Úvod do informatiky

přednáška druhá

Miroslav Kolařík

Zpracováno dle učebního textu prof. Bělohlávka:
Úvod do informatiky, KMI UPOL, Olomouc 2008.

Obsah

Obsah

Definice

Formule φ, ψ jsou **sémanticky ekvivalentní**, pokud $\| \varphi \|_e = \| \psi \|_e$ pro každé ohodnocení e.

Poznámka: Formule φ, ψ jsou sémanticky ekvivalentní, právě když $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautologie. Tedy sémanticky ekvivalentní formule od sebe nelze rozlišit pravdivostí.

Poznámka: Pravdivost formule φ při daném pravdivostním ohodnocení závisí pouze na ohodnocení výrokových symbolů vyskytujících se ve formuli φ.

Poznámka: Některé tautologie povyšujeme na tzv. **zákony VL**.

Definice

Formule φ, ψ jsou **sémanticky ekvivalentní**, pokud $\| \varphi \|_e = \| \psi \|_e$ pro každé ohodnocení e.

Poznámka: Formule φ, ψ jsou sémanticky ekvivalentní, právě když $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautologie. Tedy sémanticky ekvivalentní formule od sebe nelze rozlišit pravdivostí.

Poznámka: Pravdivost formule φ při daném pravdivostním ohodnocení závisí pouze na ohodnocení výrokových symbolů vyskytujících se ve formuli φ.

Poznámka: Některé tautologie povyšujeme na tzv. **zákony VL**.

Definice

Formule φ, ψ jsou **sémanticky ekvivalentní**, pokud $\| \varphi \|_e = \| \psi \|_e$ pro každé ohodnocení e.

Poznámka: Formule φ, ψ jsou sémanticky ekvivalentní, právě když $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautologie. Tedy sémanticky ekvivalentní formule od sebe nelze rozlišit pravdivostí.

Poznámka: Pravdivost formule φ při daném pravdivostním ohodnocení závisí pouze na ohodnocení výrokových symbolů vyskytujících se ve formuli φ.

Poznámka: Některé tautologie povyšujeme na tzv. **zákony VL**.

Zákony VL

1. $a \vee \neg a$ (zákon vyloučeného třetího)
2. $\neg(a \wedge \neg a)$ (zákon sporu)
3. $\neg\neg a \Leftrightarrow a$ (zákon dvojí negace)
4. $(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a)$ (komutativní zákon pro $\wedge$)
5. $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$ (komutativní zákon pro $\vee$)
6. $(a \wedge (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \wedge c)$ (asociativní zákon pro $\wedge$)
7. $(a \vee (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \vee c)$ (asociativní zákon pro $\vee$)
8. $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$ (distributivní zákon)
9. $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$ (distributivní zákon)
10. $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$ (de Morganův zákon)
11. $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$ (de Morganův zákon)
12. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$ (náhrada implikace)
13. $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$ (náhrada negace implikace)
14. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ (zákon kontrapozice)
15. $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$ (náhrada ekvivalence)
16. $((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ (tranzitivita implikace)

Zákony VL

1. $a \vee \neg a$ (zákon vyloučeného třetího)
2. $\neg(a \wedge \neg a)$ (zákon sporu)
3. $\neg\neg a \Leftrightarrow a$ (zákon dvojí negace)
4. $(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a)$ (komutativní zákon pro $\wedge$)
5. $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$ (komutativní zákon pro $\vee$)
6. $(a \wedge (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \wedge c)$ (asociativní zákon pro $\wedge$)
7. $(a \vee (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \vee c)$ (asociativní zákon pro $\vee$)
8. $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$ (distributivní zákon)
9. $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$ (distributivní zákon)
10. $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$ (de Morganův zákon)
11. $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$ (de Morganův zákon)
12. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$ (náhrada implikace)
13. $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$ (náhrada negace implikace)
14. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ (zákon kontrapozice)
15. $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$ (náhrada ekvivalence)
16. $((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ (tranzitivita implikace)

Zákony VL

1. $a \vee \neg a$ (zákon vyloučeného třetího)
2. $\neg(a \wedge \neg a)$ (zákon sporu)
3. $\neg\neg a \Leftrightarrow a$ (zákon dvojí negace)
4. $(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a)$ (komutativní zákon pro $\wedge$)
5. $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$ (komutativní zákon pro $\vee$)
6. $(a \wedge (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \wedge c)$ (asociativní zákon pro $\wedge$)
7. $(a \vee (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \vee c)$ (asociativní zákon pro $\vee$)
8. $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$ (distributivní zákon)
9. $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$ (distributivní zákon)
10. $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$ (de Morganův zákon)
11. $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$ (de Morganův zákon)
12. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$ (náhrada implikace)
13. $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$ (náhrada negace implikace)
14. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ (zákon kontrapozice)
15. $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$ (náhrada ekvivalence)
16. $((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ (tranzitivita implikace)

Zákony VL

1. $a \vee \neg a$ (zákon vyloučeného třetího)
2. $\neg(a \wedge \neg a)$ (zákon sporu)
3. $\neg\neg a \Leftrightarrow a$ (zákon dvojí negace)
4. $(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a)$ (komutativní zákon pro $\wedge$)
5. $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$ (komutativní zákon pro $\vee$)
6. $(a \wedge (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \wedge c)$ (asociativní zákon pro $\wedge$)
7. $(a \vee (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \vee c)$ (asociativní zákon pro $\vee$)
8. $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$ (distributivní zákon)
9. $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$ (distributivní zákon)
10. $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$ (de Morganův zákon)
11. $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$ (de Morganův zákon)
12. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$ (náhrada implikace)
13. $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$ (náhrada negace implikace)
14. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ (zákon kontrapozice)
15. $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$ (náhrada ekvivalence)
16. $((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ (tranzitivita implikace)

Zákony VL

1. $a \vee \neg a$ (zákon vyloučeného třetího)
2. $\neg(a \wedge \neg a)$ (zákon sporu)
3. $\neg\neg a \Leftrightarrow a$ (zákon dvojí negace)
4. $(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a)$ (komutativní zákon pro $\wedge$)
5. $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$ (komutativní zákon pro $\vee$)
6. $(a \wedge (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \wedge c)$ (asociativní zákon pro $\wedge$)
7. $(a \vee (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \vee c)$ (asociativní zákon pro $\vee$)
8. $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$ (distributivní zákon)
9. $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$ (distributivní zákon)
10. $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$ (de Morganův zákon)
11. $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$ (de Morganův zákon)
12. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$ (náhrada implikace)
13. $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$ (náhrada negace implikace)
14. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ (zákon kontrapozice)
15. $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$ (náhrada ekvivalence)
16. $((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ (tranzitivita implikace)

Zákony VL

1. $a \vee \neg a$ (zákon vyloučeného třetího)
2. $\neg(a \wedge \neg a)$ (zákon sporu)
3. $\neg\neg a \Leftrightarrow a$ (zákon dvojí negace)
4. $(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a)$ (komutativní zákon pro $\wedge$)
5. $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$ (komutativní zákon pro $\vee$)
6. $(a \wedge (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \wedge c)$ (asociativní zákon pro $\wedge$)
7. $(a \vee (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \vee c)$ (asociativní zákon pro $\vee$)
8. $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$ (distributivní zákon)
9. $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$ (distributivní zákon)
10. $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$ (de Morganův zákon)
11. $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$ (de Morganův zákon)
12. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$ (náhrada implikace)
13. $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$ (náhrada negace implikace)
14. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ (zákon kontrapozice)
15. $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$ (náhrada ekvivalence)
16. $((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ (tranzitivita implikace)

Zákony VL

1. $a \vee \neg a$ (zákon vyloučeného třetího)
2. $\neg(a \wedge \neg a)$ (zákon sporu)
3. $\neg\neg a \Leftrightarrow a$ (zákon dvojí negace)
4. $(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a)$ (komutativní zákon pro $\wedge$)
5. $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$ (komutativní zákon pro $\vee$)
6. $(a \wedge (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \wedge c)$ (asociativní zákon pro $\wedge$)
7. $(a \vee (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \vee c)$ (asociativní zákon pro $\vee$)
8. $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$ (distributivní zákon)
9. $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$ (distributivní zákon)
10. $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$ (de Morganův zákon)
11. $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$ (de Morganův zákon)
12. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$ (náhrada implikace)
13. $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$ (náhrada negace implikace)
14. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ (zákon kontrapozice)
15. $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$ (náhrada ekvivalence)
16. $((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ (tranzitivita implikace)

Je užitečné si uvědomit ještě další tautologie

a) $(a \wedge a) \Leftrightarrow a$, $(a \vee a) \Leftrightarrow a$ (idempotentnost $\vee, \wedge$)
b) $(a \wedge 1) \Leftrightarrow a$, $a \wedge 0 \Leftrightarrow 0$, $(a \vee 1) \Leftrightarrow 1$, $(a \vee 0) \Leftrightarrow a$
c) $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$
d) $a \Rightarrow (b \vee a)$
e) $(a \wedge b) \Rightarrow a$
f) $(1 \Rightarrow a) \Leftrightarrow a$, $(a \Rightarrow 1) \Leftrightarrow 1$, $(a \Rightarrow 0) \Leftrightarrow \neg a$.

Ve výrokovém kalkulu je obvyklé uvažovat pouze dva základní symboly logických spojek $\neg, \Rightarrow$ a nikoli pět $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, jak jsme učinili my. Proč?

- Zaprvé zjednodušíme důkazy.
- Za druhé konjunkci, disjunkci a ekvivalenci je možné vyjádřit pouze pomocí negace a implikace – v tomto smyslu jsou i symboly spojek nadbytečné.

Vskutku, formule $p \vee q$, $p \wedge q$ a $p \Leftrightarrow q$ (v tomto pořadí) jsou sémanticky ekvivalentní formulím $\neg p \Rightarrow q$, $\neg(p \Rightarrow \neg q)$, $\neg((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p)) = \varphi$, o čemž se můžeme snadno přesvědčit tabelací:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg(p \Rightarrow \neg q)$	φ
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1

Ve výrokovém kalkulu je obvyklé uvažovat pouze dva základní symboly logických spojek $\neg, \Rightarrow$ a nikoli pět $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, jak jsme učinili my. Proč?

- Zaprvé zjednodušíme důkazy.
- Za druhé konjunkci, disjunkci a ekvivalenci je možné vyjádřit pouze pomocí negace a implikace – v tomto smyslu jsou i symboly spojek nadbytečné.

Vskutku, formule $p \vee q$, $p \wedge q$ a $p \Leftrightarrow q$ (v tomto pořadí) jsou sémanticky ekvivalentní formulím $\neg p \Rightarrow q$, $\neg(p \Rightarrow \neg q)$, $\neg((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p)) = \varphi$, o čemž se můžeme snadno přesvědčit tabelací:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg(p \Rightarrow \neg q)$	φ
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1

Tedy

$$\| \neg p \Rightarrow q \|_e = \| p \vee q \|_e,$$
$$\| \neg(p \Rightarrow \neg q) \|_e = \| p \wedge q \|_e,$$
$$\| \neg((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p)) \|_e = \| p \Leftrightarrow q \|_e$$

při každém ohodnocení e.

Poznamenejme ještě, že pokud bychom v jazyku VL měli pouze symboly spojek $\neg, \Rightarrow$, pak $\varphi \vee \psi$ již není formule takového jazyka, ale můžeme ji chápat jako zkratku za formuli $\neg\varphi \Rightarrow \psi$.

Sémantické vyplývání

VL má svou **syntaxi** a **sémantiku**. Syntaxe VL definuje pojmy jako je jazyk a formule, ale formulemi (i ostatními syntaktickými pojmy) se zabývá čistě z pohledu jejich tvaru. Sémantika VL zavádí pojem pravd. ohodnocení a pravdivost formule při daném ohodnocení. Sémantika přiřazuje význam syntaktickým pojmům.

Pojem vyplývání má v logice ústřední význam (zopakujme jej):

Definice

Mějme formule $\psi_1, \ldots, \psi_n$ $(n \geq 0)$. Formule φ **sémanticky plyne** z formulí $\psi_1, \ldots, \psi_n$ (značíme $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$), jestliže $\| \varphi \|_e = 1$ pro každé ohodnocení e takové, že $\| \psi_1 \|_e = 1, \ldots, \| \psi_n \|_e = 1$.

Poznámka: Formule $\psi_1, \ldots, \psi_n$ z předchozí definice někdy nazýváme **předpoklady**, formuli φ **sémantický důsledek** formulí $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

VL má svou **syntaxi** a **sémantiku**. Syntaxe VL definuje pojmy jako je jazyk a formule, ale formulemi (i ostatními syntaktickými pojmy) se zabývá čistě z pohledu jejich tvaru. Sémantika VL zavádí pojem pravd. ohodnocení a pravdivost formule při daném ohodnocení. Sémantika přiřazuje význam syntaktickým pojmům.

Pojem vyplývání má v logice ústřední význam (zopakujme jej):

Definice

Mějme formule $\psi_1, \ldots, \psi_n$ $(n \geq 0)$. Formule φ **sémanticky plyne** z formulí $\psi_1, \ldots, \psi_n$ (značíme $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$), jestliže $\| \varphi \|_e = 1$ pro každé ohodnocení e takové, že $\| \psi_1 \|_e = 1, \ldots, \| \psi_n \|_e = 1$.

Poznámka: Formule $\psi_1, \ldots, \psi_n$ z předchozí definice někdy nazýváme **předpoklady**, formuli φ **sémantický důsledek** formulí $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

Sémantické vyplývání

VL má svou **syntaxi** a **sémantiku**. Syntaxe VL definuje pojmy jako je jazyk a formule, ale formulemi (i ostatními syntaktickými pojmy) se zabývá čistě z pohledu jejich tvaru. Sémantika VL zavádí pojem pravd. ohodnocení a pravdivost formule při daném ohodnocení. Sémantika přiřazuje význam syntaktickým pojmům.

Pojem vyplývání má v logice ústřední význam (zopakujme jej):

Definice

Mějme formule $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ($n \geq 0$). Formule φ **sémanticky plyne** z formulí $\psi_1, \ldots, \psi_n$ (značíme $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$), jestliže $\| \varphi \|_e = 1$ pro každé ohodnocení e takové, že $\| \psi_1 \|_e = 1, \ldots, \| \psi_n \|_e = 1$.

Poznámka: Formule $\psi_1, \ldots, \psi_n$ z předchozí definice někdy nazýváme **předpoklady**, formuli φ **sémantický důsledek** formulí $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

Sémantická podoba věty o dedukci I

Věta

$\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$, právě když $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$.

Důkaz:

" $\Rightarrow$: "

Nejprve předpokládejme $\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$ a dokažme $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$. Stačí ověřit, že pro každé ohodnocení e, při kterém jsou všechny formule z $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi$ pravdivé, máme $\| \psi \|_e = 1$. Jsou-li ale $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi$ při ohodnocení e pravdivé, pak dostáváme $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 1$ dle předpokladu. Rovněž platí $\| \varphi \|_e = 1$. To jest $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = \| \varphi \|_e \rightarrow \| \psi \|_e = 1 \rightarrow \| \psi \|_e = 1$. Z vlastností $\rightarrow$ pak plyne, že $\| \psi \|_e = 1$. To jest $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$.

" $\Leftarrow$: " ...

Sémantická podoba věty o dedukci I

Věta

$\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$, právě když $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$.

Důkaz:

" $\Rightarrow$: "

Nejprve předpokládejme $\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$ a dokažme $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$. Stačí ověřit, že pro každé ohodnocení e, při kterém jsou všechny formule z $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi$ pravdivé, máme $\| \psi \|_e = 1$. Jsou-li ale $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi$ při ohodnocení e pravdivé, pak dostáváme $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 1$ dle předpokladu. Rovněž platí $\| \varphi \|_e = 1$. To jest $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = \| \varphi \|_e \rightarrow \| \psi \|_e = 1 \rightarrow \| \psi \|_e = 1$. Z vlastností $\rightarrow$ pak plyne, že $\| \psi \|_e = 1$. To jest $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$.

" $\Leftarrow$: " ...

Sémantická podoba věty o dedukci II

Věta

$\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$, právě když $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$.

Důkaz:

" $\Rightarrow$: " ...

" $\Leftarrow$: "

Naopak předpokládejme $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$. Stačí ověřit, že pro každé ohodnocení e, při kterém jsou všechny formule $\chi_1, \ldots \chi_n$ pravdivé, je $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 1$. Mohou nastat dva případy:

1) $\| \varphi \|_e = 0$ a tím pádem $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 0 \rightarrow \| \psi \|_e = 1$.
2) $\| \varphi \|_e = 1$, to jest při ohodnocení e jsou pravdivé všechny formule z $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi$ a tedy $\| \psi \|_e = 1$ dle předpokladu. Odtud $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 1 \rightarrow 1 = 1$, v důsledku čehož $\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$.

Sémantická podoba věty o dedukci II

Věta

$\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$, právě když $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$.

Důkaz:

" $\Rightarrow$: " ...

" $\Leftarrow$: "

Naopak předpokládejme $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$. Stačí ověřit, že pro každé ohodnocení e, při kterém jsou všechny formule $\chi_1, \ldots \chi_n$ pravdivé, je $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 1$. Mohou nastat dva případy:

1) $\| \varphi \|_e = 0$ a tím pádem $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 0 \rightarrow \| \psi \|_e = 1$.
2) $\| \varphi \|_e = 1$, to jest při ohodnocení e jsou pravdivé všechny formule z $\chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi$ a tedy $\| \psi \|_e = 1$ dle předpokladu. Odtud $\| \varphi \Rightarrow \psi \|_e = 1 \rightarrow 1 = 1$, v důsledku čehož $\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \Rightarrow \psi$.

Obsah

Booleovská funkce s n argumenty (někdy ***n*-ární booleovská funkce**) je libovolné zobrazení, které každé uspořádané n-tici hodnot 0 nebo 1 přiřadí hodnotu 0 nebo 1. Každou booleovskou funkci f s n argumenty lze zapsat v tabulce podobně jako u tabulkové metody. Předpokládejme, že argumenty funkce f označíme $x_1, \ldots, x_n$, pak píšeme také $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Příklad

Všechny booleovské funkce jedné proměnné:

x_1	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Vidíme, že f_3 je pravdivostní funkce spojky negace, tj. $f_3(0) = 1$ a $f_3(1) = 0$.

Příklad

Všechny booleovské funkce dvou proměnných:

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

x_1	x_2	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Vidíme, že f_2 je pravdivostní funkce spojky disjunkce, f_5 je pravdivostní funkce spojky implikace, f_7 je pravdivostní funkce spojky ekvivalence a f_8 je pravdivostní funkce spojky konjunkce.

Tedy pravdivostní funkce každé ze spojek, se kterými jsme se setkali, jsou booleovské funkce.

Příklad

Všechny booleovské funkce dvou proměnných:

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

x_1	x_2	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Vidíme, že f_2 je pravdivostní funkce spojky disjunkce, f_5 je pravdivostní funkce spojky implikace, f_7 je pravdivostní funkce spojky ekvivalence a f_8 je pravdivostní funkce spojky konjunkce.

Tedy pravdivostní funkce každé ze spojek, se kterými jsme se setkali, jsou booleovské funkce.

Pravdivostní funkce spojek $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ jsou booleovské funkce dvou argumentů, pravdivostní funkce spojky $\neg$ je booleovská funkce jednoho argumentu.

Tvrzení: Existuje $2^{(2^n)}$ booleovských funkcí s n argumenty.

Je jasné, že každá formule φ obsahující výrokové symboly $p_1, \ldots, p_n$ indukuje booleovskou funkci n argumentů. Je to právě funkce, jejíž tabulku získáme vytvořením tabulky pro formuli φ. Zajímavé ale je, že platí také opačné tvrzení: Ke každé booleovské funkci f s n argumenty existuje formule φ_f taková, že tato formule indukuje právě funkci f. Platí dokonce, že formule φ_f může obsahovat pouze spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Pravdivostní funkce spojek $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ jsou booleovské funkce dvou argumentů, pravdivostní funkce spojky $\neg$ je booleovská funkce jednoho argumentu.

Tvrzení: Existuje $2^{(2^n)}$ booleovských funkcí s n argumenty.

Je jasné, že každá formule φ obsahující výrokové symboly $p_1, \ldots, p_n$ indukuje booleovskou funkci n argumentů. Je to právě funkce, jejíž tabulku získáme vytvořením tabulky pro formuli φ. Zajímavé ale je, že platí také opačné tvrzení: Ke každé booleovské funkci f s n argumenty existuje formule φ_f taková, že tato formule indukuje právě funkci f. Platí dokonce, že formule φ_f může obsahovat pouze spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Definice

Nechť V je množina výrokových symbolů. Pak

- **literál** nad V je libovolný výrokový symbol z V nebo jeho negace
- **úplná elementární konjunkce** nad V je libovolná konjunkce literálů, ve které se každý výrokový symbol z V vyskytuje právě v jednom literálu
- **úplná elementární disjunkce** nad V je libovolná disjunkce literálů, ve které se každý výrokový symbol z V vyskytuje právě v jednom literálu
- **úplná konjunktivní normální forma** nad V je konjukce úplných elementárních disjunkcí nad V
- **úplná disjunktivní normální forma** nad V je disjunkce úplných elementárních konjunkcí nad V.

Definice

Nechť V je množina výrokových symbolů. Pak

- **literál** nad V je libovolný výrokový symbol z V nebo jeho negace
- **úplná elementární konjunkce** nad V je libovolná konjunkce literálů, ve které se každý výrokový symbol z V vyskytuje právě v jednom literálu
- **úplná elementární disjunkce** nad V je libovolná disjunkce literálů, ve které se každý výrokový symbol z V vyskytuje právě v jednom literálu
- **úplná konjunktivní normální forma** nad V je konjukce úplných elementárních disjunkcí nad V
- **úplná disjunktivní normální forma** nad V je disjunkce úplných elementárních konjunkcí nad V.

Definice

Nechť V je množina výrokových symbolů. Pak

- **literál** nad V je libovolný výrokový symbol z V nebo jeho negace
- **úplná elementární konjunkce** nad V je libovolná konjunkce literálů, ve které se každý výrokový symbol z V vyskytuje právě v jednom literálu
- **úplná elementární disjunkce** nad V je libovolná disjunkce literálů, ve které se každý výrokový symbol z V vyskytuje právě v jednom literálu
- **úplná konjunktivní normální forma** nad V je konjukce úplných elementárních disjunkcí nad V
- **úplná disjunktivní normální forma** nad V je disjunkce úplných elementárních konjunkcí nad V.

Definice

Nechť V je množina výrokových symbolů. Pak

- **literál** nad V je libovolný výrokový symbol z V nebo jeho negace
- **úplná elementární konjunkce** nad V je libovolná konjunkce literálů, ve které se každý výrokový symbol z V vyskytuje právě v jednom literálu
- **úplná elementární disjunkce** nad V je libovolná disjunkce literálů, ve které se každý výrokový symbol z V vyskytuje právě v jednom literálu
- **úplná konjunktivní normální forma** nad V je konjukce úplných elementárních disjunkcí nad V
- **úplná disjunktivní normální forma** nad V je disjunkce úplných elementárních konjunkcí nad V.

Definice

Nechť V je množina výrokových symbolů. Pak

- **literál** nad V je libovolný výrokový symbol z V nebo jeho negace
- **úplná elementární konjunkce** nad V je libovolná konjunkce literálů, ve které se každý výrokový symbol z V vyskytuje právě v jednom literálu
- **úplná elementární disjunkce** nad V je libovolná disjunkce literálů, ve které se každý výrokový symbol z V vyskytuje právě v jednom literálu
- **úplná konjunktivní normální forma** nad V je konjukce úplných elementárních disjunkcí nad V
- **úplná disjunktivní normální forma** nad V je disjunkce úplných elementárních konjunkcí nad V.

Poznámka: Tabulkovou metodou se lze snadno přesvědčit, že např. formule $p \wedge (q \wedge r)$ a $(p \wedge q) \wedge r$ jsou sémanticky ekvivalentní, t.j. u formulí ve tvaru konjunkce nezáleží na uzávorkování. To samé platí pokud bychom nahradili konjunkci disjunkcí. Píšeme tedy stručně $p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ místo $p_1 \wedge (p_2(\ldots(p_{n-1} \wedge p_n)\ldots))$. Analogicky pro disjunkci.

Věta

Ke každé formuli VL, která není tautologií existuje s ní sémanticky ekvivalentní formule, která je ve tvaru úplné konjunktivní normální formy.

Věta

Ke každé formuli VL, která není kontradikcí existuje s ní sémanticky ekvivalentní formule, která je ve tvaru úplné disjunktivní normální formy.

Poznámka: Tabulkovou metodou se lze snadno přesvědčit, že např. formule $p \wedge (q \wedge r)$ a $(p \wedge q) \wedge r$ jsou sémanticky ekvivalentní, t.j. u formulí ve tvaru konjunkce nezáleží na uzávorkování. To samé platí pokud bychom nahradili konjunkci disjunkcí. Píšeme tedy stručně $p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ místo $p_1 \wedge (p_2(\ldots(p_{n-1} \wedge p_n)\ldots))$. Analogicky pro disjunkci.

Věta

Ke každé formuli VL, která není tautologií existuje s ní sémanticky ekvivalentní formule, která je ve tvaru úplné konjunktivní normální formy.

Věta

Ke každé formuli VL, která není kontradikcí existuje s ní sémanticky ekvivalentní formule, která je ve tvaru úplné disjunktivní normální formy.

Konstrukce ÚDNF pro formuli φ s výr. symboly $p_1, \ldots, p_n$:

1) pro $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ uvažme tabulku pravdivostních hodnot
2) pro řádky s hodnotou 1 (ve sloupci φ) sestrojme ÚEK z p_i (pro 1) a $\neg p_i$ (pro 0)
3) výsledná ÚDNF je disjunkcí takových ÚEK.

Pro ÚKNF postupujeme duálně:

Konstrukce ÚKNF pro formuli φ s výr. symboly $p_1, \ldots, p_n$:

1) pro $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ uvažme tabulku pravdivostních hodnot
2) pro řádky s hodnotou 0 (ve sloupci φ) sestrojme ÚED z p_i (pro 0) a $\neg p_i$ (pro 1)
3) výsledná ÚKNF je konjunkcí takových ÚED.

Konstrukce ÚDNF pro formuli φ s výr. symboly $p_1, \ldots, p_n$:

1) pro $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ uvažme tabulku pravdivostních hodnot
2) pro řádky s hodnotou 1 (ve sloupci φ) sestrojme ÚEK z p_i (pro 1) a $\neg p_i$ (pro 0)
3) výsledná ÚDNF je disjunkcí takových ÚEK.

Pro ÚKNF postupujeme duálně:

Konstrukce ÚKNF pro formuli φ s výr. symboly $p_1, \ldots, p_n$:

1) pro $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ uvažme tabulku pravdivostních hodnot
2) pro řádky s hodnotou 0 (ve sloupci φ) sestrojme ÚED z p_i (pro 0) a $\neg p_i$ (pro 1)
3) výsledná ÚKNF je konjunkcí takových ÚED.

Příklad

Sestrojte ÚDNF a ÚKNF k formuli φ: $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)]$

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow r$	φ	ÚEK	ÚED
1	1	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$	
1	1	0	1	0	0		$\neg p \vee \neg q \vee r$
1	0	1	0	1	0		$\neg p \vee q \vee \neg r$
1	0	0	0	1	0		$\neg p \vee q \vee r$
0	1	1	0	1	0		$p \vee \neg q \vee \neg r$
0	1	0	0	0	0		$p \vee \neg q \vee r$
0	0	1	1	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	
0	0	0	1	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	

Tedy ÚDNF je $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$, ÚKNF je $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$.

Příklad

Sestrojte ÚDNF a ÚKNF k formuli φ: $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)]$

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow r$	φ	ÚEK	ÚED
1	1	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$	
1	1	0	1	0	0		$\neg p \vee \neg q \vee r$
1	0	1	0	1	0		$\neg p \vee q \vee \neg r$
1	0	0	0	1	0		$\neg p \vee q \vee r$
0	1	1	0	1	0		$p \vee \neg q \vee \neg r$
0	1	0	0	0	0		$p \vee \neg q \vee r$
0	0	1	1	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	
0	0	0	1	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	

Tedy ÚDNF je $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$,
ÚKNF je $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$.

Obsah

Množina booleovských funkcí $\{f_1, \dots, f_k\}$ je **funkčně úplná**, pokud každou booleovskou funkci $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ lze vyjádřit jako složení některých funkcí z $\{f_1, \dots, f_k\}$.
Řekneme, že množina výrokových spojek je **úplná** (tvoří **úplný systém spojek**), jestliže je funkčně úplná množina jim odpovídajících booleovských funkcí.
Každý úplný minimální systém spojek VL nazveme **bází**.

Tvrzení

$\{\neg, \curlyvee, \curlywedge\}$ tvoří úplný systém spojek VL.

Důkaz: Platnost plyne z tvrzení o ÚDNF (ÚKNF).

Z de Morganových zákonů je zřejmé, že systém $\{\neg, \curlyvee, \curlywedge\}$ není bází. Jednoduše se dá ukázat, že existují dvouprvkové báze $\{\neg, \curlyvee\}$, $\{\neg, \curlywedge\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$.

Otázka: Existují jednoprvkové báze VL?

Speciální význam mají **Piercova** (**Nicodova**) **spojka** (význam: "ani ..., ani ..."; označujeme ji symbolem $\Downarrow$) a **Shefferova spojka** (význam: "pokud ..., pak neplatí ..."; označujeme ji symbolem $\Uparrow$), které samy o sobě tvoří úplný systém spojek. Obě spojky jsou interpretovány následujícími pravdivostními funkcemi:

$\downarrow$	0	1
0	1	0
1	0	0

$\uparrow$	0	1
0	1	1
1	1	0

Tvrzení: Existují pouze dvě jednoprvkové báze. Tvoří je spojky Sheffer $\{\uparrow\}$ a Nicod $\{\downarrow\}$ (též tzv. Piercova spojka). (Tedy pomocí Sheffera (resp. Nicoda) lze nahradit všechny ostatní spojky VL.)

K důkazu: Pomocí $\Uparrow$ (resp. $\Downarrow$) lze vyjádřit $\neg, \wedge, \vee$:
Zřejmě

$$(a \Uparrow b) \Leftrightarrow \neg(a \wedge b).$$

Odtud:

1) $\neg a \Leftrightarrow \neg(a \wedge a) \Leftrightarrow (a \Uparrow a)$
2) $(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg(a \Uparrow b) \Leftrightarrow ((a \Uparrow b) \Uparrow (a \Uparrow b))$
3) $(a \vee b) \Leftrightarrow \neg\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg(\neg a \wedge \neg b) \Leftrightarrow (\neg a \Uparrow \neg b) \Leftrightarrow ((a \Uparrow a) \Uparrow (b \Uparrow b))$.

Podobně pro $\Downarrow$.