Universidade Estadual de Londrina

MECÂNICA QUÂNTICA II – SPIN E MOMENTO ANGULAR

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

---

1. Dadas as matrizes de Pauli abaixo, responda às questões.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Explique qual é a relação entre essas matrizes e os elementos de matriz dos operadores de Spin $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$.

   (b) Descreva como os elementos de matriz estão relacionados à base $|j, m\rangle$, onde j é o rótulo do momento angular total $\hat{\mathbf{S}}^2$ e m é o rótulo da projeção do momento angular ao longo do eixo z, ou seja, $\hat{S}_z$.

   (c) Explique como é possível utilizar as matrizes de Pauli apresentadas para calcular explicitamente os elementos do grupo de rotação. Utilize a fórmula explícita abaixo como referência:

$$\mathrm{U}[\mathrm{R}] = e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{S}/\hbar}$$

   Descreva o procedimento passo a passo e discuta como as propriedades das matrizes de Pauli estão relacionadas com o resultado.

   (d) Utilizando a representação dos elementos do grupo de rotação, encontre as duas rotações necessárias para transformar o vetor unitário na direção z, $\boldsymbol{e}_3$, em um vetor unitário $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Em seguida, usando essas rotações, encontre o Spinor que representa um estado de Spin positivo na direção $\boldsymbol{n}$.

2. Considere o termo de interação dado por $\mathrm{H}_{\mathrm{int}} = -\gamma\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}$, onde $\mathbf{S}$ é o vetor de spin e $\mathbf{B}$ é um campo magnético constante na direção $\boldsymbol{e}_3$. Responda às seguintes questões:

   (a) Dado um Spinor inicial ψ_0 que é autovetor de $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{S}$, descreva como ocorre a evolução desse estado considerando apenas o termo de interação como a Hamiltoniana. Calcule explicitamente $\psi(t)$.

   (b) Calcule os autovetores de σ_x e σ_y, usando esses estados determine a probabilidade de encontrar o spin positivo nas direções x e y em função do tempo. Interprete o resultado fisicamente.

3. Adição de momento angular: Considere duas representações irredutíveis rotuladas por j_1 e j_2, ou seja, $\mathbb{V}_{j_1}$ e $\mathbb{V}_{j_2}$. O espaço formado pelo produto tensorial dessas duas representações ($\mathbb{V}_{j_1} \otimes \mathbb{V}_{j_2}$) não é irredutível, portanto, pode ser decomposto como uma soma direta de representações irredutíveis. Essas representações estão relacionadas ao operador de momento angular total $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_1 + \hat{\mathbf{J}}_2$. Com base nessas informações, responda às seguintes perguntas:

   (a) Quais são os possíveis valores para o momento angular total que podem aparecer na soma direta? (Leve em consideração os possíveis valores de $\hat{J}_z$).

   (b) Quantas vezes cada um desses valores do momento angular total aparece na soma direta? (Conte quantas vezes o mesmo autovalor de $\hat{J}_z$ pode ser encontrado).

   (c) Usando os resultados anteriores escreva explicitamente a decomposição de $\mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_{3/2}$ em uma soma direta.

   (d) Considere uma partícula composta em um estado de Spin total $s = 0$ que decai em duas partículas de Spin $s_1 = s_2 = 1/2$. Qual é o estado final do sistema na representação $\mathbb{V}_{1/2} \otimes \mathbb{V}_{1/2}$? Desconsidere qualquer momento angular orbital.