Universidade Estadual de Londrina

PROVA DE FÍSICA MATEMÁTICA II – GEOMETRIA DIFERENCIAL

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

---

1. Dado um círculo unitário definido por $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\right\}$, mostre explicitamente que S^1 é uma variedade diferenciável. Para isso faça os itens abaixo:

   (a) Encontre um conjunto minimo de cartas $(U_i,\ \phi_i)$ para $0 < i < m$ (onde m é o número de cartas) e mostre que ele cobre toda a variedade.

   (b) Mostre que as funções $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ e $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ são suaves em $U_1 \cap U_2$.

2. Seja o mapa $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   E um campo vetorial

$$V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

   calcule o campo em $\mathbb{R}^3$ definido pelo *push-forward* $h_* V \in T_{h(x,y)}\mathbb{R}^3$ (lembre-se que $h_* V$ é uma derivação em $C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$).

3. Calcule as curvas integrais do campo vetorial V dado na questão anterior, ou seja, as curvas cuja tangente coincide com V ao longo de suas trajetórias,

$$\sigma_* \frac{d}{dt} = V_\sigma.$$

   .

4. Prove que a aplicação de duas derivações na mesma função não forma uma derivação. Em seguida, prove que o comutador de duas derivações, ou seja,

$$[V, U](f) \equiv V(U(f)) - U(V(f))$$

   é uma derivação (V, U são derivações e f uma função da variedade).