Matemática para programação competitiva

A matemática desempenha um papel importante na programação competitiva, e não é possível se tornar um programador competitivo de sucesso sem ter boas habilidades matemáticas. Esta seção discute alguns conceitos e fórmulas matemáticas importantes que são necessárias.

Fórmula de soma

$$\sum_{x=1}^{n} x^k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

Onde k é um número inteiro positivo, possui uma fórmula de forma fechada que é um polinômio de grau k + 1. Por exemplo

$$\sum_{x=1}^{n} x = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

E

$$\sum_{x=1}^{n} x = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1) \cdot 2(n+1)}{6}$$

Uma progressão aritmética é uma sequência de números em que a diferença entre dois números consecutivos é constante. Por exemplo,

$$3, 7, 11, 15$$

é uma progressão aritmética com constante 4. A soma de uma progressão aritmética pode ser calculado usando a fórmula seguinte:

$$\underbrace{a + \ldots + b}_{n\,números} = \frac{n(a+b)}{2}$$

onde “a” é o primeiro número, “b” é o último número e “n” é a quantidade de números. Por exemplo,

$$3 + 7 + 11 + 15 = \frac{4(3+15)}{2} = 36.$$

A fórmula é baseada no fato de que a soma consiste em n números e na o valor de cada número é $\frac{(a+b)}{2}$ em média. Uma progressão geométrica é uma sequência de números em que a razão entre quaisquer dois números consecutivos são constantes. Por exemplo,

$$3,6,12,24$$

É uma progressão geométrica com constante 2. A soma de uma progressão geométrica pode ser calculado usando a fórmula.

$$a+ak+ak^2+...+\frac{bk-a}{k-1}$$

Onde “a” é o primeiro número, “b” é o último número e a razão entre consecutivos números é “k”. Por exemplo,

$$3+6+12+24=\frac{24\cdot 2-3}{2-1}=45.$$

Essa fórmula pode ser derivada da seguinte maneira:

$$S=a+ak+ak^2+...+b.$$

Ao multiplicar os dois lados por k, obtemos:

$$kS=a+ak^2+ak^3+...+bk.$$

E resolvendo a equação:

$$kS-S=bk-a$$

produz a fórmula.

Um caso especial de uma soma de uma progressão geométrica é a fórmula:

$$1+2+4+8+...+2^{n-1}=2^n-1.$$

Soma harmônica é uma soma da forma:

$$\sum_{x=1}^{n} x/1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}.$$

Um limite superior para uma soma harmônica é log2 (n) + 1. Ou seja, podemos modificar cada termo 1 / k para que k se torne a potência mais próxima de dois que não exceda k. Por exemplo, quando n = 6, podemos estimar a soma da seguinte maneira:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.$$

Esse limite superior consiste em log2 (n) + 1 partes (1, $\frac{2\cdot 1}{2}$, $\frac{4\cdot 1}{4}$ etc.) e o valor de cada parte é no máximo 1.

Teoria dos conjuntos

Um conjunto é uma coleção de elementos. Por exemplo, o conjunto:

$$X=\{2,4,7\}$$

Contém os elementos 2, 4 e 7. O símbolo $\emptyset$; indica um conjunto vazio e $|S|$ indica o tamanho de um conjunto S, isto é, o número de elementos no conjunto. Por exemplo, no acima do conjunto, $|X|=3$.

Se um conjunto S contém um elemento x, escrevemos $X \in S$ e, caso contrário, escrevemos $X \notin S$. Por exemplo, no conjunto acima:

$$4 \in X \quad \text{e} \quad 5 \notin X$$

Novos conjuntos podem ser construídos usando operações de conjunto: