MECÂNICA QUÂNTICA II – TEORIA DE PERTURBAÇÕES

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

---

1. Quando aplicamos a teoria de perturbações a um sistema, estamos supondo que o Hamiltoniano do sistema é dado por $\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{H}}_0 + \hat{\mathrm{H}}_1$, onde $\hat{\mathrm{H}}_0$ é o Hamiltoniano de um sistema cujas soluções são conhecidas e $\hat{\mathrm{H}}_1$ é uma perturbação que afeta o sistema. A ideia é que o Hamiltoniano $\hat{\mathrm{H}}_1$ é pequeno em relação a $\hat{\mathrm{H}}_0$. Responda:

   (a) O que significa dizer que $\hat{\mathrm{H}}_1$ é pequeno em relação a $\hat{\mathrm{H}}_0$? Quais são as hipóteses que devem ser satisfeitas para que a teoria de perturbações seja aplicável?

   (b) Dados os autoestados de $\hat{\mathrm{H}}_0$, $|n^{(0)}\rangle$, e os autovalores correspondentes, $\mathrm{E}_n^{(0)}$, onde n é o índice que rotula os autoestados. Mostre como podemos encontrar as correções de primeira ordem para os autoestados e autovalores do Hamiltoniano total H.

   (c) No caso do oscilador harmônico, cuja Hamiltoniana é dada por $\hat{\mathrm{H}}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$, mostre os efeitos da perturbação $\hat{\mathrm{H}}_1 = -qf\hat{x}$ nos autoestados e autovalores do sistema. Lembre-se que $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ e que $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ e $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

2. Na teoria de perturbações dependente do tempo estamos interessados em sistemas cujos Hamiltonianos são dados por $\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{H}}_0 + \hat{\mathrm{H}}_1(t)$, onde $\hat{\mathrm{H}}_0$ é o Hamiltoniano de um sistema cujas soluções são conhecidas e $\hat{\mathrm{H}}_1(t)$ é uma perturbação que afeta o sistema. Responda:

   (a) Quais são as hipóteses que devem ser satisfeitas para que a teoria de perturbações dependente do tempo seja aplicável? Que tipo de problemas procuramos resolver com essa teoria?

   (b) Dados os autoestados de $\hat{\mathrm{H}}_0$, $|n^{(0)}\rangle$, e os autovalores correspondentes, $\mathrm{E}_n^{(0)}$, onde n é o índice que rotula os autoestados. Mostre como podemos encontrar uma equação para as componentes da solução $|\psi(t)\rangle$ de forma que a evolução temporal devida a $\hat{\mathrm{H}}_0$ fatorada. Ou seja, dado

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\,|n^{(0)}\rangle\,,$$

reescreva as componentes $c_n(t) = d_n(t) s_n^0(t)$ para que a equação de Schrödinger com $\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{H}}_0$ seja resolvida exatamente para $d_n(t)$ constante.

(c) Encontre a equação para $d_n(t)$ em primeira ordem. Escreva a solução para $d_n(t)$ em termos de uma integral temporal.