Universidade Estadual de Londrina

PROVA DE FÍSICA MATEMÁTICA II – EDO E EDP

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Considere o problema de auto-valor para o átomo de Hidrogênio abaixo e resolva as questões abaixo.
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi_\alpha - \frac{e^2\psi_\alpha}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{x}|} = \mathrm{E}_\alpha\psi_\alpha. \tag{1}$$

   (a) Faça a separação de variáveis e identifique as constantes de separação.

   (b) Explique quais são as restrições sobre as constantes de separação e discuta quais são suas origens geométricas e/ou físicas.

   (c) Se nos restringirmos a soluções concentradas (que vão a zero no infinito) quais são os valores possíveis para E_α.

   (d) Escreva a equação para a parte radial. Identifique as duas constantes com unidade de comprimento e explique a quais características do problema elas estão associadas.

2. Dada a formula de Rodrigues para os polinômios de Legendre:
$$\mathrm{P}_\ell(x) = \frac{1}{\ell!2^\ell}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left[\left(x^2-1\right)^\ell\right]. \tag{2}$$

   Calcule a norma dos polinômios usando a definição de norma:
$$|\mathrm{P}_\ell| \equiv \sqrt{\langle \mathrm{P}_\ell|\mathrm{P}_\ell\rangle}, \qquad \langle \mathrm{P}_\ell|\mathrm{P}_{\ell'}\rangle \equiv \int_{-1}^{1}\mathrm{P}_\ell(x)\mathrm{P}_{\ell'}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

3. Usando a formula dos Harmônicos esféricos e a formula de Rodrigues para os

polinômios associados de Legendre:

$$\mathrm{Y}_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,\mathrm{P}_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \tag{4}$$

$$\mathrm{P}_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell. \tag{5}$$

Calcule explicitamente todos os Harmônicos até $\ell = 2$ e mostre como eles podem ser escritos em termos das componentes (n^1, n^2, n^3) do vetor

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_2 + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_3. \tag{6}$$