

# Odebrání prvku z ČČ stromu

Označení:

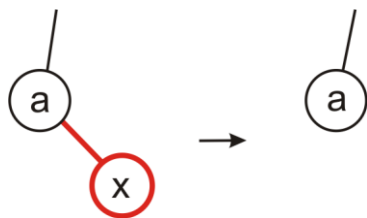
$x$  - odebíraný prvek

1. Vyhledáme prvek  $x$  ve stromu. Vyhledání může skončit třemi způsoby:

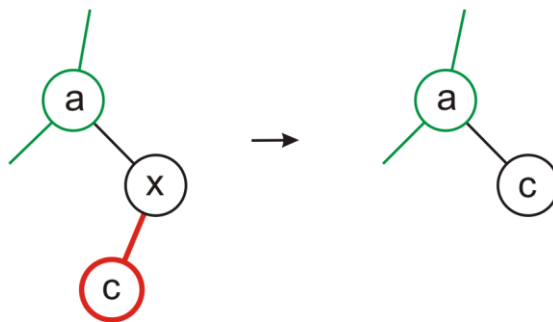
- Prvek  $x$  nebyl ve stromu nalezen – není co odebrat.
- Prvek byl nalezen v uzlu  $v$ , který má nejvýše jednoho následníka. Tento uzel zrušíme.
- Prvek byl nalezen v uzlu  $v$ , který má dva následníky. V tomto případě do uzlu  $v$  přesuneme buďto nejpravější (největší) prvek z jeho levého podstromu anebo nejlevější (nejmenší) prvek z jeho pravého podstromu a uzel, z kterého byl prvek přesunut, zrušíme.

2. Další postup závisí na tom, jakou barvu má rušený uzel.

- Rušený uzel má červenou barvu. V tomto případě zrušení uzlu neovlivní počet černých uzlů a odebrání je ukončeno.

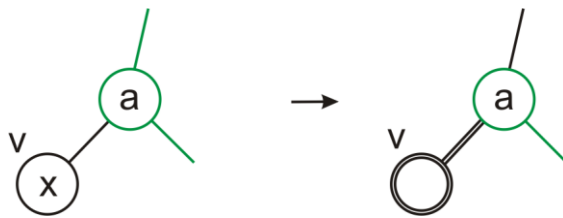


- Rušený uzel má černou barvu a má červeného následníka. Následníka přebarvíme na černou barvu. Tím počet černých uzlů zůstane zachován a odebrání je ukončeno.



Zelené obarvení znamená, že hrana nebo uzel může mít černou nebo červenou barvu.

- Rušený uzel  $v$  má černou barvu a nemá červeného následníka. Uzel  $v$  obarvíme jako dvojitý černý. Toto obarvení vyjadřuje, že zrušením uzlu by nastal deficit černé barvy na cestách od kořenu k listům, na kterých tento uzel leží.



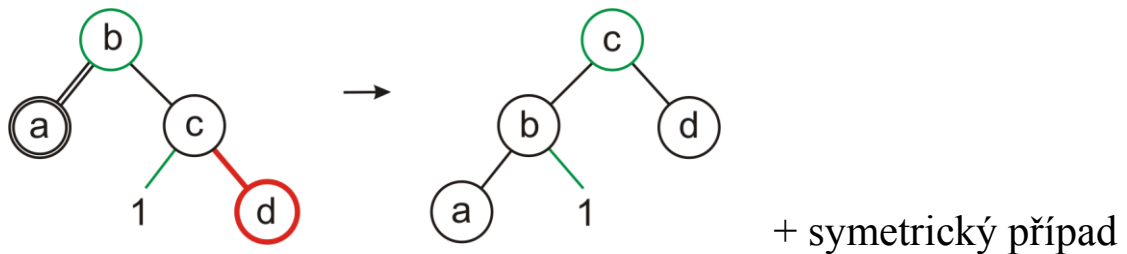
Další postup je transformacemi dosáhnout, aby ve stromu nebyl žádný uzel s dvojitým černým obarvením. Přitom u uzlu, který chceme zrušit, lze při odstranění jeho dvojitého černého obarvení ho ze stromu odstranit.

## Odstranění dvojitého černého obarvení uzlu

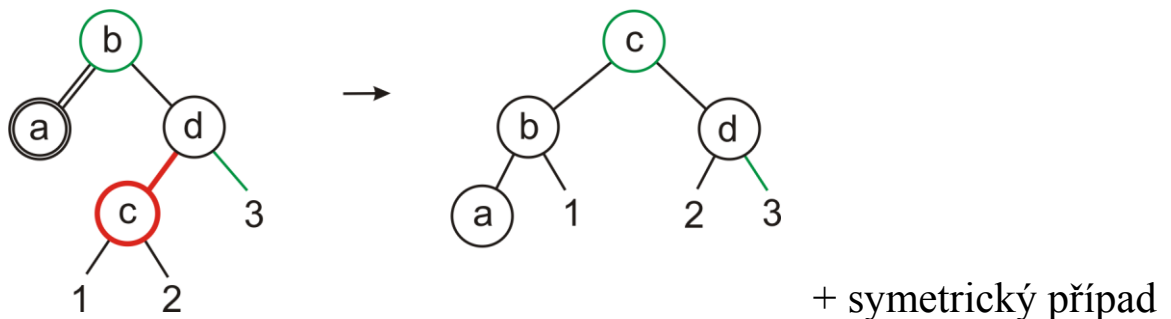
K tomu používáme podle situace dva typy transformací:

- rotace
  - výměna barev
- Sourozenec uzlu s dvojitým černým obarvením je černý uzel a tento má přitom aspoň jednoho červeného následníka – jednoduchá nebo dvojitá rotace.

Jednoduchá rotace:

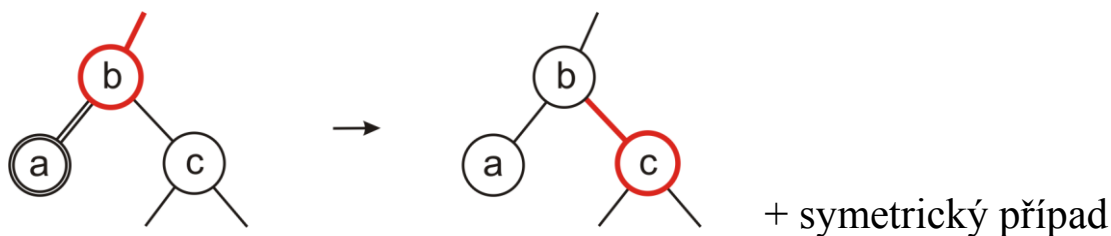


Dvojitá rotace:

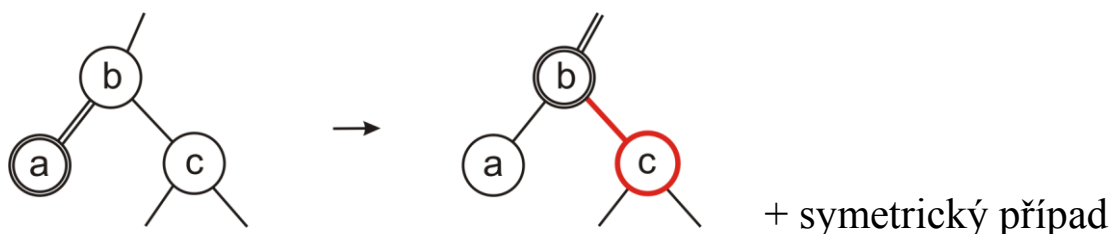


- Sourozenec uzlu  $v$  s dvojitým černým obarvením je černý uzel a tento přitom nemá žádného červeného následníka. Jedno černé obarvení od obou uzlů (uzlu  $v$  a jeho sourozence) odebereme a k předchůdci těchto uzlů naopak jedno černé obarvení přidáme. Uzel  $v$  bude tímto mít jedno černé obarvení a jeho sourozenec bude červeně obarven.

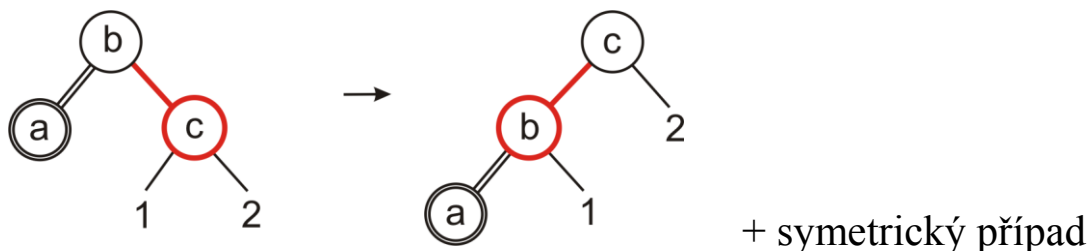
Předchůdce uzlu  $v$  a jeho sourozence je červený uzel – nyní bude černý uzel:



Předchůdce uzlu  $v$  a jeho sourozence je černý uzel. Pokud to není kořen, bude mít nyní dvojité černé obarvení:

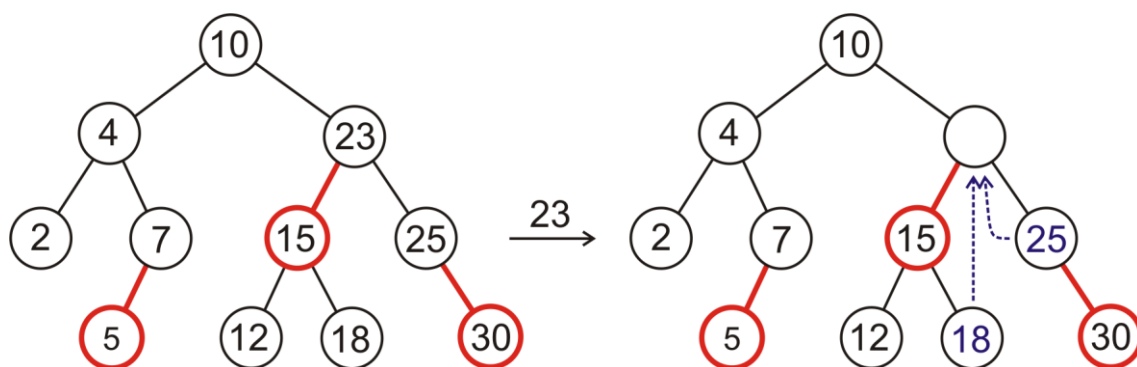


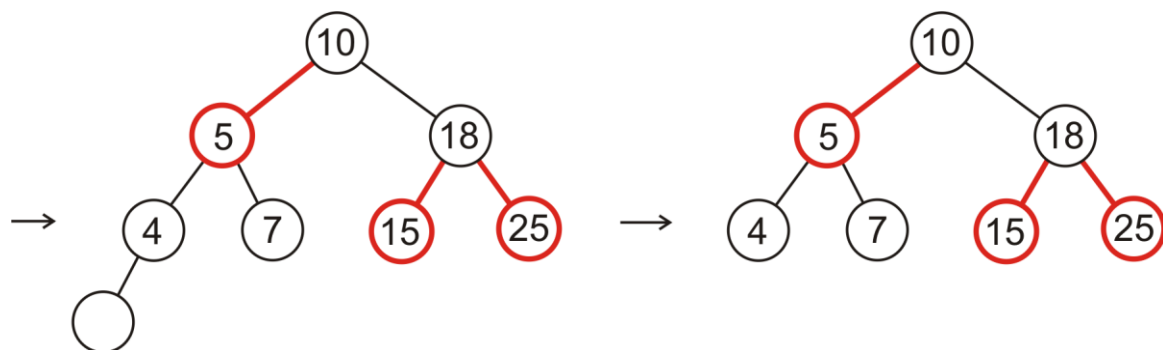
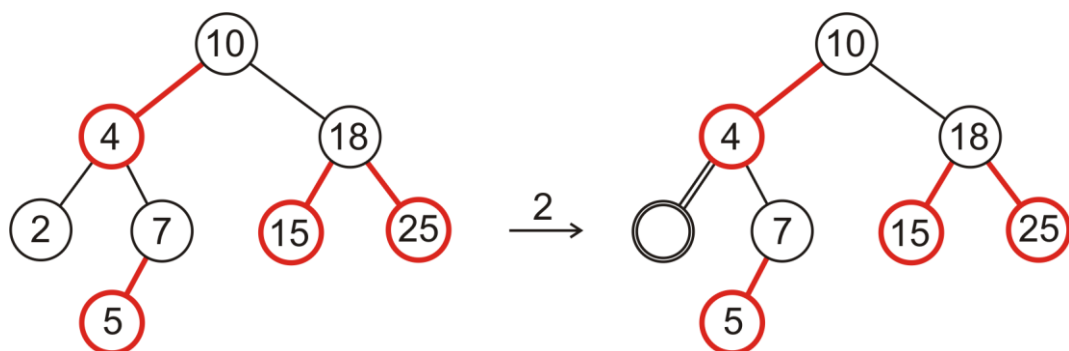
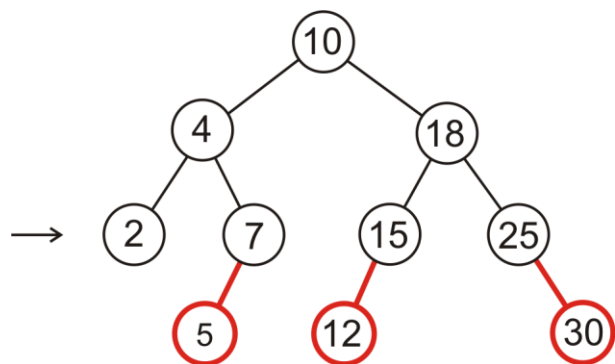
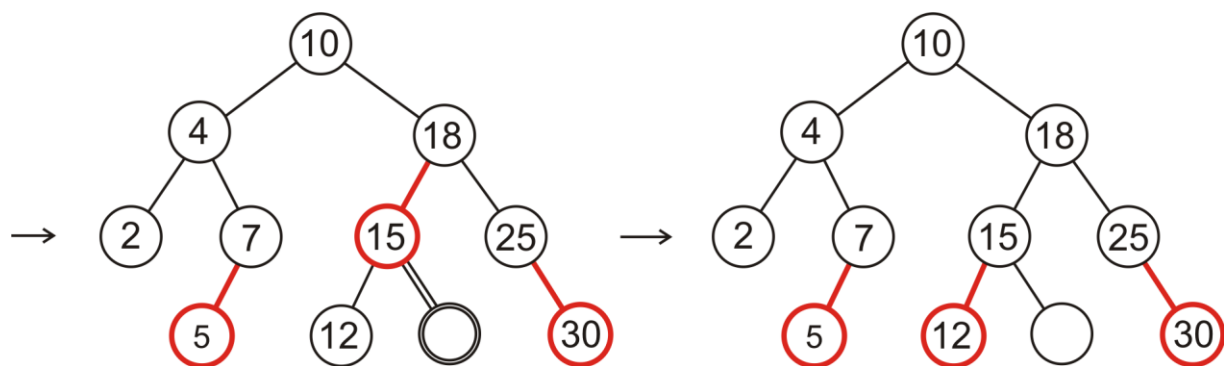
- Sourozenec uzlu  $v$  s dvojitým černým obarvením je červený uzel – jednoduchá rotace.



Původní levý následník uzlu s prvkem  $c$  (na obrázku označen číslem 1) musel mít černou barvu. Tento je nyní černým sourozencem uzlu s dvojitým černým obarvením – můžeme nyní použít některou z předchozích transformací (rotaci nebo přebarvení).

## Příklady





## Časová složitost operací

Časová složitost operací je závislá na výšce červeno-černého stromu. Z popisu vlastností červeno-černého stromu uvedených na začátku popisu těchto stromů plyne, že výška je maximálně  $2h + 1$ , kde  $h$  je výška B-stromu řádu 4, ze kterého lze červeno-černý strom odvodit. A výška B-stromu logaritmicky závisí na počtu

prvků v něm uložených. Odtud plyne, že i výška červeno-černého stromu logaritmicky závisí na počtu prvků v něm uložených. Tím složitost operací v červeno-černém stromu je opět  $\Theta(\ln(n))$ .