



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

Departamento de Ciencias Exactas y Naturales

Área Matemática

Parciales Resueltos.

Material de lectura para alumnos.....

Parciales Resueltos

(Pequena explicacion). Este documento presentaremos distintos ejercicios de parcial....

Índice general

1. Contenido teórico. Primera parte	2
1.1. Recuerdo de Análisis Matemático 1	2
1.2. Recuerdo de Álgebra	3
1.3. Campos vectoriales y escalares	4
1.4. Nociones de Topología	7
1.5. Gráfica	8
1.6. Conjunto de nivel	9
1.7. Límite de Funciones	12
1.8. Diferenciabilidad	21
1.9. Extremo de Funciones a Valores Reales	28
2. Contenido Teórico. Segunda parte	30
2.1. Operadores	30
2.2. Curvas	31
2.3. Integrales Dobles	33
2.4. Integrales Triples	36
2.5. Integrales de Línea	38
2.6. Integrales de Superficie	39
2.7. Campos Conservativos	40
2.8. Teoremas Integrales	41
3. Primeros parciales resueltos	44
3.1. Fecha 29 de septiembre de 2023	44
3.2. Fecha 25 de abril de 2023	48
3.3. Fecha 23 de septiembre de 2023	53
3.4. Fecha 18 de abril de 2024	58
3.5. Fecha Recuperatorio 2cuatri 2022	65
4. Segundos parciales resueltos	70
4.1. Fecha 25 de junio de 2023	70
4.2. Fecha recuperatorio 29 de junio de 2023	75
4.3. Fecha 18 de noviembre de 2023	80
4.4. Fecha 11 de junio de 2024	86
4.5. Fecha recuperatorio extra	94

algun tipo de nota explicando detalles de notacion, por ej. Los símbolos para los vectores serán marcados en negrita minúscula, \mathbf{v} , \mathbf{x} , \mathbf{n} , $\boldsymbol{\sigma}$ etc., y mayúscula los campos vectoriales, \mathbf{F} , \mathbf{G} , $\boldsymbol{\Sigma}$, etc. Las matrices estarán en negritas e itálicas, \mathbf{D} , \mathbf{H} , etc. El final de una definición, teorema, corolario, propiedad, etc. estará indicado con un \diamond .

Contenido teórico. Primera parte

1.1 Recuerdo de Análisis Matemático 1

Definición 1.1.1 (Función en \mathbb{R}). Se llama función a la relación $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ tal que a cada elemento de A le corresponde uno y solo un elemento de B . Si tomamos como ejemplo a: $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R} / f(x) = 2x - 1$,

- f es el nombre de la función.
- A es el dominio.
- B es el codominio.
- x es la variable.
- $2x - 1$ es la fórmula de la función.

Definición 1.1.2 (Dominio de una función en \mathbb{R}). Se llama dominio de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ al conjunto de entrada del mismo. Es decir, $\text{Dom}(f) = A$.

Definición 1.1.3 (Codominio de una función en \mathbb{R}). Se llama codominio de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ al conjunto al que se restringen las salidas del mismo. Es decir que $\text{Cod}(f) = B$. Puede que no todos los elementos de B correspondan a una evaluación de la función.

Definición 1.1.4 (Imagen de una función en \mathbb{R}). Se llama imagen de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ al conjunto

$$\text{Im}(f) = \{y \in B : \exists x \in A / f(x) = y\}$$

Definición 1.1.5 (Gráfica de una función en \mathbb{R}). La gráfica de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \in A \wedge y = f(x)\}$$

Ejemplo 1.1.1. Si se tiene la función ejemplo $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R} / f(x) = 2x - 1$. Se puede armar la siguiente tabla de valores:

x	$y = f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Luego, el siguiente conjunto de puntos, se encuentran incluidos en la gráfica de la función (que

cabe aclarar, tiene infinitos elementos):

$$\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\} \subset \text{Graf}(f)$$

De hecho, si se fuera a posicionar los puntos de $\text{Graf}(f)$, se obtendría lo que se entiende normalmente si se habla de la gráfica de la función. De hecho, graficando la función como uno lo haría normalmente, en realidad se están dibujando los infinitos puntos pertenecientes al $\text{Graf}(f)$ sobre el plano.



Definición 1.1.6 (Sobreyectividad, Inyectividad y Biyectividad). Se tiene una función:

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

La función se dice sobreyectiva si se cumple que su codominio es igual a su imagen:

$$\text{Cod}(f) = \text{Img}(f)$$

Es decir que cada elemento del conjunto de salida es la evaluación de la función en al menos un elemento del dominio.

La función se dice inyectiva si a cada elemento en el conjunto imagen le corresponde un único valor del dominio. Es decir, que la función es inyectiva cuando se cumple:

$$a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

Tal que $a, b \in \text{Dom}(f)$.

Finalmente, la función es sobreyectiva cuando es simultáneamente sobreyectiva e inyectiva.

1.2 Recuerdo de Álgebra

Definición 1.2.1 (Espacio Vectorial). Un espacio \mathbb{R}^n es un espacio vectorial real al que pertenecen los vectores de n componentes. Es decir:

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{v} / \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R} \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}\}$$

Definición 1.2.2 (Transformación Lineal). Una transformación lineal es una función

$$\mathbf{T} : A \subseteq \mathbb{V} \rightarrow A \subseteq \mathbb{W}$$

con \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales, que cumple con la condición de linealidad:

$$T(\alpha \cdot \mathbf{v}_1 + \beta \cdot \mathbf{v}_2) = \alpha \cdot T(\mathbf{v}_1) + \beta \cdot T(\mathbf{v}_2)$$

Donde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. En el caso de espacios vectoriales reales, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

A continuación, se detallan las ecuaciones de curvas y superficies comunes.

Definición 1.2.3 (Ecuación de la recta en el espacio). La ecuación vectorial de una recta en \mathbb{R}^3 es:

$$(x, y, z) = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mathbf{x}_0$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ un parámetro, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ el vector director de la recta, y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ un punto de paso. El punto de paso es un punto cual se quiera sobre la recta y el vector director se puede expresar como $\mathbf{v} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, con \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 dos puntos distintos cualquiera sobre la recta.

Definición 1.2.4 (Ecuación del plano). La ecuación canónica del plano (en \mathbb{R}^3) es $ax + by + cz = d$, que también puede expresarse, vectorialmente, como $(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$. Esto último equivale a:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

con $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ un vector normal al plano, y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ un punto de perteneciente al plano. El vector normal, además, puede calcularse como el producto vectorial de dos vectores pertenecientes al plano.

Definición 1.2.5 (Ecuación de la circunferencia). La ecuación de una circunferencia en el plano (\mathbb{R}^2) se expresa como

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

En este caso, (x_0, y_0) es el centro de la circunferencia, y r el radio de la misma.

Definición 1.2.6 (Ecuación del círculo). Para representar un círculo en el plano (\mathbb{R}^2), se lo hace como el área dentro de una circunferencia. Por lo tanto, una región circular en el plano se expresa como

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

incluyendo su borde, la circunferencia exterior.

Definición 1.2.7 (Ecuación de la esfera). La cáscara de una esfera (es decir, sólo su superficie exterior, hueca) en \mathbb{R}^3 se expresa con la ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Se tiene (x_0, y_0, z_0) como el centro de la cáscara y r como el radio de la misma. Para obtener la esfera completa, es decir, cáscara y relleno interior, se usa la inecuación:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2$$

Esto es análogo al caso de la circunferencia y el círculo.

1.3 Campos vectoriales y escalares

Definición 1.3.1 (Notación de Funciones). $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$ es una función que a cada vector de A le asigna un único vector en el conjunto B .

Ejemplo 1.3.1. La función $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \mathbf{T}(x, y) = (x + y, x - y, xy)$ es un campo vectorial que asigna a cada vector de \mathbb{R}^2 un único vector de \mathbb{R}^3 .

$$\Rightarrow \mathbf{T}(1, 1) = (2, 0, 1)$$

Definición 1.3.2 (Dominio de una función). Si se tiene una función $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$ se llama, análogamente a una función en \mathbb{R} , dominio a el conjunto de la salida de la función, A .

Definición 1.3.3 (Imágen de una función). Se llama imágen de una función $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$ al conjunto:

$$\text{Img}(\mathbf{F}) = \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}, \mathbf{X} \in A$$

Esto es análogo a las funciones en \mathbb{R} .

Definición 1.3.4 (Campo Escalar). Un campo escalar es una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$, tal que asigna a un vector (o escalar) perteneciente a $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un escalar real. Un campo escalar se nota con una letra minúscula de imprenta.

Ejemplo 1.3.2. La función $d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} / d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es un campo escalar que asigna a cada vector de \mathbb{R}^3 un escalar. En particular, si se piensa el vector argumento como un punto en el espacio, d devuelve su distancia euclídea al origen.

$$\Rightarrow d(1, 2, 3) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Definición 1.3.5 (Campo Vectorial). Se llama campo vectorial a una función $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$ donde $n \geq 2$ y $m \geq 2$. Es decir, donde se asigna un vector de un espacio real de dimensión al menos 2 y se devuelve otro en un espacio (igual o distinto) de, también, dimensión al menos 2. A un campo vectorial se lo llama con una letra mayúscula de imprenta.

La función del ejemplo (1.3.1) es un campo vectorial.

Sea $\mathbf{F}(x_0, x_1, \dots, x_n) = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ un campo vectorial, el vector que devuelve se puede pensar como la evaluación de m campos escalares en $(x_0, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{X}$. Es decir:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (f_0(\mathbf{X}), f_1(\mathbf{X}), \dots, f_m(\mathbf{X}))$$

Donde f_0, f_1, \dots, f_m se llaman las **componentes de \mathbf{F}** .

Volviendo al ejemplo (1.3.1), las componentes de T son:

$$f_1(x, y) = x + y \quad f_2(x, y) = x - y \quad f_3(x, y) = xy$$

Definición 1.3.6 (Parametrización). Se llaman parametrizaciones a las funciones de la forma $\sigma : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$ donde $n \geq 2 \wedge n \geq m > 0$. El vector de entrada es un escalar real, o un conjunto de escalares reales, denominados parámetros. Luego, las parametrizaciones son funciones que asignan a cada parámetro o conjunto de parámetros en el conjunto A un vector perteneciente a \mathbb{R}^n .

Las parametrizaciones suelen ser de curvas (donde $m = 1$ y $n = 2$ en \mathbb{R}^2 o $n = 3$ en \mathbb{R}^3), áreas en el plano (donde $m = 2$ y $n = 2$), superficies (donde $m = 2$ y $n = 3$) o volúmenes (donde $m = 3$ y $n = 3$). Si se piensa a los vectores de salida como puntos en el plano (\mathbb{R}^2) o en el espacio (\mathbb{R}^3), la imagen de una parametrización es un conjunto de puntos que conforman una curva, área, superficie o volumen, según se parametrize.

A una parametrización se la suele notar con una letra griega.

Ejemplo 1.3.3 (Parametrización de la circunferencia). Para parametrizar una circunferencia, primero pensemos en el círculo unitario. En el círculo unitario, la abscisa (coordenada x) de cualquier punto es el coseno del ángulo que forma el eje horizontal con el segmento de radio que une el origen con tal punto. Asimismo, el seno del ángulo representa la ordenada (coordenada y).



Figura 1.1: Coordenadas de los puntos sobre una circunferencia unitaria.

Por lo tanto, se propone una parametrización de la circunferencia unitaria de la forma:

$$\sigma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sigma(t) = (\cos t, \sin t)$$

Así, si se graficase $\text{Img}(\sigma)$ como puntos en el plano se obtendría toda la circunferencia unitaria. Vale aclarar que se tomó el dominio como cerrado en 0 y abierto en 2π , para que, puesto que ambos valores de entrada corresponden al mismo punto de salida, la parametrización no tenga "puntos repetidos", es decir, que sea inyectiva (análogo a la inyectividad de funciones de \mathbb{R} a \mathbb{R}).

Para contemplar circunferencias de radio distinto de 1, vale con multiplicar el radio a cada componente de la parametrización. Además, para parametrizar aquellas que no estén centradas en el origen, se desplaza cada punto de salida de la parametrización por (x_0, y_0) , el centro de la nueva circunferencia. Por lo tanto, la parametrización de una circunferencia de radio $r \in \mathbb{R}^+$ centrada en (x_0, y_0) es:

$$\sigma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sigma(t) = (r \cdot \cos t + x_0, r \cdot \sin t + y_0)$$

1.4 Nociones de Topología

Definición 1.4.1 (Bola de radio δ y centro x_o). Sean $x_o \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ y d una distancia en \mathbb{R}^n . La *bola de radio δ y centro x_o* , que denotamos con $B_\delta(x_o)$, es el conjunto:

$$B_\delta(x_o) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_o) < \delta\}.$$

El conjunto

$$B_\delta^*(x_o) = B_\delta(x_o) - \{x_o\}$$

es la *bola reducida de radio δ y centro x_o* .

Definición 1.4.2 (Punto interior, interior de un conjunto). Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x_o \in A$. Decimos que x_o es *punto interior* de A si

$$\exists \delta > 0 / B_\delta(x_o) \subset A.$$

El *interior* de A , que denotamos con $(^\circ A)$ o \mathring{A} , es el conjunto de todos los puntos interiores de A :

$$(^{\circ}A) = \{x \in A : x \text{ es punto interior de } A\}.$$

Definición 1.4.3 (Conjunto abierto). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A es *abierto* si

$$\forall x_o \in A \exists \delta > 0 : B_\delta(x_o) \subset A. \quad (1)$$

Propiedad 1.4.1. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si y solo si $A = (^\circ A)$.

Definición 1.4.4 (Conjunto cerrado). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A es *cerrado* si su complemento $A^c = \mathbb{R}^n - A$ es abierto.

Definición 1.4.5 (Frontera de un conjunto). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. La *frontera* de A , que denotamos con ∂A o $\text{front}(A)$, es el conjunto:

$$\partial A = \{x_o \in \mathbb{R}^n : \forall \delta > 0 B_\delta(x_o) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\delta(x_o) \cap A^c \neq \emptyset\}.$$

Propiedad 1.4.2. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y solo si $\partial A \subset A$.

Definición 1.4.6 (Punto de acumulación). Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x_o \in \mathbb{R}^n$. Decimos que x_o es *punto de acumulación* de A si

$$\forall \delta > 0 (B_\delta(x_o) - \{x_o\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Denotamos el conjunto de todos los puntos de acumulación de A con A' :

$$A' = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto de acumulación de } A\}.$$

Definición 1.4.7 (Entorno de un punto). Sean $N \subset \mathbb{R}^n$ y $x_o \in \mathbb{R}^n$. Decimos que N es *entorno* de x_o si

$$\exists \delta > 0 : B_\delta(x_o) \subset N.$$

Definición 1.4.8 (Punto aislado). Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x_o \in A$. Decimos que x_o es *punto aislado* de A si x_o no es punto de acumulación de A .

⁽¹⁾i.e.: A es abierto si todos sus puntos son interiores.

Definición 1.4.9 (Conjunto acotado). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un *conjunto acotado* si existe $\delta > 0$ tal que la bola de radio δ centrada en el origen contiene al conjunto A , es decir, si $\exists \delta > 0 : A \subset B_\delta(\mathbf{0})$.

Equivalentemente, A es un *conjunto acotado* si $\exists \delta > 0, x_o \in \mathbb{R}^n : A \subset B_\delta(x_o)$.

1.5 Gráfica

Definición 1.5.1 (Gráfica de f).

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; se define la gráfica de f ; y se nota $graf(f)$; a

$$graf(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus (x_1, x_2, \dots, x_n) = A \wedge f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}\}$$

Para interpretar esta definición, podemos realizar un recuerdo a Análisis matemático 1, donde la $graf(f)$ de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x \subseteq A = Dom(f) \wedge y = f(x)\}$$

Planteamos de ejemplo: $f = x^2 - 1$ donde podemos ver que para cada valor de x , existe un único valor de y . Para encontrar la gráfica de la función, nos fijamos utilizando la siguiente tabla

x	$f(x)$
0	-1
1	0
-1	0
2	3
-2	3

Cuadro 1.1: Valores de $f(x)$

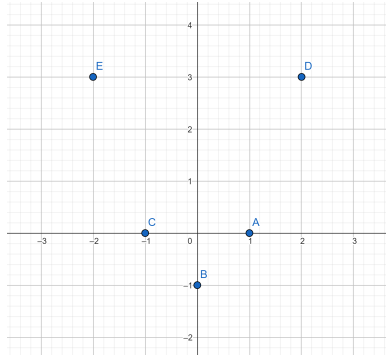


Figura 1.2: Puntos de tabla 1.

De esta manera, se puede empezar a representar la gráfica de f

Ahora, podemos pensar en las mismas definiciones pero analizandolas en \mathbb{R}^3 , donde la $graf(h)$ de una función $h : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$graf(h) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (x, y) \subseteq A = Dom(h) \wedge z = h(x, y)\}$$

En este curso, se analizarán las gráficas de funciones en \mathbb{R}^3 . Analizamos un ejemplo, tomando $h(x, y) = x^2 + y^2$. Para la función, que representa un paraboloide, los conjuntos de nivel están



Figura 1.3: Grafica de $f(x)$.

dados por $h(x, y) = c$, que son círculos concéntricos en el plano xy . Graficando esta función en 3D, podemos ver una superficie parabólica, donde los conjuntos de nivel son las proyecciones de estas circunferencias a diferentes alturas en el eje z y con radio creciente.

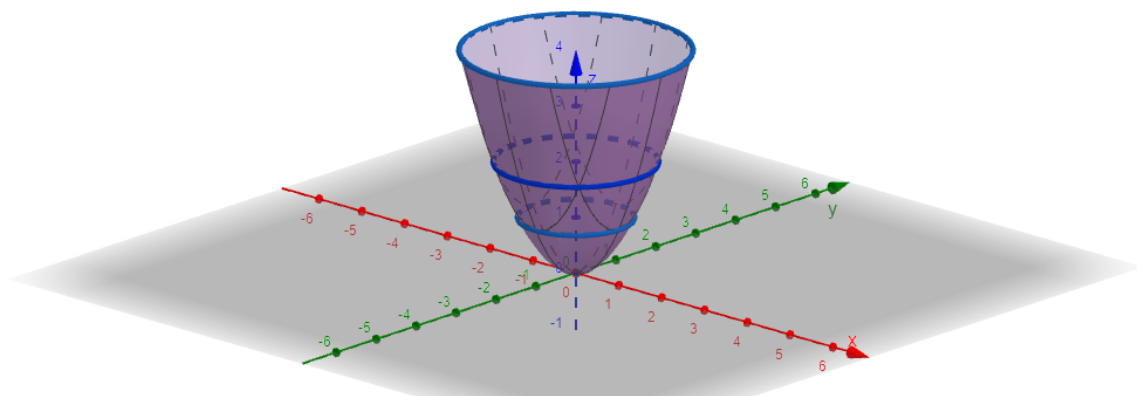


Figura 1.4: Gráfica de h y conjuntos de nivel tomando $c=\{1,2,4\}$

1.6 Conjunto de nivel

Definición 1.6.1 (Conjunto de nivel).

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $C \subseteq \mathbb{R}$. Entonces el conjunto de nivel del valor c se define como aquellos puntos $x \in U$ para los cuales $f(x) = c$. Si $n = 2$ hablamos de curva de nivel (del valor c) y si $n = 3$, hablamos de superficie de nivel y se nota, $C(c, f)$, tal que:

$$C(c, f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

En primer lugar, se empieza definiendo curva de nivel, donde se toma $n=2$.

$$C(c, f) = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = c\}$$

Ejemplo 1: Se toma la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, donde empezamos a analizar los distintos conjuntos

de nivel, tomando c como diferentes constantes

$$C(0, f) = \{(x, y) \in U \mid x^2 + y^2 = 0\}$$

$$C(1, f) = \{(x, y) \in U \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$$C(4, f) = \{(x, y) \in U \mid x^2 + y^2 = 4\}$$



Figura 1.5: Conjuntos de nivel

En general, podemos determinar:

$$C(c, f) = \begin{cases} \text{Circunferencia centrada en } (0,0) \text{ de radio } \sqrt{c}, & \text{si } c > 0 \\ (0, 0) & \text{si } c = 0 \\ \emptyset & \text{si } c < 0 \end{cases}$$

De esta manera, considerando la definicion de gráfica de una funcion, podemos representar la misma en \mathbb{R}^3 tomando la ecuacion del paraboloide: $z = x^2 + y^2$



Figura 1.6: Conjuntos de nivel y graf(f)

Ejemplo 2: Se toma la funcion $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, donde empezamos a analizar los distintos conjuntos de nivel, tomando c con diferentes constantes

$$C(0, f) = \{(x, y) \in U \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 0\}$$

$$C(1, f) = \{(x, y) \in U \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$$

$$C(2, f) = \{(x, y) \in U \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 2\}$$



Figura 1.7: Conjuntos de nivel

En general, podemos determinar:

$$C(c, f) = \begin{cases} \text{Circunferencia centrada en } (0,0) \text{ de radio } c, & \text{si : } c > 0 \\ (0, 0) & \text{si : } c = 0 \\ \emptyset & \text{si : } c < 0 \end{cases}$$



Figura 1.8: Conjuntos de nivel y graf(f)

De esta manera, considerando la definicion de gráfica de una funcion, podemos representar la misma en \mathbb{R}^3 tomando la ecuacion de la parte superior de un cono: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Observacion: si tomaramos la ecuacion $z^2 = x^2 + y^2$ al despejar z obtenemos $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ obtendriamos que:

$$C(c, f) = \begin{cases} \text{Circunferencia centrada en } (0,0) \text{ de radio } c, & \text{si } : c > 0 \\ (0,0) & \text{si } : c = 0 \\ \text{Circunferencia centrada en } (0,0) \text{ de radio } c, & \text{si } : c < 0 \end{cases}$$

De esta manera, considerando la definicion de gráfica de una funcion, podemos representar la misma en \mathbb{R}^3 tomando la ecuacion del cono: $z^2 = x^2 + y^2$

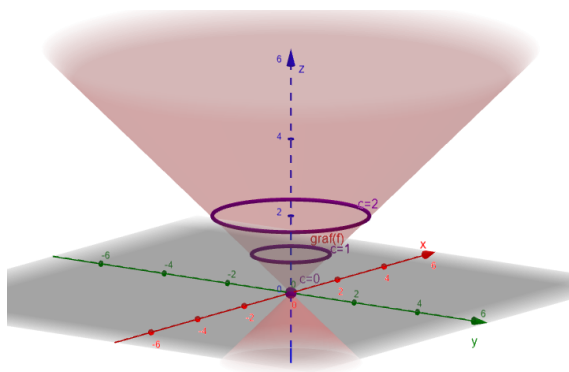


Figura 1.9: Conjuntos de nivel y graf(f)

1.7 Límite de Funciones

Definición 1.7.1 (Límite). Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función, $L \in \mathbb{R}^m$ y x_0 un punto de acumulación de A . Decimos que *el límite de f para x tendiendo a x_0 es L* o que *f tiende a L cuando x tiende a x_0* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / f(x) \in B_\varepsilon(L) \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A.$$

En este caso, utilizamos la notación

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Observación 1.7.1. Si f es un *campo escalar* (es decir, si en la definición (1.7.1) es $m = 1$), la condición

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / f(x) \in B_\varepsilon(L) \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A$$

es equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |f(x) - L| < \varepsilon \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A.$$

Observación 1.7.2. La definición de límite puede expresarse equivalentemente en términos de distancias o de normas:

- Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función, $L \in \mathbb{R}^m$ y x_0 un punto de acumulación de A . Decimos que *el límite de f para x tendiendo a x_0 es L* o que *f tiende a L cuando x tiende a x_0* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / d_m(f(x), L) < \varepsilon \forall x \in A : 0 < d_n(x, x_0) < \delta,$$

donde d_n y d_m son las distancias en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , respectivamente.

- Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función, $L \in \mathbb{R}^m$ y x_0 un punto de acumulación de A . Decimos que el límite de f para x tendiendo a x_0 es L o que f tiende a L cuando x tiende a x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \|f(x) - L\|_m < \varepsilon \forall x \in A : 0 < \|x - x_0\|_n < \delta,$$

donde $\|\cdot\|_n$ y $\|\cdot\|_m$ son las normas en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , respectivamente.

Teorema 1.7.1 (Unicidad del límite).

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función, x_0 un punto de acumulación de A y $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^m$ tales que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L_1 \quad \wedge \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L_2.$$

Entonces $L_1 = L_2$.

Demostración.

Las ideas utilizadas en la demostración de este teorema son las que siguen.
Como

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L_1,$$

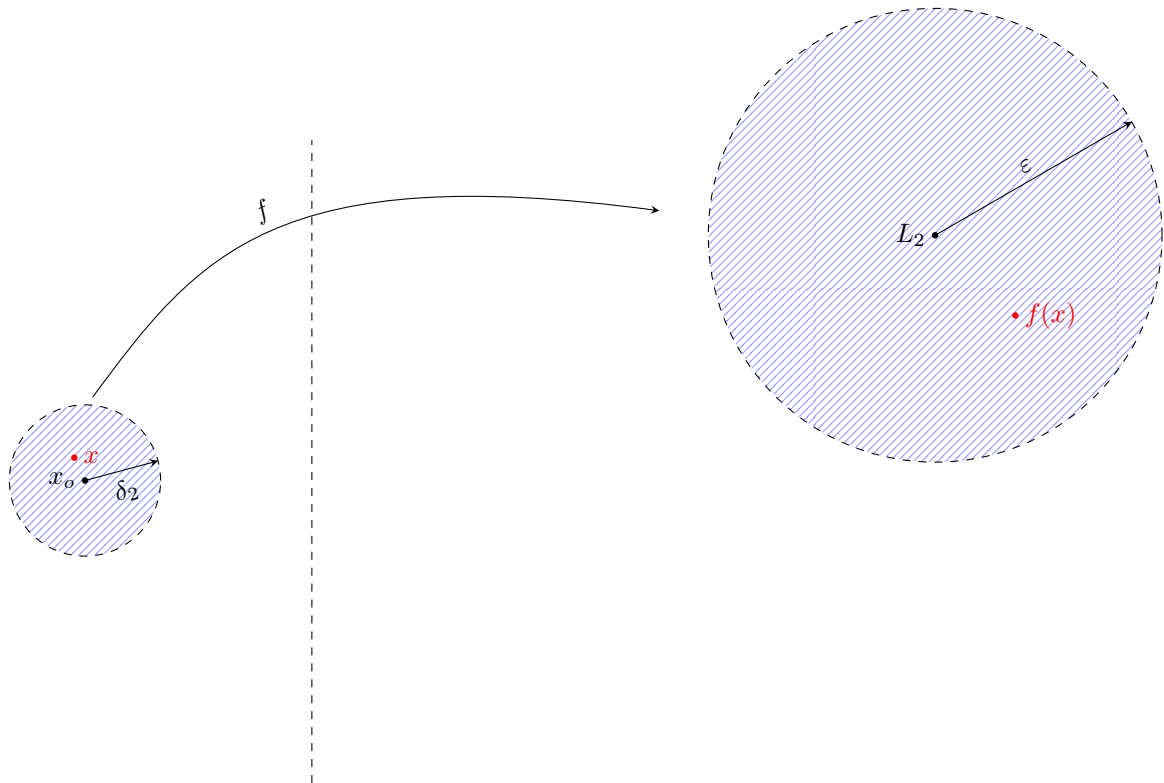
dado $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta_1 > 0$ tal que cada punto $x \in B_{\delta_1}^*(x_0) \cap A$ se aplica a través de f en algún punto de la bola de centro L_1 y radio ε .



De la misma manera, como

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L_2,$$

dado $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta_2 > 0$ tal que cada punto $x \in B_{\delta_2}^*(x_0) \cap A$ se aplica a través de f en algún punto de la bola de centro L_2 y radio ε .



Si suponemos que $L_1 \neq L_2$, por propiedad de la distancia es $d(L_1, L_2) > 0$ y podemos elegir

$$\varepsilon = \frac{d(L_1, L_2)}{2}.$$

Para este valor de ε podemos encontrar un punto x que se aplica por f en algún punto de la bola de centro L_1 y radio ε **y también** se aplica por f en algún punto de la bola de centro L_2 y radio ε , lo cual es absurdo, pues estas dos bolas son disjuntas.



Ahora sí, veamos la demostración formal del teorema.

Supongamos, por el absurdo, que $L_1 \neq L_2$, y sea $\varepsilon = d(L_1, L_2)/2 > 0$.

Como

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_o} L_1,$$

podemos elegir $\delta_1 > 0$ tal que $x \in B_{\delta_1}^*(x_o) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(L_1)$.

Como

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_o} L_2,$$

podemos elegir $\delta_2 > 0$ tal que $x \in B_{\delta_2}^*(x_o) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(L_2)$.

Notemos que, como sugiere la figura,

$$B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2) = \emptyset.$$

En efecto, de no ser así, sea $z \in B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2)$. Tenemos que:

$$2\varepsilon = d(L_1, L_2) \leq d(L_1, z) + d(z, L_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon. \text{ Absurdo.}$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Como $B_\delta^*(x_o) \subset B_{\delta_1}^*(x_o)$ y $B_\delta^*(x_o) \subset B_{\delta_2}^*(x_o)$, si tomamos algún $x \in B_\delta^*(x_o) \cap A^{(2)}$, vale que $f(x) \in B_\varepsilon(L_1)$ y también $f(x) \in B_\varepsilon(L_2)$, por lo que $f(x) \in B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2)$. Absurdo, pues $B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2) = \emptyset$. El absurdo provino de suponer que $L_1 \neq L_2$, por lo cual debe ser $L_1 = L_2$.

□

⁽²⁾Notemos que $B_\delta^*(x_o) \cap A \neq \emptyset$ porque x_o es un punto de acumulación de A .

Propiedad 1.7.1 (álgebra de límites). Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones y x_0 un punto de acumulación de A . Supongamos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= L_1 \in \mathbb{R}^m \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= L_2 \in \mathbb{R}^m.\end{aligned}$$

Entonces:

1. Linealidad

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = L_1 + L_2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f)(x) = \alpha L_1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2^{(3)}$$

3. Si $m = 1$ (i.e., si f y g son campos escalares), g es no nula en algún entorno de x_0 y $L_2 \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Propiedad 1.7.2. Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y x_0 un punto de acumulación de A . Sean $f_j : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) campos escalares tales que $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \quad \forall x \in A^{(4)}$.

Sea $L = (L_1, L_2, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$, $L_j \in \mathbb{R} \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f_j(x) = L_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

Propiedad 1.7.3. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función y x_0 un punto de acumulación de A . Las siguientes proposiciones son equivalentes:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0.$$

Demostración.

1. Veamos que (I) implica (II). Como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0,$$

⁽³⁾Si $m \geq 2$, “ \cdot ” representa el producto escalar en \mathbb{R}^m .

⁽⁴⁾Los campos escalares f_j quedan determinados unívocamente por F de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}f_j : A \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ f_j(x) &= F(x) \cdot e_j,\end{aligned}$$

donde e_j es el j -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^m .

por definición de límite, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \forall x \in B_\delta^*(x_o) \cap A.$$

Para este valor de δ se cumple que

$$\left| |f(x)| - 0 \right| = \left| |f(x)| \right| = |f(x)| = |f(x) - 0| < \varepsilon \forall x \in B_\delta^*(x_o) \cap A,$$

de modo que, por definición,

$$\lim_{x \rightarrow x_o} |f(x)| = 0.$$

2. Veamos que (II) implica (I). Como

$$\lim_{x \rightarrow x_o} |f(x)| = 0,$$

por definición de límite, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$\left| |f(x)| - 0 \right| < \varepsilon \forall x \in B_\delta^*(x_o) \cap A.$$

Para este valor de δ se cumple que

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = \left| |f(x)| \right| = \left| |f(x)| - 0 \right| < \varepsilon \forall x \in B_\delta^*(x_o) \cap A,$$

de modo que, por definición,

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = 0.$$

□

Propiedad 1.7.4. Sean $f, g, h : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones y x_o un punto de acumulación de A . Supongamos que $\exists \delta_o > 0$ tal que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x \in B_{\delta_o}(x_o) \cap A.$$

Si $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_o} h(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = L.$$

Propiedad 1.7.5. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones y x_o un punto de acumulación de A . Si $\exists \delta_o > 0$ tal que f es acotada en $B_{\delta_o}(x_o) \cap A$ (i.e.: $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M \forall x \in B_{\delta_o}(x_o) \cap A$) y $\lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_o} (f \cdot g)(x) = 0.$$

Demostración.

Supongamos que, para cierto $\delta_o > 0$, f es acotada en $B_{\delta_o}(x_o) \cap A$, y sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in B_{\delta_o}(x_o) \cap A$. Como

$$\lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = 0,$$

dado $\varepsilon > 0$, por definición de límite, podemos elegir $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \forall x \in B_{\delta_1}^*(x_o) \cap A.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_o, \delta_1\}$.

Se cumple que

$$|(f \cdot g)_{(x)} - 0| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq M |g(x)| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta^*(x_o) \cap A,$$

Por lo tanto, por definición de límite,

$$\lim_{x \rightarrow x_o} (f \cdot g)_{(x)} = 0.$$

□

Propiedad 1.7.6 (Límite de la composición).

Sean f, g funciones

$$\begin{aligned} g &: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m \\ f &: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p, \end{aligned}$$

y puntos $a \in A', b \in B'$ tales que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \quad \wedge \quad \lim_{u \rightarrow b} f(u) = L.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)_{(x)} = L.$$

Ejemplo 1.7.1. Veamos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

En efecto, sabemos que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1,$$

y que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 = 0.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(u) &= \frac{\sin(u)}{u} \\ g &: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x,y) &= x^2 + y^2, \end{aligned}$$

por la propiedad (1.7.6) es

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f \circ g)_{(x,y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Una consecuencia directa de la propiedad (1.7.6) es el siguiente corolario:

Corolario 1.7.1 (Límites por curvas). Sean $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (x_o, y_o) un punto de acumulación de A y $L \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = L.$$

Entonces, para cualesquiera funciones continuas $g_1, g_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, para algún $t_o \in I'$

$$\lim_{t \rightarrow t_o} (g_1(t), g_2(t)) = (x_o, y_o)$$

y, además, $(g_1(t), g_2(t)) \in A \forall t \in (I - \{t_o\})$, se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow t_o} f(g_1(t), g_2(t)) = L.$$

Ejemplo 1.7.2.

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x - y}.$$

Veamos que f no tiene límite para $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

[(a)]

1. Sean $g_1(t) = t$, $g_2(t) = t + t^2$.

$$f(g_1(t), g_2(t)) = f(t, t + t^2) = \frac{t^2}{-t^2} \rightarrow -1 \text{ cuando } t \rightarrow 0,$$

de modo que, *si f tiene límite*, el límite es -1, por (1.7.1) y la unicidad del límite.

2. Sean $g_1(t) = t$, $g_2(t) = t - t^2$.

$$f(g_1(t), g_2(t)) = f(t, t - t^2) = \frac{t^2}{t^2} \rightarrow 1 \text{ cuando } t \rightarrow 0,$$

de modo que, *si f tiene límite*, el límite es 1, por (1.7.1) y la unicidad del límite.

Por lo tanto, por la unicidad del límite (teorema (1.7.1)), *si f tiene límite L* , $L = 1 = -1$, lo que es un absurdo. El absurdo provino de suponer que f tiene límite, por lo cual f no puede tener límite.

Propiedad 1.7.7 (Límites iterados). Sean $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (x_o, y_o) un punto de acumulación de A y $L \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = L.$$

1. Si para cada $x \neq x_o$ existe el límite

$$\lim_{y \rightarrow y_o} f(x, y) = g(x)$$

y además existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_o} \left(\lim_{y \rightarrow y_o} f(x, y) \right) = L_1,$$

entonces $L = L_1$.

2. Si para cada $y \neq y_o$ existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x, y) = h(y)$$

y además existe el límite

$$\lim_{y \rightarrow y_o} h(y) = \lim_{y \rightarrow y_o} \left(\lim_{x \rightarrow x_o} f(x, y) \right) = L_2,$$

entonces $L = L_2$.

Propiedad 1.7.8 (Límites por conjuntos). Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función, con $A = A_1 \cup A_2$. Sea f_1 la restricción de f a A_1 :

$$\begin{aligned} f_1 : A_1 \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ f_1(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Sea f_2 la restricción de f a A_2 :

$$\begin{aligned} f_2 : A_2 \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ f_2(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Sean $x_o \in A'_1 \cap A'_2$ y $L \in \mathbb{R}^m$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_o} f_1(x) = L \wedge \lim_{x \rightarrow x_o} f_2(x) = L.$$

Ejemplo 1.7.3.

Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Veamos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$.

Sean $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ y

$$\begin{aligned} f_1 : A_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f_1(x, y) &= \frac{e^x - 1}{x}, \\ f_2 : A_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f_2(x, y) &= 1. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0,$$

por la propiedad (1.7.6) es

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = 1.$$

Como además $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) = 1$ y $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}^2$, por la propiedad (1.7.8) es

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1.$$

Definición 1.7.2 (Límite infinito). Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función y x_0 un punto de acumulación de A .

1. Decimos que *el límite de f para x tendiendo a x_0 es $+\infty$* o que *f tiende a $+\infty$ cuando x tiende a x_0* si

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 / f(x) > M \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A.$$

En este caso, utilizamos la notación

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$

2. Decimos que *el límite de f para x tendiendo a x_0 es $-\infty$* o que *f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a x_0* si

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 / f(x) < -M \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A.$$

En este caso, utilizamos la notación

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

3. Decimos que *el límite de f para x tendiendo a x_0 es ∞* o que *f tiende a ∞ cuando x tiende a x_0* si

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 / |f(x)| > M \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A.$$

En este caso, utilizamos la notación

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Definición 1.7.3 (Límite en el infinito). Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que

$$f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} L \quad \text{o} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / f(x) \in B_\varepsilon(L) \forall x / \|x\| > \delta.$$

1.8 Diferenciabilidad

Definición 1.8.1 (Diferenciabilidad de campos escalares). Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (A)^\circ$. Decimos que f es *diferenciable en x_0* si $\exists m \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Si A es un conjunto abierto, decimos que f es *diferenciable* si es diferenciable en cada punto $x_0 \in A$.

Definición 1.8.2 (Diferenciabilidad, caso general).

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in (A)^\circ$. Decimos que f es *diferenciable en x_0* si $\exists M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - M \cdot (x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Si A es un conjunto abierto, decimos que f es *diferenciable* si es diferenciable en cada punto $x_0 \in A$.

Teorema 1.8.1 (Diferenciabilidad y continuidad).

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_o \in (A)^\circ$. Si f es diferenciable en x_o , entonces f es continua en x_o .

Demostración.

Como f es diferenciable en x_o , $\exists m \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0.$$

Por lo tanto, $\exists \delta_o > 0$ tal que

$$x \in B_{\delta_o}^* \cap A \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} \right| < 1.$$

Entonces, para este δ_o , se cumple que

$$|f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)| < \|x - x_o\|, \forall x \in B_{\delta_o}^* \cap A.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_o)| &= |f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o) + m \cdot (x - x_o)| \leq \\ &\leq |f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)| + |m \cdot (x - x_o)| < \\ &< \|x - x_o\| + |m \cdot (x - x_o)|, \forall x \in B_{\delta_o}^* \cap A. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|m \cdot (x - x_o)| \leq \|m\| \|x - x_o\|$, y entonces:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_o)| &< \|x - x_o\| + |m \cdot (x - x_o)| \leq \\ &\leq \|x - x_o\| + \|m\| \|x - x_o\| = \\ &= (1 + \|m\|) \|x - x_o\|, \forall x \in B_{\delta_o}^* \cap A. \end{aligned}$$

Esta condición garantiza la continuidad de f en x_o . En efecto, dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = \min\{\delta_o, \frac{\epsilon}{1+\|m\|}\}$.

Para este δ se cumple que:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_o)| &< (1 + \|m\|) \|x - x_o\| < \\ &< (1 + \|m\|) \delta \leq \\ &\leq (1 + \|m\|) \frac{\epsilon}{1 + \|m\|} = \epsilon, \forall x \in B_{\delta}^* \cap A, \end{aligned}$$

lo que, por definición de límite ⁽⁵⁾, significa que

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o).$$

Es decir, f es continua en x_o . □

Observación 1.8.1. La implicación recíproca de la proposición (1.8.1) es falsa.

Demostración. La función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(t) &= |t| \end{aligned}$$

es continua en $t_o = 0$, pero no es diferenciable en $t_o = 0$. Se deja como ejercicio para el lector verificar esta afirmación. □

⁽⁵⁾ Como $x_o \in (A)^\circ$, x_o es un punto de acumulación de A .

Teorema 1.8.2 (Diferenciabilidad y existencia de derivadas parciales).

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_o \in (A)^o$, tales que $\exists m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n /$

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0$$

(es decir, f es diferenciable en x_o). Entonces existen las derivadas parciales de f en x_o y, además,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) = m_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Demostración.

Sea $x = x_o + he_j$, siendo $h \in \mathbb{R}$ y e_j el j -ésimo vector canónico (el vector de \mathbb{R}^n que tiene un 1 en la posición j y ceros en todas las demás). Es decir, definimos una función $g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n / g(h) = x_o + he_j$, con $\delta > 0$, lo suficientemente pequeño como para que $\text{Im}(g) \subset A$ ⁽⁶⁾, y llamamos $x = g(h)$. Notemos que $g(h) \rightarrow x_o$ cuando $h \rightarrow 0$.

Por la diferenciabilidad, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0$$

y entonces, si componemos con la función g (reemplazamos $x = x_o + he_j$), la propiedad del límite de la composición (1.7.6) implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - m \cdot ((x_o + he_j) - x_o)}{\|(x_o + he_j) - x_o\|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - m \cdot (he_j)}{\|he_j\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - h(m \cdot e_j)}{\|he_j\|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{|h|}. \end{aligned}$$

Ahora bien, este límite es 0 si y solo si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{|h|} \right| = 0,$$

por la propiedad (1.7.3). Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{|h|} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j|}{||h||} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{h} \right|, \end{aligned}$$

lo cual, otra vez por la propiedad (1.7.3), implica que

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right).$$

Es fácil probar por definición que esta última condición implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} = m_j.$$

⁽⁶⁾¿Culál de las hipótesis asegura la existencia de un tal δ ?

En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \left(\frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right) - 0 \right| < \epsilon, \forall h : 0 < |h| < \delta,$$

porque el límite es 0. Como claramente

$$\left| \left(\frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right) - 0 \right| = \left| \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right|,$$

se tiene (por definición de límite) que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} = m_j.$$

Esto último, por definición de derivada parcial, significa que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) = m_j,$$

como queríamos probar.

□

Observación 1.8.2. Es un error decir, en el último paso de la demostración, que por la linealidad del límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} m_j = 0,$$

ya que la existencia del límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} \right)$$

es parte de lo que debemos probar.

Observación 1.8.3. La implicación recíproca de la proposición (1.8.2) es falsa.

Demostración.

La función

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el origen, pero no es diferenciable en el origen. Se deja como ejercicio para el lector la demostración de esta afirmación.

□

Una consecuencia directa del teorema (1.8.2) es el siguiente corolario:

Corolario 1.8.1. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_o \in (A)^\circ$. Son equivalentes:

1. f es diferenciable en x_o ;

2. existen todas las derivadas parciales de f en x_o y

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - \nabla f(x_o) \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0.$$

Teorema 1.8.3 (Diferenciabilidad y existencia de derivadas direccionales).

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x_o \in (A)^\circ$. Entonces, $\forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\tilde{u}\| = 1$ existe en x_o la derivada de f en la dirección de \tilde{u} y, además,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}.$$

Demostración.

Sea $x = x_o + h\tilde{u}$, siendo $h \in \mathbb{R}$. Es decir, definimos una función

$$\begin{aligned} g : (-\delta, \delta) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ g(h) &= x_o + h\tilde{u} \end{aligned}$$

con $\delta > 0$, lo suficientemente pequeño como para que $\text{Im}(g) \subset A$, y llamamos $x = g(h)$. Notemos que $g(h) \rightarrow x_o$ cuando $h \rightarrow 0$.

Por la diferenciabilidad, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - \nabla f(x_o) \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0$$

y entonces, si componemos con la función g (reemplazamos $x = x_o + h\tilde{u}$), la propiedad del límite de la composición (1.7.6) implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o) - \nabla f(x_o) \cdot ((x_o + h\tilde{u}) - x_o)}{\|(x_o + h\tilde{u}) - x_o\|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o) - \nabla f(x_o) \cdot (h\tilde{u})}{\|h\tilde{u}\|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o) - h\nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}}{|h|\|\tilde{u}\|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o) - h\nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}}{|h|}. \end{aligned}$$

Como en la demostración de la propiedad (1.8.2), este límite es 0 si y solo si

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o) - h\nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o)}{h} - \nabla f(x_o) \cdot \tilde{u} \right),$$

que, como en la demostración de (1.8.2), implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o)}{h} = \nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}$$

y por lo tanto, por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}.$$

□

Teorema 1.8.4 (Valores extremos de la derivada direccional).

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un punto $x_o \in (A)^\circ$. Entonces

$$\max_{\|\tilde{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \|\nabla f(x_o)\|, \quad \min_{\|\tilde{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = -\|\nabla f(x_o)\|$$

y, si $\nabla f(x_o) \neq \mathbf{0}$,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \|\nabla f(x_o)\| \iff \tilde{u} = \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = -\|\nabla f(x_o)\| \iff \tilde{u} = -\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}.$$

Demostración.

Como f es diferenciable en x_o , por el teorema (1.8.3), $\forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\tilde{u}\| = 1$ existe en x_o la derivada de f en la dirección de \tilde{u} y, además,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) \right| = |\nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}| \leq \|\nabla f(x_o)\| \|\tilde{u}\| = \|\nabla f(x_o)\|,$$

de modo que tenemos las cotas:

$$-\|\nabla f(x_o)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) \leq \|\nabla f(x_o)\|.$$

Además, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dice que vale

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) \right| = \|\nabla f(x_o)\|$$

si y solo si el conjunto $\{\nabla f(x_o), \tilde{u}\}$ es linealmente dependiente, condición que, si $\nabla f(x_o) \neq \mathbf{0}$, es equivalente a decir que \tilde{u} es un vector unitario en la dirección de $\nabla f(x_o)$. Existen exactamente dos vectores \tilde{u} con esta característica:

$$\tilde{u}_1 = \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} \quad \text{y} \quad \tilde{u}_2 = -\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}.$$

Por cálculo directo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}_1}(x_o) &= \nabla f(x_o) \cdot \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} = \frac{\nabla f(x_o) \cdot \nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} = \frac{\|\nabla f(x_o)\|^2}{\|\nabla f(x_o)\|} = \|\nabla f(x_o)\| \\ \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}_2}(x_o) &= \nabla f(x_o) \cdot \left(-\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} \right) = -\frac{\nabla f(x_o) \cdot \nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} = -\frac{\|\nabla f(x_o)\|^2}{\|\nabla f(x_o)\|} = -\|\nabla f(x_o)\|, \end{aligned}$$

de modo que efectivamente

$$\max_{\|\tilde{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \|\nabla f(x_o)\|$$

y el máximo se realiza en $\tilde{u}_1 = \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}$, y

$$\min_{\|\tilde{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = -\|\nabla f(x_o)\|$$

y el m3nimo se realiza en $\check{u}_2 = -\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}$.

Finalmente, observemos que, si $\nabla f(x_o) = \mathbf{0}$,

$$\frac{\partial f}{\partial \check{u}}(x_o) = \nabla f(x_o) \cdot \check{u} = 0 = \|\nabla f(x_o)\| \quad \forall \check{u} \in \mathbb{R}^n,$$

y por lo tanto:

$$\max_{\|\check{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \check{u}}(x_o) = \|\nabla f(x_o)\| = 0$$

y

$$\min_{\|\check{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \check{u}}(x_o) = -\|\nabla f(x_o)\| = 0.$$

□

Teorema 1.8.5 (Regla de la cadena).

Sean f, g funciones

$$\begin{aligned} g &: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m \\ f &: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p, \end{aligned}$$

y un punto $x_o \in A^\circ$ tal que $g(x_o) \in B^\circ$. Supongamos que g es diferenciable en x_o y que f es diferenciable en $y_o = g(x_o)$. Entonces la composici3n $f \circ g$ es diferenciable en x_o y, adem3s,

$$\mathbf{D}(f \circ g)_{(x_o)} = \mathbf{D}f_{(y_o)} \mathbf{D}g_{(x_o)}.$$

Teorema 1.8.6 (Teorema de la Funci3n Inversa).

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funci3n de clase \mathcal{C}^1 . Sea $x_o \in A$ y supongamos que $\det(\mathbf{D}F_{(x_o)}) \neq 0$. Entonces existen un entorno abierto $U \subset A$ de x_o y un entorno abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ de $F(x_o)$ tal que $F : U \rightarrow V$ (la restricci3n de F a U) tiene inversa $F^{-1} : V \rightarrow U$. Esta funci3n F^{-1} es de clase \mathcal{C}^1 y, adem3s,

$$\mathbf{D}F_{(F(x_o))}^{-1} = [\mathbf{D}F_{(x_o)}]^{-1}.$$

Si F es de clase $\mathcal{C}^p, p \geq 1$, entonces F^{-1} tambi3n.

Teorema 1.8.7 (Caso particular del Teorema de la Funci3n Impl3cita).

Sean $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funci3n de clase \mathcal{C}^1 . Sea $(x_o, y_o, z_o) \in A$ tal que $F(x_o, y_o, z_o) = 0$. Supongamos que

$$F_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0.$$

Entonces existen un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ de (x_o, y_o) y una 3nica funci3n $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $g(x_o, y_o) = z_o$ y

$$F(x, y, g(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in U.$$

Más aón, g es de clase \mathcal{C}^1 y, además, $\forall (x, y) \in U$ vale que

$$g_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, g(x, y))}{F_z(x, y, g(x, y))}$$

$$g_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, g(x, y))}{F_z(x, y, g(x, y))}$$

Si F es de clase $\mathcal{C}^p, p \geq 1$, entonces g también.

Teorema 1.8.8 (Teorema de la Función Implícita).

Sean $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase \mathcal{C}^1 . Sea $(x_o, z_o) \in A$ tal que $F(x_o, z_o) = \mathbf{0}$. Formemos el determinante

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial z_m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_m} \end{bmatrix},$$

donde $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ y todas las derivadas estén evaluadas en (x_o, z_o) . Si $\Delta \neq 0$, entonces existen un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_o y una ónica función $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que $g(x_o) = z_o$ y

$$F(x, g(x)) = \mathbf{0} \forall x \in U.$$

Más aón, g es de clase \mathcal{C}^1 y, además, si $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial z_m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Si F es de clase $\mathcal{C}^p, p \geq 1$, entonces g también.

1.9 Extremo de Funciones a Valores Reales

Definición 1.9.1 (Extremos locales y globales).

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_o \in A$. Decimos que:

- f tiene un *máximo local* o *relativo* en x_o si $\exists \delta > 0 : f(x_o) \geq f(x) \forall x \in B_\delta(x_o) \cap A$.
- f tiene un *mínimo local* o *relativo* en x_o si $\exists \delta > 0 : f(x_o) \leq f(x) \forall x \in B_\delta(x_o) \cap A$.

- f tiene un *máximo global* o *absoluto* en x_o si $f(x_o) \geq f(x) \forall x \in A$.
- f tiene un *mínimo global* o *absoluto* en x_o si $f(x_o) \leq f(x) \forall x \in A$.

Decimos que f tiene un *extremo* en x_o si f tiene un máximo o mínimo (absoluto o relativo) en x_o .

Observación 1.9.1. Notemos que todo extremo absoluto es *también* un extremo relativo. La recíproca de esta afirmación es falsa (un extremo relativo no tiene por qué ser absoluto).

Teorema 1.9.1 (Condición necesaria de extremo). Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en algún entorno abierto de $x_o \in (A)^\circ$. Supongamos que f tiene un extremo en x_o . Entonces

$$\nabla f(x_o) = \mathbf{0}.$$

Definición 1.9.2 (Punto crítico). Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_o \in (A)^\circ$. Decimos que x_o es un *punto crítico* de f si f no es diferenciable en x_o o $\nabla f(x_o) = \mathbf{0}$.

Definición 1.9.3 (Punto silla). Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_o \in (A)^\circ$. Si x_o es un punto crítico de f y f no tiene un extremo en x_o , decimos que f tiene un *punto silla* en x_o .

Teorema 1.9.2 (Criterio de la derivada segunda).

Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^2 . Sea $(x_o, y_o) \in A$ y supongamos que $\nabla f(x_o, y_o) = \mathbf{0}$. Entonces,

1. si $\det(\mathbf{H}_f(x_o, y_o)) > 0$ y

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, f tiene un mínimo local en (x_o, y_o) ;

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, f tiene un máximo local en (x_o, y_o) ;

2. si $\det(\mathbf{H}_f(x_o, y_o)) < 0$, f tiene un *punto silla* en (x_o, y_o) .

Teorema 1.9.3 (de los valores extremos de Weierstrass). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y acotado y $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo absoluto en A .

Teorema 1.9.4 (Método de multiplicadores de Lagrange). Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase \mathcal{C}^1 . Sea $x_o \in U$ y sea $c = g(x_o)$. Sea S el conjunto de nivel c de g . Supongamos que $\nabla g(x_o) \neq \mathbf{0}$. Si $f|_S$ (que denota a la restricción de f a S) tiene un extremo local en x_o , entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_o) = \lambda \nabla g(x_o).$$

Contenido Teórico. Segunda parte

2.1 Operadores

Definición 2.1.1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, U abierto, diferenciable en U . Se define el **gradiente** de f , y se nota $\nabla f(\mathbf{x})$, evaluado en \mathbf{x} como el vector en el espacio \mathbb{R}^n dado por

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right),$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. ◇

Definición 2.1.2. Sea $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, U abierto, de clase $C^1(U)$. Se define la **divergencia** de \mathbf{F} como

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n},$$

donde $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, con cada $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$). ◇

Definición 2.1.3. Sea $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U abierto, de clase $C^1(U)$. Se define el **rotor** de \mathbf{F} como

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial z}, \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x}, \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial y} \right),$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$. Y para el caso en el que $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, con las mismas condiciones, el **rotor** es

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial y} \right). \quad \diamond$$

Estas fórmulas son más fáciles de recordar si pensamos a “nabla” ∇ como el operador tal que

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Por lo que, pensando a ∇ como un vector, la divergencia es el producto escalar de ∇ con un campo vectorial y para el caso en \mathbb{R}^3 es el producto vectorial. Esto último es

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Definición 2.1.4. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, U abierto, un campo escalar de clase $C^2(U)$. Se define el **laplaciano** de f , y se lo nota, como

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \text{div grad } \mathbf{F}.$$

Y para el caso de un campo vectorial $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $C^2(\mathbb{R}^n)$, el **laplaciano** escalar

$$\Delta \mathbf{F} = (\Delta f_1, \Delta f_2, \dots, \Delta f_n). \quad \diamond$$

AGREGAR EJEMPLOS

Definición 2.1.5. Sea un campo vectorial \mathbf{F} . Si $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, lo llamamos **irrotacional**. Si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, lo llamamos **solenoidal**. \diamond

Definición 2.1.6. Sea un campo escalar f o vectorial \mathbf{F} vectorial, lo llamamos **armónico** si $\Delta f = 0$ o $\Delta \mathbf{F} = 0$. \diamond

Propiedad 2.1.1. Los operadores vectoriales son aplicaciones lineales. Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\nabla(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha \nabla f(\mathbf{x}) + \beta \nabla g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U$
2. $\nabla \cdot (\alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U$
3. $\nabla \times (\alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \alpha \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U$ \diamond

Propiedad 2.1.2. Regla de Leibniz para el producto. Sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar tal que $h \in C^1$.

1. Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $C^1(U)$, entonces $\nabla \cdot (h\mathbf{F}) = h \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla h \cdot \mathbf{F}$
2. Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (o \mathbb{R}^2) de clase $C^1(U)$, entonces $\nabla \times (h\mathbf{F}) = h \nabla \times \mathbf{F} + \nabla h \times \mathbf{F}$ \diamond

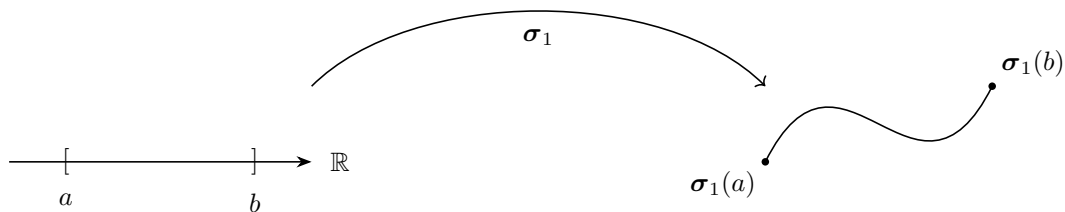
Propiedad 2.1.3. Productos:

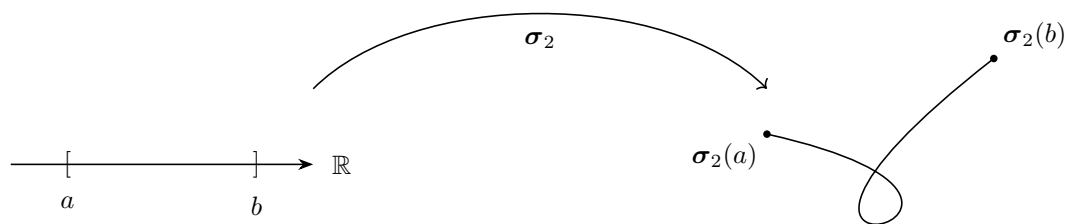
1. $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$
2. $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$ \diamond

2.2 Curvas

Definición 2.2.1. Falta definición C^1 a trozos.

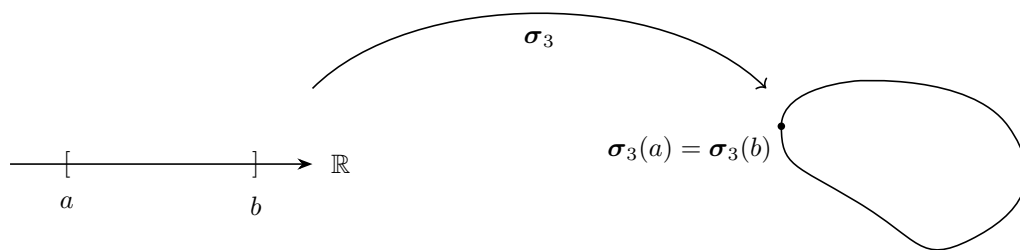
Definición 2.2.2. Se define una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ como la imagen de una trayectoria $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y de clase C^1 a trozos. Si $I = [a, b]$ a los puntos $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ se los llama extremos de la curva. \diamond





desp agrego las leyendas

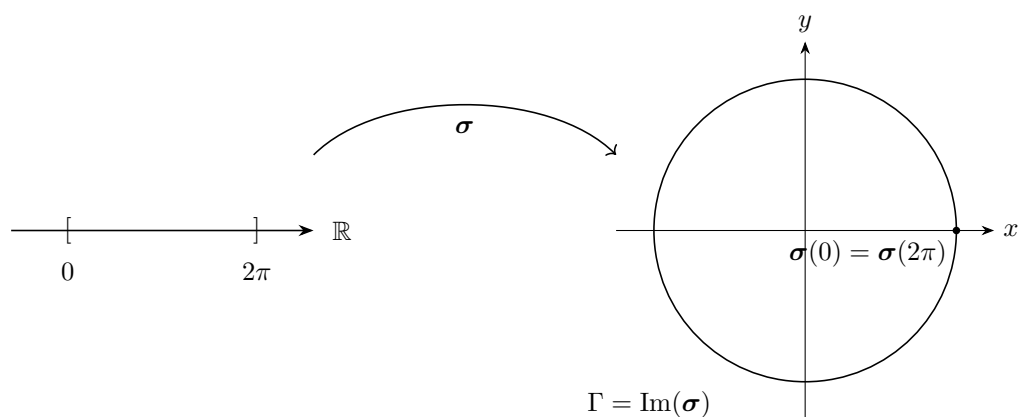
Definición 2.2.3. Si $\sigma(a) = \sigma(b)$ entonces Γ se llama curva cerrada.



Definición 2.2.4. Si σ es inyectiva en I , salvo tal vez en sus bordes, entonces se llama a Γ curva simple.

Ejemplo 2.2.1. Γ_1 y Γ_3 son curvas simples. Γ_2 no es una curva simple.

Ejemplo 2.2.2. Sea la trayectoria $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \Gamma$, tal que $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$. La curva $\Gamma = \text{Im}(\sigma)$ es la que se muestra a continuación.



Definición 2.2.5. .Continuidad a trozos. Igual que C1 a trozos.

◇

Cada curva simple Γ tiene asociadas dos orientaciones o sentidos posibles. Si los puntos P y Q son los extremos de la curva, y $P \neq Q$, entonces podemos considerar a Γ con orientación desde P hacia Q o bien desde Q hacia P . **Si $P=Q$ definir horario y antihorario.**

Definición 2.2.6. Se define una parametrización de una curva simple $\Gamma \in \text{Re}^n$ como una trayectoria $\sigma : I \subseteq \text{Re} \rightarrow \text{Re}^n$ continua, de clase C^1 a trozos, inyectiva en I° y $\text{Im}(\sigma) = \Gamma$. \diamond

Definición 2.2.7. Una parametrización $\sigma : I \subset \text{Re} \rightarrow \text{Re}^n$ se llama regular si $\sigma'(t) \neq 0, \forall t \in I^\circ$. \diamond

2.3 Integrales Dobles

Definición 2.3.1. Dada una función continua $f : B \rightarrow \text{Re}$, donde B es un rectángulo en Re^2 , se define la suma de Reimann de f sobre B , partiendo los dos lados de B en n partes iguales y formando la suma, a

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta A,$$

donde $c_{ij} \in B_{ij}$, el ij -ésimo rectángulo en la partición de B , y ΔA es el área de B_{ij} . \diamond

Definición 2.3.2. Sean $B = [a, b] \times [c, d]$ y $f : B \rightarrow \text{Re}$ una función acotada. El límite $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, se llama **integral doble** de f sobre B , y se nota $\iint_U f dA$, a

$$\iint_U f dA = \iint_U f(x, y) dx dy. \quad \diamond$$

Aclaremos que el $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{ij} = dA$? Y que $dA = dx dy$?

Para extender esta noción de integral a un conjunto acotado más general, esto es, conjuntos que puedan ser encerrados por un rectángulo, definimos lo siguiente.

Definición 2.3.3. Dada $f : B \rightarrow \text{Re}$, se define la función f^* tal que

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Entonces si B es una caja que contiene a D y ∂D está formada por las gráficas de un número finito de funciones continuas, f^* será integrable. Luego, se define

$$\iint_D f dA = \iint_B f^* dA. \quad \diamond$$

Observación 2.3.1. Notar que esta integral es independiente de la selección de B .

Propiedad 2.3.1. Sean f, g dos funciones integrables en una región $D \subset \text{Re}^2$, entonces:

- i. $\alpha f + \beta g$ es integrable en D , $\forall \alpha, \beta \in \text{Re}$ y además

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) dA = \alpha \iint_D f dA + \beta \iint_D g dA.$$

- ii. El producto fg es integrable en D .
- iii. Si $|g(x, y)| \geq k > 0 \forall (x, y) \in D$, el cociente f/g es integrable en D .
- iv. Si $f \geq 0$ en D , $\iint_D f \, dA \geq 0$.
- v. Si $f \leq g$ en D , $\iint_D f \, dA \leq \iint_D g \, dA$.
- vi. Si $|f|$ es integrable en D , entonces

$$\left| \iint_D f \, dA \right| \leq \iint_D |f| \, dA.$$

- vii. Si $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, es una partición de D , f es integrable en $D \iff f$ es integrable en D_1 y D_2 . En este caso

$$\iint_D f \, dA = \iint_{D_1} f \, dA + \iint_{D_2} f \, dA. \quad \diamond$$

Definición 2.3.4. Conjuntos elementales en \mathbb{R}^2 . Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

- i. Decimos que el conjunto elemental D es de *tipo 1* si existen funciones continuas $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$x \in [a, b], \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x),$$

donde $\phi_1(x) \leq \phi_2(x) \forall x \in [a, b]$.

- ii. Decimos que el conjunto elemental D es de *tipo 2* si existen funciones continuas $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que D es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen

$$y \in [c, d], \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),$$

donde $\psi_1(y) \leq \psi_2(y) \forall y \in [c, d]$.

- iii. D se llama conjunto elemental de *tipo 3* si es *tipo 1* y *tipo 2* a la vez. \diamond

Corolario 2.3.1. 1. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto de tipo 1. Y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

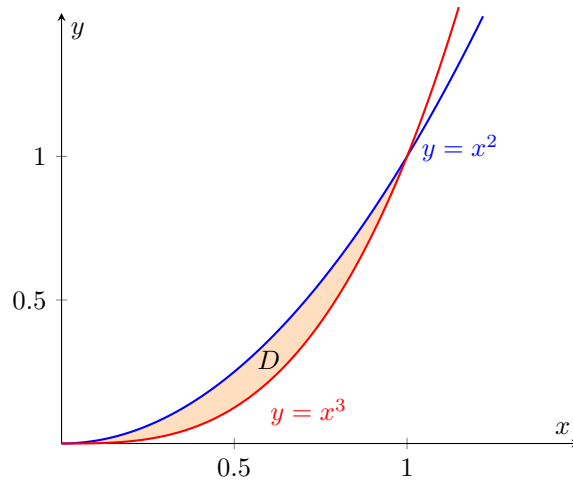
- 2. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto de tipo 2. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces

$$\iint_D f = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

3. Si D es de tipo 3 y f continua, entonces

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad \diamond$$

Ejemplo 2.3.1. Calcular $\iint_D f$, donde $f(x, y) = x^2 y$, donde D es la región del plano encerrado entre $y = x^3$, $y = x^2$, con $x \in [0, 1]$.



En este caso

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; x^3 \leq y \leq x^2\}.$$

Luego D es de tipo 1. Notar que la única manera de demostrar que un conjunto es elemental es dando su descripción implícita. Por el Corolario 2.3.1

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y dA &= \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^3}^{x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 ((x^2)^2 - (x^3)^2) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^6 - \frac{1}{2} x^8 dx \\ &= \frac{1}{14} x^7 - \frac{1}{18} x^9 \Big|_0^1 = \frac{1}{14} - \frac{1}{18}. \end{aligned} \quad \diamond$$

Definición 2.3.5. Se define el área de un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, y se nota $A(D)$ como la integral, si existe, de la función 1. Es decir,

$$A(D) = \iint_D 1 dA. \quad \diamond$$

Teorema 2.3.1. Teorema del valor medio para integrales dobles. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua y D es un conjunto elemental. Entonces existe (x_0, y_0) en D tal que

$$\int_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0) A(D). \quad \diamond$$

Definición 2.3.6. Sea $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo $C^1(A)$ y sea $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}$ su matriz diferencial definida en A . Se define el **jacobiano**, o **determinante jacobiano**, y se lo nota $J_{\mathbf{F}}$ a

$$J_{\mathbf{F}} = |\det(\mathbf{D}_{\mathbf{F}})|. \quad \diamond$$

quizas esta definicion convnga ponerla en la primera parte teorica.

Teorema 2.3.2. Teorema del cambio de variables para integrales dobles. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar integrable. Sea $\mathbf{T} : D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow D$ continua de clase C^1 en D^{*o} , inyectiva en D^{*o} y $\mathbf{T}(D^*) = D$. Entonces

$$\iint_D f \, dA = \iint_{D^*} (f \circ \mathbf{T}) J_{\mathbf{T}} \, dV. \quad \diamond$$

2.4 Integrales Triples

Definición 2.4.1. Dada una función continua $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, donde U es un paralelepípedo rectangular (una caja) en \mathbb{R}^3 , se define la suma de Riemann de f sobre U , partiendo los tres lados de U en n partes iguales, a

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta V,$$

donde $c_{ijk} \in U_{ijk}$, el ijk -ésimo paralelepípedo rectangular en la partición de U , y ΔV es el volumen de U_{ijk} . \diamond

Definición 2.4.2. Sean $U = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. El límite $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ se llama **integral triple** de f sobre U , y se nota $\iiint_U f \, dV$ a

$$\iiint_U f \, dV = \iiint_U f(x, y, z) \, dx dy dz. \quad \diamond$$

Aclaremos que el $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{ijk} = dV$? Y que $dV = dx dy dz$?

Para extender esta noción de integral a un conjunto acotado más general, esto es, conjuntos que puedan ser encerrados por una caja, definimos lo siguiente.

Definición 2.4.3. Dada $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, se define la función f^* tal que

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in W \\ 0 & \text{si } (x, y, z) \notin W. \end{cases}$$

Entonces si U es una caja que contiene a W y ∂W está formada por las gráficas de un número finito de funciones continuas, f^* será integrable. Luego, se define

$$\iiint_W f \, dV = \iiint_U f^* \, dV. \quad \diamond$$

Observación 2.4.1. Notar que esta integral es independiente de la selección de U .

Propiedad 2.4.1. Sean f, g dos funciones integrables en una región $W \subset \mathbb{R}^3$, entonces:

i. $\alpha f + \beta g$ es integrable en W , $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y además

$$\iiint_W (\alpha f + \beta g) \, dV = \alpha \iiint_W f \, dV + \beta \iiint_W g \, dV.$$

ii. El producto fg es integrable en W .

iii. Si $|g(x, y, z)| \geq k > 0 \forall (x, y, z) \in W$, el cociente f/g es integrable en W .

iv. Si $f \geq 0$ en W , $\iiint_W f dV \geq 0$.

v. Si $f \leq g$ en W , $\iiint_W f dV \leq \iiint_W g dV$.

vi. Si $|f|$ es integrable en W , entonces

$$\left| \iiint_W f dV \right| \leq \iiint_W |f| dV.$$

vii. Si $W = W_1 \cup W_2$, y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, es una partición de W , f es integrable en $W \iff f$ es integrable en W_1 y W_2 . En este caso

$$\iiint_W f dV = \iiint_{W_1} f dV + \iiint_{W_2} f dV. \quad \diamond$$

Definición 2.4.4. Se define el volumen de un conjunto $W \subset \mathbb{R}^n$, y se nota $\text{Vol}(W)$, como la integral, si existe, de la función 1. Es decir,

$$\text{Vol}(W) = \iiint_W 1 dV. \quad \diamond$$

Teorema 2.4.1. Teorema del valor medio. Sea $f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua y W es un conjunto elemental. Entonces existe (x_0, y_0, z_0) en W tal que

$$\iiint_W f dV = f(x_0, y_0, z_0) \text{Vol}(W). \quad \diamond$$

Definición 2.4.5. Conjunto elemental en \mathbb{R}^3 . Sea $W \subseteq \mathbb{R}^3$. Sean $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones y sean $\gamma_1, \gamma_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Un conjunto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ se llama elemental, si puede ser escrito como el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen

$$x \in [a, b], \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \quad \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y).$$

O bien, intercambiando el orden de las variables. \diamond

Teorema 2.4.2. Teorema del cambio de variables para integrales triples. Sea $f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar integrable. Sea $\mathbf{T} : W^* \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^3$ continua de clase C^1 en W^{*o} , inyectiva en W^{*o} y $\mathbf{T}(W^*) = W$. Entonces

$$\iiint_W f dV = \iiint_{W^*} (f \circ \mathbf{T}) J_{\mathbf{T}} dV. \quad \diamond$$

2.5 Integrales de Línea

Definición 2.5.1. Sea Γ una curva simple en \mathbb{R}^n y sea $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ . Se define la **longitud de Γ** , y se nota por $\text{Long}(\Gamma)$, a

$$\text{Long}(\Gamma) = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} \|\sigma'(t)\| dt,$$

donde $\sigma|_{I_i}$ es de clase C^1 . ◇

Definición 2.5.2. Sea $\sigma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, una trayectoria de clase $C^1(I)$ y sea f un campo escalar tal que la función compuesta $f \circ \sigma(t)$ sea continua en I . Se define la **integral de trayectoria**, o **integral de f a lo largo de la trayectoria σ** , y se la nota por $\int_{\sigma} f ds$, a

$$\int_{\sigma} f ds = \int_a^b (f \circ \sigma) \|\sigma'(t)\| dt. \quad \diamond$$

Si $\sigma(t)$ es sólo C^1 a trozos o $f \circ \sigma(t)$ es continua a trozos, se define $\int_{\sigma} f ds$ sobre una partición de $[a, b]$, donde sobre cada intervalo de la partición $(f \circ \sigma) \|\sigma'(t)\|$ sea continua, y sumando las integrales sobre cada intervalo de la partición.

Definición 2.5.3. Sea Γ una curva simple en \mathbb{R}^n y sea $\sigma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ . Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua sobre Γ . Se define la integral de línea del campo f sobre la curva Γ , y se nota por $\int_{\Gamma} f ds$ a

$$\int_{\Gamma} f ds = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f \circ \sigma(t) \|\sigma'(t)\| dt,$$

donde $\sigma|_{I_i}$ es de clase C^1 . ◇

Observación 2.5.1. Si $f(x, y) > 0$, entonces la integral de línea tiene una interpretación geométrica como el “área de una valla”. Podemos construir una “valla” cuya base sea la imagen de σ y altura $f(x, y)$ en (x, y) . Si σ recorre sólo una vez la imagen de σ , la integral $\int_{\sigma} f(x, y) ds$ representa el área de una lado de la valla.

ilustracion de la aplicacion

Definición 2.5.4. Integral de un campo vectorial a lo largo de una curva simple. Sea $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo sobre una curva simple orientada $\Gamma \subset A$. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ una parametrización de Γ que preserve su orientación. Se define la **integral de \mathbf{F} sobre la curva simple Γ** como

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot ds \quad \diamond$$

Si Γ es cerrada, se suele notar a la integral como

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot ds,$$

y se la llama integral de circulación de \mathbf{F} sobre Γ .

Definición 2.5.5. Sean $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial y $\sigma : [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ una trayectoria C^1 a trozos tales que $\mathbf{F} \circ \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua. Se define la **integral de línea del campo vectorial \mathbf{F} a lo largo de la trayectoria σ** como

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F} \circ \sigma(t) \cdot \sigma'(t) dt. \quad \diamond$$

por que Γ en vez de σ en la integral?

Se usa la notación $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds$, donde $\hat{\mathbf{t}}$ es versor tangencial al campo \mathbf{F} en todo punto.

2.6 Integrales de Superficie

Definición 2.6.1. Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\Sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 y continua en todo D . Se define la **superficie de S** como $S = \text{Im}(\Sigma)$ y se dice que Σ es una **parametrización de S** .

Definición 2.6.2. Sea $\Sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S . Se define a Σ como una **parametrización regular** en (u_0, v_0) si

$$\Sigma_u(u_0, v_0) \times \Sigma_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}.$$

En tal caso, S se llama superficie regular en $\Sigma(u_0, v_0)$. Si S es regular entonces admite una parametrización regular en todo el interior de su dominio.

Definición 2.6.3. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Se define a S como **orientable** si existe un campo vectorial $\boldsymbol{\eta} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, continuo talque $\boldsymbol{\eta}(p)$ es ortogonal a S en p y $\|\boldsymbol{\eta}(p)\| = 1 \ \forall p \in S$. Al campo $\boldsymbol{\eta}$ se lo llama **orientación de S** .

Grafico superficie orientable y no orientable (cinta Möbius)

Observación 2.6.1. Sea S una superficie orientable. Entonces S admite dos orientaciones posibles: $\boldsymbol{\eta}$ y $-\boldsymbol{\eta}$.

Definición 2.6.4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientada por $\boldsymbol{\eta}$. Sea $\Sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización continua de clase C^1 y regular de S .

■ Si

$$\frac{\Sigma_u \times \Sigma_v}{\|\Sigma_u \times \Sigma_v\|}(u, v) = \boldsymbol{\eta}(\Sigma(u, v)),$$

decimos que Σ **preserva** la orientación de S .

■ Si

$$\frac{\Sigma_u \times \Sigma_v}{\|\Sigma_u \times \Sigma_v\|}(u, v) = -\boldsymbol{\eta}(\Sigma(u, v)),$$

decimos que Σ **invierte** la orientación de S .

Definición 2.6.5. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientada por $\boldsymbol{\eta}$. Sea $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo continuo en S . Se define la integral de superficie de \mathbf{F} sobre S y se denota por $\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S}$ a

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dS.$$

Propiedad? Sea $\Sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrización de S tal que Σ preserve la orientación, es decir

$$\frac{\Sigma_u \times \Sigma_v}{\|\Sigma_u \times \Sigma_v\|}(u, v) = \boldsymbol{\eta}(\Sigma(u, v)).$$

Entonces, por definición,

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_D (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}) \circ \Sigma \|\Sigma_u \times \Sigma_v\| \, dudv \\ &= \iint_D (\mathbf{F} \circ \Sigma) \cdot (\boldsymbol{\eta} \circ \Sigma) \|\Sigma_u \times \Sigma_v\| \, dudv = \iint_D \mathbf{F} \circ \Sigma \cdot (\Sigma_u \times \Sigma_v) \, dudv. \end{aligned}$$

Observación 2.6.2. Sea S una superficie con orientación $\boldsymbol{\eta}$. Sea $\Sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$, una parametrización de S que invierte la orientación. Entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = - \iint_D \mathbf{F} \circ \Sigma \cdot (\Sigma_u \times \Sigma_v) \, dudv.$$

2.7 Campos Conservativos

Definición 2.7.1. Sea un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A se llama **conexo** si dados dos puntos cualquiera de A se los puede unir por una curva continua que este incluida en A . \diamond

(no la encuentro en el Tromba. La copie como en mis apuntes)

Teorema 2.7.1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ una trayectoria C^1 a trozos. Entonces

$$\int_{\sigma} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)). \quad \diamond$$

Corolario 2.7.1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , entonces $\int_{\sigma} \nabla f \cdot d\mathbf{s}$ sólo depende de los puntos inicial y final de la trayectoria. Por lo tanto, sean las trayectorias $\sigma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow A_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\sigma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, tales que $\sigma_1(a_1) = \sigma_2(a_2) \wedge \sigma_1(b_1) = \sigma_2(b_2)$, entonces

$$\int_{\sigma_1} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma_2} \nabla f \cdot d\mathbf{s}. \quad \diamond$$

Corolario 2.7.2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Si $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial para el cual $\exists f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ clase C^1 tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A,$$

entonces para todo par de curvas C_1 y C_2 en A , con los mismos extremos y misma orientación,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad \diamond$$

Estos últimos dos corolarios nos demuestran que la integral de curva

Corolario 2.7.3. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Si $\mathbf{F} = \nabla f$, entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

para toda curva C simple cerrada contenida en A . \diamond

Teorema 2.7.2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuo tal que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es independiente del camino en A . Entonces $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

con $\mathbf{x}_0 \in A$, cumple que:

1. f es C^1 .

2. $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A$. \diamond

Teorema 2.7.3. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuo. Las siguientes condiciones sobre \mathbf{F} son equivalentes:

1. $\exists f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in A$.

2. La integral de \mathbf{F} es independiente del camino en A .

3. $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ para toda curva cerrada simple C en A . \diamond

esta seccion la copie textual del video Campos Conservativos de youtube. quizas para que quede definida la parte de "La integral de \mathbf{F} es independiente del camino en A " convenga copiar los teoremas y corolarios del tromba?

2.8 Teoremas Integrales

Definición 2.8.1. Sea $\Sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrización inyectiva para todo D en S . Se define el **borde** o **frontera** de S , y se lo nota ∂S , a la curva cerrada simple en \mathbb{R}^3 tal que

$$\partial S = \Sigma(\partial D). \quad \diamond$$

Observación 2.8.1. Si ∂D está orientada de manera antihoraria, entonces Σ **induce** una orientación sobre ∂S . Además Σ **induce** una orientación sobre S .

Definición 2.8.2. Sea D un conjunto conexo (en \mathbb{R}^2 o en \mathbb{R}^3). D se llama **simplemente conexo** si toda curva cerrada simple $C \subset D$ es el borde de una región R totalmente contenida en D . \diamond

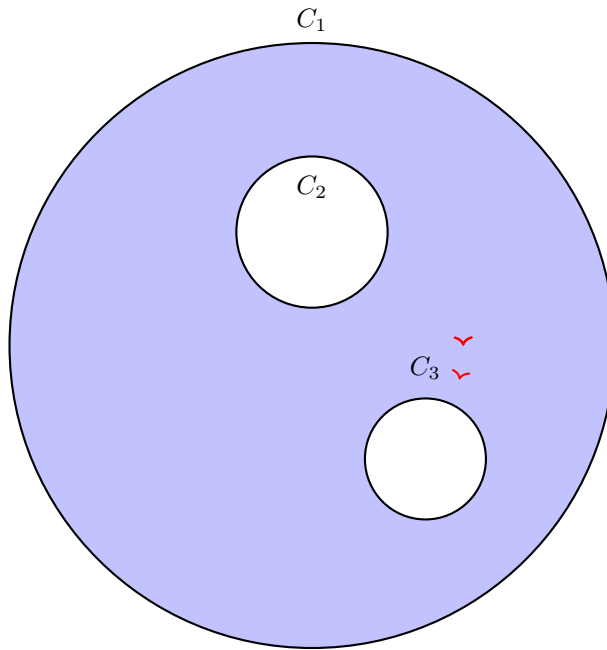
Teorema 2.8.1. Teorema de Green. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región simplemente conexa y sea ∂D la frontera de D , con orientación antihoraria. Y Sea $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 . Entonces

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \quad \diamond$$

Observación 2.8.2. Otra manera de enunciar el teorema de Green es usando un cambio en la notación vectorial. Pensando el producto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ como $P dx + Q dy$, donde $\mathbf{F} = (P, Q)$ y sabiendo que el rotor en \mathbb{R}^2 es la componente z del rotor en \mathbb{R}^3 ; reescribimos el teorema de Green como

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Observación 2.8.3. Extensión de Green. El teorema de Green es aplicable a regiones aún más generales que simplemente conexas. De hecho, a cualquier región en \mathbb{R}^2 cuya frontera se pueda descomponer en un número finito de curvas cerradas simples orientadas se le puede aplicar el teorema de Green. La idea es “recorrer” dicha frontera pasando por todas las curvas que la conforman.



falta poner las flechas que indican la orientacion

Teorema 2.8.2. Teorema de la divergencia en el plano. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región donde valga Green y sea ∂D su frontera. Denotaremos por \mathbf{n} el versor unitario normal a ∂D en todo punto. Si $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización orientada de manera positiva de ∂D , \mathbf{n} está dado por

$$\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}.$$

Sea \mathbf{F} un campo vectorial C^1 en D . Entonces

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dA. \quad \diamond$$

Teorema 2.8.3. Teorema de Stokes. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, donde las orientaciones de S y ∂S fueron inducidas por Σ . Si $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial C^1 en S . Entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \quad \diamond$$

Teorema 2.8.4. Teorema de la divergencia o de Gauss. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie que encierra un volumen Ω orientada de manera exterior, esto es $S = \partial\Omega$. Sea $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial clase C^1 , entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV. \quad \diamond$$

Primeros parciales resueltos

3.1 Fecha 29 de septiembre de 2023

Ejercicio 1. Calcule, si existe, el siguiente límite.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin\left(\frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cos\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable y sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$g(x, y) = (e^{xy} - 1, \sin(\pi x + \pi y)).$$

Sabiendo que el gráfico $h = f \circ g$ en el punto $(1, 0, h(1, 0))$ tiene plano tangente de ecuación

$$z - 1 = \pi x + (\pi + 1)y,$$

hallar $f_{\mathbf{v}}(0, 0)$ para la dirección $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ejercicio 3. Considere el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x, y) = e^{\sin(x) + y^2}$$

Se pide aproximar $f(-0.1, 0.2)$ mediante un polinomio de grado dos adecuado.

Ejercicio 4. Dado el campo escalar $f(x, y) = \cos(y) + \sin(x)$. Encuentre los puntos críticos de dicho campo en el dominio Ω y clasifíquelos como extremos locales, donde:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi\}$$

Solución 1. Notemos que la estructura del límite pedido está dada por el producto de dos funciones acotadas, por lo tanto, con mostrar que una de las dos tiende a cero bastará para decir que el límite de dicho producto es cero.

Utilizando la siguiente desigualdad para el argumento del seno

$$0 \leq \left| \frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{2(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

junto al teorema de intercalación tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = 0.$$

Recordando que $|\sin(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ podemos concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin \left(\frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0.$$

Por último, recordando que $|\cos(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin \left(\frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cos \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

Solución 2. Como $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en todo su dominio por ser composición de funciones diferenciables, la ecuación de su plano tangente en el punto $(1, 0)$ está dada por

$$z = h(1, 0) + \nabla h(1, 0)(x - 1, y), \quad (3.1)$$

luego será suficiente con encontrar $h(1, 0)$ y $\nabla h(1, 0)$.

Por un lado, $h(1, 0) = f \circ g(1, 0) = f(0, 0)$ y por otro lado, como f y g son ambas diferenciables, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\nabla h(1, 0) = \nabla(f \circ g)(1, 0) = \nabla f(g(1, 0)) \mathbf{D}_g(1, 0) = \nabla f(0, 0) \mathbf{D}_g(1, 0), \quad (3.2)$$

donde \mathbf{D}_g es la matriz diferencial o jacobiana de g .

Halleemos \mathbf{D}_g

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_g(1, 0) &= \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} - 1 & \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} - 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} \sin(\pi x + \pi y) & \frac{\partial}{\partial y} \sin(\pi x + \pi y) \end{array} \right) \bigg|_{(1,0)} \\ &= \left(\begin{array}{cc} ye^{xy} & xe^{xy} \\ \pi \cos(\pi x + \pi y) & \pi \cos(\pi x + \pi y) \end{array} \right) \bigg|_{(1,0)} \\ &= \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\pi & -\pi \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en a (3.11)

$$\nabla h(1, 0) = \nabla f(0, 0) \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\pi & -\pi \end{array} \right) = (-\pi f_y(0, 0), f_x(0, 0) - \pi f_y(0, 0))$$

Reemplazando en (3.7)

$$\begin{aligned} z &= f(0,0) + (-\pi f_y(0,0), f_x(0,0) - \pi f_y(0,0))(x-1, y) \\ z &= f(0,0) + \pi f_y(0,0) - \pi f_y(0,0)x + (f_x(0,0) - \pi f_y(0,0))y, \end{aligned}$$

y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} f_y(0,0) = -1 \\ f_x(0,0) - \pi f_y(0,0) = \pi + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f_y(0,0) = -1 \\ f_x(0,0) = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \nabla f(0,0) = (1, -1).$$

Como f es diferenciable en todo su dominio, en particular lo es en $(0,0)$, vale que

$$f_{\mathbf{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ con } \|\mathbf{v}\| = 1.$$

Luego, tomando $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$, obtenemos lo pedido, es decir,

$$f_{\mathbf{v}}(0,0) = (1, -1) \cdot \mathbf{v} = \sqrt{2}.$$

Solución 3. Dado que f es de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$, se define el polinomio de Taylor de segundo orden centrado en $(0,0)$ de f , que noateremos por $P_2[f, (0,0)]$ como,

$$P_2[f, (0,0)](x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y) \mathbf{H}_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

donde \mathbf{H}_f es la matriz hessiana de f .

Hallemos los términos del polinomio.

$$1. f(0,0) = 1.$$

$$2. \nabla f(0,0) = \left(e^{\sin(x)+y^2} \cos(x), e^{\sin(x)+y^2} 2y \right) \Big|_{(0,0)} = (1, 0).$$

$$3.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_f(0,0) &= \begin{pmatrix} e^{\sin(x)+y^2} [\cos^2(x) - \sin(x)] & 2y \cos(x) e^{\sin(x)+y^2} \\ 2y \cos(x) e^{\sin(x)+y^2} & 4y^2 e^{\sin(x)+y^2} + 2e^{\sin(x)+y^2} \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} \\ \mathbf{H}_f(0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos en la expresión (3.10).

$$P_2(x,y) = 1 + (1,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P_2(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2)$$

$$P_2(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + x + 1$$

Entonces queda evaluar en $P_2(-0.1, 0.2) = \frac{189}{200} = 0.945$.

$$\therefore f(-0.1, 0.2) \approx 0.945.$$

Solución 4. En este ejercicio debemos hallar y clasificar los extremos de la función f sobre Ω , un conjunto acotado y abierto. Para ello, primero buscamos los puntos críticos de f en Ω . Como f es diferenciable en Ω , basta con hallar todos los $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

$$\nabla f(x, y) = (\cos(x), -\sin(y))$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \iff \begin{cases} \cos(x_0) = 0 \\ \sin(y_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y_0 = k'\pi \end{cases} ; k, k' \in \mathbb{Z}$$

Ahora sumamos la condición de que pertenezcan a Ω .

$$(x_0, y_0) \in \Omega \iff x_0 = -\frac{\pi}{2} \vee x_0 = \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad y_0 = 0$$

Por lo tanto, el conjunto de puntos críticos es

$$P.C. = \{(-\pi/2, 0), (\pi/2, 0)\}.$$

Ahora, para clasificarlos, debemos aplicar el criterio de la segunda derivada. Para ésto calculamos la matriz hessiana de f .

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{H}_f)(x, y) = \sin(x) \cos(y)$$

1. $\det(\mathbf{H}_f)(-\pi/2, 0) = -1 < 0 \implies f$ tiene un punto silla en $(-\pi/2, 0)$.
2. $\det(\mathbf{H}_f)(\pi/2, 0) = 1 > 0 \wedge f_{xx}(\pi/2, 0) = 1 > 0 \implies f$ tiene un mínimo local en $(\pi/2, 0)$.

3.2 Fecha 25 de abril de 2023

Ejercicio 1. Analizar la existencia de los siguientes límites

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1) \cos\left(\frac{1}{y-1}\right)}{x^2 + 3(y-1)^2} \quad (b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3)y}{x^2 - y + x^5}$$

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{(x^2 - y)^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Analizar la continuidad de f en el origen
2. Analizar la diferenciabilidad de f en el origen.
3. Hallar, si existen, las derivadas parciales en el origen.

Ejercicio 3. Sea $g(x, y) = yx^2 + \sin(f(x, y))$ con f un campo escalar $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(0, 0) = 0$. Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x, y) - xf_x(0, 0) - yf_y(0, 0) + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ejercicio 4. Analizar la existencia de máximos y mínimos, absolutos o relativos, en todo \mathbb{R}^2 de

$$f(x, y) = e^{xy-1} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

Solución 1. (a) Podemos observar que el límite es indeterminado, aún más, el argumento del coseno tiende a infinito. Para resolver, reescribimos el límite de la siguiente manera

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \cos\left(\frac{1}{y-1}\right).$$

Dado que el coseno es una función acotada, bastaría con probar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} = 0.$$

Para esto, usaremos las siguientes desigualdades,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \right| \leq \frac{\|(x, y-1)\|^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \leq \\ &\leq \frac{\|(x, y-1)\|^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{\|(x, y-1)\|^2(y-1)}{\|(x, y-1)\|^2} = y-1. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (y-1) = 0,$$

tenemos, usando el teorema de intercalación, que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left| \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \right| = 0.$$

Luego

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} = 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \cos\left(\frac{1}{y-1}\right) = 0.$$

(b) Tomemos las curvas, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \alpha(t) = (t, t^5)$ y $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \beta(t) = (t, t^2)$. Notar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = (0, 0) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = (0, 0).$$

Llamando

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^3)y}{x^2 - y + x^5}$$

tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3)t^5}{t^2 - t^5 + t^5} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin(t^3)t^3 = 0 \quad (3.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \beta(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3)t^2}{t^2 - t^2 + t^5} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3)}{t^3} = 1. \quad (3.5)$$

Como (3.4) \neq (3.5) concluimos que

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

Solución 2. 1. Para que la función sea continua en el origen debe cumplir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

Analicemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{(x^2 - y)^2 + x^4}$$

Tomemos la curva, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \alpha(t) = (t, t^2)$, notemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = (0, 0).$$

Podemos observar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha(t) = 1$$

de aquí concluimos que f no es continua en el origen (aunque nada estamos diciendo de la existencia o no del límite).

2. f no es diferenciable en el origen pues no es continua en dicho punto.

3. Recordemos la definición de derivada direccional de dirección \mathbf{v} evaluada en el origen de un campo escalar f .

$$f_{\mathbf{v}}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h\mathbf{v}) - f(0, 0)}{h},$$

con $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ unitario.

Entonces calculamos

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{v}}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h\mathbf{v})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(hv_1)^4}{((hv_1)^2 - hv_2)^2 + (hv_1)^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(hv_1)^4}{(hv_1)^4 - 2(hv_1)^2 hv_2 + (hv_2)^2 + (hv_1)^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4 v_1^4}{h^4 v_1^4 - 2h^3 v_1^2 v_2 + h^2 v_2^2 + h^4 v_1^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 h^2 v_1^4}{h^2 (h^2 v_1^4 - 2h v_1^2 v_2 + v_2^2 + h^2 v_1^4)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 v_1^4}{h^2 v_1^4 - 2h v_1^2 v_2 + v_2^2 + h^2 v_1^4} = \frac{0}{v_2^2} = 0, \end{aligned}$$

si $v_2^2 \neq 0 \iff v_1^2 \neq 1 \iff |v_1| \neq 1$. Veamos el caso $v_1 = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{h^4}{(h^2)^2 + h^4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{1}{2} = \infty.$$

Es decir, no existe $f_x(0, 0)$. El caso $v_1 = -1$ es análogo.

O sea, las derivadas direccionales existen en todas direcciones, menos en la dirección del eje de abscisas, y son iguales a cero. Es decir,

$$\therefore f_{\mathbf{v}}(0, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : |v_1| \neq 1,$$

$$\nexists f_{\mathbf{v}}(0, 0) \text{ si } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : |v_1| = 1.$$

Solución 3. Para resolver este límite debemos intuir que en el numerador se encuentra la función g menos su plano tangente en el $(0,0)$. Entonces buscamos el gradiente de g en el origen.

Dado que f es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ luego g resulta de la misma clase. Usando la regla de la cadena y el hecho de que $f(0,0) = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla g(x,y)\Big|_{(0,0)} &= \left(2xy + \cos(f(x,y))f_x(x,y), \quad x^2 + \cos(f(x,y))f_y(x,y) \right)\Big|_{(0,0)} \\ &= (f_x(0,0), f_y(0,0)).\end{aligned}$$

Como $g(0,0) = 0$ podemos reescribir el límite como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{g(x,y) - \nabla g(0,0) \cdot (x,y) - g(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

El primer término tiende a cero dado que g es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ entonces es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 y, en particular, lo es en el origen. Para el segundo término hacemos un cálculo auxiliar.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

Estamos en condiciones de usar álgebra de límites,

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{g(x,y) - \nabla g(0,0) \cdot (x,y) - g(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0.$$

Solución 4. Dado que f es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 para hallar los puntos críticos basta con buscar cuando su gradiente se anula.

$$\nabla f(x,y) = (ye^{xy-1} - x, xe^{xy-1} - y)$$

Igualando el gradiente a cero, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} ye^{xy-1} = x \\ xe^{xy-1} = y \end{cases}$$

Si $x \neq 0 \wedge y \neq 0$, entonces

$$e^{xy-1} = \frac{x}{y} = \frac{y}{x}. \quad (3.6)$$

De la última igualdad hallamos la siguiente relación

$$x^2 = y^2 \iff x = y \vee x = -y.$$

Si $x = y$ reemplazado en (3.6) queda

$$e^{x^2-1} = 1 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = 1 \vee x = -1.$$

Es fácil ver que el caso $x = -y$ conlleva a un absurdo. Por último, observar que el $(0,0)$ también es solución del sistema. Por lo tanto, los puntos críticos son $(0,0)$, $(1,1)$ y el $(-1,-1)$.

Para clasificarlos, como $f \in C(\mathbb{R}^2)$ utilizamos el criterio de la segunda derivada.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy-1} - 1 & e^{xy-1}(xy + 1) \\ e^{xy-1}(xy + 1) & x^2 e^{xy-1} - 1 \end{pmatrix}$$

Ahora evaluamos el determinante de la matriz hessiana para los puntos críticos

$$\mathbf{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1/e \\ 1/e & -1 \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{H}_f(0,0)) = 1 - \frac{1}{e^2} > 0$$

y como $f_{xx}(0,0) = -1 < 0 \implies f$ tiene un máximo local en 0.

$$\mathbf{H}_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{H}_f(1,1)) = -4 < 0$$

$\implies f$ tiene un punto silla en $(1,1)$.

$$\mathbf{H}_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{H}_f(-1,-1)) = -4 < 0$$

$\implies f$ tiene un punto silla en $(-1,-1)$.

Por último, para analizar si el máximo en $(0,0)$ es local o absoluto basta calcular, por ejemplo, $f(2,2)$ para ver que es mayor que $f(0,0)$.

$\therefore f$ tiene dos puntos silla, uno en $(1,1)$ y otro en $(-1,-1)$, y un máximo local en $(0,0)$.

3.3 Fecha 23 de septiembre de 2023

Ejercicio 1. Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Analizar la continuidad de f en el origen
2. Analizar la diferenciabilidad de f en el origen.
3. Analizar la existencia de las derivadas direccionales de f en el origen.

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, $g(x, y) = (xy^2, x^2 - 2y)$ y $h = f \circ g$. Sabiendo que $h(1, -1) = 2$ y que $\nabla h(1, -1) = (2, -4)$, halle el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, 3, f(1, 3))$.

Ejercicio 3. Sean f y g dos campos escalares de clase C^2 tales que $f(1, 2) = g(x, y)$, $\nabla f(1, -1) = \nabla g(2, -4)$ y $H_f(1, 2) = H_g(1, 2)$, calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{f^2(x, y) - g^2(x, y)}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$$

Ejercicio 4. Hallar analíticamente los puntos más lejanos y más cercanos al origen del elipsoide dado por la ecuación $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$

Solución 1. En primer lugar analizamos la continuidad, como f es una función partida, queremos demostrar que f es continua en $(0,0)$ si: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

Utilizando el límite notable conocido: $\lim_{t \rightarrow 0} (\frac{e^t - 1}{t}) = 1$, sabemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{\sqrt{t}} = 0$$

Pues, multiplicando arriba y abajo por \sqrt{t} , sabiendo que $t \neq 0$, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{\sqrt{t}} \right) \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) \sqrt{t} = 0$$

Llamamos $t(x,y) = x^2 + y^2$ y sabemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} t(x,y) = 0$$

Definimos $g(z) = \frac{e^z - 1}{\sqrt{z}} = 0$ y realizando la composición $f(x,y) = g \circ t(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - (0,0)$ tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g \circ t(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(t(x,y)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{\sqrt{t}} = 0$$

$\therefore f$ es continua en $(0,0)$

Para analizar la diferenciabilidad de f en el $(0,0)$ en primer lugar vamos a evaluar la existencia de las derivadas direccionales, siendo $\vec{u} = (u_1, u_2)$ con $|\vec{u}| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h\vec{u}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2 u_1^2 + h^2 u_2^2} - 1}{h \sqrt{h^2 u_1^2 + h^2 u_2^2}}$$

Sabemos que

$$|\vec{u}| = 1 \iff \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1 \iff u_1^2 + u_2^2 = 1$$

Por lo cual

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2} - 1}{h|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2} - 1}{h^2} \frac{h}{|h|}$$

Tomando límites laterales

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{h^2} - 1}{h^2} \frac{h}{|h|} &= 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{h^2} - 1}{h^2} \frac{h}{|h|} &= -1 \end{aligned}$$

Como los límites laterales son distintos, entonces podemos afirmar que $\nexists \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \quad \forall \vec{u}/|\vec{u}| = 1$, al no existir las derivadas direccionales de f en $(0,0)$, las parciales tampoco.

$\therefore f$ no es diferenciable en $(0,0)$

Solución 2. Como $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en todo su dominio por ser composición de funciones diferenciables, la ecuación de su plano tangente en el punto $(1, 3)$ está dada por

$$z = f(1, 3) + \nabla f(1, 3)(x - 1, y - 3), \quad (3.7)$$

luego será suficiente con encontrar $f(1, 3)$ y $\nabla f(1, 3)$.

Por un lado, $h(1, -1) = f \circ g(1, -1) = f(1, 3) = 2$ y por otro lado, como f y g son ambas diferenciables, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\nabla h(1, -1) = \nabla(f \circ g)(1, -1) = \nabla f(g(1, -1)) \mathbf{D}_g(1, -1) = \nabla f(1, 3) \mathbf{D}_g(1, -1), \quad (3.8)$$

donde \mathbf{D}_g es la matriz diferencial o jacobiana de g .

Halleemos \mathbf{D}_g

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_g(1, -1) &= \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) & \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 2y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 2y) \end{array} \right) \bigg|_{(1, -1)} \\ &= \left(\begin{array}{cc} y^2 & 2xy \\ 2x & -2 \end{array} \right) \bigg|_{(1, -1)} \\ &= \left(\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en a (3.11)

$$\nabla h(1, -1) = \nabla f(1, 3) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (f_x(1, 3) + 2f_y(1, 3), -2f_x(1, 3) - 2f_y(1, 3))$$

y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} f_x(1, 3) + 2f_y(1, 3) = 2 \\ -2f_x(1, 3) - 2f_y(1, 3) = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} f_x(1, 3) = 2 \\ f_y(1, 3) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \nabla f(1, 3) = (2, 0).$$

Reemplazando en (3.7)

$$z = 2 + (2, 0)(x - 1, y - 3)$$

Despejando, la ecuación del plano tangente al grafico de f en el punto $(1, 3, f(1, 3))$ es

$$z - 2x = 0$$

Solución 3. En primer lugar, reescribimos el límite pedido

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(f-g)_{(x,y)}(f+g)_{(x,y)}}{|(x-1, y-2)|^2}$$

Dado que f y g son dos campos escalares de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$, se define el polinomio de Taylor de primer orden centrado en $(1, 2)$ de ambas funciones, que notaremos por $P_2[f, (1, 2)]$, $P_2[g, (1, 2)]$ como,

$$P_2[f, (1, 2)](x, y) = f(1, 2) + \nabla f(1, 2) \cdot (x-1, y-2) + \frac{1}{2}(x, y) \mathbf{H}_f(c_1, c_2) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$P_2[g, (1, 2)](x, y) = g(1, 2) + \nabla g(1, 2) \cdot (x-1, y-2) + \frac{1}{2}(x, y) \mathbf{H}_g(c'_1, c'_2) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

Sabemos que

$$(f-g)_{(x,y)} = P_2[(f-g), (1, 2)](x, y) + R_2[(f-g), (C, (x-1, y-2))]$$

Utilizando los datos de enunciado, podemos ver que

$$\begin{aligned} P_2[(f-g), (1, 2)](x, y) &= (f-g)_{(1,2)} + \nabla(f-g)_{(1,2)} \cdot (x-1, y-2) + \frac{1}{2}(x-1, y-2)^t \mathbf{H}_{(f-g)}(C) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow (f-g)_{(x,y)} &= R_2[(f-g), (C, (x-1, y-2))] \end{aligned}$$

Ademas, sabemos que,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{R_2[(f-g), (C, (x-1, y-2))]}{|(x-1, y-2)|^2} = 0$$

Utilizando los datos recién mencionados, y sabiendo que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (f+g)_{(x,y)} = L \in \mathbb{R}$ calculamos el límite solicitado

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(f-g)_{(x,y)}(f+g)_{(x,y)}}{|(x-1, y-2)|^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{R_2[(f-g), (C, (x-1, y-2))] \cdot (f+g)_{(x,y)}}{|(x-1, y-2)|^2} = 0$$

Solución 4. En este ejercicio debemos hallar los puntos mas lejanos y mas cercanos al origen de la función que denominaremos $g(x, y, z) = \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1$, para lo cual utilizaremos la función distancia: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Busco los mínimos de f restringidos al conjunto de nivel $g(x, y, z) = 0$ utilizando los multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda \left(\frac{2x}{64}, \frac{2y}{36}, \frac{2z}{25} \right) \iff \begin{cases} x = \lambda \frac{x}{64} \\ y = \lambda \frac{y}{36} \\ z = \lambda \frac{z}{25} \end{cases}$$

Estas ecuaciones implican que 2 variables deben ser nulas para que el sistema tenga solución, entonces:

1- Si $x \neq 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Rightarrow \lambda = 64 \Rightarrow x = \pm 8$

2- Si $y \neq 0 \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Rightarrow \lambda = 36 \Rightarrow y = \pm 6$

2- Si $z \neq 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow \lambda = 36 \Rightarrow y = \pm 5$

De esta manera, encontramos 6 posibles máximos y mínimos de la función f

$$P_1 = (8, 0, 0)$$

$$P_2 = (-8, 0, 0)$$

$$P_3 = (0, 6, 0)$$

$$P_4 = (0, -6, 0)$$

$$P_5 = (0, 0, 5)$$

$$P_6 = (0, 0, -5)$$

Por el teorema de valores extremos de Weierstrass, sean $A \subset \mathbb{R}^3$ conjunto cerrado y acotado y $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ función continua, entonces f alcanza un máximo y mínimo absoluto en A .

De esta manera, reemplazando los puntos en f encontramos los máximos y mínimos de la misma, restringida en A (conjunto de nivel 0 de g). Entonces podemos ver que los puntos más alejados del origen son el $(8, 0, 0)$ y el $(-8, 0, 0)$, y que los más cercanos son el $(0, 0, 5)$ y el $(0, 0, -5)$

También, se puede ver de forma gráfica

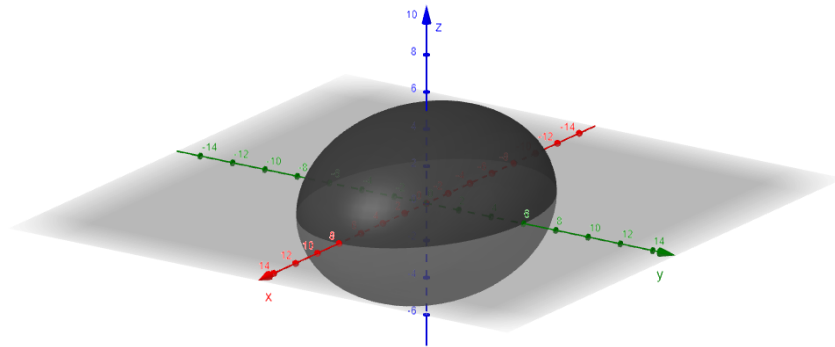


Figura 3.1: Gráfica de $g(x, y, z)$.

3.4 Fecha 18 de abril de 2024

Ejercicio 1. a) Calcular, si existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(x^{\frac{1}{3}}y)(e^{x^2+y^2} - 1)}{(x^2 + y^2)^2}$$

b) Calcular por definicion,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$$

Ejercicio 2. Sea f un campo escalar diferenciable en todo \mathbb{R}^2 y sea $\pi : 2x + 3y + 4z = 1$ el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 2, f(1, 2))$. Hallar todos los vectores unitarios v tales que $f_v(1, 2) = 0$.

Ejercicio 3. Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$ siendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ejercicio 4. Sean $g(x, y) = (xy^2, x^2 - 2y)$ y $h(x, y) = f \circ g(x, y)$ con f de clase C^1 en \mathbb{R}^2 . Sabiendo que $h(1, -1) = 2$ y que $\nabla h(1, -1) = (2, -4)$. Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{f(x, y) - 2x + (x - 1)^3}{\sqrt{(x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2}}$$

Solución 1. Para resolver el ítem a, se busca utilizar los notables conocidos de funciones del tipo $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ para resolver el límite pedido, en primer lugar se multiplica arriba y abajo por $(x^{\frac{2}{3}}y^2)$ sabiendo que $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(x^{\frac{1}{3}}y)}{(x^{\frac{2}{3}}y^2)} \frac{(e^{x^2+y^2} - 1)}{(x^2 + y^2)} \frac{(x^{\frac{2}{3}}y^2)}{(x^2 + y^2)}$$

Primero se utiliza el límite notable conocido:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) = 1$$

Llamamos $t_1(x, y) = x^2 + y^2$ y sabemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} t_1(x, y) = 0$$

Definimos $g_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ y realizando la composición $f(x, y) = g_1 \circ t_1(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g_1 \circ t_1(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g_1(t_1(x, y)) = \lim_{t_1(x,y) \rightarrow 0} \frac{e^{t_1(x,y)} - 1}{t_1(x, y)} = 1$$

En segundo lugar, se utiliza el notable conocido:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(t)}{t^2} = 1$$

Llamamos $t_2(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y$ y sabemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} t_2(x, y) = 0$$

Definimos $g_2(z) = \frac{\sin^2(z)}{z^2}$ y realizando la composición $f(x, y) = g_2 \circ t_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g_2 \circ t_2(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g_2(t_2(x, y)) = \lim_{t_2(x,y) \rightarrow 0} \frac{\sin^2(t_2(x, y))}{t_2(x, y)^2} = 1$$

De esta manera, se resuelve en un cálculo auxiliar el tercer término del límite solicitado

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^{\frac{2}{3}}y^2)}{(x^2 + y^2)} = 0$$

Ya que podemos utilizar la propiedad de acotada por cero:

$$0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$$

Por lo cual, finalmente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(x^{\frac{1}{3}}y)(e^{x^2+y^2} - 1)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Para el ítem b, se nos pide calcular el siguiente límite por definición

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$$

Sabemos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$$

si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ / $0 < |(x, y)| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon$. Partimos de

$$\left| \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} - L \right| = \left| 3 + \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} - L \right|$$

Propongo $L = 3$, entonces

$$|f(x, y) - L| = \left| \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{5|x|y^2}{x^2 + y^2}$$

Sabemos que

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2$$

Por lo cual

$$\frac{5|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{5(\sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 5(\sqrt{x^2 + y^2}) < 5\delta$$

Basta con tomar $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ de manera que resulta

$$5(\sqrt{x^2 + y^2}) < 5\delta < \epsilon$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} = 3$$

Solución 2. Sabemos que el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 2, f(1, 2))$ se escribe como:

$$z = f(1, 2) + \nabla f(1, 2)(x - 1, y - 2)$$

Además, se nos da de dato que el plano tangente de f en el punto $(1, 2, f(1, 2))$ es $\pi : 2x + 3y + 4z = 1$, por lo cual lo vamos a reescribir de la siguiente forma:

$$z = -\frac{7}{4} + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)(x - 1, y - 2)$$

Por lo cual sabemos que,

$$\begin{aligned} f(1, 2) &= -\frac{7}{4} \\ \nabla f(1, 2) &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Como f es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 , entonces f admite todas sus derivadas direccionales en $(1, 2)$ y además, $f_v(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot v / \|\mathbf{v}\| = 1$, de esta manera definimos un $v = (v_1, v_2)$ y armamos un sistema de ecuaciones. y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)(v_1, v_2) = 0 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$$

De esta manera, obtenemos dos vectores resultantes:

$$\begin{aligned} v &= \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \\ v &= \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \end{aligned}$$

Solución 3. En primer lugar analizamos la continuidad, como f es una función partida, queremos demostrar que f es continua en $(0,0)$ si: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

Este limite se analiza tomando curvas distintas:

1) Curva 1: $\alpha_1(t) = (0, t) / \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_1(t) = (0, 0)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0^2 t^2}{0^2 t^2 + (0-t)^2} \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

2) Curva 2: $\alpha_2(t) = (t, t) / \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_2(t) = (0, 0)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha_2(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 t^2}{t^2 t^2 + (t-t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 1 = 1$$

Sabemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L \iff \lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha(t) = L \forall \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

De esta manera, encontramos dos curvas cuyos limites no son iguales, por lo tanto $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

Para responder a la consigna, utilizamos la siguiente proposicion:

Si f es diferenciable $\Rightarrow f$ es continua

Entonces, utilizando el contrareciproco:

Si f no es continua $\Rightarrow f$ no es diferenciable

$\therefore f$ no es diferenciable en $(0,0)$

Solución 4. Sean $g(x,y) = (xy^2, x^2 - 2y)$ y $h(x,y) = f \circ g(x,y)$ con f de clase C^1 en \mathbb{R}^2 . Sabiendo que $h(1, -1) = 2$ y que $\nabla h(1, -1) = (2, -4)$. Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{f(x,y) - 2x + (x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2}}$$

Por un lado, $h(1, -1) = f \circ g(1, -1) = f(1, 3) = 2$ y por otro lado, como f y g son ambas diferenciables, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\nabla h(1, -1) = \nabla(f \circ g)(1, -1) = \nabla f(g(1, -1)) \mathbf{D}_g(1, -1) = \nabla f(1, 3) \mathbf{D}_g(1, -1), \quad (3.11)$$

donde \mathbf{D}_g es la matriz diferencial o jacobiana de g .

Hallemos D_g

$$\begin{aligned} D_g(1, -1) &= \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) & \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 2y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 2y) \end{array} \right) \bigg|_{(1, -1)} \\ &= \left(\begin{array}{cc} y^2 & 2xy \\ 2x & -2 \end{array} \right) \bigg|_{(1, -1)} \\ &= \left(\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en a (3.11)

$$\nabla h(1, -1) = \nabla f(1, 3) \left(\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{array} \right) = (f_x(1, 3) + 2f_y(1, 3), -2f_x(1, 3) - 2f_y(1, 3))$$

y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} f_x(1, 3) + 2f_y(1, 3) = 2 \\ -2f_x(1, 3) - 2f_y(1, 3) = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} f_x(1, 3) = 2 \\ f_y(1, 3) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \nabla f(1, 3) = (2, 0).$$

Entonces la ecuación del plano tangente al grafico de f en el punto $(1, 3, f(1, 3))$ es $z = 2x$, ahora se analiza el limite solicitado separandolo en dos partes

$$\begin{aligned} &\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 3)} \frac{f(x, y) - 2x + (x - 1)^3}{\sqrt{(x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \\ &\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 3)} \frac{f(x, y) - 2x}{\sqrt{(x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2}} + \frac{(x - 1)^3}{\sqrt{(x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \end{aligned}$$

En primer lugar, buscamos acotar la funcion

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \leq (x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \\ 0 &\leq \frac{1}{\sqrt{(x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \\ 0 &\leq \frac{|f(x, y) - 2x|}{\sqrt{(x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \leq \frac{|f(x, y) - 2x|}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \end{aligned}$$

Ademas sabemos que f es C1, que el plano tangente de f en el punto $(1, 3)$ es: $z = 2x$ y que $\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} = |(x - 1, y - 3)|$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 3)} \frac{f(x, y) - 2x}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}} = 0$$

Utilizando la regla del sandwich

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{|f(x,y) - 2x|}{\sqrt{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2}} = 0$$

Y por ultimo tenemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} g(x,y) = 0 \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} |g(x,y)| = 0$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{f(x,y) - 2x}{\sqrt{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2}} = 0$$

En segundo lugar, se analiza el segundo termino del limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2}}$$

Donde repetimos la misma cota que antes

$$0 \leq \frac{1}{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2} \leq \frac{1}{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

$$0 \leq \frac{|(x-1)^3|}{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2} \leq \frac{|(x-1)^3|}{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

donde

$$(x-1)^2 \leq (x-1)^2 + (y-3)^2$$

$$|(x-1)| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

$$|(x-1)^3| \leq (\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2})^3$$

de manera que

$$0 \leq \frac{|(x-1)^3|}{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

Utilizando el teorema del sandwich y la propiedad donde $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} g(x,y) = 0 \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} |g(x,y)| = 0$, entonces resulta que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2}} = 0$$

Por lo cual, finalmente se analiza en completo el limite solicitado

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{f(x,y) - 2x + (x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2}} = 0$$

3.5 Fecha Recuperatorio 2cuatri 2022

Ejercicio 1. Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^3 - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

probar que no existe $\delta > 0$ tal que f sea clase C^2 en $B_\delta(0, 0)$.

Ejercicio 2. Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{2x}e^{3y} - 1 - 2x - 3y - 3x^2 - 6yx - \frac{11}{2}y^2}{x^2 + y^2}$$

Ejercicio 3. Sea S el conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 que forman la esfera de centro $(3, 4, 5)$ tal que el $(0, 0, 0) \in S$.

- Hallar el plano tangente a S en $(0, 0, 0)$.
- Hallar otro plano que sea tangente a S y paralelo al del ítem a.

Ejercicio 4. Hallar los puntos de $A : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ que realicen la distancia mínima y máxima al origen.

Solución 1. Por el teorema de Schwartz sabemos que si $f \in C^2$ en $B_\delta(0,0)$ entonces

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \quad \forall (x,y) \in B_\delta(0,0).$$

En particular, debería pasar que $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$. Veamos que esto último no sucede.

$$f_x(x,y) = \frac{(3yx^2 - y^3)(x^2 + y^2) - (yx^3 - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3.12)$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - (yx^3 - xy^3)2y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3.13)$$

Para $(x,y) = (0,0)$, calculamos las derivadas por definición.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Ya tenemos definidas las derivadas parciales de f en todo \mathbb{R}^2 .

$$f_x(x,y) = \begin{cases} (3.12) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} (3.13) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Ahora podemos calcular las derivadas parciales cruzadas de segundo orden por definición.

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} \quad (3.14)$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} \quad (3.15)$$

Por (3.12) y (3.13), se puede observar que

$$f_x(0,h) = -h \text{ y } f_y(h,0) = h.$$

Entonces por (3.14) Y (3.15)

$$f_{xy}(0,0) = -1 \neq f_{yx}(0,0) = 1.$$

\therefore no existe $\delta > 0$ tal que f sea clase C^2 en $B_\delta(0,0)$.

Solución 2. Para resolverlo debemos intuir que está conformado por el límite de buena aproximación de un polinomio de Taylor de segundo orden centrado en el origen de una función. Buscamos una expresión para dicho polinomio y para la función.

Llamemos $f(x, y) = e^{2x}e^{3y}$, notemos que f es de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$. Entonces, podemos definir su polinomio de Taylor de segundo orden centrado en el origen, $P_2(x, y)$, y además vale el teorema de resto de Taylor

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) + \frac{1}{2}(x, y)\mathbf{H}_f(0, 0)(x, y)^T,$$

siendo $\mathbf{H}_f(0, 0)$ la matriz hessiana de f evaluada en el origen.

Tenemos que

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 1, \\ \nabla f(x, y) &= (2e^{2x}e^{3y}, 3e^{2x}e^{3y}) \implies \nabla f(0, 0) = (2, 3), \\ \mathbf{H}_f(x, y) &= \begin{pmatrix} 4e^{2x}e^{3y} & 6e^{2x}e^{3y} \\ 6e^{2x}e^{3y} & 9e^{2x}e^{3y} \end{pmatrix} \implies \mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces queda

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= 1 + (2, 3) \cdot (x, y) + \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \iff P_2(x, y) &= 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}y^2. \end{aligned}$$

Expresamos el error como

$$R_2(x, y) = f(x, y) - P_2(x, y).$$

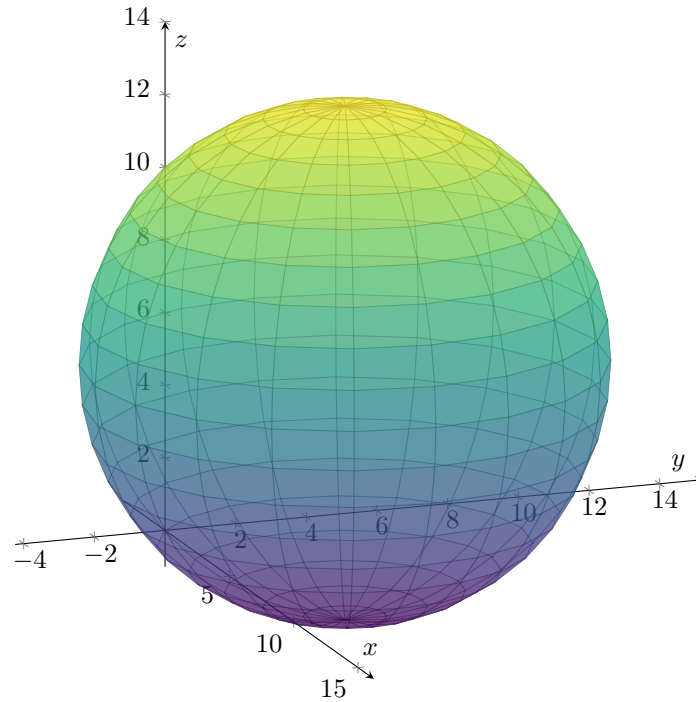
Por tanto, podemos reescribir el límite original como

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{R_2(x, y) - x^2 - y^2}{\|(x, y)\|^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left(\frac{R_2(x, y)}{\|(x, y)\|^2} - \frac{x^2 + y^2}{\|(x, y)\|^2} \right) = -1,$$

pues el primer término tiende a 0 por el teorema de Taylor y el segundo tiende claramente a 1.

Solución 3. a. Dado que el origen pertenece a S y conocemos su centro, podemos hallar la ecuación de la esfera.

$$S : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 50$$



Llamando

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 - 50$$

tenemos que

$$S = C(f, 0).$$

Buscamos el plano Π , tangente a $C(f, 0)$ y que pase por $(0, 0, 0)$. Sabemos que la ecuación de Π es de la forma

$$\Pi : \nabla f(0, 0, 0) \cdot (x - 0, y - 0, z - 0) = 0.$$

Es fácil ver que $\nabla f(0, 0, 0) = (-6, -8, -10)$. Luego, una posible ecuación es

$$\Pi : 3x + 4y + 5z = 0.$$

b. Dado que el único plano paralelo a otro tangente a un punto en una esfera es el que se encuentra en el polo opuesto de ésta, buscamos el plano tangente Π' a ese otro punto \mathbf{w} . Llamando $\mathbf{v} = (-3, -4, -5)$ al vector que sale del centro de la esfera y termina en el origen, queda que

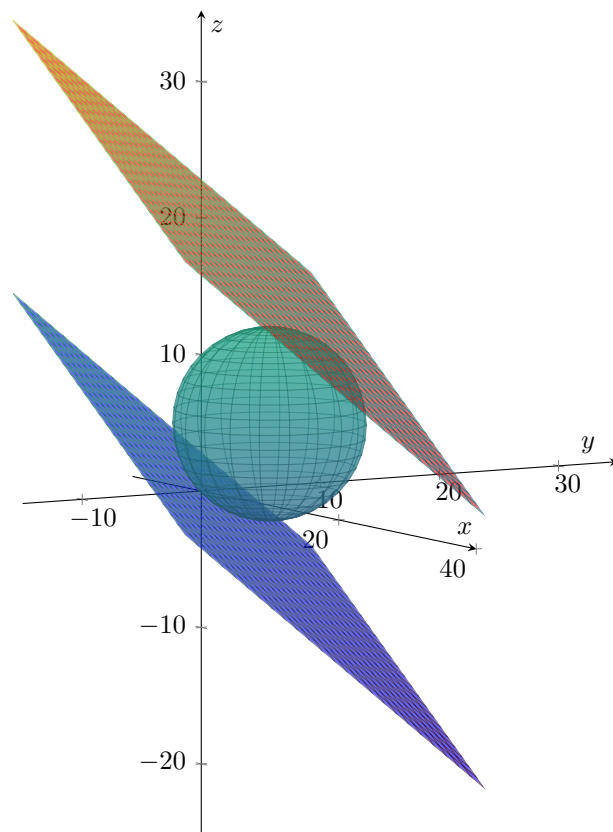
$$\mathbf{w} = (3, 4, 5) - \mathbf{v} = (6, 8, 10).$$

Como Π y Π' son paralelos, su vector normal \mathbf{n} es el mismo.

$$\implies \Pi' : \mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - \mathbf{w}) = 0$$

$$\iff \Pi' : 3(x - 6) + 4(y - 8) + 5(z - 10) = 0$$

$$\iff \Pi' : 3x + 4y + 5z = 100$$



Solución 4. Sean

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \text{dist}^2((x, y); (0, 0)) = x^2 + y^2$$

y

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 4,$$

luego $A = C(g, 0)$.

Como $f, g \in C^1(\mathbb{R}^1)$, el teorema de los multiplicadores de Lagrange nos dice que si $f|_A$ tiene un extremo local en un punto \mathbf{x} entonces necesariamente los vectores $\nabla f(\mathbf{x})$ y $\nabla g(\mathbf{x})$ son paralelos si $\nabla g(\mathbf{x}) \neq 0$. Además como f es continua sobre el conjunto A que es cerrado y acotado, por el teorema de Weierstrass, sabemos que f alcanza máximo y mínimo en A . Luego planteamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in A \iff \begin{cases} 2x = 2\lambda(x - 1) \\ 2y = 2\lambda(y - 1) \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema queda $x = y$ y

$$\begin{cases} x = x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x = x_2 = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

$\implies (x_1, x_1)$ y (x_2, x_2) son ambos extremos absolutos de la función f en A . Como $f(x_1, x_1) > f(x_2, x_2) \implies (x_1, x_1)$ es máximo absoluto y (x_2, x_2) es mínimo absoluto.

Luego la distancia mínima del círculo al origen es $\sqrt{f(x_2, x_2)} = 2 - \sqrt{2}$ y la distancia máxima $\sqrt{f(x_1, x_1)} = 2 + \sqrt{2}$.

Segundos parciales resueltos

4.1 Fecha 25 de junio de 2023

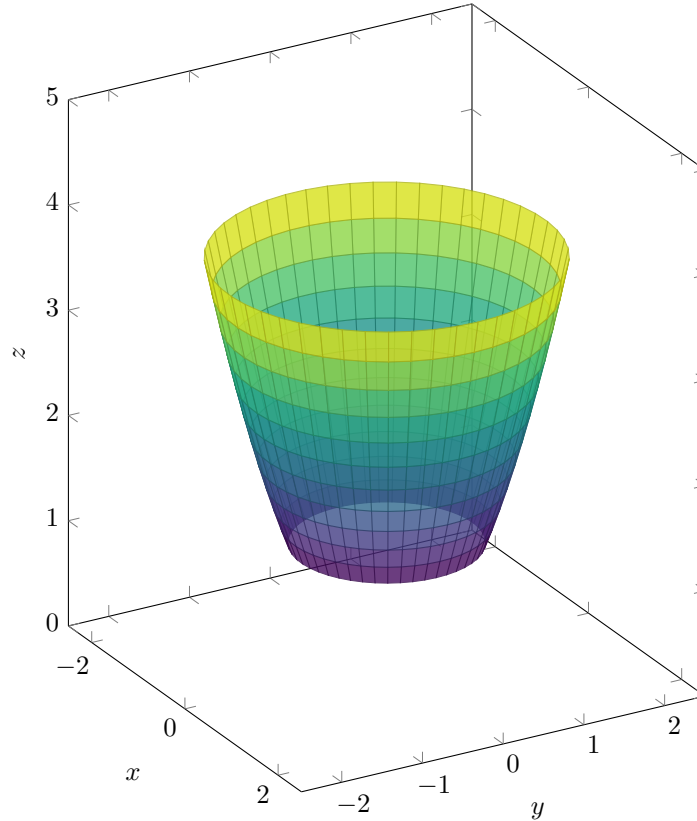
Ejercicio 1. Sea S la superficie dada por $x^2 + y^2 = z$ con $z \geq 1$ y $x^2 + y^2 \leq 4$ y sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 con tercer componente nula y $\nabla \cdot \mathbf{F}$ constante 3. Calcular el flujo de \mathbf{F} a través de S indicando la orientación elegida.

Ejercicio 2. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - 2xz, 2xy + z^3, 3yz^2 - x^2)$ y sea C una curva simple parametrizada por $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\sigma(0) = (0, 0, 0)$ y $\sigma(1) = (1, 2, 0)$. Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ indicando la orientación elegida.

Ejercicio 3. Calcular la masa del cuerpo limitado por las ecuaciones $y - x = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$ en el primer octante con función de densidad ρ constante.

Ejercicio 4. Sean $k \in \mathbb{R}$, un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que $\nabla \times \mathbf{F} = k$ y $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 ; x \leq y \leq 1\}$. Hallar k tal que $\int_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 8$.

Solución 1. Es útil primero entender con qué superficies y regiones se trabajará.



La idea es aplicar el teorema de Gauss pero S no es una superficie cerrada. Para ello pensemos en una superficie S' cerrada tal que $S \subseteq S'$. Definamos $S' = S \cup S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 , son las “tapas” del paraboloides “cortado”. Algebraicamente $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = 1\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = 4\}$.

Llamando Ω al cuerpo encerrado por S' y orientando a S' de manera exterior estamos en condiciones de usar el teorema de Gauss.

$$\begin{aligned} \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \\ \Leftrightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} - \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \\ \Leftrightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= I_1 - I_2 - I_3 \end{aligned}$$

Resolvemos el primer término.

$$I_1 = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_{\Omega} 3 \, dV = 3 \text{Vol}(\Omega)$$

Pasando a Ω en coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

donde,

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{z} \wedge 0 \leq \phi \leq 2\pi \wedge 1 \leq z \leq 4.$$

Entonces nos queda

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_1^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz = 2\pi \int_1^4 \left(\frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{z}} \right) dz = \pi \int_1^4 z \, dz = \frac{15\pi}{2}.$$

Luego, $I_1 = \frac{45}{2}\pi$.

Para calcular I_2 debemos parametrizar S_1 . Sea $D_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$ y sea

$$\Sigma : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \Sigma(u, v) = (u, v, 1).$$

Entonces podemos reescribir

$$I_2 = \iint_{D_1} (\mathbf{F} \circ \Sigma) \cdot (\Sigma_u \times \Sigma_v) \, d\mathbf{A}.$$

Primero calculamos las derivadas parciales de la parametrización.

$$\Sigma_u = (1, 0, 0)$$

$$\Sigma_v = (0, 1, 0)$$

Entonces

$$\Sigma_u \times \Sigma_v = (0, 0, 1) = \boldsymbol{\eta}.$$

Podemos observar que $\boldsymbol{\eta}$ no preserva la orientación para S_1 heredada por la orientación exterior de S' elegida anteriormente para poder aplicar el teorema de Gauss. En otras palabras, $\boldsymbol{\eta}$ “apunta” hacia el interior de Ω . Por lo que,

$$I_2 = - \iint_{D_1} (\mathbf{F} \circ \Sigma) \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{A}.$$

Calculamos el integrando aparte. Acordémonos que la tercer coordenada de \mathbf{F} es nula. Podemos llamar

$$\mathbf{F} \circ \Sigma = (P, Q, 0),$$

entonces nos queda que

$$(\mathbf{F} \circ \Sigma) \cdot \boldsymbol{\eta} = (P, Q, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0.$$

Por lo tanto $I_2 = 0$.

Procediendo de la misma manera nos daremos cuenta que también $I_3 = 0$.

$$\therefore \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = I_1 = \frac{45}{2}\pi$$

Solución 2. Busquemos, si existe, una función potencial para \mathbf{F} , es decir, busquemos f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$. Para ello, planteamos el sistema de tres ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{cases} y^2 - 2xz = f_x \\ 2xy + z^3 = f_y \\ 3yz^2 - x^2 = f_z \end{cases}$$

Entonces

$$\int f_x(x, y, z) dx = y^2x - zx^2 + g(y, z) = f(x, y, z), \quad (4.1)$$

donde g es la constante con respecto a x producto de la integración. Derivando (4.1) con respecto a y obtenemos

$$\begin{aligned} f_y(x, y, z) &= 2yx + g_y(y, z) \\ 2yx + g_y(y, z) &= 2xy + z^3 \implies g_y(y, z) = z^3 \\ g(y, z) &= \int g_y(y, z) dy = z^3y + h(z). \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (4.1),

$$y^2x - zx^2 + z^3 + h(z) = f(x, y, z). \quad (4.2)$$

Derivando (4.2) con respecto a z obtenemos

$$\begin{aligned} f_z(x, y, z) &= -x^2 + 3yz^2 + h_z(z) \\ -x^2 + 3yz^2 + h_z(z) &= 3yz^2 - x^2 \implies h_z(z) = 0 \\ h(z) &= C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo tanto llegamos a una familia de soluciones.

$$f(x, y, z) = y^2x - zx^2 + z^3 + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Demostramos que \mathbf{F} es un campo conservativo pues $\mathbf{F} = \nabla f$. Luego, podemos calcular

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f(1, 2, 0) - f(0, 0, 0) = 4.$$

Solución 3. La masa de un cuerpo de volumen Ω es

$$M = \iiint_{\Omega} \rho dV.$$

En este caso

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1 \wedge y \leq 1 + x \wedge x, y, z \geq 0\}.$$

Conviene trabajar en coordenadas cilíndricas. Sea

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = y \\ z = r \sin \phi. \end{cases}$$

Entonces en el nuevo sistema de coordenadas

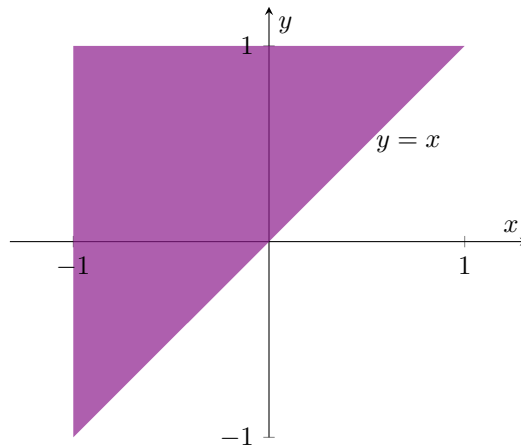
$$\Omega^* = \{(r, \phi, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 + r \cos \phi \wedge 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Ahora podemos reescribir, dado que ρ es constante,

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{\rho} &= \iiint_{\Omega^*} r \, dy \, d\phi \, dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1+r \sin \phi} r \, dy \, d\phi \, dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(1 + r \sin \phi) \, d\phi \, dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r + r^2 \sin \phi) \, d\phi \, dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \, d\phi \, dr + \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \phi \, d\phi \, dr \\
 &= \int_0^1 r \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi + \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \, d\phi \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\therefore M = \rho \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \right)$$

Solución 4. La región D se grafica de la siguiente manera.



Podemos observar que D es simplemente conexo y que ∂D es una curva simple cerrada, por lo tanto vale el teorema de Green.

$$\oint_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = k \iint_D dA = 8$$

Nos quedaría calcular el $A(D)$, área de D , que, por ser un triángulo, se puede calcular simplemente.

$$A(D) = \iint_D dA = \frac{4}{2} = 2$$

Entonces nos queda

$$2k = 8 \iff k = 4.$$

4.2 Fecha recuperatorio 29 de junio de 2023

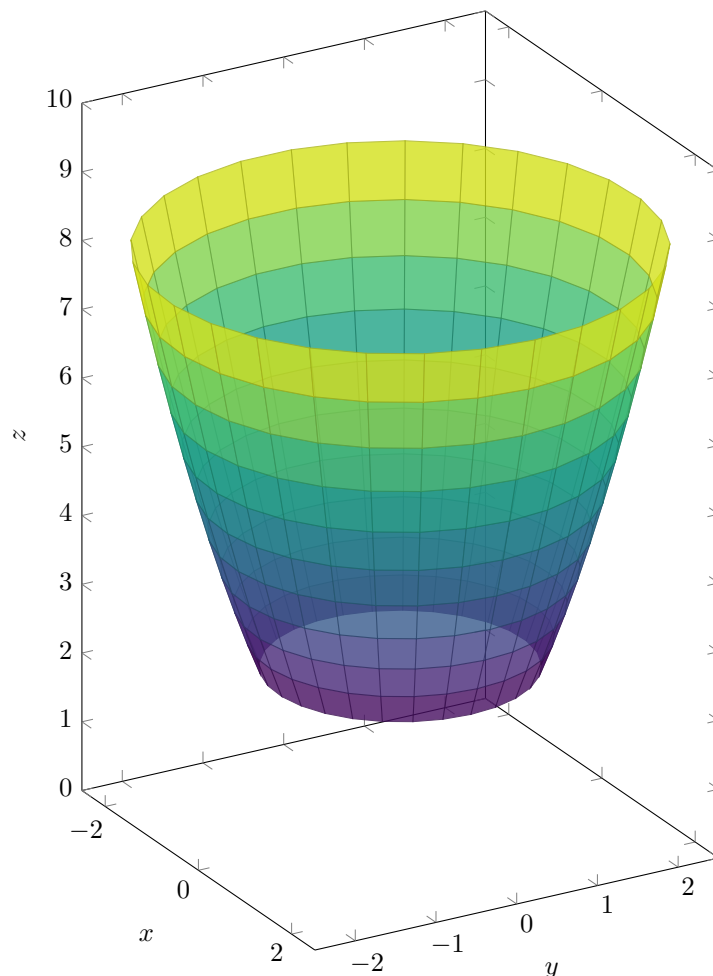
Ejercicio 1. Sea S la superficie dada por $x^2 + y^2 = z$ con $z \geq 2$ y $x^2 + y^2 \leq 9$. Calcular el área de S .

Ejercicio 2. Sea C la curva simple definida por la intersección de las superficies $x^2 + z^2 = 16$, $y + z = 4$ con $y \leq 4$ y sea g una función escalar $C^1(\mathbb{R})$. Calcular la integral sobre C del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, g(y), g(z))$. Indicar la orientación elegida.

Ejercicio 3. Sean $\mathbf{F}(x, y, z) = (-xy + yz, -y^2 + xz, xz)$, $a \in \mathbb{R}$ positivo y S la superficie de seis caras que encierra el cuerpo dado por $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ y $0 \leq z \leq a$ orientada con normales exteriores. Hallar a de manera que el flujo de \mathbf{F} a través de S sin su cara superior sea -24 .

Ejercicio 4. Calcule la masa del cuerpo definido por $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 32$, en el primer octante, si su densidad es proporcional a la distancia de un punto al plano $z = 0$.

Solución 1. S es una sección de paraboloide, como se puede observar en el siguiente gráfico.



Escribimos el conjunto S como

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z; 2 \leq z \leq 9\}.$$

Queremos calcular

$$A(S) = \iint_S dA.$$

Para ello necesitaremos una parametrización de S . Sea

$$D = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2} \leq \rho \leq 3; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

y sea

$$\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \Sigma(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, \rho^2).$$

Primero calculamos las derivadas parciales de la parametrización.

$$\Sigma_\rho = (\cos \phi, \sin \phi, 2\rho)$$

$$\Sigma_\phi = (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, 0)$$

Entonces

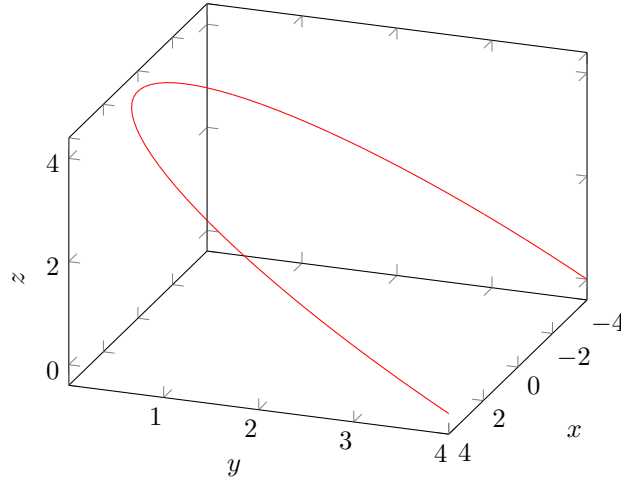
$$\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi = (-2\rho^2 \cos \phi, -2\rho^2 \sin \phi, \rho),$$

$$\|\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi\| = \rho\sqrt{4\rho^2 + 1}.$$

Quedando

$$\begin{aligned} \iint_S dA &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^3 \|\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi\| \, d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^3 \rho\sqrt{4\rho^2 + 1} \, d\rho d\phi, \\ u &= 4\rho^2 + 1 \rightarrow du = 8\rho \, d\rho, \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_9^{37} \sqrt{u} \, dud\phi = \frac{2\pi}{8} \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_9^{37} = \frac{\pi}{4 \cdot \frac{3}{2}} (37^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{\pi}{6} (\sqrt{37^3} - \sqrt{9^3}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Solución 2. La curva de la intersección se muestra en el siguiente gráfico.



Notemos que C es una curva no cerrada. Para cerrarla, llamemos $C = C_1$, $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \wedge y = 4 \wedge |x| \leq 4\}$, en palabras, C_2 es la recta que une la curva; y $C_0 = C_1 + C_2$. Y sea $\text{int}(C_0) = D$. Ahora C_0 es una curva simple cerrada. Entonces podemos aplicar el teorema de Stokes, eligiendo la orientación de C_0 tal que se cumpla la regla de la mano derecha.

$$\oint_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A},$$

ya que \mathbf{F} es $C^1(\mathbb{R})$, pues sus componentes son $C^1(\mathbb{R})$, y $D \in \text{dom}(\mathbf{F})$. Notemos que $\nabla \times \mathbf{F} \equiv 0 \Rightarrow$

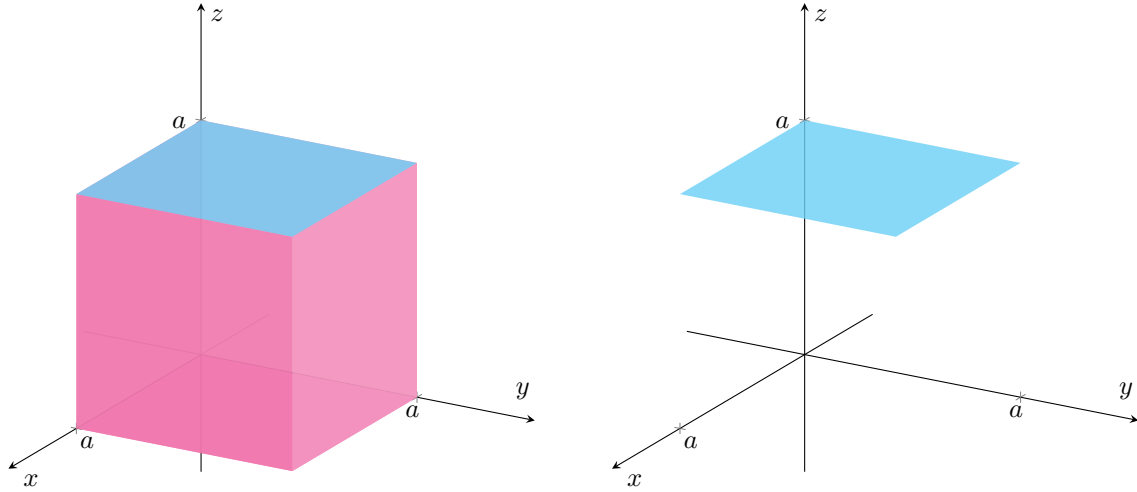
$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Ahora busquemos una trayectoria de C_2 que respete su orientación. Sea $\sigma : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\sigma(t) = (t, 4, 0)$. Entonces $\sigma'(t) = (1, 0, 0)$. Luego la integral de curva de C_2 es

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-4}^4 (\mathbf{F} \circ \sigma) \cdot \sigma' \, dt = \int_{-4}^4 t \, dt = 0.$$

\therefore la integral sobre la curva original $C = C_1$ es también 0.

Solución 3. Llamemos Ω al volumen que encierra S y sea S' la superficie de la cara superior de S , por lo que S' tiene orientación igual que la tapa de S . En los siguientes gráficos se puede ver la representación de S y S' respectivamente.



Por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV.$$

Entonces la integral de flujo que buscamos es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = -24.$$

Primero calculamos el término con la divergencia de \mathbf{F} .

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -y - 2y + x = x - 3y$$

$$\Rightarrow \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \int_0^a \int_0^a \int_0^a x - 3y \, dx dy dz$$

$$\Leftrightarrow a \int_0^a \left(\frac{x^2}{2} - 3yx \right) \Big|_0^a dy = a \int_0^a \frac{a^2}{2} - 3ya \, dy$$

$$\Leftrightarrow a \left(\frac{a^2}{2} y - 3a \frac{y^2}{2} \right) = \frac{a^4}{2} - 3 \frac{a^4}{2} = -a^4$$

Segundo, el flujo sobre la tapa. Sea $\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S' \subset \mathbb{R}^3$, una parametrización de S' tal que $\Sigma(u, v) = (u, v, a)$. Donde $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq a; 0 \leq v \leq a\}$. Entonces

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iint_D \mathbf{F} \circ \Sigma \cdot (\Sigma_u \times \Sigma_v) \, dA.$$

$\Sigma_u = (1, 0, 0)$ y $\Sigma_v = (0, 1, 0) \Rightarrow \Sigma_u \times \Sigma_v = (0, 0, 1) = \boldsymbol{\eta}$. Por lo que Σ respeta la orientación de S' . Y $\mathbf{F} \circ \Sigma = (-uv + va, -v^2 + ua, ua) \Rightarrow \mathbf{F} \circ \Sigma \cdot \boldsymbol{\eta} = ua$. Por lo tanto

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_0^a \int_0^a au \, du dv = a^2 \frac{a^2}{2} = \frac{a^4}{2}.$$

$$\therefore -a^4 - \frac{a^4}{2} = -24 \Leftrightarrow \frac{3}{2}a^4 = 24 \Leftrightarrow a^4 = 16 \Leftrightarrow a = 2.$$

Solución 4. La distancia d de un punto (x_0, y_0, z_0) en el primer octante a el plano $z = 0$ está dada por

$$d((x_0, y_0, z_0); (x_0, y_0, 0)) = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2 + z_0^2} = z_0.$$

Luego la función de densidad del sólido es $\delta(z) = kz$, con $k \in \mathbb{R}$. Además sea

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 32 \wedge x, y, z \geq 0\}.$$

Trabajaremos en coordenadas esféricas. En este sentido, recordemos lo siguiente.

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

Por las condiciones de Ω tenemos que

$$z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \iff \rho \cos \phi \leq \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi} = \rho |\sin \phi|.$$

Además, como estamos en el primer octante, nos queda que $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Por otro lado,

$$\rho^2 \leq 32 \wedge \rho \geq 0 \iff 0 \leq \rho \leq \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Escribimos nuestro nuevo volumen Ω^* y usamos el teorema de cambio de variables.

$$\Omega^* = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 4\sqrt{2} \wedge 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Y la masa del sólido Ω queda

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega^*} k\delta(z)\rho^2 \sin \phi \, dV = \iiint_{\Omega^*} k\rho \cos \phi \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{4\sqrt{2}} \rho^3 \cos \phi \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= k2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \phi \sin \phi \, d\phi \int_0^{4\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \\ &= k2\pi \frac{1}{4} 256 = 128k\pi. \end{aligned}$$

4.3 Fecha 18 de noviembre de 2023

Ejercicio 1. Hallar $a \in \mathbb{R}$ positivo tal que el volumen encerrado por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = a(x^2 + y^2)$ sea igual a $\frac{\pi}{6}$.

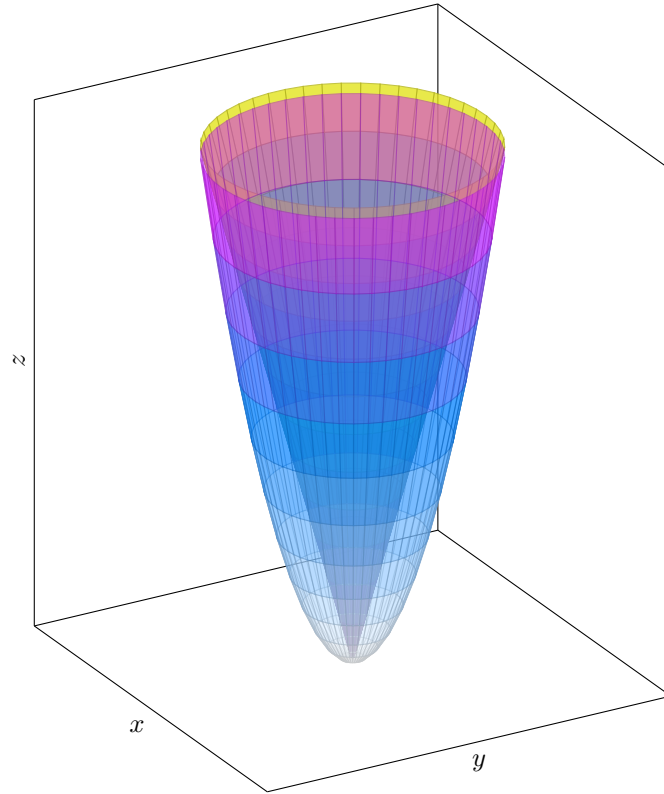
Ejercicio 2. Sea S la superficie parametrizada por $\Sigma : [-2, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Sigma(u, v) = (u + v, u - 2v, u^2 + v^2)$. Hallar las ecuaciones de todos los planos tangentes a S que resulten paralelos al plano $x + y + z = 0$.

Ejercicio 3. Sea C una curva simple parametrizada por $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\sigma(0) = \sigma(1)$ y sea el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - 2xz + g(x), 2xy + z^3 - g(y), 3yz^2 - x^2)$ con $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

Ejercicio 4. Sea C la curva simple formada por los segmentos $y = 0$ si $x \in [1, 2]$ y $x = 0$ si $y \in [1, 2]$, y por las curvas $y = \sqrt{4 - x^2}$ y $y = \sqrt{1 - x^2}$ ambas en el primer cuadrante. Calcular, indicando la orientación elegida,

$$\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

Solución 1. Primero, es útil reconocer qué superficies son las que encierran el volumen.



El volumen encerrado Ω , entonces, es aquel entre el semicono $S_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloide elíptico $S_2 : z = a(x^2 + y^2)$. La intersección de ambas superficies sucede, arbitrariamente, para $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, y, con $z \neq 0$, para los puntos:

$$\begin{aligned} a(x^2 + y^2) &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ a\sqrt{x^2 + y^2} &= 1 \\ x^2 + y^2 &= \frac{1}{a} \quad , \quad a \neq 0 \end{aligned}$$

Puesto que tales puntos pertenecen a ambas superficies, la curva intersección es

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{1}{a} \wedge z = \frac{1}{a} \right\}.$$

Así, se puede representar el volumen en coordenadas cartesianas como

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a(x^2 + y^2) \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{a} \right\}.$$

Sin embargo, la representación elemental del conjunto es más conveniente en coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

De tal forma que resulta

$$\Omega = \left\{ (\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \phi < 2\pi \wedge a\rho^2 \leq z \leq \rho \wedge 0 \leq \rho \leq \frac{1}{a} \right\}.$$

Ahora, queda encontrar cual es ese volumen encerrado, realizando la integral, en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dV \\
 &= \iiint_{\Omega} dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega} \rho d\phi dz d\rho \\
 &= \int_0^{\frac{1}{a}} \int_{a\rho^2}^{\rho} \int_0^{2\pi} \rho d\phi dz d\rho \\
 &= \int_0^{\frac{1}{a}} \int_{a\rho^2}^{\rho} \rho \phi|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dz d\rho \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} \int_{a\rho^2}^{\rho} \rho dz d\rho \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} \rho z|_{z=a\rho^2}^{z=\rho} d\rho \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} (\rho^2 - a\rho^3) d\rho \\
 &= 2\pi \left(\frac{\rho^3}{3} - a\frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{a}} \\
 &= 2\pi \left(\frac{1}{3a^3} - \frac{1}{4a^3} \right) \\
 \text{Vol}(\Omega) &= \frac{\pi}{6a^3} \quad , \quad a \in \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$

Luego, para encontrar a , la restricción es que el volumen encerrado, es decir, el valor de la integral anterior, sea $\frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(\Omega) &= \frac{\pi}{6} \\
 \frac{\pi}{6a^3} &= \frac{\pi}{6} \\
 a^3 &= 1 \\
 \therefore a &= 1
 \end{aligned}$$

Solución 2. Para este ejercicio, la visualización de la superficie es difícil sin usar una herramienta graficadora. Sin embargo, sabemos que el vector normal al plano tangente punto a punto de la superficie, se calcula, usando la parametrización, como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_S(u, v) &= \Sigma_{\mathbf{u}}(u, v) \times \Sigma_{\mathbf{v}}(u, v) \\
 \mathbf{n}_S(u, v) &= (1, 1, 2u) \times (1, -2, 2v) \\
 \mathbf{n}_S(u, v) &= (2v + 4u, 2u - 2v, -3)
 \end{aligned}$$

Para que un plano tangente sea paralelo al plano $x + y + z = 0$, sus vectores normales deben ser paralelos. El vector normal al plano anterior, \mathbf{n}_P , es:

$$\mathbf{n}_P \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

Con x_0 un punto perteneciente al plano. En este caso, tomando $x_0 = (0, 0, 0)$:

$$\mathbf{n}_P \cdot (x, y, z) = 0 = x + y + z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_P = (1, 1, 1)$$

Ahora, para pedir que $\mathbf{n}_P \parallel \mathbf{n}_S$, es equivalente pedir, para un $k \in \mathbb{R} - \{0\}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_S &= k \cdot \mathbf{n}_P \\ (2v + 4u, 2u - 2v, -3) &= k(1, 1, 1)\end{aligned}$$

Lo que resulta en un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\begin{cases} k = (4u + 2v) \\ k = (2u - 2v) \\ k = -3 \end{cases}$$

De la tercera ecuación se obtiene $k = -3$, y de sumar la primera y la segunda, reemplazando este valor anterior:

$$\begin{aligned}2(-3) &= 6u \\ -6 &= 6u \\ \Rightarrow u &= -1\end{aligned}$$

Reemplazando en cualquiera de las dos primeras ecuaciones, se obtiene la solución al sistema con $\{u = -1 \wedge v = \frac{1}{2}\}$. Entonces, existe un único punto cuyo plano tangente es paralelo al plano $x + y + z = 0$, que es

$$(x, y, z) = \Sigma \left(-1, \frac{1}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4} \right).$$

La ecuación del plano tangente de este punto sobre la curva S es:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_S \left(-1, \frac{1}{2} \right) \cdot \left((x, y, z) - \left(-\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4} \right) \right) &= 0 \\ (-3)(1, 1, 1) \cdot \left((x, y, z) - \left(-\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4} \right) \right) &= 0 \\ (1, 1, 1) \cdot \left((x, y, z) - \left(-\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4} \right) \right) &= 0 \\ \therefore \Pi : \left(x + \frac{1}{2} \right) + (y + 2) + \left(z - \frac{5}{4} \right) &= 0\end{aligned}\tag{4.4}$$

Solución 3. En principio, no sabemos la expresión de la parametrización de la curva. La única información que tenemos es que es una curva simple y cerrada, puesto que sus valores inicial y final son iguales. Sin embargo, tenemos la expresión del campo \mathbf{F} , cuya integral sobre la curva C hay que calcular. El ejercicio, por lo tanto, apunta a chequear si \mathbf{F} es un campo conservativo, para que:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

según el corolario para el teorema de la integral sobre una curva de un campo conservativo.

Ya que $g \in C^1(\mathbb{R})$, \mathbf{F} queda definida de $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Así, con el campo definido en un conjunto simplemente conexo, se puede usar que:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ es un campo conservativo}$$

Así, se calcula el rotor del campo:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times (y^2 - 2xz + g(x), 2xy + z^3 - g(y), 3yz^2 - x^2) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - 2xz + g(x) & 2xy + z^3 - g(y) & 3yz^2 - x^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(3yz^2 - x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy + z^3 - g(y)) \\ \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - 2xz + g(x)) - \frac{\partial}{\partial x}(3yz^2 - x^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(2xy + z^3 - g(y)) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 2xz + g(x)) \end{pmatrix} \\
&= (3z^2 - 3z^2, -2x + 2x, 2y - 2y)
\end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow \mathbf{F} \text{ es un campo conservativo.}$$

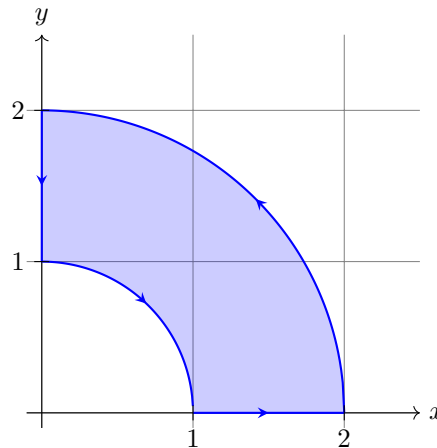
Por lo tanto, con \mathbf{F} un campo conservativo, podemos usar el corolario antes mencionado y calcular el valor de la integral sobre la curva C , cerrada, en cero.

$$\therefore \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Solución 4. Cabe notar que la integral pedida es equivalente a escribir:

$$\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \int_C \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \cdot d\mathbf{s}$$

Donde la curva C es simple y cerrada, por lo que encierra un área A , tal que $\partial A^+ = C^+$, orientada arbitrariamente en sentido antihorario.



Puesto que C está orientada antihoraria y encierra una región A , simplemente conexa, se puede usar el teorema de Green.

$$\oint_{C^+} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \nabla \times \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dA$$

Tal que el rotor del campo en cuestión se calcula:

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x \cdot (-2y)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{4yx}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Mientras que la región A puede ser expresada, convenientemente, en coordenadas polares.

$$A = \left\{ (\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \wedge 1 \leq \rho \leq 2 \right\}$$

Así, la integral se puede resolver en coordenadas polares como:

$$\begin{aligned}\iint_A \nabla \times \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dA &= \iint_A \frac{4yx}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\ &= \iint_A \left(\frac{4\rho \sin(\phi) \rho \cos(\phi)}{\rho^4} \cdot \rho \right) d\rho d\phi \\ &= \iint_A \left(\frac{2 \sin(2\phi)}{\rho} \right) d\rho d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \left(\frac{2 \sin(2\phi)}{\rho} \right) d\rho d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \sin(2\phi) \ln(\rho) \Big|_{\rho=1}^{\rho=2} \right) d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \sin(2\phi) \ln \left(\frac{2}{1} \right) \right) d\phi \\ &= \ln(2) \cdot 2 \left(\frac{-\cos(2\phi)}{2} \right) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} \\ &= \ln(2) \cdot 2 \\ \Rightarrow \iint_A \nabla \times \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dA &= 2 \ln(2)\end{aligned}$$

Que, volviendo a Green, determina el valor de la integral original.

$$\therefore \int_{C^+} \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy = 2 \ln(2)$$

4.4 Fecha 11 de junio de 2024

Ejercicio 1. Sean los campos $\psi(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ y $\mathbf{F}(x, y) = (\psi_y(x, y), -\psi_x(x, y))$ y sea C una curva regular, simple, y cerrada con orientación positiva contenida en el conjunto $A = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 9\}$. Hallar los posibles valores de la integral de \mathbf{F} sobre C .

Ejercicio 2. Calcular el volumen del cilindro $x^2 + y^2 \leq 9$ limitado por el plano $z = -1$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, -y^2, xz)$ a través de la superficie $S_1 = \{x^2 + y^2 = 1 \wedge 0 \leq z \leq 3\}$ unión $S_2 = \{x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = 0\}$. Indique gráfica y analíticamente la orientación elegida.

Ejercicio 4. Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 que encierra un volumen Ω y sea el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (ax, 2y, z)$ con $a \in \mathbb{R}$. Hallar a tal que el flujo saliente de \mathbf{F} a través de S sea igual al volumen de Ω .

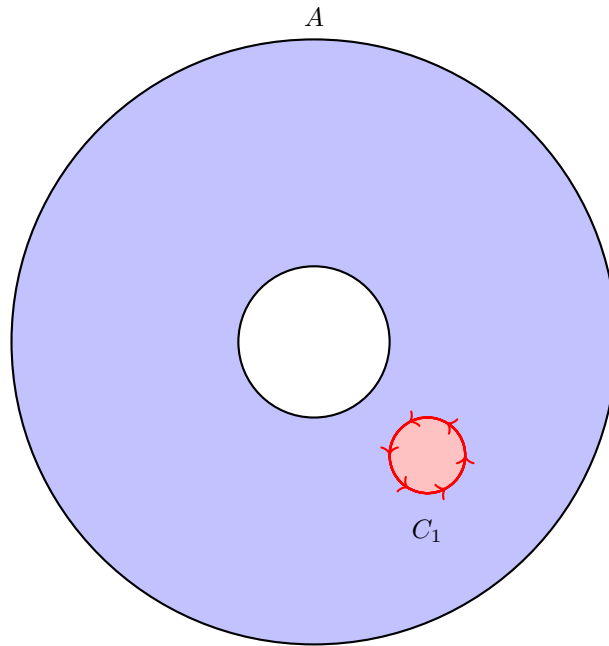
Solución 1. Antes que nada, se debe determinar cuál es la expresión del campo \mathbf{F} , en $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0)\}$.

$$\begin{aligned}\psi_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x^2 \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y^2 \\ &= \frac{y}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Para comenzar a resolver el problema, se consideran todas las curvas C_1 regulares, simples y cerradas, orientadas positivamente y contenidas en A tal que su región encerrada D_1 , a su vez, también esté contenida en A .



En este caso, con \mathbf{F} una función de clase C^1 en A , valen las hipótesis del teorema de Green (tanto para la curva como para el campo). Entonces:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{D_1} (\nabla \times \mathbf{F}) dA$$

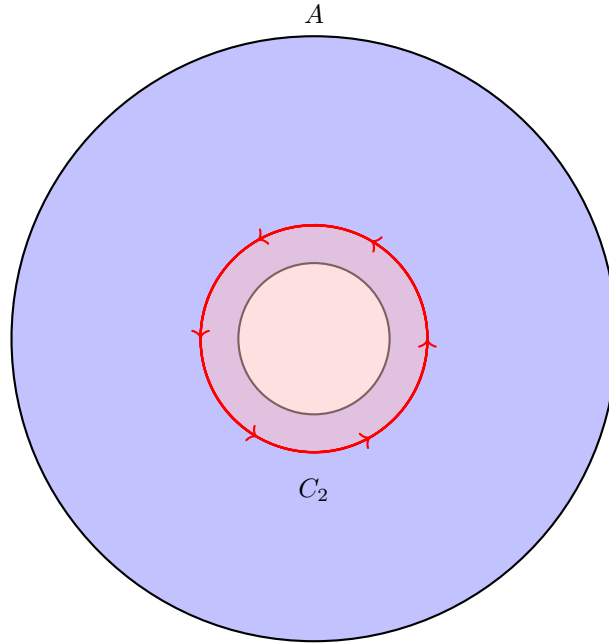
Acto siguiente, se calcula el rotor de \mathbf{F} , para resolver la integral.

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\
 &= \left(-\frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) - \left(\frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\
 &= - \left(\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\
 &= - \left(\frac{-x^2 + y^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\
 \nabla \times \mathbf{F} &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral del campo sobre C_1 resulta:

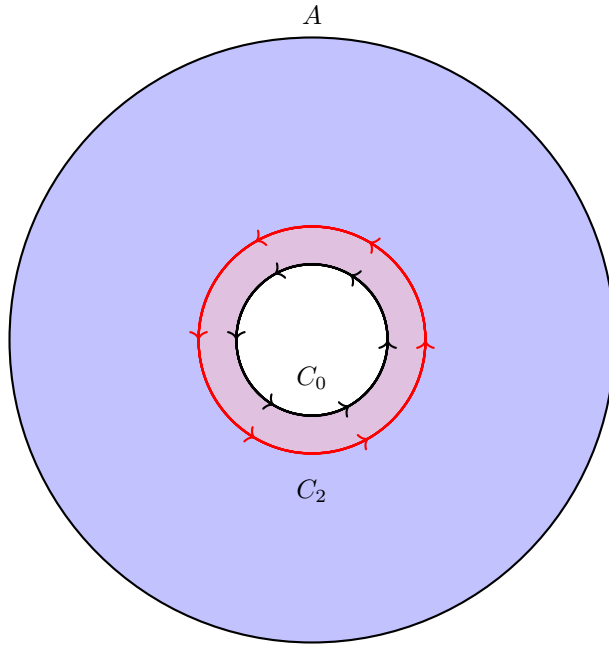
$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_{D_1} (0) dA \\
 \Rightarrow \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= 0
 \end{aligned}$$

Ahora queda considerar los casos de todas las curvas C_2 regulares, simples y cerradas, orientadas positivamente y contenidas en A tal que su región encerrada D_2 no esté totalmente contenida dentro de A .



En este caso, ya no se cumplen las condiciones del teorema de Green, puesto que \mathbf{F} no se encuentra definida en $(0, 0) \in D_2$. Sin embargo, es posible utilizar el teorema de Green generalizado. Definiendo previamente, con orientación positiva:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \\
 C_0 &= \partial D_0
 \end{aligned}$$



Luego, se puede utilizar el teorema de Green generalizado:

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{(D_2 - D_0)} (\nabla \times \mathbf{F}) dA$$

Sobre el área entre ambas curvas, el rotor del campo vale cero, puesto que está definido en $(D_2 - D_0) \subset A$. Entonces, el término de la derecha, se vuelve cero.

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Para realizar la integral de la derecha, se propone la parametrización:

$$\begin{aligned} \sigma : B = [0; 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 / \sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \\ \sigma'(t) &= (-\sin(t), \cos(t)) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \circ \sigma(t) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin(t), -\cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) - \cos^2(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -(\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt \\ &= -\int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= -(t)|_0^{2\pi} \\ \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= -2\pi \\ \Rightarrow \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= -2\pi \end{aligned}$$

Solución 2. Primero, se debe determinar el volumen a calcular como un conjunto elemental, para poder realizar la integral. La primera condición del volumen, es que $x^2 + y^2 \leq 9$. Luego, quedaría restringir en qué intervalo se encuentra el valor de z .

Uno de los límites, como lo dice la consigna es $z = -1$. El otro límite es, entonces, la superficie $z = x^2 + y^2$. Graficarlos nota claramente que la superficie descrita por el paraboloide se encuentra sobre el plano $z = -1$. Por lo tanto, la restricción para es $-1 \leq z \leq x^2 + y^2$. También se puede razonar que $0 \leq x^2 + y^2$ por lo que la $z = -1 < 0 \leq z = x^2 + y^2$.

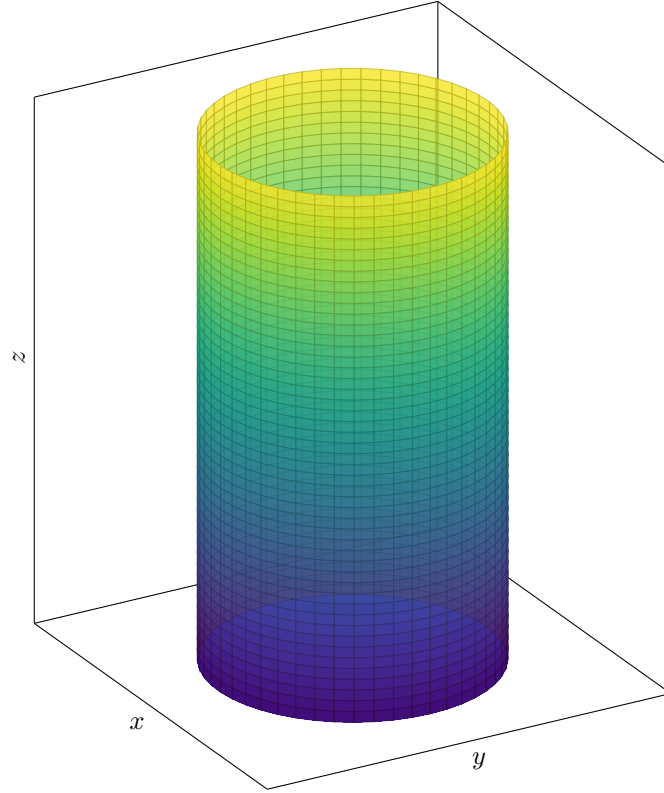
Para expresar el conjunto elemental conviene hacerlo, en coordenadas cilíndricas, con $x^2 + y^2 = \rho^2$:

$$\Omega = \{(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 3 \wedge -1 \leq z \leq \rho^2 \wedge 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

Ahora sí, se puede calcular el volumen en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dV \\ &= \iiint_{\Omega} dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \rho d\phi dz d\rho \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^{\rho^2} \int_0^{2\pi} \rho d\phi dz d\rho \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^{\rho^2} \rho \phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dz d\rho \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^{\rho^2} \rho \cdot 2\pi \cdot dz d\rho \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 \rho z \Big|_{z=-1}^{z=\rho^2} d\rho \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 \rho (\rho^2 + 1) d\rho \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 (\rho^3 + \rho) d\rho \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=3} \\ \therefore \text{Vol}(\Omega) &= \frac{99}{2} \pi \end{aligned}$$

Solución 3. Para entender el problema, primero grafiquemos las superficies.



Se trata de una superficie cilíndrica, con una tapa inferior en $z = 0$, pero no una tapa superior en $z = 3$. Para calcular entonces el flujo de \mathbf{F} habría, en principio, que parametrizar la superficie cilíndrica y la tapa por separadas, y luego calcular dos integrales, una por cada superficie.

Sin embargo, si se le agrega a estas dos superficies una tercera S_T , que sea la tapa superior del cilindro. Así $S_C = S_1 \cup S_2 \cup S_T$ encierra el volumen del cilindro (Ω). Esta superficie $S_C = \partial\Omega$, si se orienta de saliente, cumple las condiciones del teorema de la divergencia. Con $\mathbf{F} \in C^1$:

$$\begin{aligned} \iint_{S_C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \\ \iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \\ \iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV - \iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Ahora, se deben calcular las dos integrales del miembro derecho. Para la primera, se debe representar el Ω como un conjunto elemental, lo que resulta fácil en coordenadas cilíndricas:

$$\Omega = \{(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1 \wedge 0 \leq \phi \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq 3\}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iiint_{\Omega} (z - 2y + x) dx dy dz \\
&= \iiint_{\Omega} (z - 2\rho \sin \phi + \rho \cos \phi) \rho d\phi dz d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^3 \int_0^{2\pi} (z\rho - 2\rho^2 \sin \phi + \rho^2 \cos \phi) d\phi dz d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^3 (z\rho\phi + 2\rho^2 \cos \phi + \rho^2 \sin \phi) \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dz d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^3 (z\rho \cdot 2\pi) dz d\rho \\
&= \pi \int_0^1 (z^2 \rho) \Big|_{z=0}^{z=3} d\rho \\
&= \pi \int_0^1 (9\rho) d\rho \\
&= 9\pi \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} \\
\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \frac{9}{2}\pi
\end{aligned}$$

Para la segunda integral a resolver, primero es necesaria la parametrización de S_T . Para ello, se propone $D = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1 \wedge 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ y la parametrización:

$$\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 / \Sigma(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 3)$$

tal que $\Sigma_{\rho} \times \Sigma_{\phi} = (0, 0, \rho)$, con $\rho > 0$ orienta la superficie saliente, como se había definido previamente. Luego, ya es posible calcular la integral:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (3\rho \cos \phi, -\rho^2 \sin^2 \phi, 3\rho \cos \phi) \cdot (0, 0, \rho) dA \\
&= \iint_D 3\rho^2 \cos \phi dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^2 \cos \phi d\phi d\rho \\
&= \int_0^1 3\rho^2 \sin \phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\rho \\
&= \int_0^1 3\rho^2 \cdot 0 \cdot d\rho \\
\iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= 0
\end{aligned}$$

Con estos dos resultados, ya es posible calcular la integral que pide la consigna, recordando que la orientación de las superficies se definió saliente.

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV - \iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \frac{9}{2}\pi - 0 \\
\therefore \iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{9}{2}\pi
\end{aligned}$$

Solución 4. Primero, notemos que el campo \mathbf{F} es un campo $C^1(\mathbb{R}^3)$, puesto que cada una de sus componentes lo es, independientemente del valor de $a \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, con $S = \partial\Omega$ orientada saliente, se cumplen las hipótesis del teorema de la divergencia, tal que:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

Por lo tanto, la condición que plantea la consigna:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \text{Vol}(\Omega)$$

se puede reescribir como:

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_\Omega dV$$

Para que se cumple lo anterior, es suficiente con pedir que la divergencia del campo resulte 1.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial x}(ax) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) &= 1 \\ a + 2 + 1 &= 1 \\ \therefore a &= -2 \end{aligned}$$

4.5 Fecha recuperatorio extra

Ejercicio 1. Sean $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, y \leq 0, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z = 1 - x^2 - y^2\}$. Calcular el volumen de V y el área de S .

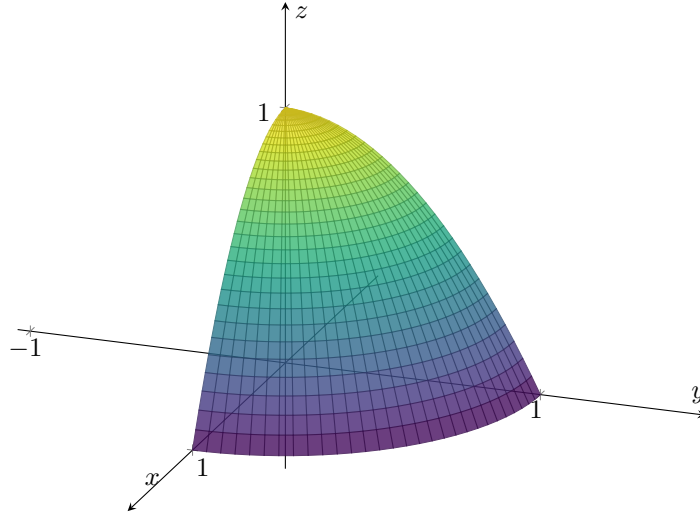
Ejercicio 2. Sean S una superficie esférica de radio R con centro en el primer octante y \mathbf{F} un campo de clase C^1 con $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = x + y + z$. Probar que el flujo saliente de \mathbf{F} a través de S es no negativo.

Ejercicio 3. Sean C el borde del triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y el campo $\mathbf{F}(x, y) = (e^{\cos(x)+x^2} + xy^2 + 2y, \ln(1 + e^{y^2}) + yx^2 + 3x)$. Calcular, indicando la orientación elegida:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds$$

Ejercicio 4. Probar que el campo $\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy} + y \cos(xy), xe^{xy} + \cos(xy)x)$ es conservativo. Dada C la curva parametrizada por $\alpha(t) = (t^2, t)$ con $t \in [0, 1]$ calcular el trabajo realizado por \mathbf{F} sobre C .

Solución 1. Nos piden calcular $\iiint_V dV$ y $\iint_S dA$. Para la integral de volumen conviene trabajar en coordenadas cilíndricas y para la de superficie habrá que parametrizar.



Aplicando la transformación $V \rightarrow V^*$ queda

$$\begin{aligned} V^* &= \{(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho \cos \phi \leq 0, \rho \sin \phi \leq 0, 0 \leq z \leq 1 - \rho^2\} \\ \iff V^* &= \{(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : \pi \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq \rho \leq \sqrt{1-z}\}. \end{aligned}$$

Y por el teorema de cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_V dV &= \iiint_{V^*} \rho dV = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \rho d\rho dz d\phi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{2}(1-z) dz = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Para parametrizar S , llamamos

$$D = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : \pi \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi, 0 \leq \rho \leq 1\}.$$

y

$$\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \Sigma(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, \rho^2).$$

Calculamos las derivadas parciales de Σ .

$$\begin{aligned} \Sigma_\rho &= (\cos \phi, \sin \phi, 2\rho) \\ \Sigma_\phi &= (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, 0) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \Sigma_\rho \times \Sigma_\phi &= (-2\rho^2 \cos \phi, -2\rho^2 \sin \phi, \rho), \\ \|\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi\| &= \rho\sqrt{4\rho^2 + 1}. \end{aligned}$$

Entonces escribimos, por definición, el área de S como

$$\iint_S dA = \iint_D \|\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi\| d\rho d\phi = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^1 \rho\sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho d\phi.$$

Nos queda la misma integral que (4.3), sólo que con distintos límites de integración. Por lo que, procediendo de la misma manera, sustituyendo $u = 4\rho^2 + 1$, obtenemos

$$\iint_S dA = \frac{1}{8} \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \int_1^5 \sqrt{u} du = \frac{\pi}{16} \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^5 = \frac{\pi}{24} (\sqrt{125} - 1).$$

Solución 2. Tenemos que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2\}$, con $R > 0$ y (x_0, y_0, z_0) en el primer octante. Por el teorema de la divergencia

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz, \quad (4.5)$$

tomando la orientación de S como exterior.

Aplicando una transformación a coordenadas esféricas, tal que

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta + x_0 \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta + y_0 \\ z &= \rho \cos \phi + z_0, \end{aligned}$$

nos queda el conjunto S^*

$$S^* = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

De la ecuación (4.5) y usando el teorema de cambio de variable,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + y + z) dV &= \iiint_{\Omega^*} (\rho \sin \phi \cos \theta + \rho \sin \phi \sin \theta + \rho \cos \phi + x_0 + y_0 + z_0) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R (\rho \sin \phi \cos \theta + \rho \sin \phi \sin \theta + \rho \cos \phi + x_0 + y_0 + z_0) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Al distribuir el $\rho^2 \sin \phi$ entre los primeros dos términos, queda para estos $\rho^3 \sin \phi^2 \cos \theta$ y $\rho^3 \sin \phi^2 \sin \theta$; que al integrarlos entre 0 y 2π , con respecto a θ , se anulan. Entonces queda, distribuyendo la suma del integrando,

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 \cos \phi \sin \phi d\rho d\theta d\phi + \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R (x_0 + y_0 + z_0) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi.$$

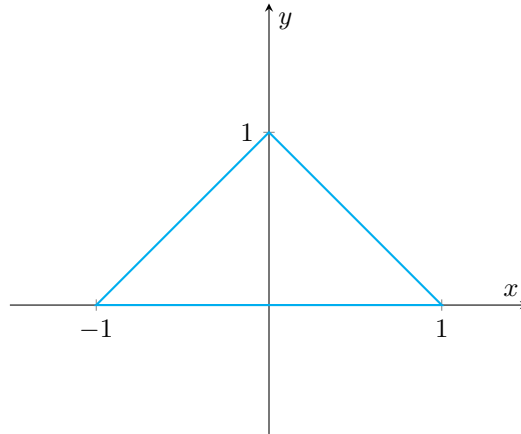
A su vez, la primer integral es 0 porque al integrar una función periódica impar, $\cos \phi \sin \phi$, en un semi período ésta se anula. Por último queda

$$(x_0 + y_0 + z_0) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = (x_0 + y_0 + z_0) \frac{4}{3} \pi R^3 > 0,$$

pues (x_0, y_0, z_0) pertenece al primer octante. Por lo que queda demostrado que el flujo es positivo.

por qué sería -no negativo-? por ej. cuando $R = 0$ o cuando el centro de la esfera es el origen es = 0

Solución 3. Nos piden integrar sobre la siguiente curva C .



Tomamos la orientación de C como antihoraria. Dado que el triángulo T es simplemente conexo, $T \in \text{dom}(\mathbf{F})$ y $\mathbf{F} \in C^1$, entonces por el teorema de Green

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_T \nabla \times \mathbf{F} \, dA.$$

Como $\nabla \times \mathbf{F} = 1$, queda que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_T dA = \text{Area}(T) = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Solución 4. Ya que nos piden demostrar que \mathbf{F} es conservativo y calcular una integral de línea sobre una curva no cerrada nos conviene buscar, si es que existe, la función potencial de \mathbf{F} . Nos encontramos con la ecuación $\nabla f = \mathbf{F}$, la cual describe el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} f_x(x, y) = ye^{xy} + y \cos(xy) \\ f_y(x, y) = xe^{xy} + x \cos(xy) \end{cases}$$

Mirando cada término detenidamente se puede llegar a la conclusión de que

$$f(x, y) = e^{xy} + \sin(xy) + C, \text{ con } C \in \text{Re}$$

es solución del sistema. Lo que significa que \mathbf{F} es un campo conservativo.

Luego para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ utilizamos el siguiente teorema.

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)) = f((1, 1)) - f((0, 0)) = e + \sin 1 - 1.$$