Úvod do informatiky

přednáška pátá

Miroslav Kolařík

Zpracováno dle učebního textu R. Bělohlávka:
Úvod do informatiky, KMI UPOL, Olomouc 2008

a dle učebního textu R. Bělohlávka a V. Vychodila:
Diskrétní matematika pro informatiky II, Olomouc 2006.

Obsah

Obsah

Funkce je matematickým protějškem běžně používaného pojmu přiřazení.

Definice

Relace R mezi X a Y se nazývá **funkce (zobrazení)** množiny X do množiny Y, právě když pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ tak, že $\langle x, y \rangle \in R$.

Poznámka: Tedy $\forall x \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$ platí, že $(\langle x, y_1 \rangle \in R$ a $\langle x, y_2 \rangle \in R) \Rightarrow y_1 = y_2$.

Poznámka: Fakt, že R je funkce X do Y, označujeme $R : X \to Y$. Pro funkce používáme spíše $f, g, \ldots$ než $R, S, \ldots$. Je-li $f : X \to Y$ funkce a $x \in X$, pak ten $y \in Y$, pro který je $\langle x, y \rangle \in f$, označujeme $f(x)$; píšeme také $x \mapsto y$, popř. $x \mapsto f(x)$.

Funkce (zobrazení)

Funkce je matematickým protějškem běžně používaného pojmu přiřazení.

Definice

Relace R mezi X a Y se nazývá **funkce** (**zobrazení**) množiny X do množiny Y, právě když pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ tak, že $\langle x, y\rangle \in R$.

Poznámka: Tedy $\forall x \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$ platí, že $(\langle x, y_1\rangle \in R$ a $\langle x, y_2\rangle \in R) \Rightarrow y_1 = y_2$.

Poznámka: Fakt, že R je funkce X do Y, označujeme $R : X \to Y$. Pro funkce používáme spíše $f, g, \ldots$ než $R, S, \ldots$. Je-li $f : X \to Y$ funkce a $x \in X$, pak ten $y \in Y$, pro který je $\langle x, y\rangle \in f$, označujeme $f(x)$; píšeme také $x \mapsto y$, popř. $x \mapsto f(x)$.

Příklad

Uvažujme množiny $X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. Pak

a) relace $R = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 3\rangle\}$ není funkce X do Y,

b) relace $S = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle\}$ není funkce X do Y,

c) relace $f = \{\langle b, 2\rangle, \langle a, 2\rangle\}$ je funkce X do Y.

Příklad

Uvažujme množiny $X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. Pak

a) relace $R = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 3\rangle\}$ není funkce X do Y,

b) relace $S = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle\}$ není funkce X do Y,

c) relace $f = \{\langle b, 2\rangle, \langle a, 2\rangle\}$ je funkce X do Y.

Příklad

Uvažujme množiny $X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. Pak

a) relace $R = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 3\rangle\}$ není funkce X do Y,

b) relace $S = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle\}$ není funkce X do Y,

c) relace $f = \{\langle b, 2\rangle, \langle a, 2\rangle\}$ je funkce X do Y.

Definice

Funkce $f : X \to Y$ se nazývá

a) **prostá** (**injektivní**), právě když pro každé $x_1, x_2 \in X$, pro $x_1 \neq x_2$ plyne $f(x_1) \neq f(x_2)$,

b) funkce množiny X **na** množinu Y (**surjektivní**), právě když pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ tak, že $f(x) = y$,

c) **vzájemně jednoznačná** (**bijektivní**), právě když je prostá a na (je tedy injektivní a současně surjektivní).

Poznámka: Funkce je prostá, právě když z $f(x_1) = f(x_2)$ plyne $x_1 = x_2$; což plyne z násl. tautologie: $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$.

Příklad

Mějme dány množiny $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{\triangle, \square, \heartsuit\}$ a funkce $f : A \to B$, $g : B \to C$ takové, že

$$f = \{\langle \alpha, 1\rangle, \langle \beta, 2\rangle, \langle \gamma, 4\rangle\},$$

$$g = \{\langle 1, \triangle\rangle, \langle 2, \square\rangle, \langle 3, \square\rangle, \langle 4, \heartsuit\rangle\}.$$

Pak zřejmě funkce f je injektivní a není surjektivní (tedy není bijektivní) a funkce g je surjektivní a není injektivní (tedy také není bijektivní).

Pro $f \circ g : A \to C$ máme: $f \circ g = \{\langle \alpha, \triangle\rangle, \langle \beta, \square\rangle, \langle \gamma, \heartsuit\rangle\}$, což je funkce surjektivní a injektivní (a tedy i bijektivní).

Dále snadno nahlédneme, že f^{-1} a g^{-1} nejsou funkce. Naproti tomu $g^{-1} \circ f^{-1} = \{\langle \triangle, \alpha\rangle, \langle \square, \beta\rangle, \langle \heartsuit, \gamma\rangle\}$ je bijekce C na A.

Příklad

Mějme dány množiny $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{\triangle, \Box, \heartsuit\}$ a funkce $f : A \to B$, $g : B \to C$ takové, že

$$f = \{\langle \alpha, 1\rangle, \langle \beta, 2\rangle, \langle \gamma, 4\rangle\},$$

$$g = \{\langle 1, \triangle\rangle, \langle 2, \Box\rangle, \langle 3, \Box\rangle, \langle 4, \heartsuit\rangle\}.$$

Pak zřejmě funkce f je injektivní a není surjektivní (tedy není bijektivní) a funkce g je surjektivní a není injektivní (tedy také není bijektivní).

Pro $f \circ g : A \to C$ máme: $f \circ g = \{\langle \alpha, \triangle\rangle, \langle \beta, \Box\rangle, \langle \gamma, \heartsuit\rangle\}$, což je funkce surjektivní a injektivní (a tedy i bijektivní).

Dále snadno nahlédneme, že f^{-1} a g^{-1} nejsou funkce. Naproti tomu $g^{-1} \circ f^{-1} = \{\langle \triangle, \alpha\rangle, \langle \Box, \beta\rangle, \langle \heartsuit, \gamma\rangle\}$ je bijekce C na A.

Příklad

Mějme dány množiny $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{\triangle, \square, \heartsuit\}$ a funkce $f : A \to B$, $g : B \to C$ takové, že

$$f = \{\langle\alpha, 1\rangle, \langle\beta, 2\rangle, \langle\gamma, 4\rangle\},$$

$$g = \{\langle 1, \triangle\rangle, \langle 2, \square\rangle, \langle 3, \square\rangle, \langle 4, \heartsuit\rangle\}.$$

Pak zřejmě funkce f je injektivní a není surjektivní (tedy není bijektivní) a funkce g je surjektivní a není injektivní (tedy také není bijektivní).

Pro $f \circ g : A \to C$ máme: $f \circ g = \{\langle\alpha, \triangle\rangle, \langle\beta, \square\rangle, \langle\gamma, \heartsuit\rangle\}$, což je funkce surjektivní a injektivní (a tedy i bijektivní).

Dále snadno nahlédneme, že f^{-1} a g^{-1} nejsou funkce. Naproti tomu $g^{-1} \circ f^{-1} = \{\langle\triangle, \alpha\rangle, \langle\square, \beta\rangle, \langle\heartsuit, \gamma\rangle\}$ je bijekce C na A.

Příklad

Mějme dány množiny $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{\triangle, \square, \heartsuit\}$ a funkce $f : A \to B$, $g : B \to C$ takové, že

$$f = \{\langle\alpha, 1\rangle, \langle\beta, 2\rangle, \langle\gamma, 4\rangle\},$$

$$g = \{\langle 1, \triangle\rangle, \langle 2, \square\rangle, \langle 3, \square\rangle, \langle 4, \heartsuit\rangle\}.$$

Pak zřejmě funkce f je injektivní a není surjektivní (tedy není bijektivní) a funkce g je surjektivní a není injektivní (tedy také není bijektivní).

Pro $f \circ g : A \to C$ máme: $f \circ g = \{\langle\alpha, \triangle\rangle, \langle\beta, \square\rangle, \langle\gamma, \heartsuit\rangle\}$, což je funkce surjektivní a injektivní (a tedy i bijektivní).

Dále snadno nahlédneme, že f^{-1} a g^{-1} nejsou funkce. Naproti tomu $g^{-1} \circ f^{-1} = \{\langle\triangle, \alpha\rangle, \langle\square, \beta\rangle, \langle\heartsuit, \gamma\rangle\}$ je bijekce C na A.

Příklad

Mějme dány následující funkce:

a) $f = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = e^x\}$,

b) $g = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+ \mid y = \sqrt{x}\}$,

c) $h_1 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = \sin x\}$,

d) $h_2 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\times\mathbb{R} \mid y = \tan x\}$.

Pak zřejmě:

f je injekce, ale není surjekce,

g je bijekce,

h_1 není injekce, není surjekce,

h_2 je surjekce, není injekce.

Věta

Pro funkce $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ platí

a) $f \circ g$ je funkce,

b) jsou-li f, g injekce, je $f \circ g$ injekce,

c) jsou-li f, g surjekce, je $f \circ g$ surjekce.

Důkaz c):
Chceme dokázat, že pro každé $z \in Z$ existuje $x \in X$ tak, že $\langle x, z\rangle \in f \circ g$. Nechť tedy $z \in Z$, pak, jelikož g je surjekce, musí existovat nějaké $y \in Y$ takové, že $\langle y, z\rangle \in g$. Dále z faktu, že f je surjekce musí k tomuto y existovat nějaké $x \in X$ tak, že $\langle x, y\rangle \in f$. Tedy vskutku pro lib. $z \in Z$ existuje $x \in X$ takové, že $\langle x, z\rangle \in f \circ g$, tedy $f \circ g$ je surjekce.

Poznámka k nekonečným množinám

Víme, že množina A se nazývá **konečná**, právě když je prázdná ($A = \emptyset$) nebo existuje přirozené číslo n a bijekce $f : A \to \{1, 2, \dots, n\}$. (V prvním případě říkáme, že počet prvků množiny A je 0, ve druhém případě říkáme, že počet prvků množiny A je n.)
Množina A se nazývá **nekonečná**, právě když není konečná.

Definice

Množina A se nazývá **spočetná**, právě když existuje bijekce $f : A \to \mathbb{N}$. Množina A se nazývá **nespočetná**, právě když je nekonečná a není spočetná.

Poznámka: Pro žádné $n \in \mathbb{N}$ neexistuje bijekce $f : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{N}$, tedy každá spočetná množina je nekonečná. Z definice plyne, že každá nekonečná množina je spočetná nebo nespočetná.

Poznámka k nekonečným množinám

Víme, že množina A se nazývá **konečná**, právě když je prázdná ($A = \emptyset$) nebo existuje přirozené číslo n a bijekce $f : A \to \{1, 2, \dots, n\}$. (V prvním případě říkáme, že počet prvků množiny A je 0, ve druhém případě říkáme, že počet prvků množiny A je n.)
Množina A se nazývá **nekonečná**, právě když není konečná.

Definice

Množina A se nazývá **spočetná**, právě když existuje bijekce $f : A \to \mathbb{N}$. Množina A se nazývá **nespočetná**, právě když je nekonečná a není spočetná.

Poznámka: Pro žádné $n \in \mathbb{N}$ neexistuje bijekce $f : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{N}$, tedy každá spočetná množina je nekonečná. Z definice plyne, že každá nekonečná množina je spočetná nebo nespočetná.

Obsah

Připomeňme, že jsme zavedli pojem **relace** jakožto matematický protějšek pojmu **vztah**. Nyní se zaměříme na další vlastnosti a práci s relacemi, konkrétně s binárními relacemi na množině. Zopakujme, že binární relace R na množině $X \neq \emptyset$ je podmnožina kartézského součinu $X \times X$, to jest $R \subseteq X \times X$.

Binární relace na množině jsou tedy matematickým protějškem vztahů mezi dvěma prvky množiny, například "x je menší než y", "x má stejnou barvu jako y", "x nezávisí na y", atd.

Speciálními relacemi jsou **prázdná relace** $\emptyset$, **relace identity** $\omega_X = \{\langle x, x\rangle | x \in X\}$, a **kartézský čtverec** $\iota_X = X \times X$.

Definice

Nechť R je binární relace na X. Řekneme, že R je

- **reflexivní**, pokud pro každé $x \in X$ platí $\langle x,x\rangle \in R$
- **symetrická**, pokud pro každé $x,y \in X$ platí $\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$
- **antisymetrická**, pokud pro každé $x,y \in X$ platí $(\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R) \Rightarrow x = y$
- **tranzitivní**, pokud pro každé $x,y,z \in X$ platí $(\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R) \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R$.

Relace R je (**relace**) **ekvivalence**, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Relace R je (**relace**) **uspořádání**, jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Reflexivita relace R vyjadřuje, že každý prvek $x \in X$ je v relaci "sám se sebou". Relace R je reflexivní, právě když má binární matice M_R na diagonále samé jedničky, což je právě když v orientovaném grafu relace R je u každého vrcholu "smyčka".

Symetrie relace R vyjadřuje, že $\langle x, y\rangle \in R$, právě když $\langle y, x\rangle \in R$. Tedy relace R je symetrická pokud $\forall x, y \in X$ máme buď současně $\langle x, y\rangle \in R$ a $\langle y, x\rangle \in R$, nebo současně $\langle x, y\rangle \notin R$ a $\langle y, x\rangle \notin R$. Relace R je symetrická, právě když její binární matice M_R je symetrická dle hlavní diagonály. V grafu relace se symetrie projevuje tak, že mezi vrcholy x, y buď není žádná hrana, nebo vede hrana z x do y i z y do x.

Reflexivita relace R vyjadřuje, že každý prvek $x \in X$ je v relaci "sám se sebou". Relace R je reflexivní, právě když má binární matice M_R na diagonále samé jedničky, což je právě když v orientovaném grafu relace R je u každého vrcholu "smyčka".

Symetrie relace R vyjadřuje, že $\langle x, y \rangle \in R$, právě když $\langle y, x \rangle \in R$. Tedy relace R je symetrická pokud $\forall x, y \in X$ máme buď současně $\langle x, y \rangle \in R$ a $\langle y, x \rangle \in R$, nebo současně $\langle x, y \rangle \notin R$ a $\langle y, x \rangle \notin R$. Relace R je symetrická, právě když její binární matice M_R je symetrická dle hlavní diagonály. V grafu relace se symetrie projevuje tak, že mezi vrcholy x, y buď není žádná hrana, nebo vede hrana z x do y i z y do x.

Antisymetrie relace R vyjadřuje, že pro každé dva různé prvky $x, y \in X$ neplatí současně $\langle x, y \rangle \in R$ a $\langle y, x \rangle \in R$. R je antisymetrická, právě když každá dvě různá pole matice M_R, která jsou souměrná dle hlavní diagonály, neobsahují dvě jedničky. V grafu relace se antisymetrie projevuje tak, že mezi dvěma různými vrcholy x, y je buď jedna hrana nebo žádná.

Tranzitivita relace R vyjadřuje, že pokud $\langle x, y \rangle \in R$ a pokud $\langle y, z \rangle \in R$, pak také $\langle x, z \rangle \in R$, tj. neformálně pokud x je ve vztahu R s y (v grafu vede hrana z x do y) a pokud je y ve vztahu R se z (v grafu vede hrana z y do z), pak je i x ve vztahu R se z (v grafu vede hrana z x do z). Neboli, pokud v grafu můžeme přejít z vrcholu x do vrcholu z po dvou hranách přes vrchol y, pak lze přejít z x do z přímo (z x do z vede hrana).

Antisymetrie relace R vyjadřuje, že pro každé dva různé prvky $x, y \in X$ neplatí současně $\langle x, y\rangle \in R$ a $\langle y, x\rangle \in R$. R je antisymetrická, právě když každá dvě různá pole matice M_R, která jsou souměrná dle hlavní diagonály, neobsahují dvě jedničky. V grafu relace se antisymetrie projevuje tak, že mezi dvěma různými vrcholy x, y je buď jedna hrana nebo žádná.

Tranzitivita relace R vyjadřuje, že pokud $\langle x, y\rangle \in R$ a pokud $\langle y, z\rangle \in R$, pak také $\langle x, z\rangle \in R$, tj. neformálně pokud x je ve vztahu R s y (v grafu vede hrana z x do y) a pokud je y ve vztahu R se z (v grafu vede hrana z y do z), pak je i x ve vztahu R se z (v grafu vede hrana z x do z). Neboli, pokud v grafu můžeme přejít z vrcholu x do vrcholu z po dvou hranách přes vrchol y, pak lze přejít z x do z přímo (z x do z vede hrana).

Vlastnosti konečných relací je možné testovat zcela mechanicky prostě tím, že ověříme, zda-li platí definiční podmínky dané vlastnosti. Uvědomme si, že k prokázání toho, že daná vlastnost neplatí stačí najít jen jednu n-tici prvků, pro kterou definiční předpis neplatí – taková n-tice prvků nám slouží jako **protipříklad**.

Pokud chceme ukázat, že vlastnost pro danou relaci R platí, musíme provést test pro všechny prvky.

Příklad

Jaké vlastnosti má relace rovnoběžnosti a relace kolmosti na množině všech přímek v rovině?

Řešení viz přednášky.

Vlastnosti konečných relací je možné testovat zcela mechanicky prostě tím, že ověříme, zda-li platí definiční podmínky dané vlastnosti. Uvědomme si, že k prokázání toho, že daná vlastnost neplatí stačí najít jen jednu n-tici prvků, pro kterou definiční předpis neplatí – taková n-tice prvků nám slouží jako **protipříklad**.

Pokud chceme ukázat, že vlastnost pro danou relaci R platí, musíme provést test pro všechny prvky.

Příklad

Jaké vlastnosti má relace rovnoběžnosti a relace kolmosti na množině všech přímek v rovině?

Řešení viz přednášky.

Příklad

Jak víme, speciálními relacemi jsou prázdná relace $\emptyset$, relace identity $\omega_X = \{\langle x,x\rangle \mid x \in X\}$ a kartézský čtverec $\iota_X = X^2$. Ukažme si jaké mají tyto relace vlastnosti:

- $\emptyset$ není reflexivní, je symetrická, je antisymetrická, je tranzitivní
- ω_X je reflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní (tedy je ekvivalencí i uspořádáním)
- ι_X je reflexivní, je symetrická, je tranzitivní (tedy je ekvivalence) a je antisymetrická $\Leftrightarrow |X| = 1$.

Příklad

Zjistěte jaké vlastnosti má následující relace R na $X = \{a,b,c,d\}$, je-li $R = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle\}$.

Řešení viz přednášky.

Příklad

Zjistěte jaké vlastnosti má následující binární relace R na $X = \{a,b,c,d\}$, je-li $R = \{\langle a,a\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,d\rangle\}$.

Zřejmě R je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická a není symetrická. Je to tedy relace uspořádání.

Příklad

Relace $S = \{\langle m,n\rangle | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$, kde m má stejný počet cifer jako $n\}$ je ekvivalence, která není antisymetrická.

Příklad

Relace $T = \{\langle x,y\rangle | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, |x-y| \leq 4\}$ je reflexivní, je symetrická, není tranzitivní a není antisymetrická. Relace T tedy není ekvivalencí ani uspořádáním.

Věta

Nechť R je binární relace na množině X. Pak

(i) R je reflexivní, právě když $\omega_X \subseteq R$,

(ii) R je symetrická, právě když $R = R^{-1}$,

(iii) R je antisymetrická, právě když $R \cap R^{-1} \subseteq \omega_X$,

(iv) R je tranzitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$.

Důkaz (iv):

Nechť R je tranzitivní a nechť $\langle x, y\rangle \in R \circ R$. Pak existuje $z \in X$ takové, že $\langle x, z\rangle \in R$ a $\langle z, y\rangle \in R$, tedy z tranzitivity $\langle x, y\rangle \in R$, tj. $R \circ R \subseteq R$. Obráceně, nechť platí $R \circ R \subseteq R$, pak pokud $\langle x, z\rangle \in R$ a $\langle z, y\rangle \in R$, pak $\langle x, y\rangle \in R \circ R \subseteq R$, tedy R je tranzitivní.

Věta

Nechť R, S, T jsou binární relace na X, kde $S \subseteq T$. Pak

(i) $S^{-1} \subseteq T^{-1}$,

(ii) $S \circ R \subseteq T \circ R$,

(iii) $R \circ S \subseteq R \circ T$.

Důkaz:

(i): Zřejmé.

(ii): Nechť $\langle x, y \rangle \in S \circ R$, pak $\exists z \in X$ tak, že $\langle x, z \rangle \in S$, $\langle z, y \rangle \in R$. Jelikož ale $S \subseteq T$, dostáváme $\langle x, z \rangle \in T$, tedy $\langle x, y \rangle \in T \circ R$. Odkud $S \circ R \subseteq T \circ R$.

(iii): Analogicky jako (ii).

Některé další vlastnosti binárních relací na množině

Definice

Nechť R je binární relace na X. Řekneme, že R je

- **irreflexivní**, pokud pro každé $x \in X$ platí $\langle x, x \rangle \notin R$
- **asymetrická**, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \notin R$
- **úplná**, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $\langle x, y \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in R$.

Irreflexivita relace R vyjadřuje, že žádný prvek $x \in X$ není v relaci "sám se sebou".

Asymetrie relace R vyjadřuje, že do R nepadnou $\langle x, y \rangle$ a $\langle y, x \rangle$ současně.

Úplnost relace R vyjadřuje, že pro každé dva $x, y \in X$ aspoň jedna z dvojic $\langle x, y \rangle$, $\langle y, x \rangle$ padne do R.

Uzávěry relací

Ke každé binární relaci můžeme stanovit její reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr, to jest nejmenší reflexivní, symetrickou a tranzitivní relaci na dané množině, která obsahuje výchozí relaci.

Přesněji: pro binární relaci R na X definujeme binární relace $\mathrm{Ref}(R)$, $\mathrm{Sym}(R)$, $\mathrm{Tra}(R)$ na X tak, že $\mathrm{Ref}(R)$ ($\mathrm{Sym}(R)$, případně $\mathrm{Tra}(R)$) je reflexivní (symetrická, případně tranzitivní) relace obsahující R a pro každou reflexivní (symetrickou, případně tranzitivní) relaci R' na X, kde $R \subseteq R'$, máme $\mathrm{Ref}(R) \subseteq R'$ ($\mathrm{Sym}(R) \subseteq R'$, případně $\mathrm{Tra}(R) \subseteq R'$). $\mathrm{Ref}(R)$ se nazývá **reflexivní uzávěr** R, $\mathrm{Sym}(R)$ se nazývá **symetrický uzávěr** R, $\mathrm{Tra}(R)$ se nazývá **tranzitivní uzávěr** R.

Uzávěry relací

Následující věta říká, že všechny tři uvedené uzávěry existují vždy ke každé binární relaci na libovolné množině a lze je konstruktivně popsat.

Věta

Nechť R je binární relace na X. Pak

- $\mathrm{Ref}(R) = R \cup \omega_X$
- $\mathrm{Sym}(R) = R \cup R^{-1}$
- $\mathrm{Tra}(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, kde $R^1 = R$ a $R^n = R \circ R^{n-1}$.

Poznámka: R^n se nazývá ***n*-tá mocnina** R. Je-li R binární relace na X, kde $|X| = n$, pak $\mathrm{Tra}(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

Poznámka: Tranzitivní uzávěry relací se často používají v informatice, například v teorii automatů (viz dále).