GeekBrains

Введение в математический анализ

Вебинар 2. Теория множеств.
Математическая логика.

План занятия:

- **Введение в теорию множеств**

  Описание множеств

  Операции над множествами

  Примеры множеств

- **Введение в математическую логику**

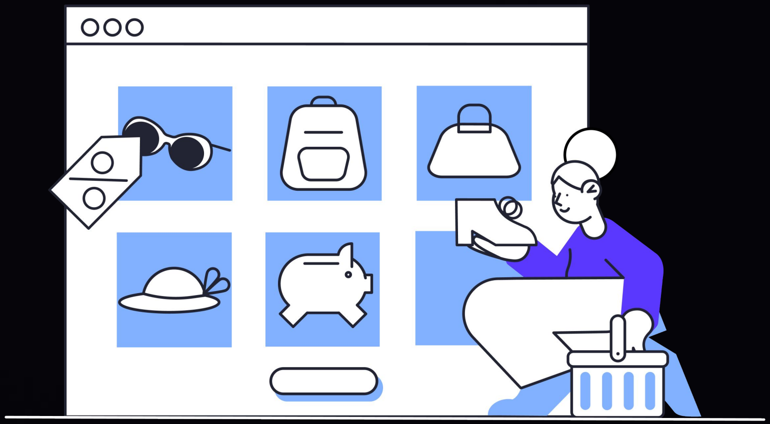
  Логические операции и таблицы истинности

  Основные законы логики высказываний

  Примеры высказываний и задачи

Любая научная дисциплина требует теории для её изучения. Для математического анализа и для любой другой математической дисциплины такой теорией является теория множеств.

Теория множеств



Множество

Набор объектов (элементов)

Одно объединяющее свойство

$$A = \{2; 1; 5; 7; 3\}$$

Обозначения множества

Множество обозначается латинской заглавной буквой, кроме C, R, Z, N и Q - букв, которыми обозначены фундаментальные числовые множества.

Например:

1. $A = \{5; 1; 2\}$
2. $B = [4; 3; 5; 1]$
3. $0 = \{\} = ø$

GeekBrains

Способы задания множеств

1. A = {“карандаш”; “бумага”; “ластик”}
2. $B = \{x \mid 3 < x < 9 \,\&\, x \in \mathbb{N}\}$
3.
   1. $2 \in C$
   2. Если $x \in C$, то $2^x \in C$
   3. Повторить

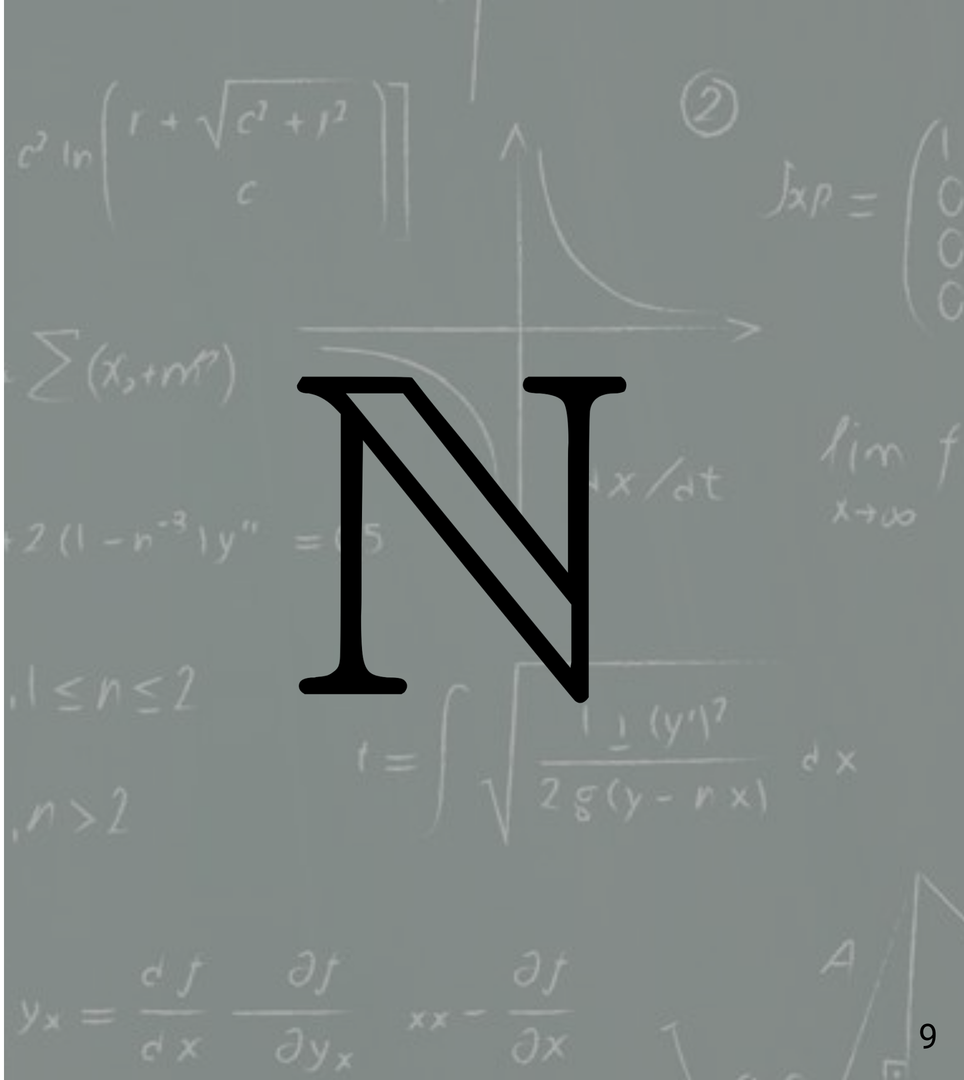
Фундаментальные числовые множества

Представление о числовых множествах и их иерархии

Натуральные числа

Множество натуральных чисел включает числа, возникающие при счёте: 1, 2, 3 и т.д.

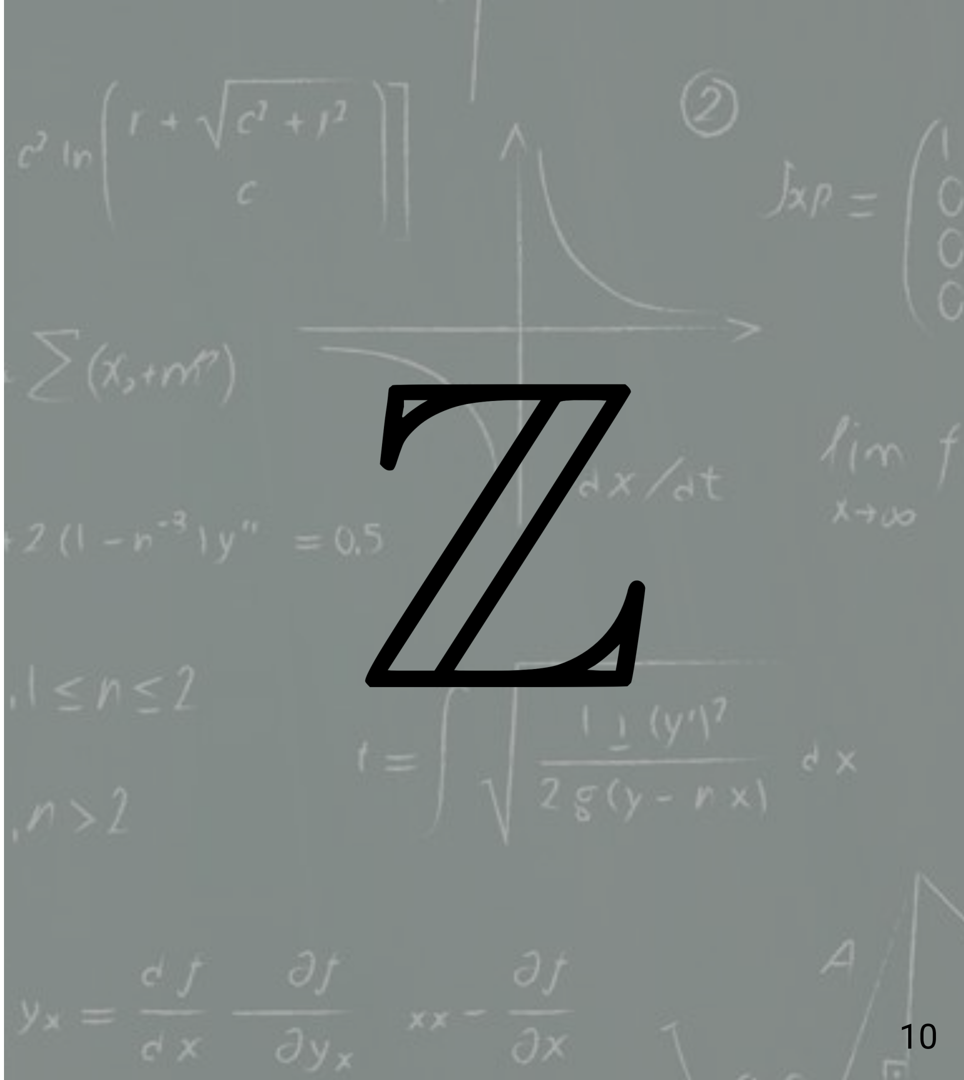
Расширенное множество натуральных чисел содержит ноль.



Целые числа

Множество целых чисел расширяет множество натуральных чисел нулём и отрицательными числами: 5, 0, -7

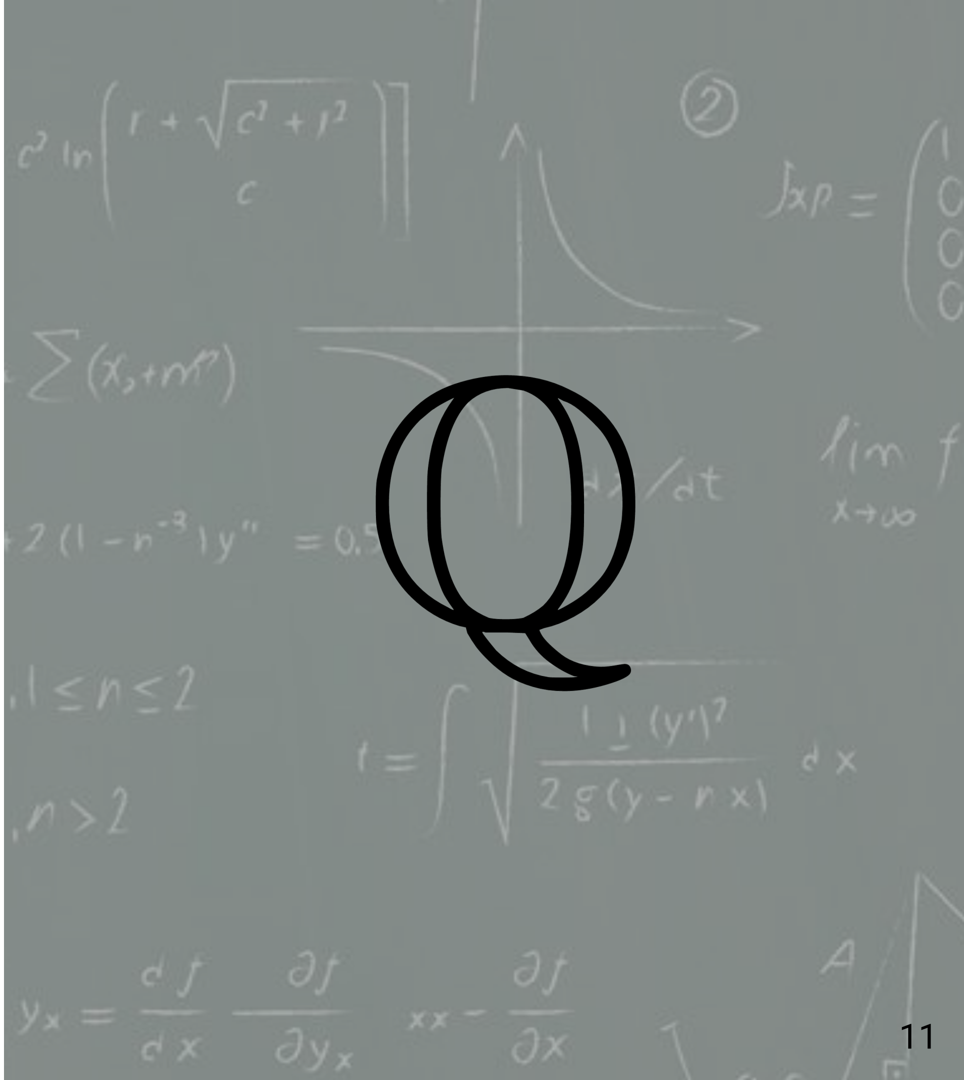
Отрицательные числа возникли примерно в VII веке в древних Индии и Китае.



Рациональные числа

Множество рациональных чисел содержит также все числа, которые можно представить в виде рациональной дроби: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 0,12 и т.д.

Рациональные числа старше, чем отрицательные.



1. Множество натуральных чисел можно задать так:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$$

2. Множество целых чисел можно задать так:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots\}$$

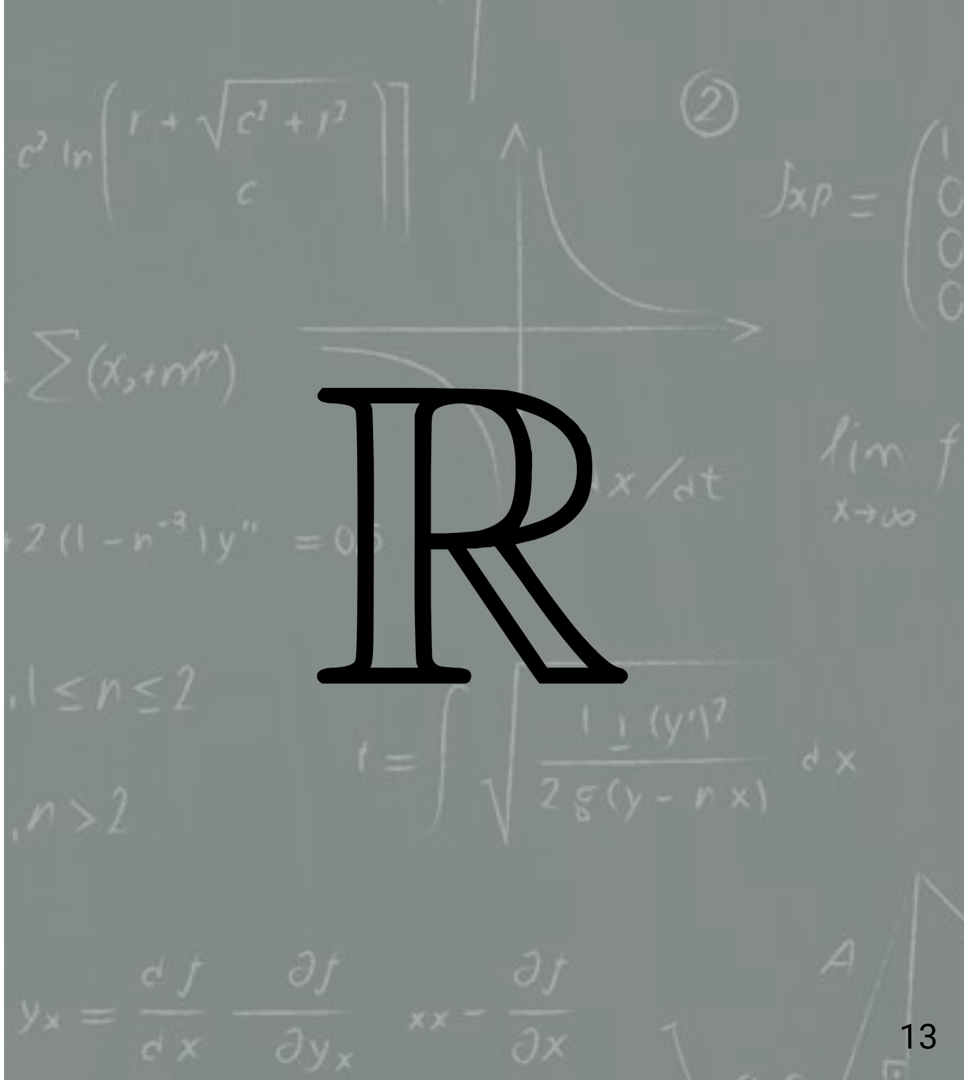
3. Множество рациональных чисел можно задать так:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Вещественные числа

Множество вещественных чисел также включает числа, которые нельзя представить в виде обыкновенной дроби, такие как π, γ, e, корень квадратный из двух и другие.

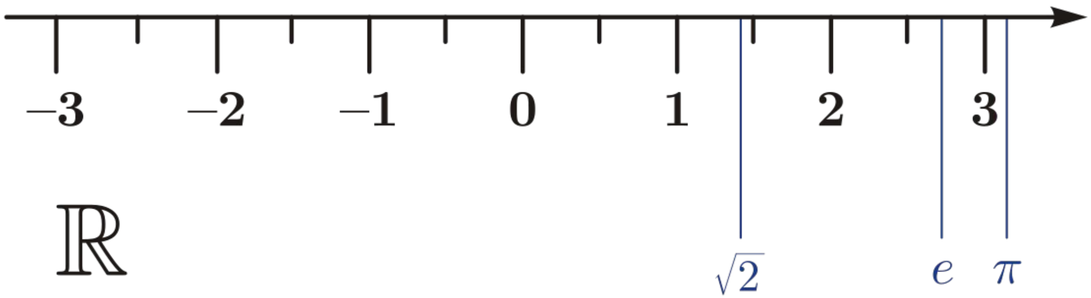
Также оно называется числовой осью.



Множество вещественных чисел:

R – числовая ось.

(помимо рациональных чисел включает числа, которые нельзя представить в виде обыкновенной дроби, такие как **π, e, √2, …**)



GeekBrains

Комплексные числа:

Re **Im**

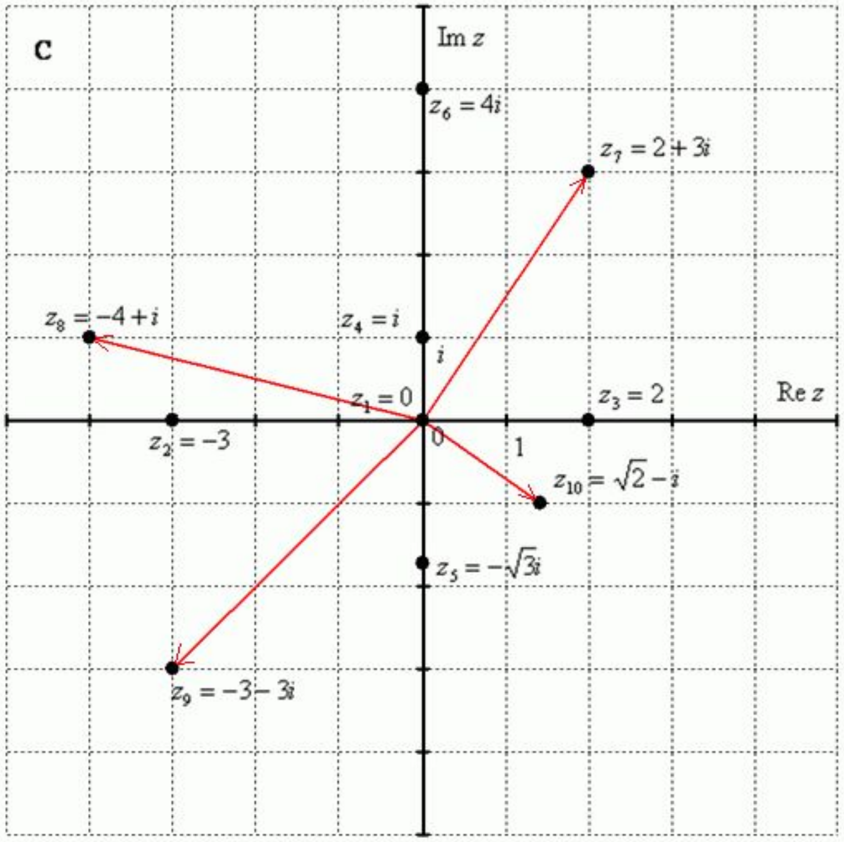
$$\mathbb{C} = \{x + iy | x \in \mathbb{R} \text{ и } y \in \mathbb{R}\},$$

где i — мнимая единица. $i = \sqrt{-1}$

Re - real

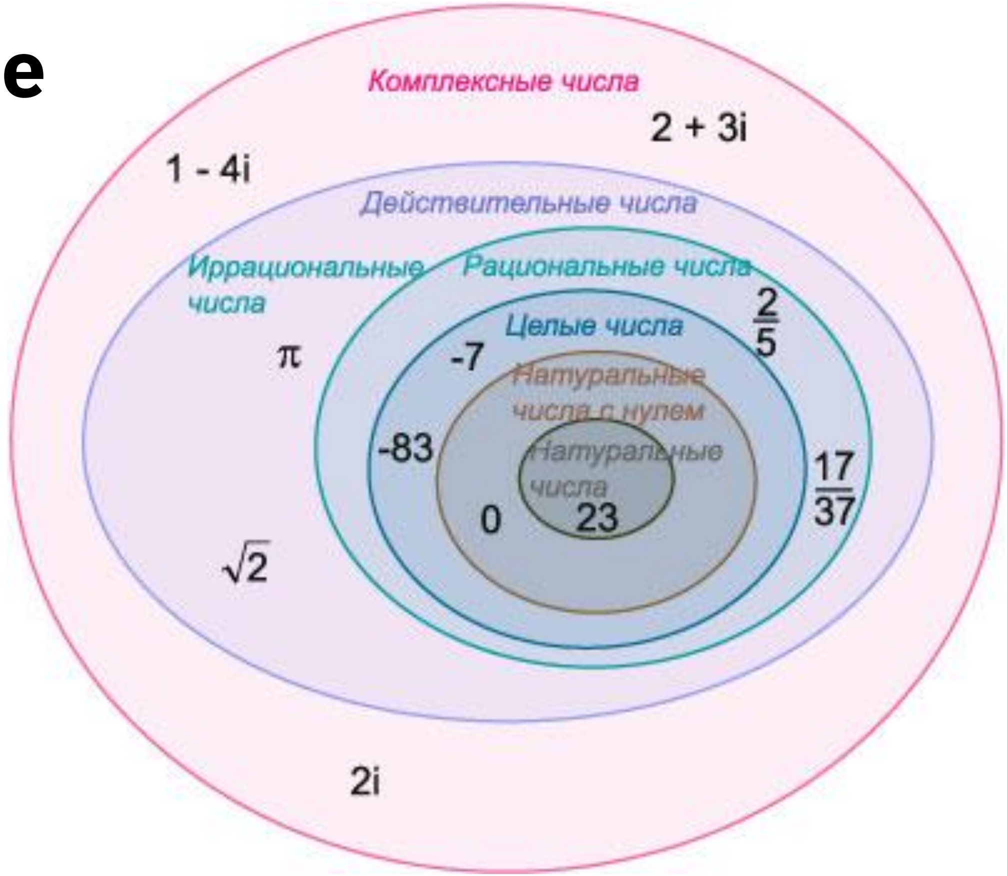
Im - imaginary

Комплексные числа:



GeekBrains

Комплексные числа:



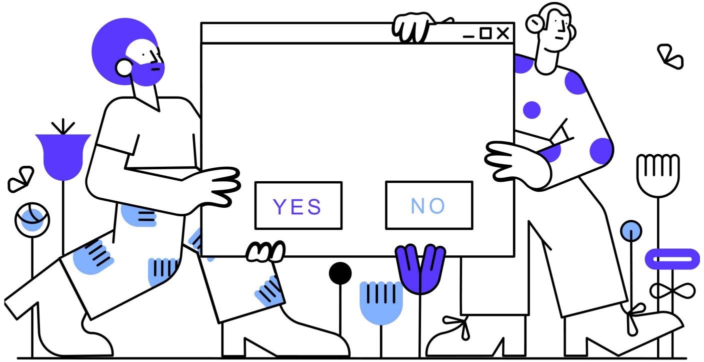
Источник: math24.ru/

Два множества равны тогда и только тогда, когда состоят из одних и тех же элементов.

Если же все элементы множества **A** содержатся в множестве **B**, то говорят, что **A** является подмножеством множества **B** и обозначают $A \subset B$. Само же **B** называют надмножеством множества **A**.

В рамках рассматриваемой математической теории вводят два исключительных множества:

1. **Пустое множество** $(\varnothing)$, не содержащее элементов
2. **Универсальное множество** или «универсум» (U) , содержащее все элементы данной теории.



Свойства подмножеств

1. $\varnothing \subset B; \; B \subset B$
2. $(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$
3. $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$
4. $(A \subset B) \Leftrightarrow A \cap B = A \wedge A \cup B = B$

Операции над множествами

Понятие о бинарной и унарной операциях, определения

Бинарными называются операции, производимые над двумя множествами

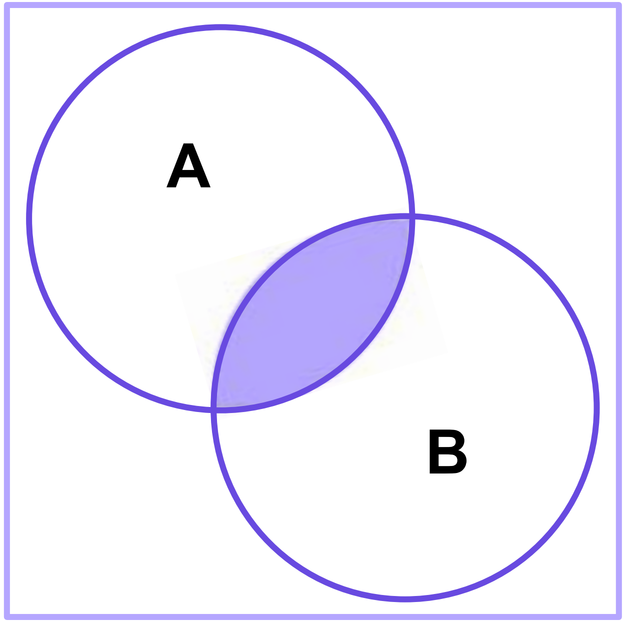
GeekBrains

Пересечение. Для любых двух множеств $A, B \subset U$ определим пересечение

$$A \cap B = \{c \in U \mid (c \in A) \wedge (c \in B)\}$$

Значок $\wedge$ внутри фигурной скобки называется "конъюнкция", по смыслу максимально приближенная к союзу «и» (логическое произведение).

Например, пересечением отрезков $[1,3]$ и $[2,7]$ является отрезок $[2,3]$.

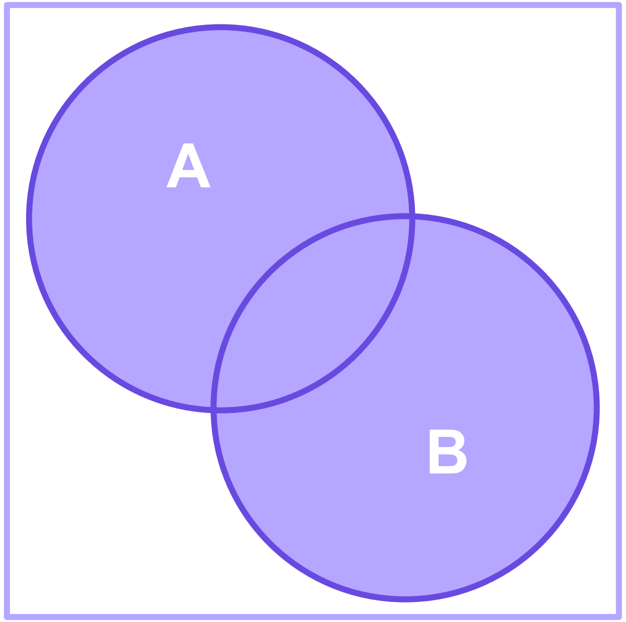


Объединение. Для любых двух множеств $A, B \subset U$ определим объединение

$$A \cup B = \{c \in U \mid (c \in A) \vee (c \in B)\}$$

Значок $\vee$ внутри фигурной скобки называется "дизъюнкция" , по смыслу максимально приближенная к союзу «или» (логическая сумма).

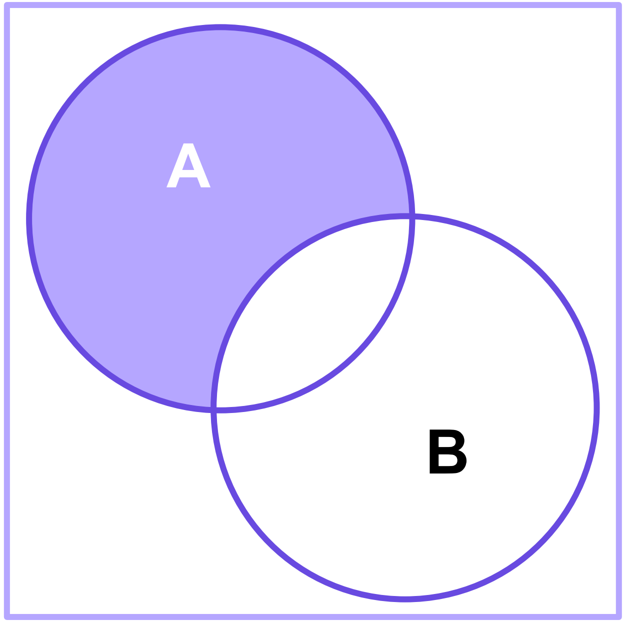
Например, объединением отрезков $[1,3]$ и $[2,7]$ является отрезок $[1,7]$



Разность. Для любых двух множеств $A,B \subset U$ определим разность

$$A \setminus B = \{c \in U \mid (c \in A) \wedge (c \notin B)\}$$

Например, разность отрезков $[1,3]$ и $[2,7]$ является отрезок $[1,2)$, причем не включая 2.

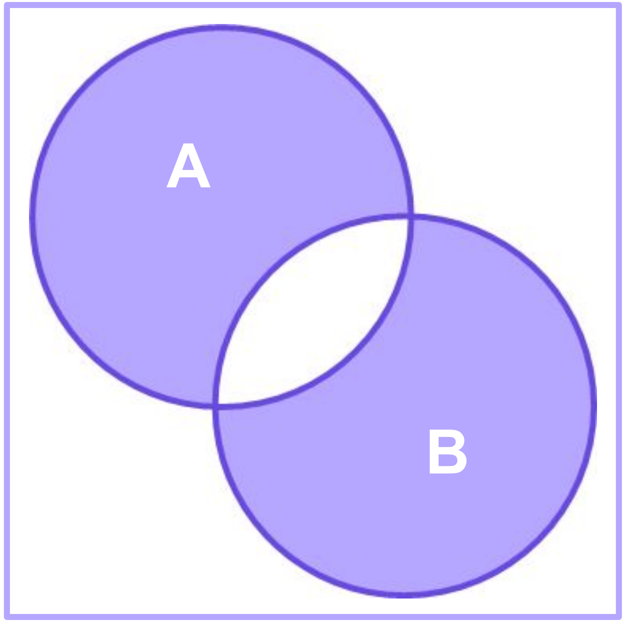


Симметрическая разность. Для любых двух множеств $A,B \subset U$ определим симметрическую разность

$$A \Delta B = \{c \in U \mid (c \in A) \oplus (c \in B)\}.$$

Значок $\oplus$ внутри фигурной скобки имеет много названий. Мы будем называть исключающее «или».

Например, симметрическая разность отрезков $[1,3]$ и $[2,7]$ является объединение двух отрезков $[1,2) \cup (3,7]$, причем не включая 2 и 3.

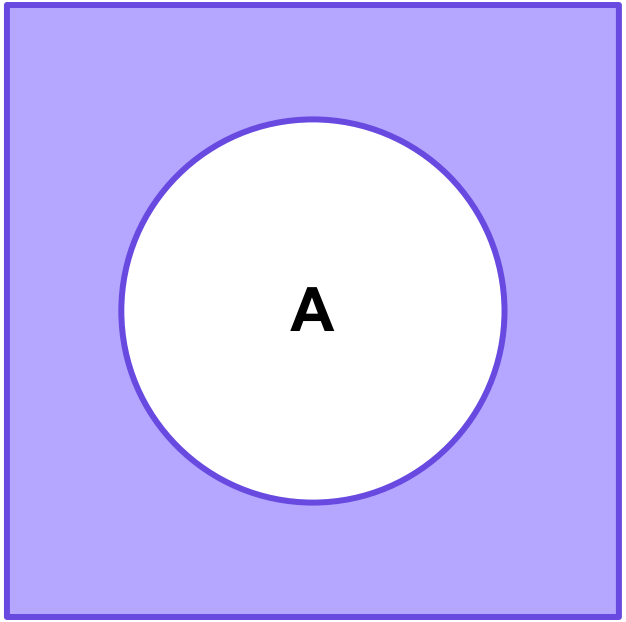


Унарными называются операции, производимые над одним множеством

Дополнение. Для любого множества $A \subset U$ определим дополнение

$$\bar{A} = U \setminus A = \{x | x \notin A\}$$

Например, в множестве вещественных чисел дополнением к множеству $\mathbb{Q}$ является множество всех иррациональных чисел.



В первую очередь выполняются унарные операции, во вторую - пересечение, в третью - все прочие, имеющие равный приоритет.

Бесконечная десятичная периодическая дробь

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$$

1. Начнем с простого примера и представим 0.(3) в виде обыкновенной дроби. Для этого возьмем переменную a=0.(3) и с помощью нее сместим разряд нашей дроби.

GeekBrains

1. Начнем с простого примера и представим 0.(3) в виде обыкновенной дроби. Для этого возьмем переменную a=0.(3) и с помощью нее сместим разряд нашей дроби.

$$a = 0.(3)$$

$$10a = 3.(3)$$

$$10a = 3 + 0.(3)$$

$$10a = 3 + a$$

$$9a = 3$$

$$a = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0.(3) = \frac{1}{3}$$

2. Рассмотрим пример с 0.(18). Ход мысли будет тот же, только теперь нам нужно сместить два разряда.

$$b = 0.(18)$$

$$100b = 18.(18)$$

$$100b = 18 + 0.(18)$$

$$100b = 18 + b$$

$$99b = 18$$

$$b = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$$

$$0.(18) = \frac{2}{11}$$

3. В самом сложном случае бесконечная десятичная периодическая дробь может быть только частью числа 1.32(18).

$$c = 1.32(18)$$

$$100c = 132.(18)$$

$$100c = 132 + 0.(18)$$

$$100c = 132 + \frac{2}{11}$$

$$100c = \frac{1454}{11}$$

$$c = \frac{1454}{1100} = \frac{727}{550}$$

$$1.32(18) = \frac{727}{550}$$

4. Представим 0.(9) в виде обыкновенной дроби.

$$d = 0.(9)$$

4. Представим 0.(9) в виде обыкновенной дроби.

$$d = 0.(9)$$

$$10d = 9.(9)$$

$$10d = 9 + 0.(9)$$

$$10d = 9 + d$$

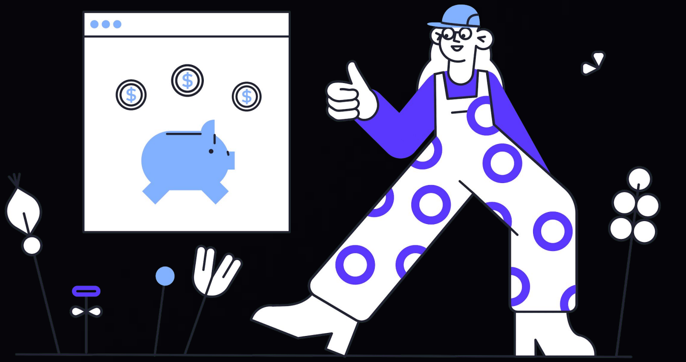
$$9d = 9$$

$$d = \frac{9}{9} = 1$$

$$0.(9) = 1 \quad ?$$

GeekBrains

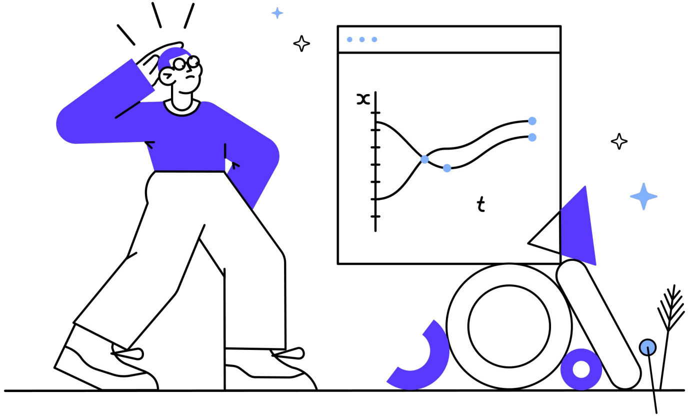
Математическая логика



GeekBrains

Математическая логика

Логика высказываний рассматривает и решает вопрос об истинности или ложности высказываний на основе изучения способа построения высказываний из так называемых элементарных высказываний с помощью логических операций или связок. Основным понятием этого раздела логики является **высказывание.**



Высказыванием называется повествовательное предложение, про которое всегда определенно можно сказать, является оно истинным (1) или ложным (0).

Примеры высказываний: «2+2=4», «1+1=1»,«Земля вращается вокруг Солнца», «3>5», «10 – нечетное число», «На улице идет дождь».

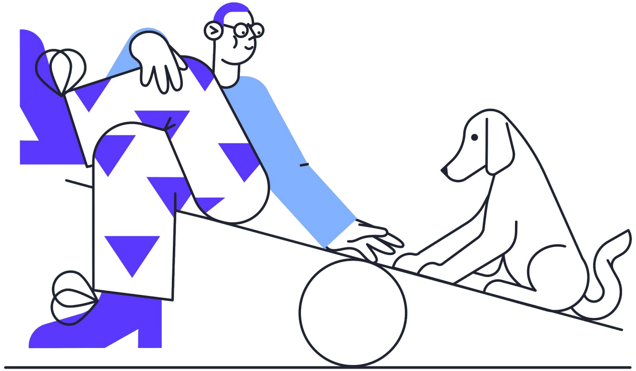
Побудительные предложения («Кругом!», «Идите к доске!»), вопросительные («Сколько времени?») и восклицательные («Ак Барс – чемпион!») высказываниями не являются.

Способы работы с выражениями

- С помощью таблицы истинности.
- С помощью основных законов логики высказываний.

Диаграммы Венна: libraryno.ru/

Логические операции и таблицы истинности



GeekBrains

1. Таблица истинности для **конъюнкции (логическое умножение)** **$A \wedge B$, A&&B, $A \cdot B$**

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

И

GeekBrains

2. Таблица истинности для **дизъюнкции** A∨B, A||B, A|B

A	B	F
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ИЛИ

GeekBrains

3. Логическое отрицание или **инверсия:** $\bar{A}$, $\neg A$

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

не

К исходному логическому выражению добавляется частица «не» или слова «неверно, что».

4. Логическое следование или **импликация:** **A** - условие; **B** - следствие.

A→B

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

если … , то … .

5. Логическая равнозначность или **эквивалентность:** A↔B

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

тогда
и только
тогда

* Исключающее или: $A \oplus B$

A	B	F
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Основные законы логики высказываний

1. Коммутативность конъюнкции: $A \wedge B = B \wedge A$.
2. Коммутативность дизъюнкции: $A \vee B = B \vee A$.
3. Ассоциативность конъюнкции: $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$.
4. Ассоциативность дизъюнкции: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$.
5. Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
6. Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
7. Закон де Моргана относительно конъюнкции: $\overline{(A \wedge B)} = \overline{A} \vee \overline{B}$.
8. Закон де Моргана относительно дизъюнкции: $\overline{(A \vee B)} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.
9. Закон поглощения для конъюнкции: $A \wedge (A \vee B) = A$.
10. Закон поглощения для дизъюнкции: $A \vee (A \wedge B) = A$.
11. Закон идемпотентности для конъюнкции: $A \wedge A = A$.
12. Закон идемпотентности для дизъюнкции: $A \vee A = A$.
13. Закон противоречия: $A \wedge \overline{A} = 0$.
14. Закон исключения третьего: $A \vee \overline{A} = 1$.
15. Закон двойного отрицания: $\overline{(\overline{A})} = A$.
16. $A \wedge 0 = 0, \quad A \wedge 1 = A$.
17. $A \vee 0 = A, \quad A \vee 1 = 1$.

1. Упростите выражение $\overline{(A \vee (A \wedge B))} \vee (A \vee (C \wedge \overline{A}))$

$$\overline{(A \vee (A \wedge B))} \vee (A \vee (C \wedge \overline{A})) =$$

8 6

$$= (\overline{A} \wedge \overline{(A \wedge B)}) \vee ((A \vee C) \wedge (A \vee \overline{A})) =$$

7 14

$$= (\overline{A} \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})) \vee ((A \vee C) \wedge 1) =$$

9 16

$$= \overline{A} \vee (A \vee C) =$$

4 14 17

$$= (\overline{A} \vee A) \vee C = 1 \vee C = 1$$

2. Доказать, что при любых значениях A и B справедлива формула

$$(A \to B) \leftrightarrow (\overline{A} \vee B)$$

A	B	$A \to B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$	$(A \to B) \leftrightarrow (\overline{A} \vee B)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Представьте, что все лжецы острова живут в одном городе, а рыцари – в другом. Как выяснить у аборигена, куда ведет интересующая нас дорога – в город рыцарей или в город лжецов?

Кванторы

- **Всеобщности (∀)** (читается «для любого»)
- **Существования (∃)** (читается «существует»)

Пример построения отрицания

$$\forall x \in (-\infty; 0]\ \mathrm{sgn}(x) = -1$$

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & if \quad x > 0, \\ 0 & if \quad x = 0, \\ -1 & if \quad x < 0 \end{cases}$$

GeekBrains

Пример построения отрицания

$$\forall x \in (-\infty; 0]\ \mathrm{sgn(x)} = \text{-}1$$

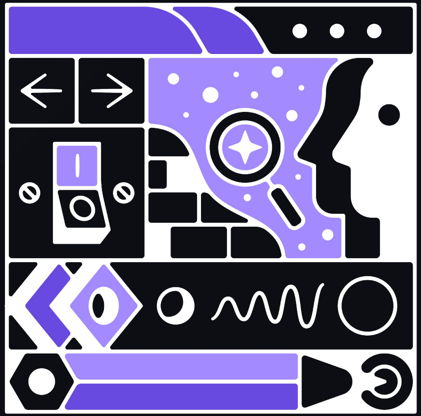
$$\exists x \in (-\infty; 0]\ \mathrm{sgn(x)} \neq \text{-}1$$

- Квантор меняется на противоположный ($\forall \leftrightarrow \exists$).
- Принадлежность множеству сохраняется.
- Перед логическим сказуемым ставится «не».

Примеры математических высказываний

Высказывание	Запись в обозначениях
А включено в В тогда и только тогда, когда для любого а из А справедливо, что он входит в В.	$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A{:}\, a \in B$
А не пересекается с В тогда и только тогда, когда для любого а из А справедливо, что он не входит в В.	$A \not\cap B \Leftrightarrow \forall a \in A{:}\, a \notin B$
А пересекается с В тогда и только тогда, когда существует а из А, для которого справедливо, что он входит в В.	$A \cap B \Leftrightarrow \exists a \in A{:}\, a \in B$

Спасибо



$$A = \{20; 40; 60\}, B = \{30; 40; 50\}, U = \{10; ..; 90\}$$

1. $A \cap B$ = {20; 40; 60}$\cap$ {30; 40; 50} = {40}
2. $A \cup B$ = {20; 40; 60}$\cup$ {30; 40; 50} = {20; 30; 40; 50; 60}
3. $A \setminus B$ = {20; 40; 60}$\setminus$ {30; 40; 50} = {20; 60}
4. $B \setminus A$ = {30; 40; 50}$\setminus$ {20; 40; 60} = {30; 50}

$$A = \{20; 40; 60\}, B = \{30; 40; 50\}, U = \{10; . . ; 90\}$$

5. $A \triangle B$ = {20; 40; 60} $\triangle$ {30; 40; 50} = {20; 30; 50; 60}
6. $A \times B$= {20; 40; 60} $\times$ {30; 40; 50} =

{{20; 30}; {20; 40}; {20; 50};

{40; 30}; {40; 40}; {40; 50};

{60; 30}; {60; 40}; {60; 50}}

GeekBrains

$$A = \{20; 40; 60\}, B = \{30; 40; 50\}, U = \{10; ..; 90\}$$

7. $\bar{A}$ = {10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90} \ {20; 40; 60} = {10; 30; 50; 70; 80; 90}
8. $\mathscr{P}$A = $\mathscr{P}${20; 40; 60} = { { }; {20}; {40}; {60}; {20; 40}; {20; 60}; {40; 60}; {20; 40; 60} }

$$A = \{20; 40; 60\}, B = \{30; 40; 50\}, C = \{10; 20; 30\}$$

9. $A \cup B \cap \mathbf{C} = \{20; 40; 60\} \cup \{30; 40; 50\} \cap \{10; 20; 30\} =$
$= \{20; 40; 60\} \cup \{30\} = \{20; 40; 60; 30\}$

10. $(A \cup B) \cap \mathbf{C} = (\{20; 40; 60\} \cup \{30; 40; 50\}) \cap \{10; 20; 30\} =$
$= \{20; 40; 60; 30; 50\} \cap \{10; 20; 30\} = \{20; 30\}$

$$A = \{20; 40; 60\}, B = \{30; 40; 50\}, U = \{10; ..; 90\}$$

11. $\overline{A \cap B} = \{10; ..; 90\} \setminus \{20; 40; 60\} \cap \{30; 40; 50\} =$
$= \{10; 20; 30; 50; 60; 70; 80; 90\}$

12. $\overline{A \cup B} = \{10; ..; 90\} \setminus \{20; 40; 60\} \cup \{30; 40; 50\} =$
$= \{10; 70; 80; 90\}$

Квантор в высказывании логики - реализует для высказывания всеобщность, существование или единственность.