KATEDRA INFORMATIKY
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Logické obvody

3. cvičení

Jiří Zacpal

KMI/ZVT – Základy výpočetní techniky

Logické funkce

- Logický výraz

  = korektně vytvořená posloupnost (symbolů) logických proměnných a funkcí (operátorů) spolu se závorkami

  – priority sestupně: negace, log. součin, log. součet

  – např. $x \cdot \bar{y} + f(x,z) = (x \cdot \bar{y}) + f(x,z)$

  = zápis logické funkce

- Logické rovnice

  – ekvivalentní úpravy: negace obou stran, logický součin/součet obou stran se stejným výrazem, . . . , log. funkce obou stran se stejnými ostatními operandy funkce

  – NEekvivalentní úpravy: „krácení" obou stran o stejný (pod)výraz, např. x + y = x + z není ekvivalentní s y = z

Axiomy (Booleovy algebry)

- **komutativita**:

$$x \cdot y = y \cdot x \qquad x + y = y + x$$

- **distributivita**:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad (x + y) \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$$

- **identita** (existence neutrální hodnoty):

$$1 \cdot x = x \qquad 0 + x = x$$

- **komplementárnost**:

$$x \cdot \overline{x} = 0 \qquad x + \overline{x} = 1$$

Vlastnosti základních logických operací

- nula a jednička:

$$0 \cdot x = 0 \qquad 1 + x = 1$$

- idempotence:

$$x \cdot x = x \qquad x + x = x$$

- asociativita:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \qquad x + (y + z) = (x + y) + z$$

- involuce (dvojí negace):

$$\bar{\bar{x}} = x$$

- De Morganovy zákony:

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y} \qquad \overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

- absorpce:

$$x \cdot (x + y) = x \qquad x + x \cdot y = x$$

Základní tavr logické funkce

- zadání pravdivostní tabulkou:
  - úplně - funkční hodnota f (x_i) definována pro všech 2^n možných přiřazení hodnot proměnným x_i ; 0 < i < n
  - neúplně - funkční hodnota pro některá přiřazení není definována (např. log. obvod realizující funkci ji neimplementuje)
- základní tvary (výrazu):
  - **součinový** (úplná konjunktivní normální forma, ÚKNF) - log. součin log. součtů všech proměnných nebo jejich negací (úplných elementárních disjunkcí, ÚED)

$$(x_0 + \cdots + x_{n-1}) \cdot \cdots \cdot (x_0 + \cdots + x_{n-1}), X_i = x_i\ nebo\ \overline{x_i},$$

  - **součtový** (úplná disjunktivní normální forma, ÚDNF) - log. součet log. součinů všech proměnných nebo jejich negací (úplných elementárních konjunkcí, ÚEK)

$$(x_0 \cdot \cdots \cdot x_{n-1}) + \cdots + (x_0 \cdot \cdots \cdot x_{n-1}), X_i = x_i\ nebo\ \overline{x_i}$$

Převod log. funkce $f(x_i)$ na základní tvar

- ekvivalentními úpravami a doplněním chybějících proměnných nebo jejich negací
- tabulkovou metodou:
  1. pro řádky s $f(x_i) = 0(1)$ sestroj log. součet (součin) všech x_i pro $x_i = 0(1)$ nebo $\overline{x_i}$ pro $x_i = 1(0)$ ·
  2. výsledná ÚKNF (ÚDNF) je log. součinem (součtem) těchto log. součtů (součinů)

x	y	z	f(x,y,z)	ÚED	ÚEK
0	0	0	0	$x + y + z$	
0	0	1	0	$x + y + \bar{z}$	
0	1	0	0	$x + \bar{y} + z$	
0	1	1	1		$\bar{x} \cdot y \cdot z$
1	0	0	0	$\bar{x} + y + z$	
1	0	1	1		$x \cdot \bar{y} \cdot z$
1	1	0	1		$x \cdot y \cdot \bar{z}$
1	1	1	1		

ÚKNF(f(x,y,z)): $(x + y + z) \cdot (x + y + \bar{z}) \cdot (x + \bar{y} + z) \cdot (\bar{x} + y + z)$

ÚDNF(f(x,y,z)): $(\bar{x} \cdot y \cdot z) + (x \cdot \bar{y} \cdot z) + (x \cdot y \cdot \bar{z}) + (x \cdot y \cdot z)$

Úkol

Vyjádřete v základním tvaru ÚKNF a ÚDNF:

x	y	z	f
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Zjednodušení výrazu logické funkce

- optimalizace za účelem dosažení co nejmenšího počtu operátorů (v kompromisu s min. počtem typů operátorů)
- důvod: méně (typů) log. obvodů realizujících funkci (menší, levnější, nižší spotřeba, . . .)
- metody:
  - algebraické úpravy
  - Karnaughova metoda (Karnaughova mapa)

Úplný systém logických funkcí

= množina log. funkcí, pomocí kterých je možné vyjádřit jakoukoliv log. funkci (libovolného počtu proměnných) $\rightarrow$množina log. funkcí dvou proměnných

(1) negace $\bar{x}$, log. součin $x \cdot y$ a log. součet $x + y$

(2) negace $\bar{x}$ a implikace $x \rightarrow y$

a další

- **Minimální úplný systém logických funkcí**

= úplný systém, ze kterého nelze žádnou funkci vyjmout tak, aby zůstal úplný

(1) NENÍ: $x \cdot y = \overline{\bar{x} + \bar{y}}, x + y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$ (De Morganovy zákony)

(2) je

(3) $\bar{x}$, log. součin $x \cdot y$

(4) $\bar{x}$, log. součet $x + y$

a další

Minimální úplný systém logických funkcí

- Jediná funkce:
  - Shefferova $\uparrow$ (negace log. součinu)
  - Piercova $\downarrow$ (negace log. součtu)
  - důkaz: vyjádření negace a log. součinu (součtu)
  - Vyjádření logické funkce pomocí Shefferovy nebo Piercovy funkce
    1. vyjádření funkce v základním součtovém tvaru
    2. zjednodušení výrazu funkce, např. pomocí Karnaughovy metody
    3. aplikace De Morganových zákonů pro převedení výrazu do tvaru, který obsahuje pouze Shefferovy nebo pouze Piercovy funkce

Úkol

Dokažte, že lze pomocí Shefferovy funkce lze vyjádřit logickou negaci a součet.

Příklad – realizace funkce XOR

- pravdivá, když operandy mají různou hodnotu, jinak nepravdivá

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

- operátory: $x \oplus y, y \not\equiv x$, x XOR y (výrokově i algebraicky negace ekvivalence), X $\not\equiv$Y (množinově negace ekvivalence)

Příklad – realizace funkce XOR

1. zápis funkce v základním tvaru

x	y	$x \oplus y$	ÚEK
0	0	0	
1	0	1	$x \cdot \bar{y}$
0	1	1	$\bar{x} \cdot y$
1	1	0	

- ÚDNF(f(x,y)): $(x \cdot \bar{y}) + (\bar{x} \cdot y)$

Nonekvivalence pomocí NAND

úprava funkce a převod za použití Shafferovy funkce

$$x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y = \overline{\overline{x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y}} = \overline{\overline{x \cdot \bar{y}} \cdot \overline{\bar{x} \cdot y}}$$

$$= \overline{\overline{x \cdot \overline{y \cdot y}} \cdot \overline{\overline{x \cdot x} \cdot y}} = (x \uparrow (y \uparrow y)) \uparrow ((x \uparrow x) \uparrow y)$$

Úkol

Realizujte funkci XOR pomocí funkce NAND v programu Deeds.