

## MECÂNICA QUÂNTICA I – ÁLGEBRA LINEAR

*Sandro Dias Pinto Vitenti*

*Departamento de Física – CCE – UEL*

---

### 1. Espaços vetoriais $\mathbb{V}$ :

- (a) Explique o conceito de independência linear.
- (b) Explique a distinção entre um conjunto de vetores Linearmente Independentes (LI) e uma base.
- (c) Dada uma base de vetores  $|e_i\rangle$  (onde  $i = 1 \dots n$ ), demonstre que qualquer vetor  $|v\rangle$  pode sempre ser expresso como uma combinação linear dos vetores da base. Qual é o nome dado aos coeficientes nesse contexto?
- (d) Mostre que os coeficientes da combinação linear do item anterior são únicos.

### 2. Espaço dual $\mathbb{V}^*$ :

- (a) Dado um espaço vetorial  $\mathbb{V}$ , defina o seu espaço dual  $\mathbb{V}^*$ . Os elementos deste espaço são representados como  $\langle w|$  e são denominados covetores.
- (b) Em um espaço vetorial  $\mathbb{V}$  que possui um produto interno  $(|v\rangle, |u\rangle) \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , como podemos usar essa estrutura para definir elementos de  $\mathbb{V}^*$  a partir de elementos de  $\mathbb{V}$ ?
- (c) Usando o mapa definido no item anterior, temos que  $|v\rangle$  pode ser levado em um covetor  $\langle v|$ . Mostre que um vetor  $a|v\rangle$ , onde  $a \in \mathbb{C}$  é levado pelo mesmo mapa no covetor  $a^*\langle v|$ .
- (d) O mapa do item anterior pode sempre ser definido? Explique e dê exemplos para ilustrar suas explicação.

### 3. Operadores $\text{Op}(\mathbb{V})$ :

- (a) Dado um operador linear  $\hat{\Omega}$ , como definimos o seu adjunto  $\hat{\Omega}^\dagger$ ?
- (b) Dado um operador auto-adjunto  $\hat{\Omega}$ , mostre que seus autovetores tem autovalores reais. Mostre também que autovetores com autovalores diferentes são sempre ortogonais.
- (c) Com base no item anterior, é possível afirmar que os autovetores sempre formam uma base ortogonal?

- (d) Dada uma função suave  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , como podemos usar essa função para definir uma função  $f : \text{Op}(\mathbb{V}) \rightarrow \text{Op}(\mathbb{V})$ ?

4. Espaço de dimensão infinita:

- (a) Em uma base contínua  $|x\rangle$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , chamamos o produto  $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$  de função de onda. Mostre que se o operador de translação  $T_\epsilon$  tem a seguinte ação  $T_\epsilon|x\rangle = |x + \epsilon\rangle$ , então  $\langle x|T_\epsilon|\psi\rangle = \psi(x - \epsilon)$ .
- (b) Mostre que o operador de translação  $T_\epsilon$  satisfaz a relação  $T_{\epsilon_1}T_{\epsilon_2} = T_{\epsilon_1+\epsilon_2}$ .
- (c) Mostre que o adjunto do operador de translação é dado por  $T_\epsilon^\dagger = T_{-\epsilon}$ . Podemos afirmar que o operador de translação é unitário? Justifique sua resposta.
- (d) Use o resultado do item anterior mostre que o gerador  $\hat{K}$ , definido na expressão  $T_\epsilon \approx \mathbb{I} - i\epsilon\hat{K}$ , tem as seguintes componentes:

$$\langle x|\hat{K}|\psi\rangle = -i\frac{\partial}{\partial x}\psi(x).$$