Universidade Estadual de Londrina

MECÂNICA QUÂNTICA II – ÁLGEBRA LINEAR

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Considere a operação de dilatação definida por:

$$\mathrm{D}(\lambda)\,|\boldsymbol{x}\rangle = \mathrm{N}(\lambda)\,|\boldsymbol{x}e^{\lambda}\rangle\,, \tag{1}$$

   onde $\boldsymbol{x}$ é o vetor posição, $\mathrm{N}(\lambda)$ é a normalização do novo estado e λ é um parâmetro real. Supondo que $\mathrm{D}(\lambda)$ é um operador unitário (que preserva, por exemplo, $\langle\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2\rangle = \delta^3(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$), calcule a norma $\mathrm{N}(\lambda)$ ignorando qualquer fase constante.

2. Use o resultado da questão acima para mostrar que a ação do operador $\mathrm{D}(\lambda)$ sobre uma função de onda $\psi(\boldsymbol{x})$ é:

$$\mathrm{D}(\lambda)\psi(\boldsymbol{x}) = e^{-3\lambda/2}\psi\left(\boldsymbol{x}e^{-\lambda}\right). \tag{2}$$

3. Mostre explicitamente que se $\psi(\boldsymbol{x})$ é normalizada $e^{-3\lambda/2}\psi\left(\boldsymbol{x}e^{-\lambda}\right)$ também será.

4. Escrevendo o operador de dilatação em termos do gerador $\hat{d}$ como

$$\mathrm{D}(\lambda) = e^{-i\lambda\hat{d}/\hbar}, \tag{3}$$

   mostre que

$$\hat{d} = \frac{\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}}{2}, \tag{4}$$

   onde $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{p}}$ são os operadores vetoriais posição e momento, respectivamente.

5. Calcule o comutador de $\hat{d}$ com $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ e $\hat{\mathbf{L}}$ (sendo o último o operador vetorial contendo os geradores de rotação). Podemos dizer que o operador $\hat{d}$ é escalar ou vetorial? Justifique a sua resposta.