

FÍSICA MATEMÁTICA II – DELTA DE DIRAC E FUNÇÕES DE GREEN

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Considere a distribuição normal $p_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$, onde $\sigma > 0$ é o desvio padrão.

(a) Mostre que a distribuição é normalizada, i.e,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\sigma(x) dx = 1. \quad (1)$$

(b) Calcule a média e o valor esperado das potências ímpares de x , i.e,

$$\langle x^{2n+1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} p_\sigma(x) dx. \quad (2)$$

(c) Calcule a média e o valor esperado das potências pares de x , i.e,

$$\langle x^{2n} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} p_\sigma(x) dx. \quad (3)$$

(d) Usando os resultados anteriores, mostre que a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_\sigma(x) dx = f(0) + \frac{\sigma^2}{2} f''(0) + \frac{\sigma^4}{8} f^{(4)}(0) + \dots$$

Onde $'$ denota a derivada em relação a x . Ou seja, mostre que o limite da distribuição normal quando $\sigma \rightarrow 0$ é a função delta de Dirac.

2. Podemos construir a inversa da derivada de uma função $f(x)$ onde $x \in (a, b)$ como

$$f(x) = \int_a^x f'(y) dy, \quad f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(y) dy. \quad (4)$$

onde $f(a) = 0 = f(b)$.

- (a) Mostre que podemos reescrever as expressões acima usando a função de Heaviside $\theta(x)$, i.e.,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Ou seja, a função de Heaviside é a função de Green para a derivada.

- (b) Calcule a integral da função de Heaviside, i.e.,

$$G(x) \equiv \int_a^x \theta(y) dy. \quad (6)$$

e mostre que a integral da função de Heaviside é a função de Green para a o operador derivada segunda:

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_a^b G(x-y) f(y) dy = f(x).$$

- (c) Mostre também a relação inversa, i.e.,

$$f(x) = \int_a^b G(x-y) \frac{d^2}{dy^2} f(y) dy. \quad (7)$$

- (d) Escreva a função de Green em termos da distância $\sigma(x, y) = |x - y|$.

3. No caso de uma dimensão, a função de Green para o operador derivada segunda é proporcional a função distância $\sigma(x, y) = |x - y|$. Em duas dimensões, a função de Green também pode ser escrita em termos da distância

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

- (a) Mostre que o Laplaciano em duas dimensões, i.e.,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

atuando sobre $\ln \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é zero para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, i.e.,

$$\nabla^2 \ln \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

- (b) Podemos regularizar a função $\ln \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ usando o parâmetro $\varepsilon > 0$, i.e.,

$$G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \varepsilon^2}.$$

Mostre que a integral do Laplaciano da função regularizada é um, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla^2 G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^2 \mathbf{x} = 1.$$

(c) Mostre que a integral do Laplaciano da função regularizada é a função delta de Dirac, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla^2 G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d^2 \mathbf{y} = f(\mathbf{x}).$$

4. Repita os passos anteriores para três dimensões, isto é:

(a) Mostre que o Laplaciano em três dimensões, i.e.,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

atuando sobre $1/\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é zero para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, i.e.,

$$\nabla^2 \frac{1}{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = 0.$$

(b) Regularize a função $1/\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ usando o parâmetro $\epsilon > 0$, i.e.,

$$G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + \epsilon^2}}.$$

Mostre que a integral do Laplaciano da função regularizada é um, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^3 \mathbf{x} = 1.$$

(c) Mostre que a integral do Laplaciano da função regularizada é a função delta de Dirac, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d^3 \mathbf{y} = f(\mathbf{x}).$$

5. Faça a dedução das identidades de Green para o Laplaciano.

(a) Primeira identidade de Green:

$$\oint_{\partial\Omega} \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi) d^3 \mathbf{x}, \quad (8)$$

onde Ω é um volume limitado por uma superfície $\partial\Omega$.

(b) Segunda identidade de Green:

$$\oint_{\partial\Omega} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3 \mathbf{x}. \quad (9)$$

6. Use as identidades de Green e a função de Green para o Laplaciano para resolver a equação de Poisson em três dimensões, i.e,

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}), \quad (10)$$

onde $\rho(\mathbf{x})$ é uma função fonte. Discuta as condições de contorno para a solução da equação de Poisson.