GeekBrains

Понятие о последовательности

Выборки из множеств, сходимость

Определение. Пусть каждому натуральному числу *n* (т.е. *n = 1, 2, 3, ..)* по некоторому закону поставлено в соответствие единственное число x_n.

В этом случае говорят, что задана *последовательность:* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Обозначение: $\{x_n\}$.

GeekBrains

Примеры последовательностей

1) Арифметическая прогрессия
2) Геометрическая прогрессия
3) Рекуррентная зависимость

$$x_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-p})$$

4) Числа Фибоначчи

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Примеры последовательностей

$$x_n = 1; \qquad x_n = \{1, 1, 1, 1, \ \dots, 1, \dots\};$$

$$x_n = (-1)^{n+1}; \qquad x_n = \{1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots\};$$

$$x_n = \frac{1}{n}; \qquad x_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\};$$

$$x_n = (-1)^n \cdot n; \qquad x_n = \{-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n \cdot n, \dots\};$$

$$x_n = \frac{n-1}{n}; \qquad x_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\};$$

Свойства последовательностей

Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу, называется *постоянной*.

$$\{x_n\}: \quad x_1 = x_2 = \ \dots = x_n = \ \dots$$

Свойства последовательностей

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $\forall n\colon\ x_n \leq x_{n+1}$, т.е.

$x_1 \leq x_2 \leq\ \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$

(соответственно, $\forall n\colon\ x_n \geq x_{n+1}$, т.е.

$x_1 \geq x_2 \geq\ \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$.

Невозрастающие и неубывающие последовательности объединяют термином – *монотонные*.

GeekBrains

Свойства последовательностей

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если $\forall n$: $x_n < x_{n+1}$, т.е.

$x_1 < x_2 < \ \dots < x_n < x_{n+1} < \cdots$

(соответственно, $\forall n$: $x_n > x_{n+1}$, т.е.

$x_1 > x_2 > \ \dots > x_n > x_{n+1} > \cdots$.

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют термином – *строго монотонные*.

Свойства последовательностей

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует $b : \forall n \in N : x_n \leq b$.
Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует $a : \forall n \in N : x_n \geq a$.

Последовательность, ограниченная сверху и снизу одновременно, называется *ограниченной.*

GeekBrains

Действия над последовательностями

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две произвольные последовательности.

Суммой (разностью) последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность, каждый член которой есть сумма (разность) соответствующих членов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$$

Аналогично определяется произведение и частное двух последовательностей.

GeekBrains

Пример 1. Написать первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$, если

1) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

2) x_n – *n*-й знак в десятичной записи числа *e*;

3) $x_1 = 1,\ x_n = x_{n-1} + 2$.

Пример 2. Какие из следующих последовательностей ограничены сверху? Снизу? Ограничены?

1) $2, 4, 6, 8, \dots;$
2) $-1, -4, -9, -16, \dots;$
3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \dots;$
4) $-2, 4, -8, 16, \dots$

Пример 3. Какие из следующих последовательностей монотонные, а какие – строго монотонные:

1) $x_n = 2n + 1;$

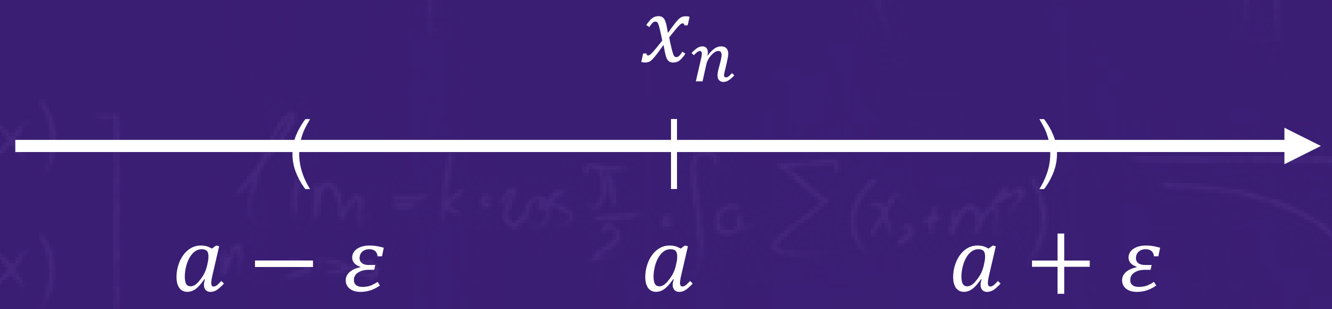
2) $x_n = \frac{(-1)^n}{n};$

3) $x_n = \frac{1}{n^2};$

4) $-1, -1, -2, -2, -3, -3, \dots ?$

Предел последовательности

$$\boxed{a = \lim_{n \to \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon), \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon}$$



Последовательности, имеющие конечный предел называются *сходящимися.* Если последовательность не имеет предела, то говорят, что она *расходится.*

Связь между сходимостью и ограниченностью последовательности

Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Всякая монотонная и ограниченная последовательность сходится.

Всякая постоянная последовательность, члены которой равны a, сходится к этому числу, т.е. $\lim_{n \to \infty} a = a$.

Бесконечно малые последовательности

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю.

$$\{\alpha_n\} - \text{б. м.} \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$$

$$\{\alpha_n\} - \text{б. м.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N, \ \forall n > N: |\alpha_n| < \varepsilon$$

Свойства бесконечно малых последовательностей

Сумма (разность) двух бесконечно малых последовательностей также является бесконечно малой последовательностью.

$$\{\alpha_n\} \text{ и } \{\beta_n\} - \text{б. м.} \Rightarrow \{\alpha_n \pm \beta_n\} - \text{б. м.}$$

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.

$$\{\alpha_n\} - \text{б. м.}, \{x_n\} - \text{огранич. посл} - \text{ть} \Rightarrow \{\alpha_n \cdot x_n\} - \text{б. м.}$$

GeekBrains

Свойства бесконечно малых последовательностей

Произведение двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

$$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} - \text{б. м.}, \Rightarrow \{\alpha_n \cdot \beta_n\} - \text{б. м.}$$

Произведение бесконечно малой последовательности на постоянное число является бесконечно малой последовательностью.

$$\{\alpha_n\} - \text{б. м.}, c \in \mathbb{R} \Rightarrow \{c \cdot \alpha_n\} - \text{б. м.}$$

GeekBrains

Операции над пределами последовательностей

1. Предел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей равен сумме (разности) их пределов.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$$

2. Предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(cx_n) = c \cdot a$$

GeekBrains

Операции над пределами последовательностей

4. Предел натуральной степени от сходящейся последовательности равен этой степени от ее предела.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n)^k = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k = a^k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

5. Предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному их пределов.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \; \lim_{n\to\infty} y_n = b, (b \neq 0, y_n \neq 0 \; \forall n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

GeekBrains

Пределы и неравенства

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad x_n \geq 0 \quad \forall n \Rightarrow a \geq 0$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \quad x_n \geq y_n \quad \forall n \Rightarrow a \geq b$

<u>Теорема о промежуточной переменной</u>. Пусть соответствующие члены трех данных последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ удовлетворяют условию $x_n \leq y_n \leq z_n$.

Пределы и неравенства

Теорема о промежуточной переменной. Пусть соответствующие члены трех данных последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ удовлетворяют условию $x_n \leq y_n \leq z_n$.

Тогда если последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то последовательность $\{y_n\}$ также сходится к этому пределу:

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n, \lim x_n = \lim z_n = a \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

GeekBrains

Бесконечно большие последовательности

$$\boxed{\forall M > 0 \ \ \exists N > 0 \ \ \forall x\colon \ |x| > N \ \Rightarrow \ |x_n| > M \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \infty}$$

Последовательность $\{x_n\}$, все члены которой отличны от нуля – бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно большая.