

FÍSICA MATEMÁTICA II – GEOMETRIA DIFERENCIAL

*Sandro Dias Pinto Vitenti**Departamento de Física – CCE – UEL*

1. Seja M uma variedade diferenciável, suponha uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ na variedade, mostre que $F = f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ será suave qualquer que seja a carta $(U, \phi) \subset M$.
2. O círculo unitário pode ser definido como $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, mostre explicitamente que S^1 é uma variedade diferenciável.
Dica: Procure um atlas para a variedade, evidenciando a suavidade dos mapas e suas inversas nas sobreposições das cartas.
3. Sabendo que o vetor tangente em um ponto $p \in M$ é definido como $v_p = [\lambda]$, onde $\lambda : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma curva na variedade.

- (a) Mostre que a multiplicação por escalar de um vetor tangente não depende do sistema de coordenadas escolhido, i.e, qualquer que seja a carta (U, ϕ)

$$rv = [\phi^{-1} \circ (r\phi \circ \lambda)], \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- (b) A operação de soma dos vetores é definido como

$$v_1 + v_2 = [\phi^{-1} \circ (\phi \circ \lambda_1 + \phi \circ \lambda_2)] \quad (2)$$

Prove que o espaço $T_p M$ é um espaço vetorial.

4. Seja o mapa $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, para α fixo

$$h = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

Para um campo vetorial $X = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$, determine o vetor $h_*(X) \in T_{h(x,y)}\mathbb{R}^2$. Sandro n passou campo vetorial posso pedir um vetor tangente em um determinado ponto mas manter a estrutura do problema.

5. Dado um sistema de coordenadas local (U, ϕ) em $p \in M$, podemos definir um conjunto de derivações em p por

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p f = \left. \frac{\partial}{\partial u^\mu} f \circ \phi^{-1} \right|_{\phi(p)} \quad \mu = 1, \dots, \dim(M) \quad (4)$$

(a) Para uma carta (U, ϕ) prove que

$$\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial u^\mu} \Big|_{\phi(p)} \quad (5)$$

Dica: $\phi_* \left(\frac{d}{\partial x^\mu} \Big|_p \right) f = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p f \circ \phi$

(b) Seja uma curva $\lambda : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, assumindo que $c(0) = p \in M$, o vetor velocidade $v_\lambda(t)$ da curva λ é definido como

$$v_\lambda(t) = \frac{d\lambda}{dt}(t) \equiv \lambda_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \in T_{\lambda(t)}M \quad (6)$$

Calcule o vetor velocidade da curva $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\lambda = (t^2, t^3). \quad (7)$$