

MECÂNICA QUÂNTICA I – ÁLGEBRA LINEAR

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Espaços vetoriais \mathbb{V} :

- (a) Explique o conceito de independência linear.
- (b) Explique a distinção entre um conjunto de vetores Linearmente Independentes (LI) e uma base.
- (c) Dada uma base de vetores $|e_i\rangle$ (onde $i = 1 \dots n$), demonstre que qualquer vetor $|v\rangle$ pode sempre ser expresso como uma combinação linear única dos vetores da base. Qual é o nome dado aos coeficientes nesse contexto?

2. Espaço dual \mathbb{V}^* :

- (a) Dado um espaço vetorial \mathbb{V} , defina o seu espaço dual \mathbb{V}^* . Os elementos deste espaço são representados como $\langle w|$ e são denominados covetores.
- (b) Em um espaço vetorial \mathbb{V} que possui um produto interno $(|v\rangle, |u\rangle) \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , como podemos usar essa estrutura para definir elementos de \mathbb{V}^* a partir de elementos de \mathbb{V} ?
- (c) Usando o mapa definido no item anterior, temos que $|v\rangle$ pode ser levado em um covetor $\langle v|$. Mostre que um vetor $a|v\rangle$, onde $a \in \mathbb{C}$ é levado pelo mesmo mapa no covetor $a^*\langle v|$.
- (d) O mapa do item anterior pode sempre ser definido? Explique e dê exemplos para ilustrar suas explicações.

3. Operadores $\text{Op}(\mathbb{V})$:

- (a) Dado um operador autoadjunto, mostre que seus autovetores tem autovalores reais. Mostre também que autovetores com autovalores diferentes são sempre ortogonais.
- (b) Com base no item anterior, é possível afirmar que os autovetores sempre formam uma base ortonormal?
- (c) Dada uma função suave $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, como podemos usar essa função para definir uma função $f : \text{Op}(\mathbb{V}) \rightarrow \text{Op}(\mathbb{V})$?

- (d) Em uma base contínua $|x\rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}$, chamamos o produto $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ de função de onda. Mostre que se o operador de translação T_ϵ tem a seguinte ação $T_\epsilon|x\rangle = |x + \epsilon\rangle$, então $\langle x|T_\epsilon|\psi\rangle = \psi(x - \epsilon)$.
- (e) Use o resultado do item anterior mostre que o gerador \hat{K} , definido na expressão $T_\epsilon \approx \mathbb{I} - i\epsilon\hat{K}$, tem a seguinte ação:

$$\langle x|\hat{K}|\psi\rangle = -i\frac{\partial}{\partial x}\psi(x).$$

4. Revisão de Mecânica Clássica:

- (a) Espaço de fase: explique como descrever os estados clássicos, ou seja, quais variáveis são necessárias para especificar completamente o estado de uma partícula física. Por simplicidade se baseie em um sistema de uma partícula em uma dimensão espacial.
- (b) Escreva a segunda lei de Newton no espaço de fase.