Universidade Estadual de Londrina

VARIEDADES E TENSORES

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

SUMÁRIO

1 VARIEDADES

1.1 *Definições*

2 FIBRADO TANGENTE

2.1 *Derivações como vetores tangentes*

3 CAMPOS VETORIAIS

Na Sec. 2.1 nos vimos que o conjunto das derivações em um ponto p da variedade $\mathcal{M}$ é isomórfico é isomórfico ao espaço dos vetores tangentes àquele mesmo ponto $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$. Vimos também que a união dos espaços tangentes

$$\mathrm{T}\mathcal{M} = \cup_{p\in\mathcal{M}}\mathrm{T}_p\mathcal{M} = \Big\{ (p, v) \;\Big|\; p \in \mathcal{M} \text{ and } v \in \mathrm{T}_p\mathcal{M} \Big\},$$

forma o que chamamos de fibrado tangente. Como cada espaço tangente é isomórfico a cada espaço das derivações em um ponto, podemos usar intercambiavelmente $\mathrm{D}\mathcal{M}$ ou

$\mathrm{T}\mathcal{M}$. Daqui em diante, vamos denotar sempre o fibrado tangente por $\mathrm{T}\mathcal{M}$ lembrando que podemos usar tando o formalismo de derivações ou classes de equivalência para denotar um vetor.

3.1 DEFINIÇÃO. Chamamos de campo vetorial o mapa

$$v : \mathcal{M} \to \mathrm{T}_p\mathcal{M}, \quad v(p) = v_p. \tag{1}$$

Essa é uma definição informal já que o lado direito não é um conjunto, mas um conjunto para cada elemento do domínio. Uma definição rigorosa seria feita em termos de seções transversais, contudo isso não será necessário por enquanto. Aqui adotaremos v_p como uma derivação em p, ou seja, $v_p : \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$.

Dada uma derivação v_p em um ponto p, vimos que ela pode ser escrita em termos de uma base definida por uma carta ϕ, ou seja,

$$v_p(f) = \left[v_p(x^\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\right]_p f = v_p(x^\mu)\left(\frac{\partial f \circ \phi^{-1}(\boldsymbol{x})}{\partial u^\mu}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\phi(p)}. \tag{2}$$

Para simplificarmos nossa notação, vamos calcular nosso campo vetorial $v(p)$ em uma carta específica ϕ, nesse caso

$$\begin{aligned} v_{\boldsymbol{x}}(f) &\equiv v_{\phi^{-1}(\boldsymbol{x})}(f), \\ &= v_{\boldsymbol{x}}(x^\mu)\frac{\partial f \circ \phi^{-1}(\boldsymbol{x})}{\partial u^\mu} = v^\mu(\boldsymbol{x})\frac{\partial \mathrm{F}(\boldsymbol{x})}{\partial x^\mu}, \\ \mathrm{F}(\boldsymbol{x}) &\equiv f \circ \phi^{-1}(\boldsymbol{x}), \quad v^\mu(\boldsymbol{x}) \equiv v_{\boldsymbol{x}}(x^\mu). \end{aligned} \tag{3}$$

Na expressão acima, nós definimos o representante local da função da variedade f como F. Quando não há ambiguidade em relação a carta que usamos (quando estamos usando somente uma carta), a derivada parcial pode ainda ser escrita como

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{4}$$

Ou seja, quando representado em uma carta podemos escrever um campo vetorial da forma

$$v = v^\mu(\boldsymbol{x})\partial_\mu = v^\mu\partial_\mu. \tag{5}$$

Na última igualdade, supondo que não há ambiguidade em relação ao ponto na carta que estamos usando, omitimos também o argumento. Na prática, muitos texto simplificam ainda mais e não incluem as derivadas parciais ∂_μ e chamam v^μ de vetor.

3.1 *Comutador de campos*

Sabemos agora que um campo vetorial v leva um elemento de $\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$ em outra função da variedade, ou seja, $v : \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}) \to \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$. Portanto, é natural que perguntemos, será que dados dois campos vetoriais v e u, a composição $u(v(\cdot))$ é também uma derivação?

Aplicando a um representante local F temos,

$$u(v(\mathrm{F})) = u^\mu\partial_\mu\left(v^\nu\partial_\nu \mathrm{F}\right) = \left(u^\mu\partial_\mu v^\nu\right)\partial_\nu \mathrm{F} + v^\nu u^\mu\partial_\mu\partial_\nu \mathrm{F}. \tag{6}$$

Para ser uma derivação precisamos que a ação dessa composição no produto de funções FG satisfaça a regra de Leibniz,

$$u(v(\mathrm{FG})) = \left(u^\mu\partial_\mu v^\nu\right)\partial_\nu(\mathrm{FG}) + v^\nu u^\mu\partial_\mu\partial_\nu(\mathrm{FG}), \tag{7}$$

$$= \mathrm{G}u(v(\mathrm{F}) + \mathrm{F}u(v(\mathrm{G}) + v^\nu u^\mu(\partial_\mu \mathrm{F})(\partial_\nu \mathrm{G}) + v^\nu u^\mu(\partial_\mu \mathrm{G})(\partial_\nu \mathrm{F}). \tag{8}$$

A última expressão acima mostra que temos os termos que esperamos pela regra de Leibniz, porém existem dois termos extras. Por isso, a composição de dois campos vetoriais não é um campo vetorial. Agora, note que os termos extras são simétricos sobre a troca de v e u, por isso, se tomarmos a aplicação antissimétrica desses dois campos, teremos um (possivelmente) novo campo vetorial, isto é,

$$[u,v](\mathrm{FG}) = \mathrm{G}[u,v](\mathrm{F}) + \mathrm{F}[u,v](\mathrm{G}), \quad [u,v](\cdot) \equiv u(v(\cdot)) - v(u(\cdot)). \tag{9}$$

Chamamos o novo campo vetorial $[u,v]$ resultante da composição antissimétrica de u e v de comutador dos campos, é fácil ver que as componentes que sobram são,

$$[u,v] = \left(u^\mu\partial_\mu v^\nu - v^\mu\partial_\mu u^\nu\right)\partial_\nu. \tag{10}$$

Com isso, mostramos que os campos vetoriais (quando escritos em termos de derivações) tem naturalmente uma álgebra de Lie (caracterizada por esse produto antissimétrico, que satisfaz a identidade de Jacobi). Esse produto tem inúmeras aplicações, vamos mostrar mais a frente que ele está ligado a um conceite de derivada, chamada derivada de Lie, essa derivada é bastante útil quando queremos escrever equações de movimento já que ela se reduz a derivada parcial normal quando usamos um sistema de coordenadas adaptado.

4 FIBRADO COTANGENTE

Todo espaço vetorial tem associado um conceito natural de espaço dual, dessa forma podemos definir um espaço dual a cada $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$, e de forma similar a $\mathrm{T}\mathcal{M}$ podemos definir um fibrado cotangente.

4.1 *Espaço vetorial dual*

4.1 DEFINIÇÃO. Dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$ chamamo de espaço dual $\mathbb{V}^*$ o espaço dos funcionais lineares que mapeiam $v \in \mathbb{V}$ em reais. Dessa forma se $l \in \mathbb{V}^*$ então $l(v) \in \mathbb{R}$. É fácil ver que esse espaço tem uma estrutura natural de espaço vetorial,

$$(l+m)(v) \equiv l(v) + m(v), \qquad l, m \in \mathbb{V}^*, \tag{11}$$

$$(al)(v) \equiv a(l(v)), \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Note que novamente usamos a soma e multiplicação dos reais para definir a soma dos vetores.

Como sabemos, um vetor qualquer $v \in \mathbb{V}$ pode sempre ser escrito em termos de uma base $e_\mu \in \mathbb{V}$, i.e., $v = v^\mu e_\mu$ e $v^\mu \in \mathbb{R}$. Dessa forma, para calcular a aplicação de um funcional linear basta sabermos sua aplicação na base, isto é,

$$l(v) = v^\mu l(e_\mu). \tag{13}$$

A expressão acima mostra que o resultado da aplicação de um funcional linear em um vetor é dado pela soma das componentes de v e as quantidades $l(e_\mu)$. Isso mostra também que o funcional l é totalmente definido pelas quantidades $l(e_\mu)$ e consequentemente tem a mesma dimensão de $\mathbb{V}$.

Dada uma base $e_\mu \in \mathbb{V}$ podemos definir uma base em $\mathbb{V}^*$ usando a expressão $e^\nu(e_\mu) = \delta_\mu{}^\nu$ onde $e^\nu \in \mathbb{V}^*$. Note que para um ν fixo, essa expressão nos permite calcular as componentes de e^ν nessa base, o que define totalmente esse funcional.

LISTA DE EXERCÍCIOS