PROVA DE FÍSICA MATEMÁTICA II – GEOMETRIA DIFERENCIAL

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Em uma variedade M podemos escrever um campo vetorial como uma derivação, i.e.,
$$\bar{v} = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{1}$$
onde x^μ são as coordenadas em uma carta (ψ, U).
   (a) O que acontece com as componentes do campo vetorial se mudarmos para uma segunda carta (ϕ, U) com coordenadas y^μ definida no mesmo aberto U.
   (b) Como se transformam as um-formas $\tilde{w} = w_\mu \mathrm{d}x^\mu$ quando fazemos a mesma mudança de carta do item anterior?

2. Os seguintes campos vetoriais formam uma base nos espaços tangentes do espaço euclidiano bidimensional $\mathbb{E}^2$:
$$\bar{r} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \bar{\theta} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2}$$
Onde usamos a mudança de cartas $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$..
   (a) Mostre que de fato eles são linearmente independentes.
   (b) A base é bem definida em todos os pontos de $\mathbb{E}^2$? Justifique.
   (c) Mostre se essa base é coordenada.

3. Resolva a equação de Bessel abaixo usando o método de Frobenius, encontre as duas soluções linearmente independentes, considere que $\alpha \in \mathbb{Z}$ (conjunto dos inteiros). faça também os itens abaixo.
$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \alpha^2)y(x) = 0. \tag{3}$$
   (a) Classifique os pontos do intervalo de $x \in \mathbb{R}$ (inclua também o ponto no infinito) como ordinário, singular regular ou singular irregular.

(b) O que mudaria no método de solução se α fosse um número real diferente de inteiros e semi-inteiros.

4. Usando a teoria de Sturm-Louville faça as seguintes atividades:

   (a) Escreva o operador diferencial associado a equação de Bessel (3).

   (b) Usando o produto interno:

$$\langle f|g\rangle = \int_0^L f^*(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x, \tag{4}$$

   determine qual deve ser a função peso $w(x)$ para que o operador do item anterior possa ser auto-adjunto.

   (c) Uma vez encontrada a função peso $w(x)$ apropriada, quais condições sobre as soluções da Eq. (3) para que o operador seja auto-adjunto.