Universidade Estadual de Londrina

FÍSICA MATEMÁTICA II – DELTA DE DIRAC E FUNÇÕES DE GREEN

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

---

1. Considere a distribuição normal $p_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$, onde $\sigma > 0$ é o desvio padrão.

   (a) Mostre que a distribuição é normalizada, i.e,

   $$\int_{-\infty}^{\infty} p_\sigma(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{1}$$

   (b) Calcule a média e o valor esperado das potências impares de x, i.e,

   $$\left\langle x^{2n+1}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} p_\sigma(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

   (c) Calcule a média e o valor esperado das potências pares de x, i.e,

   $$\left\langle x^{2n}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} p_\sigma(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

   (d) Usando os resultados anteriores, mostre que a integral

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_\sigma(x)\mathrm{d}x = f(0) + \frac{\sigma^2}{2}f''(0) + \frac{\sigma^4}{8}f^{(4)}(0) + \dots.$$

   Onde $'$ denota a derivada em relação a x. Ou seja, mostre que o limite da distribuição normal quando $\sigma \to 0$ é a função delta de Dirac.

2. Podemos construir a inversa da derivada de uma função $f(x)$ onde $x \in (a, b)$ como

$$f(x) = \int_a^x f'(y)\mathrm{d}y, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(y)\mathrm{d}y. \tag{4}$$

onde $f(a) = 0 = f(b)$.

(a) Mostre que podemos reescrever as expressões acima usando a função de Heaviside $\theta(x)$, i.e,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Ou seja, a função de Heaviside é a função de Green para a derivada.

(b) Calcule a integral da função de Heaviside, i.e,

$$G(x) \equiv \int_a^x \theta(y)\mathrm{d}y. \tag{6}$$

e mostre que a integral da função de Heaviside é a função de Green para a o operador derivada segunda:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \int_a^b G(x-y) f(y)\mathrm{d}y = f(x).$$

(c) Mostre também a relação inversa, i.e,

$$f(x) = \int_a^b G(x-y) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} f(y)\mathrm{d}y. \tag{7}$$

(d) Escreva a função de Green em termos da distância $\sigma(x,y) = |x-y|$.

3. No caso de uma dimensão, a função de Green para o operador derivada segunda é proporcional a função distância $\sigma(x,y) = |x-y|$. Em duas dimensões, a função de Green também pode ser escrita em termos da distância

$$\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

onde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$.

(a) Mostre que o Laplaciano em duas dimensões, i.e.,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

atuando sobre $\ln \sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ é zero para todo $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, i.e.,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \ln \sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0.$$

(b) Podemos regularizar a função $\ln \sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ usando o parâmetro $\varepsilon > 0$, i.e,

$$G_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \varepsilon^2}.$$

Mostre que a integral do Laplaciano da função regularizada é um, i.e,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\nabla}^2 G_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^2\boldsymbol{x} = 1.$$

(c) Mostre que a integral do Laplaciano da função regularizada é a função delta de Dirac, i.e,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{\nabla}^2 G_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}^2\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}).$$

4. Repita os passos anteriores para três dimensões, isto é:

(a) Mostre que o Laplaciano em três dimensões, i.e.,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

atuando sobre $1/\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ é zero para todo $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, i.e.,

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \frac{1}{\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} = 0.$$

(b) Regularize a função $1/\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ usando o parâmetro $\varepsilon > 0$, i.e,

$$G_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + \varepsilon^2}}.$$

Mostre que a integral do Laplaciano da função regularizada é um, i.e,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\nabla}^2 G_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = 1.$$

(c) Mostre que a integral do Laplaciano da função regularizada é a função delta de Dirac, i.e,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\nabla}^2 G_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}^3\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}).$$

5. Faça a dedução das identidades de Green para o Laplaciano.

(a) Primeira identidade de Green:

$$\oint_{\partial\Omega} \phi \boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi + \phi\boldsymbol{\nabla}^2\psi\right) \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}, \tag{8}$$

onde Ω é um volume limitado por uma superfície $\partial\Omega$.

(b) Segunda identidade de Green:

$$\oint_{\partial\Omega} (\phi\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\phi) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Omega} \left(\phi\boldsymbol{\nabla}^2\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}^2\phi\right) \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}. \tag{9}$$

6. Use as identidades de Green e a função de Green para o Laplaciano para resolver a equação de Poisson em três dimensões, i.e,

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi(\boldsymbol{x}) = -\rho(\boldsymbol{x}), \tag{10}$$

onde $\rho(\boldsymbol{x})$ é uma função fonte. Discuta as condições de contorno para a solução da equação de Poisson.

7. Escreva as identidades de Green para o operador derivada segunda em uma dimensão. Use a função de Green para o operador derivada segunda para resolver a equação de Poisson em uma dimensão, i.e,

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = -\rho(x), \tag{11}$$

onde $\rho(x)$ é uma função fonte. Discuta as condições de contorno para a solução da equação de Poisson.