}_{42}\dot{\phi}_{14}\hat{\imath}_4$$

$$\frac{d\vec{v}_{42}}{dt} = \ddot{x}_{42}\hat{\imath}_4 + \ddot{y}_{42}\hat{\jmath}_4 + \vec{\omega}_{14} \times \vec{v}_{42}$$

$$\frac{d\vec{v}_{53}}{dt} = \frac{d(\dot{x}_{53}\hat{\imath}_5 + \dot{y}_{53}\hat{\jmath}_5)}{dt} = \ddot{x}_{53}\hat{\imath}_5 + \dot{x}_{53}\dot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_5 + \dot{x}_{53}\dot{\phi}_{25}\hat{\jmath}_5 + \ddot{y}_{53}\hat{\jmath}_5 - \dot{y}_{53}\dot{\phi}_{14}\hat{\imath}_5 - \dot{y}_{53}\dot{\phi}_{25}\hat{\imath}_5$$

$$\frac{d\vec{v}_{53}}{dt} = \ddot{x}_{53}\hat{\imath}_5 + \ddot{y}_{53}\hat{\jmath}_5 + \vec{\omega}_{14} \times \vec{v}_{53} + \vec{\omega}_{25} \times \vec{v}_{53}$$

$$\frac{d(\vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{42})}{dt} = \frac{d(x_{42}\dot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_4 - y_{42}\dot{\phi}_{14}\hat{\imath}_4)}{dt} = \dot{x}_{42}\dot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_4 + x_{42}\ddot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_4 - x_{42}\dot{\phi}_{14}\dot{\phi}_{14}\hat{\imath}_4 -$$
$$-\dot{y}_{42}\dot{\phi}_{14}\hat{\imath}_4 - y_{42}\ddot{\phi}_{14}\hat{\imath}_4 - y_{42}\dot{\phi}_{14}\dot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_4 = (x_{42}\ddot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_4 - y_{42}\ddot{\phi}_{14}\hat{\imath}_4) + (\dot{x}_{42}\dot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_4 - \dot{y}_{42}\dot{\phi}_{14}\hat{\imath}_4) +$$
$$+ (x_{42}\dot{\phi}_{14}\dot{\phi}_{14}\hat{\imath}_4 - y_{42}\dot{\phi}_{14}\dot{\phi}_{14}\hat{\jmath}_4)$$

$$\frac{d(\vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{42})}{dt} = \vec{\epsilon}_{14} \times \vec{r}_{42} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{v}_{42} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{42}$$

$$\frac{d(\vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{53})}{dt} = \vec{\varepsilon}_{14} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{14} \times \frac{d\vec{r}_{53}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{53})}{dt} = \vec{\varepsilon}_{14} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{v}_{53} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{25} \times \vec{r}_{53}$$

$$\frac{d(\vec{\omega}_{25} \times \vec{r}_{53})}{dt} = \vec{\varepsilon}_{25} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{25} \times \vec{v}_{53} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{25} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{25} \times \vec{\omega}_{25} \times \vec{r}_{53}$$

Зберемо отримані частини продиференційованого рівняння разом, зробивши заміну $\ddot{x}_{42}\hat{\imath}_4 + \ddot{y}_{42}\hat{\jmath}_4 = \vec{a}_{42}, \ddot{x}_{53}\hat{\imath}_5 + \ddot{y}_{53}\hat{\jmath}_5 = \vec{a}_{53}$.

$$\frac{d^2\vec{r}_{13}}{dt^2} = \vec{a}_{42} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{v}_{42} + \vec{a}_{53} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{v}_{53} + \vec{\omega}_{25} \times \vec{v}_{53} + \vec{\varepsilon}_{14} \times \vec{r}_{42} +$$
$$+ \vec{\omega}_{14} \times \vec{v}_{42} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{42} + \vec{\varepsilon}_{14} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{v}_{53} +$$
$$+ \vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{25} \times \vec{r}_{53} + \vec{\varepsilon}_{25} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{25} \times \vec{v}_{53} +$$
$$+ \vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{25} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{25} \times \vec{\omega}_{25} \times \vec{r}_{53} \quad (30)$$

$$\frac{d^2\vec{r}_{13}}{dt^2} = \vec{a}_{42} + \vec{a}_{53} + 2\vec{\omega}_{14} \times \vec{v}_{42} + 2\vec{\omega}_{14} \times \vec{v}_{53} + 2\vec{\omega}_{25} \times \vec{v}_{53} + \vec{\varepsilon}_{14} \times \vec{r}_{42} + \vec{\varepsilon}_{14} \times \vec{r}_{53} + \\ + \vec{\varepsilon}_{25} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{42} + (\vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{25} \times \vec{r}_{53} + \\ + \vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{25} \times \vec{r}_{53} + \vec{\omega}_{25} \times \vec{\omega}_{25} \times \vec{r}_{53}) \quad (31)$$

Перепишемо рівняння в термінах $\vec{\omega}_{15} = \vec{\omega}_{14} + \vec{\omega}_{25}, \vec{\varepsilon}_{15} = \vec{\varepsilon}_{14} + \vec{\epsilon}_{25}$

$$\frac{d^2\vec{r}_{13}}{dt^2} = \vec{a}_{42} + \vec{a}_{53} + 2\vec{\omega}_{14} \times \vec{v}_{42} + 2\vec{\omega}_{15} \times \vec{v}_{53} + \vec{\varepsilon}_{14} \times \vec{r}_{42} + \vec{\varepsilon}_{15} \times \vec{r}_{53} + \\ + \vec{\omega}_{14} \times \vec{\omega}_{14} \times \vec{r}_{42} + \vec{\omega}_{15} \times \vec{\omega}_{15} \times \times \vec{r}_{53} \quad (32)$$

Рівність 32 є остаточним рівнянням пришвидшення досліджуваної системи матеріальних точок в визначених нами референс-фреймах.