PROVA DE FÍSICA MATEMÁTICA II – EDO E EDP

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Considere a equação do oscilador harmônico:

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

onde ω é uma constante real positiva. Mostre usando séries de potência que a solução geral da equação acima é dada por:

$$y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x),$$

onde A e B são constantes reais.

2. Para aplicar o método de Frobenius é necessário fazer primeiro a classificação dos pontos singulares da equação diferencial. Supondo que o dominio das equações diferenciais seja $\mathbb{R}$, classifique os pontos singulares, quando presentes, das equações diferenciais abaixo:

   (a) $x^2y'' + xy' + y = 0.$

   (b) $x^2y'' + x^{3/2}y = 0.$

   (c) $y'' + xy' + \frac{y}{e^x-1-x} = 0.$

3. Considere a equação de Bessel:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

   (a) Classifique o ponto $x_0 = 0$ e encontre a primeira solução na forma de Frobenius.

   (b) Explique como encontrar a segunda solução linearmente independente, não é necessário resolver a equação.

      i. ν é um número inteiro.

      ii. ν é semi-inteiro.

      iii. $2\nu \notin \mathbb{Z}$.

4. Considere a equação de Legendre:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0,$$

onde $y(x)$ está definida em $x \in [-1, 1]$. Para resolver a equação em $x_0 = 1$ usando o método de Frobenius siga os passos abaixo:

(a) Classifique o ponto $x_0 = 1$.

(b) Usando a série de Frobenius, encontre o polinômio indicial e suas raízes.

(c) Encontre a relação de recorrência para os coeficientes da série de Frobenius.

(d) Resolva a relação de recorrência para encontrar a primeira solução.

(e) Descreva como encontrar a segunda solução linearmente independente.