Урок №3

а) Если числовая посл. имеет предел, то она ограничена.

Пусть $X_n = n^{(-1)^n}$

$$\lim_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = \left|\begin{array}{l} \text{при} \\ a = 1 \\ \text{где } a = (-1)^n \end{array}\right. = \infty$$

$$\left|\begin{array}{l} \text{при} \\ a = -1 \end{array}\right. = \frac{1}{\infty} \Rightarrow 0$$

Т.к. предел существует не при всех условиях $\Rightarrow$ X_n неограниченная.

б) Числовая посл. бесконечно большая если $|y_n| > E$ при $n > N$ или $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$X_n = n^{(-1)^n} \xrightarrow[\text{если б/б}]{} \lim\limits_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = \infty$

$\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} = 0$

Т.к. есть предел сход. к нулю то X_n не бесконечно большая.

2) $\lim_{n\to\infty} \sin n = 0$ проверим сущ. предела

По критерию сходимости Коши

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n, p > n_0 :$

$|X_{n+p} - X_n| < \varepsilon :$

$X_{n+p} - X_n \Rightarrow \sin(n+p) - \sin(n)$

Разницу sin можно представить

$2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

где $\alpha = n + p$, $\beta = n.$, $p = 2.$

$2 \sin 1 \cdot \cos \frac{2n + 2}{2} = 2 \cos(n+1)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sin n = 0$

и $\lim_{n\to\infty} \cos n = 0. \Rightarrow$ что противоречит наблюдениям значений sin. и cos.

и тригонометрическим тождествам.

3.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10n}{n^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{10/n \to 0}{1 + \frac{1}{n} \to 0} = 0$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{(n^2-n)(n+\sqrt{n})}{(n-\sqrt{n})(n+\sqrt{n})} =$

$= \frac{n^3 + n^2\sqrt{n} - n^2 - n\sqrt{n}}{n^2 + \cancel{n\sqrt{n}} - \cancel{n\sqrt{n}} - n} = \frac{n + n^2\sqrt{n} - n\sqrt{n}}{n^2-n}$

$= \frac{n + \sqrt{n}(n^2-n)}{n^2-n} = \frac{1}{n-1} \to 0 + \sqrt{n} \to \infty = \infty$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n}{3^n-2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{3^n}{3^n-2} = \frac{\frac{3^n}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n} - \frac{2}{3^n}} =$

$= \frac{1^n \to 1}{1 - \frac{2}{3^n} \to 0} = 1.$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$-1 \le \cos n \le 1$ для всех n

$$\frac{-\sqrt{n}}{n+1} \le \frac{\sqrt{n}}{n+1}\cdot\cos n \le \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\underbrace{n^{1/2}}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \pm\frac{\sqrt{n}}{n+1} = \pm 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1} = 0$$

4) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n \right) = \infty - \infty =$

$= \sqrt{n}\,\sqrt{n^{\cancel{2}}+\cancel{1}} - n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\sqrt{n^{\cancel{2}}+\cancel{1}} - \frac{n}{\sqrt{n}} =$

$= \frac{\left(\sqrt{n^{\cancel{2}}+\cancel{1}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^{\cancel{2}}+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$

$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \Rightarrow \lim = 0$