Universidade Estadual de Londrina

PROVA DE FÍSICA MATEMÁTICA II – GEOMETRIA DIFERENCIAL

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

---

1. Dado um círculo unitário definido por $S^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\right\}$, mostre explicitamente que S^1 é uma variedade diferenciável. Para isso faça os itens abaixo:
   (a) Encontre um conjunto mínimo de cartas $(U_i,\ \phi_i)$ para $0 < i < m$ (onde m é o número de cartas) e mostre que ele cobre toda a variedade.
   (b) Mostre que as funções $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ e $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ são suaves em $U_1 \cap U_2$.

2. Seja o mapa $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   E um campo vetorial

$$V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

   calcule o campo em $\mathbb{R}^3$ definido pelo *push-forward* $h_* V \in T_{h(x,y)}\mathbb{R}^3$ (lembre-se que $h_* V$ é uma derivação em $C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$). **Item bonus** (ponto extra na prova), calcule as curvas integrais de V, ou seja, as curvas cuja a tangente coincide com V ao longo de suas trajetórias.

3. Em quais situações podemos calcular soluções usando a série de Taylor e em quais é necessário usar o método de Frobenius? Em quais casos o método de Frobenius **não** pode ser aplicado? Dê um exemplo para cada uma dessas situações.

4. Dada a equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0,$$

   onde $y(x)$ está definida em $x \in [-1, 1]$, resolva a equação em um dos pontos singulares regulares usando o método de Frobenius e encontre duas soluções linearmente independentes em torno desse ponto. Responda as perguntas:

(a) O que acontece nos pontos singulares regulares se λ não for um número inteiro?

(b) Quais restrições temos sobre λ?