MECÂNICA QUÂNTICA II – REVISÃO E PARTÍCULAS IDÊNTICAS

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

---

1. Oscilador Harmônico

   (a) Dado os operadores de aniquilação e criação definidos em termos dos operadores de posição e momento:

   $$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \qquad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right). \tag{1}$$

   Calcule o comutador desses operadores e mostre que a Hamiltoniana pode ser escrita da forma:

   $$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{2}$$

   (b) A partir da equação de auto-estado da Hamiltoniana, $\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle$ use o comutador de $\hat{H}$ com os operadores de criação e aniquilação mostre quais são os possíveis valores de E. Note que um passo importante é impor que a Hamiltoniana tenha autovalores positivos definidos, como isso pode ser justificado usando a Eq. (2)?

2. Átomo de Hidrogênio

   (a) A partir do Hamiltoniano do átomo de hidrogênio $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, descreva a dedução dos autoestados da energia. Uma descrição qualitativa dos passos é suficiente.

   (b) Quais são as propriedades da geometria do sistema, em termos das coordenadas (r, θ, ϕ), que limitam os autovalores de $\hat{H}$ e como essa limitação se dá?

   (c) Quando estudamos a parte radial da solução, quais considerações físicas sobre a função de onda são necessárias para encontrar os estados ligados?

3. Considere um sistema de duas partículas **idênticas** e responda às questões abaixo:

(a) Considere que o estado de uma partícula é descrito por $|a\rangle \in \mathbb{V}$. Utilize o produto tensorial para definir os dois possíveis espaços para os estados de duas partículas.

(b) Definimos um estado separável de duas partículas como sendo da forma $|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$. Os estados que não podem ser escritos dessa forma são chamados emaranhados. Os estados representando duas partículas idênticas podem ser separáveis? Justifique sua resposta.

(c) Com base nas respostas anteriores, explique como podemos realizar experimentos em laboratório para medir o estado de uma partícula $|a\rangle$ sem considerar todas as outras partículas idênticas presentes no sistema. Para tanto, considere dois estados $|\mathrm{T}\rangle$ e $|\mathrm{L}\rangle$ representando pacotes gaussianos na Terra e na Lua, respectivamente, onde

$$\langle x|\mathrm{T}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_\mathrm{T})^2}{4}\right), \qquad \langle x|\mathrm{L}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_\mathrm{L})^2}{4}\right),$$

com $\mu_\mathrm{L} \gg \mu_\mathrm{T}$. Demonstre que tanto o estado simétrico quanto o anti-simétrico de $|\mathrm{L}\rangle$ e $|\mathrm{T}\rangle$ são aproximadamente separáveis quando calculamos a função de onda do conjunto em $(x_\mathrm{L}, x_\mathrm{T})$ onde $|x_\mathrm{T} - \mu_\mathrm{L}| \gg 1$ e $|x_\mathrm{L} - \mu_\mathrm{T}| \gg 1$.

(d) Explique como podemos testar empiricamente se o estado de duas partículas é simétrico ou anti-simétrico. Descreva como a simetria e a anti-simetria estão relacionadas ao conceito de troca de partículas idênticas e como as técnicas experimentais podem ser usadas para medir os estados de duas partículas e verificar sua simetria.