Universidade Estadual de Londrina

MECÂNICA QUÂNTICA I – ÁLGEBRA LINEAR

Sandro Dias Pinto Vitenti

Departamento de Física – CCE – UEL

1. Espaços vetoriais $\mathbb{V}$:
   (a) Explique o conceito de independência linear.
   (b) Explique a distinção entre um conjunto de vetores Linearmente Independentes (LI) e uma base.
   (c) Dada uma base de vetores $|e_i\rangle$ (onde $i = 1 \dots n$), demonstre que qualquer vetor $|v\rangle$ pode sempre ser expresso como uma combinação linear dos vetores da base. Qual é o nome dado aos coeficientes nesse contexto?
   (d) Mostre que os coeficientes da combinação linear do item anterior são únicos.

2. Espaço dual $\mathbb{V}^*$:
   (a) Dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$, defina o seu espaço dual $\mathbb{V}^*$. Os elementos deste espaço são representados como $\langle w|$ e são denominados covetores.
   (b) Em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ que possui um produto interno $(|v\rangle, |u\rangle) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, como podemos usar essa estrutura para definir elementos de $\mathbb{V}^*$ a partir de elementos de $\mathbb{V}$?
   (c) Usando o mapa definido no item anterior, temos que $|v\rangle$ pode ser levado em um covetor $\langle v|$. Mostre que um vetor $a|v\rangle$, onde $a \in \mathbb{C}$ é levado pelo mesmo mapa no covetor $a^*\langle v|$.
   (d) O mapa do item anterior pode sempre ser definido? Explique e dê exemplos para ilustrar suas explicação.

3. Operadores Op $(\mathbb{V})$:
   (a) Dado um operador linear $\hat{\Omega}$, como definimos o seu adjunto $\hat{\Omega}^\dagger$?
   (b) Dado um operador auto-adjunto $\hat{\Omega}$, mostre que seus autovetores tem autovalores reais. Mostre também que autovetores com autovalores diferentes são sempre ortogonais.
   (c) Com base no item anterior, é possível afirmar que os autovetores sempre formam uma base ortogonal?

(d) Dada uma função suave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como podemos usar essa função para definir uma função $f : \mathrm{Op}(\mathbb{V}) \to \mathrm{Op}(\mathbb{V})$?

4. Espaço de dimensão infinita:

(a) Em uma base continua $|x\rangle,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, chamamos o produto $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ de função de onda. Mostre que se o operador de translação T_ϵ tem a seguinte ação $T_\epsilon|x\rangle = |x+\epsilon\rangle$, então $\langle x|T_\epsilon|\psi\rangle = \psi(x-\epsilon)$.

(b) Mostre que o operador de translação T_ϵ satisfaz a relação $T_{\epsilon_1}T_{\epsilon_2} = T_{\epsilon_1+\epsilon_2}$.

(c) Mostre que o adjunto do operador de translação é dado por $T_\epsilon^\dagger = T_{-\epsilon}$. Podemos afirmar que o operador de translação é unitário? Justifique sua resposta.

(d) Use o resultado do item anterior mostre que o gerador $\hat{K}$, definido na expressão $T_\epsilon \approx \mathbb{I} - i\epsilon\hat{K}$, tem as seguintes componentes:

$$\langle x|\hat{K}|\psi\rangle = -i\frac{\partial}{\partial x}\psi(x).$$