

MECÂNICA QUÂNTICA II – PARTÍCULAS IDÊNTICAS E TRANSFORMAÇÕES

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Considere um sistema de duas partículas idênticas e responda às questões abaixo:

- Considere que o estado de uma partícula é descrito por $|a\rangle \in \mathbb{V}$. Utilize o produto tensorial para definir os dois possíveis espaços para os estados de duas partículas.
- Definimos um estado separável de duas partículas como sendo da forma $|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$. Os estados que não podem ser escritos dessa forma são chamados emaranhados. Os estados representando duas partículas idênticas podem ser separáveis? Justifique sua resposta.
- Com base nas respostas dos itens anteriores, explique como podemos realizar experimentos em laboratório medindo o estado de uma partícula $|a\rangle$ sem considerar todas as outras partículas idênticas presentes no sistema.
- Explique como podemos testar empiricamente se o estado de duas partículas é simétrico ou anti-simétrico. Descreva como a simetria e a anti-simetria estão relacionadas ao conceito de troca de partículas idênticas e como as técnicas experimentais podem ser usadas para medir os estados de duas partículas e verificar sua simetria.

2. Considere um grupo aditivo de transformações a um parâmetro, que é um mapa suave $\mathbb{R} \rightarrow \text{Op}(\mathbb{V})$ dado por $T(\epsilon)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $T(\epsilon_2)T(\epsilon_1) = T(\epsilon_1 + \epsilon_2)$, onde $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}$;
- $T(0)$ é a identidade, ou seja, $T(0) = \mathbb{1}$;
- $T^\dagger(\epsilon)T(\epsilon) = \mathbb{1}$, onde T^\dagger é o adjunto de T .

Responda as seguintes questões:

- Mostre que $T^\dagger(\epsilon) = T(-\epsilon)$.
- Explique o conceito de gerador e mostre que o operador gerador é anti-Hermitiano. Como podemos definir um operador que seja Hermitiano?

- (c) Considere uma função dos operadores básicos \widehat{X} e \widehat{P} , $\Omega(\widehat{X}, \widehat{P})$. Explique como podemos reescrever a operação $T^\dagger(\epsilon)\Omega(\widehat{X}, \widehat{P})T(\epsilon)$.
3. Considere o operador de inversão espacial Π , que inverte as coordenadas espaciais de um sistema. Prove que Π é um operador idempotente, ou seja, $\Pi^2 = \mathbb{1}$. Em termos de funções de onda, quais são as auto-funções do operador Π e seus autovalores correspondentes? Além disso, suponha que a Hamiltoniana do sistema é invariante sob inversão espacial, ou seja, $\Pi\widehat{H}\Pi = \widehat{H}$. Nesse caso, quais características da função de onda são conservadas? Explique.
4. Considere a álgebra dos geradores de rotação $\widehat{L} \times \widehat{L} = i\hbar\widehat{L}$, e seja \widehat{L}^2 o operador momento angular total e \widehat{L}_z o operador componente z do momento angular. Suponha que existem autoestados comuns $|\alpha\beta\rangle$ de \widehat{L}^2 e \widehat{L}_z , ou seja, $\widehat{L}^2|\alpha\beta\rangle = \alpha|\alpha\beta\rangle$ e $\widehat{L}_z|\alpha\beta\rangle = \beta|\alpha\beta\rangle$. Responda às seguintes perguntas:
- Explique por que podemos definir um autoestado simultâneo de \widehat{L}^2 e \widehat{L}_z .
 - Defina os operadores de escada \widehat{L}_+ e \widehat{L}_- e calcule seus comutadores com \widehat{L}_i e \widehat{L}^2 .
 - Mostre como os operadores de escada atuam nos estados $|\alpha\beta\rangle$.
 - Se \widehat{L}_i são auto-adjuntos, mostre que deve existir uma relação entre α e β . Qual é o significado físico dessa relação?