MECÂNICA QUÂNTICA I – OSCILADOR HARMÔNICO

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

Considere a Hamiltoniana de um oscilador harmônico unidimensional:

$$\mathrm{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

1. Solução Clássica:
   (a) Encontre as equações de movimento para x e p.
   (b) Definindo um vetor no espaço de fase $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$, mostre que duas soluções tem Wronskiano constante,
   $$\mathrm{W}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \frac{1}{m\omega}\left(x_1 p_2 - x_2 p_1\right), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{W}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = 0,$$
   onde $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$.
   (c) Mostre que duas soluções são linearmente independentes se $\mathrm{W}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$.

2. Complexificando o espaço de fase, $\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{v}_1 + i\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_c \\ p_c \end{pmatrix}$, mostre que:
   (a) O Wronskiano de uma solução com sua conjugada é dado por
   $$\mathrm{W}(\boldsymbol{v}_c^*, \boldsymbol{v}_c) = 2i\mathrm{W}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2).$$
   Ou seja, o Wronskiano de uma solução com sua conjugada é puramente imaginário e diferente de zero se as partes reais e imaginárias forem linearmente independentes.
   (b) Mostre que a solução geral pode ser escrita como
   $$\boldsymbol{v}_c(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}\exp(i\omega t) + \mathrm{B}\exp(-i\omega t) \\ im\omega\left[\mathrm{A}\exp(i\omega t) - \mathrm{B}\exp(-i\omega t)\right] \end{pmatrix},$$
   (c) Demonstre que o Wronskiano da solução geral é dado por
   $$\mathrm{W}(\boldsymbol{v}_c^*, \boldsymbol{v}_c) = 2im\omega\left(\mathrm{A}^*\mathrm{A} - \mathrm{B}^*\mathrm{B}\right).$$

Mostre que o Wronskiano é invariante por transformações de fase na solução geral. Discuta o que isso significa.

(d) Note que o Wronskiano é puramente imaginário e tem unidade de ação. Mostre que o produto

$$(\boldsymbol{v}_{c1}, \boldsymbol{v}_{c2}) \equiv \frac{1}{i\hbar}\mathrm{W}(\boldsymbol{v}^*_{c1}, \boldsymbol{v}_{c2}),$$

satisfaz todos os axiomas de um produto interno, exceto a positividade.

3. Solução Quântica: Definindo $\hat{\boldsymbol{v}} \equiv \begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{p}\end{pmatrix}$ e estendendo o produto interno para operadores,

$$(\hat{\boldsymbol{v}}_{c1}, \boldsymbol{v}_{c2}) \equiv \frac{1}{i\hbar}\mathrm{W}(\hat{\boldsymbol{v}}^\dagger_{c1}, \boldsymbol{v}_{c2}),$$

onde $\hat{\boldsymbol{v}}_{c1}$ é um operador par de operadores e $\hat{\boldsymbol{v}}_{c2}$ é uma solução complexa. Mostre que:

(a) Dado o operador

$$\hat{a} \equiv (\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v}_c) = \frac{\hat{x}p_c - \hat{p}x_c}{i\hbar}.$$

Mostre que seu adjunto é dado por

$$\hat{a}^\dagger = -\frac{\mathrm{W}(\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v}^*_c)}{i\hbar} = -\frac{\hat{x}p^*_c - \hat{p}x^*_c}{i\hbar}.$$

Mostre também que o comutador entre $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ é dado por

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = (\boldsymbol{v}_c, \boldsymbol{v}_c) = \frac{2m\omega}{\hbar}\left(\mathrm{A}^*\mathrm{A} - \mathrm{B}^*\mathrm{B}\right).$$

Para impor a comutação canônica, escolhemos $(\boldsymbol{v}_c, \boldsymbol{v}_c) = 1$.

(b) Mostre que o operador $\hat{\mathrm{N}} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ é auto-adjunto e que seu espectro é não negativo.

(c) Dado um auto-estado de $\hat{\mathrm{N}}$, $|n\rangle$, mostre que

$$\hat{\mathrm{N}}\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,,$$

onde n é um número inteiro não negativo.

(d) Mostre que o operador $\hat{a}$ é aniquilador, isto é, $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$. Discuta a escolha de fase.

(e) Mostre que o operador $\hat{a}^\dagger$ é criador, isto é, $\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$.

4. Escolha de representação:

(a) Calcule os seguintes comutadores:

$$[\hat{a}, \hat{x}] = x_c, \qquad [\hat{a}, \hat{p}] = p_c, \qquad [\hat{a}, \hat{x}^n] = nx_c\hat{x}^{n-1}, \qquad [\hat{a}, \hat{p}^n] = np_c\hat{p}^{n-1}.$$

(b) Usando os comutadores acima mostre que

$$[\hat{a}, \hat{\mathrm{H}}] = \frac{p_c \hat{p}}{m} + m\omega^2 x_c \hat{x}.$$

(c) Para termos um operador aniquilador compatível com a Hamiltoniana, precisamos que o comutador $[\hat{a}, \hat{\mathrm{H}}]$ seja proporcional a $\hat{a}$. Em outras palavras, precisamos que

$$[\hat{a}, [\hat{a}, \hat{\mathrm{H}}]] = 0.$$

(d) Use a relação acima para mostrar que

$$|p_c| = m\omega |x_c|, \qquad \theta_p - \theta_x = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

onde $x_c = |x_c| \exp(i\theta_x)$ e $p_c = |p_c| \exp(i\theta_p)$.

(e) Usando a normalização $(\boldsymbol{v}_c, \boldsymbol{v}_c) = 1$, mostre que

$$|x_c|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}, \qquad |p_c|^2 = \frac{m\omega\hbar}{2}.$$

(f) Finalmente, fazendo a escolha de fase $\theta_x = 0$ e $n = 0$, mostre que

$$x_c = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \qquad p_c = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}.$$