FÍSICA MATEMÁTICA II – GEOMETRIA DIFERENCIAL

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

---

1. Seja M uma variedade diferenciável, suponha uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ na variedade, mostre que $F = f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ será suave qualquer que seja a carta $(U, \phi) \subset M$.

2. O círculo unitário pode ser definido como $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\right\}$, mostre explicitamente que S^1 é uma variedade diferenciável.
Dica: Procure um atlas para a variedade, evidenciando a suavidade dos mapas e suas inversas nas sobreposições das cartas.

3. Sabendo que o vetor tangente em um ponto $p \in M$ é definido como $v_p = [\lambda]$, onde $\lambda : (a, b) \subset \mathbb{R} \to M$ é uma curva na variedade.

   (a) Mostre que a multiplicação por escalar de um vetor tangente não depende do sistema de coordenadas escolhido, i.e, qualquer que seja a carta (U, ϕ)

   $$rv = [\phi^{-1} \circ (r\phi \circ \lambda)], \quad \forall r \in \mathbb{R} \tag{1}$$

   (b) A operação de soma dos vetores é definido como

   $$v_1 + v_2 = [\phi^{-1} \circ (\phi \circ \lambda_1 + \phi \circ \lambda_2)] \tag{2}$$

   Prove que o espaço T_pM é um espaço vetorial.

4. Seja o mapa $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, para α fixo

   $$h = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

   Para um campo vetorial $X = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$, determine o vetor $h_*(X) \in T_{h(x,y)}\mathbb{R}^2$. Sandro n passou campo vetorial posso pedir um vetor tangente em um determinado ponto mas manter a estrutura do problema.

5. Dado um sistema de coordenadas local (U, ϕ) em $p \in M$, podemos definir um conjunto de derivações em p por

   $$\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p f = \left.\frac{\partial}{\partial u^\mu} f \circ \phi^{-1}\right|_{\phi(p)} \qquad \mu = 1, ..., \dim(M) \tag{4}$$

(a) Para uma carta (U, ϕ) prove que

$$\phi_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p \right) = \left. \frac{\partial}{\partial u^\mu} \right|_{\phi(p)} \tag{5}$$

Dica: $\phi_* \left(\left. \frac{d}{\partial x^\mu} \right|_p \right) f = \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p f \circ \phi$

(b) Seja uma curva $\lambda : (a, b) \subset \mathbb{R} \to M$, assumindo que $c(0) = p \in M$, o vetor velocidade $v_\lambda(t)$ da curva λ é definido como

$$v_\lambda(t) = \frac{d\lambda}{dt}(t) \equiv \lambda_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) \in T_{\lambda(t)}M \tag{6}$$

Calcule o vetor velocidade da curva $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\lambda = (t^2, t^3). \tag{7}$$