Matemï¿½tica 3. Notas teï¿½ricas.

Pablo A. Bucello.

1. Nociones de Topologï¿½a.

Definiciï¿½n 1.1 (Bola de radio δ y centro x_o)**.** Sean $x_o \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$ y d una distancia en $\mathbb{R}^n$. La *bola de radio δ y centro x_o*, que denotamos con $B_\delta(x_o)$, es el conjunto:

$$B_\delta(x_o) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x, x_o) < \delta\}.$$

El conjunto

$$B^*_\delta(x_o) = B_\delta(x_o) - \{x_o\}$$

es la *bola reducida de radio δ y centro x_o.*

Definiciï¿½n 1.2 (Punto interior, interior de un conjunto)**.** Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x_o \in A$. Decimos que x_o es *punto interior* de A si

$$\exists \delta > 0 / B_\delta(x_o) \subset A.$$

El *interior* de A, que denotamos con $\mathrm{int}(A)$ o $\mathring{A}$, es el conjunto de todos los puntos interiores de A:

$$\mathrm{int}(A) = \{x \in A : x \text{ es punto interior de } A\}.$$

Definiciï¿½n 1.3 (Conjunto abierto)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A es *abierto* si

$$\forall x_o \in \exists \delta > 0 : B_\delta(x_o) \subset A.$$ [1]

Propiedad 1.1. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si y solo si $A = \mathrm{int}(A)$.*

Definiciï¿½n 1.4 (Conjunto cerrado)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A es *cerrado* si su complemento $A^c = \mathbb{R}^n - A$ es abierto.

Definiciï¿½n 1.5 (Frontera de un conjunto)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. La *frontera* de A, que denotamos con ∂A o $\mathrm{front}(A)$, es el conjunto:

$$\partial A = \{x_o \in \mathbb{R}^n : \forall \delta > 0 \, B_\delta(x_o) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\delta(x_o) \cap A^c \neq \emptyset\}.$$

Propiedad 1.2. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y solo si $\partial A \subset A$.*

[1] i.e.: A es abierto si todos sus puntos son interiores.

Definiciï¿½n 1.6 (Punto de acumulaciï¿½n)**.** Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x_o \in \mathbb{R}^n$. Decimos que x_o es *punto de acumulaciï¿½n* de A si

$$\forall \delta > 0 \, (B_\delta(x_o) - \{x_o\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Denotamos el conjunto de todos los puntos de acumulaciï¿½n de A con A':

$$A' = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto de acumulaciï¿½n de } A\}.$$

Definiciï¿½n 1.7 (Entorno de un punto)**.** Sean $N \subset \mathbb{R}^n$ y $x_o \in \mathbb{R}^n$. Decimos que N es *entorno* de x_o si

$$\exists \delta > 0 : B_\delta(x_o) \subset N.$$

Definiciï¿½n 1.8 (Punto aislado)**.** Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x_o \in A$. Decimos que x_o es *punto aislado* de A si x_o no es punto de acumulaciï¿½n de A.

Definiciï¿½n 1.9 (Conjunto acotado)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un *conjunto acotado* si existe $\delta > 0$ tal que la bola de radio δ centrada en el origen contiene al conjunto A, es decir, si $\exists \delta > 0 : A \subset B_\delta(\mathbf{0})$.
Equivalentemente, A es un *conjunto acotado* si $\exists \delta > 0, x_o \in \mathbb{R}^n : A \subset B_\delta(x_o)$.

2. Lï¿½mite de funciones.

Definiciï¿½n 2.1 (Lï¿½mite)**.** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funciï¿½n, $L \in \mathbb{R}^m$ y x_0 un punto de acumulaciï¿½n de A. Decimos que *el lï¿½mite de f para x tendiendo a x_o es L* o que *f tiende a L cuando x tiende a x_o* si

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 / f(x) \in B_\varepsilon(L) \, \forall x \in B^*_\delta(x_o) \cap A.$$

En este caso, utilizamos la notaciï¿½n

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_o]{} L \quad \text{o} \quad \lim_{x \to x_o} f(x) = L.$$

Observaciï¿½n 2.1. Si f es un *campo escalar* (es decir, si en la definiciï¿½n (2.1) es $m = 1$), la condiciï¿½n

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 / f(x) \in B_\varepsilon(L) \, \forall x \in B^*_\delta(x_o) \cap A$$

es equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 / |f(x) - L| < \varepsilon \, \forall x \in B^*_\delta(x_o) \cap A.$$

Observaciï¿½n 2.2. La definiciï¿½n de lï¿½mite puede expresarse equivalentemente en tï¿½rminos de distancias o de normas:

- Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funciï¿½n, $L \in \mathbb{R}^m$ y x_0 un punto de acumulaciï¿½n de A. Decimos que *el lï¿½mite de f para x tendiendo a x_o es L* o que *f tiende a L cuando x tiende a x_o* si

  $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 / \, \mathrm{d}_m(f(x), L) < \varepsilon \, \forall x \in A : 0 < \mathrm{d}_n(x, x_o) < \delta,$$

  donde d_n y d_m son las distancias en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente.

- Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funciï¿½n, $L \in \mathbb{R}^m$ y x_0 un punto de acumulaciï¿½n de A. Decimos que *el lï¿½mite de f para x tendiendo a x_o es L* o que *f tiende a L cuando x tiende a x_o* si

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 / \|f(x) - L\|_m < \varepsilon\, \forall x \in A : 0 < \|x - x_o\|_n < \delta,$$

  donde $\|\cdot\|_n$ y $\|\cdot\|_m$ son las normas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente.

Teorema 2.1 (Unicidad del lï¿½mite)**.**
Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funciï¿½n, x_0 un punto de acumulaciï¿½n de A y $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^m$ tales que

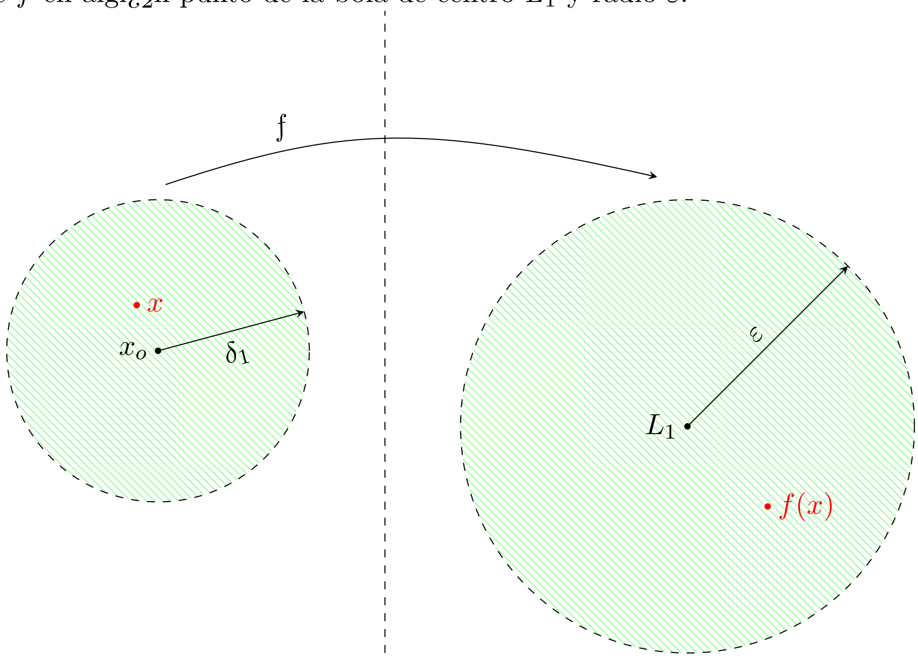
$$f(x) \xrightarrow[x \to x_o]{} L_1 \quad \wedge \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_o]{} L_2.$$

Entonces $L_1 = L_2$.

Demostración.
Las ideas utilizadas en la demostraciï¿½n de este teorema son las que siguen.
Como

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_o]{} L_1,$$

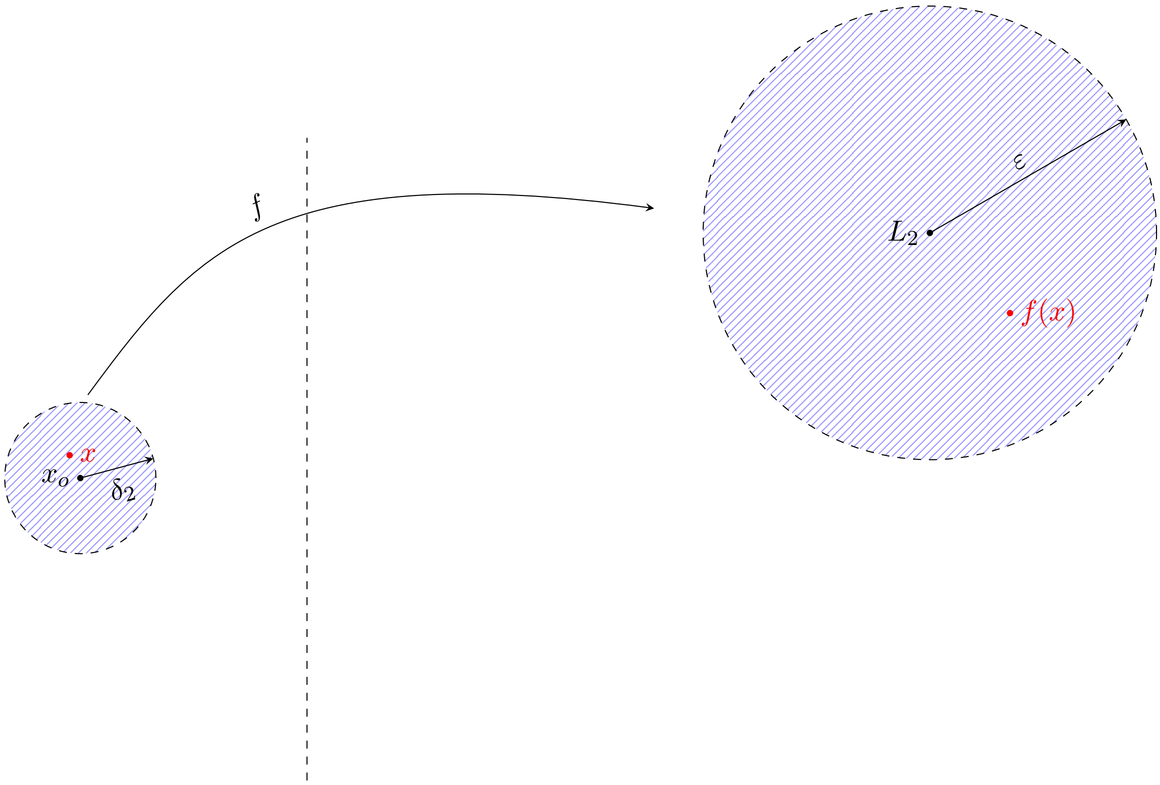
dado $\varepsilon > 0$ existe algï¿½n $\delta_1 > 0$ tal que cada punto $x \in B^*_{\delta_1}(x_o) \cap A$ se aplica a travï¿½s de f en algï¿½n punto de la bola de centro L_1 y radio ε.



De la misma manera, como

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_o]{} L_2,$$

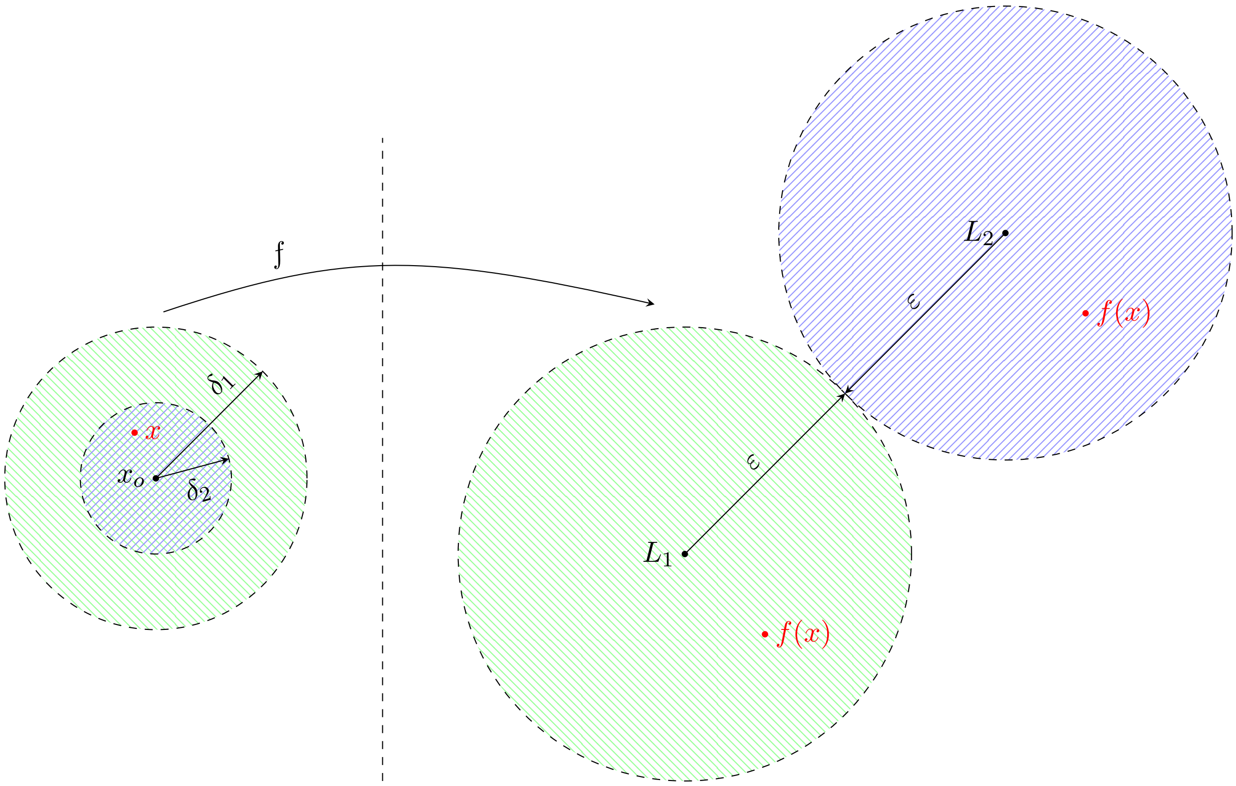
dado $\varepsilon > 0$ existe algï¿½n $\delta_2 > 0$ tal que cada punto $x \in B^*_{\delta_2}(x_o) \cap A$ se aplica a travï¿½s de f en algï¿½n punto de la bola de centro L_2 y radio ε.



Si suponemos que $L_1 \neq L_2$, por propiedad de la distancia es $\mathrm{d}(L_1, L_2) > 0$ y podemos elegir

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\,(L_1, L_2)}{2}.$$

Para este valor de ε podemos encontrar un punto x que se aplica por f en algï¿½n punto de la bola de centro L_1 y radio ε **y tambiï¿½n** se aplica por f en algï¿½n punto de la bola de centro L_2 y radio ε, lo cual es absurdo, pues estas dos bolas son disjuntas.



Ahora sï¿½, veamos la demostraciï¿½n formal del teorema.
Supongamos, por el absurdo, que $L_1 \neq L_2$, y sea $\varepsilon = \mathrm{d}(L_1, L_2)/2 > 0$.
Como

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_o]{} L_1,$$

podemos elegir $\delta_1 > 0$ tal que $x \in B^*_{\delta_1}(x_o) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(L_1)$.
Como

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_o]{} L_2,$$

podemos elegir $\delta_2 > 0$ tal que $x \in B^*_{\delta_2}(x_o) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(L_2)$.
Notemos que, como sugiere la figura,

$$B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2) = \emptyset.$$

En efecto, de no ser asï¿½, sea $z \in B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2)$. Tenemos que:

$$2\varepsilon = \mathrm{d}(L_1, L_2) \leq \mathrm{d}(L_1, z) + \mathrm{d}(z, L_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon. \text{ Absurdo.}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$.
Como $B^*_\delta(x_o) \subset B^*_{\delta_1}(x_o)$ y $B^*_\delta(x_o) \subset B^*_{\delta_2}(x_o)$, si tomamos algï¿½n $x \in B^*_\delta(x_o) \cap A$[2], vale que $f(x) \in B_\varepsilon(L_1)$ y tambiï¿½n $f(x) \in B_\varepsilon(L_2)$, por lo que $f(x) \in B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2)$.

(2) Notemos que $B^*_\delta(x_o) \cap A \neq \emptyset$ porque x_o es un punto de acumulaciï¿½n de A.

Absurdo, pues $B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2) = \emptyset$. El absurdo provino de suponer que $L_1 \neq L_2$, por lo cual debe ser $L_1 = L_2$.

$\square$

Propiedad 2.1 (ï¿½lgebra de lï¿½mites)**.** *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones y x_0 un punto de acumulaciï¿½n de A. Supongamos que*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}^m$$
$$\lim_{x \to x_o} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}^m.$$

Entonces:

I. *Linealidad*
   (a) $\lim_{x \to x_o} (f+g)(x) = L_1 + L_2$
   (b) $\lim_{x \to x_o} (\alpha f)(x) = \alpha L_1 \, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

II. $\lim_{x \to x_o} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$[(3)]

III. *Si $m = 1$ (i.e., si f y g son campos escalares), g es no nula en algï¿½n entorno de x_o y $L_2 \neq 0$,*
$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Propiedad 2.2. *Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y x_0 un punto de acumulaciï¿½n de A. Sean $f_j : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(j = 1, 2, \ldots, m)$ campos escalares tales que $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) \; \forall x \in A$[(4)].*
Sea $L = (L_1, L_2, \ldots, L_m) \in \mathbb{R}^m$, $L_j \in \mathbb{R} \, \forall j = 1, 2, \ldots, m$. Entonces:

$$\lim_{x \to x_o} F(x) = L \iff \lim_{x \to x_o} f_j(x) = L_j \, \forall j = 1, 2, \ldots, m.$$

Propiedad 2.3. *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funciï¿½n y x_0 un punto de acumulaciï¿½n de A. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

I. $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$.

II. $\lim_{x \to x_o} |f(x)| = 0$.

Demostración.

[(3)] Si $m \geq 2$, "$\cdot$" representa el producto escalar en $\mathbb{R}^m$.

[(4)] Los campos escalares f_j quedan determinados unï¿½vocamente por F de la siguiente manera:

$$f_j : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$f_j(x) = F(x) \cdot e_j,$$

donde e_j es el j-ï¿½simo vector canï¿½nico de $\mathbb{R}^m$.

(a) Veamos que (I) implica (II). Como

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = 0,$$

por definicii¿½n de lï¿½mite, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \, \forall x \in B^*_\delta(x_o) \cap A.$$

Para este valor de δ se cumple que

$$\Big||f(x)| - 0\Big| = \Big||f(x)|\Big| = |f(x)| = |f(x) - 0| < \varepsilon \, \forall x \in B^*_\delta(x_o) \cap A,$$

de modo que, por definicii¿½n,

$$\lim_{x\to x_o} |f(x)| = 0.$$

(b) Veamos que (II) implica (I). Como

$$\lim_{x\to x_o} |f(x)| = 0,$$

por definicii¿½n de lï¿½mite, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$\Big||f(x)| - 0\Big| < \varepsilon \, \forall x \in B^*_\delta(x_o) \cap A.$$

Para este valor de δ se cumple que

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = \Big||f(x)|\Big| = \Big||f(x)| - 0\Big| < \varepsilon \, \forall x \in B^*_\delta(x_o) \cap A,$$

de modo que, por definicii¿½n,

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = 0.$$

□

Propiedad 2.4. *Sean $f, g, h : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones y x_0 un punto de acumulacii¿½n de A. Supongamos que $\exists \delta_o > 0$ tal que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \, \forall x \in B_{\delta_o}(x_o) \cap A.$$

Si $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} h(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to x_o} g(x) = L.$$

Propiedad 2.5. *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones y x_0 un punto de acumulacii¿½n de A. Si $\exists \delta_o > 0$ tal que f es acotada en $B_{\delta_o}(x_o) \cap A$ (i.e.: $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M \forall x \in B_{\delta_o}(x_o) \cap A$) y $\lim_{x\to x_o} g(x) = 0$, entonces*

$$\lim_{x\to x_o} (f \cdot g)_{(x)} = 0.$$

Demostración.

Supongamos que, para cierto $\delta_o > 0$, f es acotada en $B_{\delta_o}(x_o) \cap A$, y sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in B_{\delta_o}(x_o) \cap A$. Como

$$\lim_{x \to x_o} g(x) = 0,$$

dado $\varepsilon > 0$, por definiciï¿½n de lï¿½mite, podemos elegir $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \forall x \in B^*_{\delta_1}(x_o) \cap A.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_o, \delta_1\}$.
Se cumple que

$$\left|(f \cdot g)_{(x)} - 0\right| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M|g(x)| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \forall x \in B^*_{\delta}(x_o) \cap A,$$

Por lo tanto, por definiciï¿½n de lï¿½mite,

$$\lim_{x \to x_o} (f \cdot g)_{(x)} = 0.$$

□

Propiedad 2.6 (Lï¿½mite de la composiciï¿½n)**.**
Sean f, g funciones

$$\begin{aligned} g &: A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m \\ f &: B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p, \end{aligned}$$

y puntos $a \in A', b \in B'$ tales que

$$\lim_{x \to a} g(x) = b \quad \wedge \quad \lim_{u \to b} f(u) = L.$$

Entonces

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)_{(x)} = L.$$

Ejemplo 2.1. Veamos que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} = 1.$$

En efecto, sabemos que

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1,$$

y que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 + y^2 = 0.$$

Por lo tanto, si definimos

$$
\begin{aligned}
f &: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \\
f(u) &= \frac{\sin(u)}{u} \\
g &: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \\
g(x,y) &= x^2 + y^2,
\end{aligned}
$$

por la propiedad (2.6) es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f \circ g)_{(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 1.$$

Una consecuencia directa de la propiedad (2.6) es el siguiente corolario:

Corolario 2.1 (Lï¿½mites por curvas)**.** *Sean* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x_o, y_o) *un punto de acumulaciï¿½n de* A *y* $L \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L.$$

Entonces, para cualesquiera funciones continuas g_1, $g_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que, para algï¿½n* $t_o \in I'$

$$\lim_{t\to t_o} (g_1(t), g_2(t)) = (x_o, y_o)$$

y, ademï¿½s, $(g_1(t), g_2(t)) \in A \, \forall t \in (I - \{t_o\})$ *, se cumple que*

$$\lim_{t\to t_o} f\left(g_1(t), g_2(t)\right) = L.$$

Ejemplo 2.2.

$$
\begin{aligned}
f &: \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\right\} \to \mathbb{R} \\
f(x,y) &= \frac{x^2}{x-y}.
\end{aligned}
$$

Veamos que f no tiene lï¿½mite para $(x,y) \to (0,0)$.

(a) Sean $g_1(t) = t$, $g_2(t) = t + t^2$.

$$f(g_1(t), g_2(t)) = f(t, t+t^2) = \frac{t^2}{-t^2} \to -1 \text{ cuando } t \to 0,$$

de modo que, *si* f *tiene lï¿½mite*, el lï¿½mite es -1, por (2.1) y la unicidad del lï¿½mite.

(b) Sean $g_1(t) = t$, $g_2(t) = t - t^2$.

$$f(g_1(t), g_2(t)) = f(t, t+t^2) = \frac{t^2}{t^2} \to 1 \text{ cuando } t \to 0,$$

de modo que, *si* f *tiene lï¿½mite*, el lï¿½mite es 1, por (2.1) y la unicidad del lï¿½mite.

Por lo tanto, por la unicidad del lï¿½mite (teorema (2.1)), *si f tiene lï¿½mite L*, $L = 1 = -1$, lo que es un absurdo. El absurdo provino de suponer que f tiene lï¿½mite, por lo cual f no puede tener lï¿½mite.

Propiedad 2.7 (Lï¿½mites iterados)**.** *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x_o, y_o) un punto de acumulaciï¿½n de A y $L \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L.$$

I. Si para cada $x \neq x_o$ existe el lï¿½mite

$$\lim_{y\to y_o} f(x,y) = g(x)$$

y ademï¿½s existe el lï¿½mite

$$\lim_{x\to x_o} g(x) = \lim_{x\to x_o} \left(\lim_{y\to y_o} f(x,y) \right) = L_1,$$

entonces $L = L1$.

II. Si para cada $y \neq y_o$ existe el lï¿½mite

$$\lim_{x\to x_o} f(x,y) = h(y)$$

y ademï¿½s existe el lï¿½mite

$$\lim_{y\to y_o} h(y) = \lim_{y\to y_o} \left(\lim_{x\to x_o} f(x,y) \right) = L_2,$$

entonces $L = L_2$.

Propiedad 2.8 (Lï¿½mites por conjuntos)**.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funciï¿½n, con $A = A_1 \cup A_2$.*
Sea f_1 la restricciï¿½n de f a A_1*:*

$$\begin{aligned} f_1 : A_1 \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ f_1(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Sea f_2 la restricciï¿½n de f a A_2*:*

$$\begin{aligned} f_2 : A_2 \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ f_2(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Sean $x_o \in A_1' \cap A_2'$ y $L \in \mathbb{R}^m$. Entonces

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = L \quad \iff \lim_{x\to x_o} f_1(x) = L \wedge \lim_{x\to x_o} f_2(x) = L.$$

Ejemplo 2.3.
Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Veamos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.
Sean $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ y

$$\begin{aligned} &f_1 : A_1 \to \mathbb{R} \\ &\quad f_1(x,y) = \frac{e^x-1}{x}, \\ &f_2 : A_2 \to \mathbb{R} \\ &\quad f_2(x,y) = 1. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0,$$

por la propiedad (2.6) es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 1.$$

Como ademï¿½s $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 1$ y $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}^2$, por la propiedad (2.8) es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1.$$

Definicï¿½n 2.2 (Lï¿½mite infinito)**.** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funciï¿½n y x_0 un punto de acumulaciï¿½n de A.

I. Decimos que *el lï¿½mite de f para x tendiendo a x_o es* $+\infty$ o que *f tiende a $+\infty$ cuando x tiende a x_o* si

$$\forall M > 0\, \exists \delta > 0 / f(x) > M \,\forall x \in B^*_\delta(x_o) \cap A.$$

En este caso, utilizamos la notaciï¿½n

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_o]{} +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty.$$

II. Decimos que *el lï¿½mite de f para x tendiendo a x_o es* $-\infty$ o que *f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a x_o* si

$$\forall M > 0\, \exists \delta > 0 / f(x) < -M \,\forall x \in B^*_\delta(x_o) \cap A.$$

En este caso, utilizamos la notaciï¿½n

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_o]{} -\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to x_o} f(x) = -\infty.$$

III. Decimos que *el lï¿½mite de f para x tendiendo a x_o es ∞* o que *f tiende a ∞ cuando x tiende a x_o* si

$$\forall M > 0\, \exists \delta > 0 / |f(x)| > M\, \forall x \in B_\delta^*(x_o) \cap A.$$

En este caso, utilizamos la notaciï¿½n

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_o]{} \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to x_o} f(x) = \infty.$$

Definiciï¿½n 2.3 (Lï¿½mite en el infinito)**.** Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funciï¿½n y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que

$$f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} L \quad \text{o} \quad \lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = L$$

si

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 / f(x) \in B_\varepsilon(L)\, \forall x / \|x\| > \delta.$$

3. Diferenciabilidad.

Definiciï¿½n 3.1 (Diferenciabilidad de campos escalares)**.** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x_o \in \operatorname{int}(A)$. Decimos que f es *diferenciable en x_o* si $\exists m \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0.$$

Si A es un conjunto abierto, decimos que f es *diferenciable* si es diferenciable en cada punto $x_o \in A$.

Definiciï¿½n 3.2 (Diferenciabilidad, caso general)**.**

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_o \in \operatorname{int}(A)$. Decimos que f es *diferenciable en x_o* si $\exists M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\|f(x) - f(x_o) - M \cdot (x - x_o)\|}{\|x - x_o\|} = 0.$$

Si A es un conjunto abierto, decimos que f es *diferenciable* si es diferenciable en cada punto $x_o \in A$.

Teorema 3.1 (Diferenciabilidad y continuidad)**.**

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x_o \in \operatorname{int}(A)$. Si f es diferenciable en x_o, entonces f es continua en x_o.

Demostración.

Como f es diferenciable en $x_o, \exists m \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0.$$

Por lo tanto, $\exists \delta_o > 0$ tal que

$$x \in B^*_{\delta_o} \cap A \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} \right| < 1.$$

Entonces, para este δ_o, se cumple que

$$|f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)| < \|x - x_o\|, \, \forall x \in B^*_{\delta_o} \cap A.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_o)| &= |f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o) + m \cdot (x - x_o)| \leq \\ &\leq |f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)| + |m \cdot (x - x_o)| < \\ &< \|x - x_o\| + |m \cdot (x - x_o)|, \, \forall x \in B^*_{\delta_o} \cap A. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|m \cdot (x - x_o)| \leq \|m\| \|x - x_o\|$, y entonces:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_o)| &< \|x - x_o\| + |m \cdot (x - x_o)| \leq \\ &\leq \|x - x_o\| + \|m\| \|x - x_o\| = \\ &= (1 + \|m\|) \|x - x_o\|, \, \forall x \in B^*_{\delta_o} \cap A. \end{aligned}$$

Esta condiciï¿½n garantiza la continuidad de f en x_o. En efecto, dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = \min\{\delta_o, \frac{\epsilon}{1+\|m\|}\}$. Para este δ se cumple que:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_o)| &< (1 + \|m\|) \|x - x_o\| < \\ &< (1 + \|m\|) \delta \leq \\ &\leq (1 + \|m\|) \frac{\epsilon}{1 + \|m\|} = \epsilon, \, \forall x \in B^*_{\delta} \cap A, \end{aligned}$$

lo que, por definiciï¿½n de lï¿½mite [5], significa que

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o).$$

Es decir, f es continua en x_o. $\square$

Observaciï¿½n 3.1. La implicaciï¿½n recï¿½proca de la proposiciï¿½n (3.1) es falsa.

Demostración. La funciï¿½n

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ g(t) &= |t| \end{aligned}$$

es continua en $t_o = 0$, pero no es diferenciable en $t_o = 0$. Se deja como ejercicio para el lector verificar esta afirmaciï¿½n. $\square$

[5] Como $x_o \in \operatorname{int}(A)$, x_o es un punto de acumulaciï¿½n de A.

Teorema 3.2 (Diferenciabilidad y existencia de derivadas parciales).

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x_o \in \operatorname{int}(A)$, tales que $\exists m = (m_1, m_2, \cdots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ /

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0$$

(es decir, f es diferenciable en x_o). Entonces existen las derivadas parciales de f en x_o y, ademï¿½s,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) = m_j \quad \forall j = 1, 2, \cdots, n.$$

Demostración.

Sea $x = x_o + he_j$, siendo $h \in \mathbb{R}$ y e_j el j-ï¿½simo vector canï¿½nico (el vector de $\mathbb{R}^n$ que tiene un 1 en la posiciï¿½n j y ceros en todas las demï¿½s). Es decir, definimos una funciï¿½n $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n / g(h) = x_o + he_j$, con $\delta > 0$, lo suficientemente pequeï¿½o como para que $\operatorname{Im}(g) \subset A$ [(6)], y llamamos $x = g(h)$. Notemos que $g(h) \to x_o$ cuando $h \to 0$.

Por la diferenciabilidad, tenemos que

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0$$

y entonces, si componemos con la funciï¿½n g (reemplazamos $x = x_o + he_j$), la propiedad del lï¿½mite de la composiciï¿½n (2.6) implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - m \cdot ((x_o + he_j) - x_o)}{\|(x_o + he_j) - x_o\|} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - m \cdot (he_j)}{\|he_j\|} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - h(m \cdot e_j)}{\|he_j\|} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{|h|}. \end{aligned}$$

Ahora bien, este lï¿½mite es 0 si y solo si

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{|h|} \right| = 0,$$

por la propiedad (2.3). Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{|h|} \right| = \lim_{h \to 0} \frac{|f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j|}{||h||} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{|f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j|}{|h|} = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{h} \right|, \end{aligned}$$

[(6)] ï¿½Cuï¿½l de las hipï¿½teis asegura la existencia de un tal δ?

lo cual, otra vez por la propiedad (2.3), implica que

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right).$$

Es fï¿½cil probar por definiciï¿½n que esta ï¿½ltima condiciï¿½n implica que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} = m_j.$$

En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \left(\frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right) - 0 \right| < \epsilon, \forall h : 0 < |h| < \delta,$$

porque el lï¿½mite es 0. Como claramente

$$\left| \left(\frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right) - 0 \right| = \left| \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right|,$$

se tiene (por definiciï¿½n de lï¿½mite) que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} = m_j.$$

Esto ï¿½ltimo, por definiciï¿½n de derivada parcial, significa que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) = m_j,$$

como querï¿½amos probar.

$\square$

Observaciï¿½n 3.2. Es un error decir, en el ï¿½ltimo paso de la demostraciï¿½n, que por la linealidad del lï¿½mite

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} \right) - \lim_{h\to 0} m_j = 0,$$

ya que la existencia del lï¿½mite

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} \right)$$

es parte de lo que debemos probar.

Observaciï¿½n 3.3. La implicaciï¿½n recï¿½proca de la proposiciï¿½n (3.2) es falsa.

Demostración.

La funciï¿½n

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el origen, pero no es diferenciable en el origen. Se deja como ejercicio para el lector la demostraciï¿½n de esta afirmaciï¿½n. □

Una consecuencia directa del teorema (3.2) es el siguiente corolario:

Corolario 3.1. *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x_o \in \operatorname{int}(A)$. Son equivalentes:*

I. f es diferenciable en x_o;

II. existen todas las derivadas parciales de f en x_o y

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - \boldsymbol{\nabla} f(x_o) \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0.$$

Teorema 3.3 (Diferenciabilidad y existencia de derivadas direccionales)**.**

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_o \in \operatorname{int}(A)$. Entonces, $\forall \breve{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\breve{u}\| = 1$ existe en x_o la derivada de f en la direcciï¿½n de $\breve{u}$ y, ademï¿½s,

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{u}}(x_o) = \boldsymbol{\nabla} f(x_o) \cdot \breve{u}.$$

Demostración.

Sea $x = x_o + h\breve{u}$, siendo $h \in \mathbb{R}$. Es decir, definimos una funciï¿½n

$$g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$$
$$g(h) = x_o + h\breve{u}$$

con $\delta > 0$, lo suficientemente pequeï¿½o como para que $\operatorname{Im}(g) \subset A$, y llamamos $x = g(h)$. Notemos que $g(h) \to x_o$ cuando $h \to 0$.

Por la diferenciabilidad, tenemos que

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - \boldsymbol{\nabla} f(x_o) \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0$$

y entonces, si componemos con la funciï¿½n g (reemplazamos $x = x_o + h\breve{u}$), la propiedad del lï¿½mite de la composiciï¿½n (2.6) implica que

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{h \to 0} & \frac{f(x_o + h\breve{u}) - f(x_o) - \boldsymbol{\nabla} f(x_o) \cdot ((x_o + h_\delta(x_o)\breve{u}) - x_o)}{\|(x_o + h\breve{u}) - x_o\|} = \\
= \lim_{h \to 0} & \frac{f(x_o + h\breve{u}) - f(x_o) - \boldsymbol{\nabla} f(x_o) \cdot (h\breve{u})}{\|h\breve{u}\|} = \\
= \lim_{h \to 0} & \frac{f(x_o + h\breve{u}) - f(x_o) - h\boldsymbol{\nabla} f(x_o) \cdot \breve{u}}{|h|\|\breve{u}\|} = \\
= \lim_{h \to 0} & \frac{f(x_o + h\breve{u}) - f(x_o) - h\boldsymbol{\nabla} f(x_o) \cdot \breve{u}}{|h|}.
\end{aligned}$$

Como en la demostracií¿½n de la propiedad (3.2), este lí¿½mite es 0 si y solo si

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + h\breve{u}) - f(x_o) - h\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\cdot\breve{u}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_o+h\breve{u}) - f(x_o)}{h} - \boldsymbol{\nabla} f(x_o)\cdot\breve{u}\right),$$

que, como en la demostracií¿½n de (3.2), implica que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h\breve{u}) - f(x_o)}{h} = \boldsymbol{\nabla} f(x_o)\cdot\breve{u}$$

y por lo tanto, por definicií¿½n,

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{u}}(x_o) = \boldsymbol{\nabla} f(x_o)\cdot\breve{u}.$$

□

Teorema 3.4 (Valores extremos de la derivada direccional)**.**
Sean $f : A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *diferenciable en un punto* $x_o\in\operatorname{int}(A)$*. Entonces*

$$\max_{\|\breve{u}\|=1}\frac{\partial f}{\partial\breve{u}}(x_o) = \|\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\|, \quad \min_{\|\breve{u}\|=1}\frac{\partial f}{\partial\breve{u}}(x_o) = -\|\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\|$$

y, si $\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\neq\mathbf{0}$*,*

$$\frac{\partial f}{\partial\breve{u}}(x_o) = \|\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\| \iff \breve{u} = \frac{\boldsymbol{\nabla} f(x_o)}{\|\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\|}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial\breve{u}}(x_o) = -\|\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\| \iff \breve{u} = -\frac{\boldsymbol{\nabla} f(x_o)}{\|\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\|}.$$

Demostración.
Como f es diferenciable en x_o, por el teorema (3.3), $\forall\breve{u}\in\mathbb{R}^n$tal que $\|\breve{u}\| = 1$ existe en x_o la derivada de f en la direccií¿½n de $\breve{u}$ y, ademí¿½s,

$$\frac{\partial f}{\partial\breve{u}}(x_o) = \boldsymbol{\nabla} f(x_o)\cdot\breve{u}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\breve{u}}(x_o)\right| = |\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\cdot\breve{u}| \le \|\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\|\|\breve{u}\| = \|\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\|,$$

de modo que tenemos las cotas:

$$-\|\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\| \le \frac{\partial f}{\partial\breve{u}(x_o)} \le \|\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\|.$$

Ademí¿½s, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dice que vale

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\breve{u}}(x_o)\right| = \|\boldsymbol{\nabla} f(x_o)\|$$

si y solo si el conjunto $\{\nabla f(x_o), \breve{u}\}$ es linealmente dependiente, condicï¿½n que, si $\nabla f(x_o) \neq \mathbf{0}$, es equivalente a decir que $\breve{u}$ es un vector unitario en la direcciï¿½n de $\nabla f(x_o)$. Existen exactamente dos vectores $\breve{u}$ con esta caracterï¿½stica:

$$\breve{u}_1 = \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} \quad \text{y} \quad \breve{u}_2 = -\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}.$$

Por cï¿½lculo directo:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{u}_1}(x_o) = \nabla f(x_o) \cdot \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} = \frac{\nabla f(x_o) \cdot \nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} = \frac{\|\nabla f(x_o)\|^2}{\|\nabla f(x_o)\|} = \|\nabla f(x_o)\|$$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{u}_2}(x_o) = \nabla f(x_o) \cdot \left(-\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}\right) = -\frac{\nabla f(x_o) \cdot \nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} = -\frac{\|\nabla f(x_o)\|^2}{\|\nabla f(x_o)\|} = -\|\nabla f(x_o)\|,$$

de modo que efectivamente

$$\max_{\|\breve{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \breve{u}}(x_o) = \|\nabla f(x_o)\|$$

y el mï¿½ximo se realiza en $\breve{u}_1 = \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}$, y

$$\min_{\|\breve{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \breve{u}}(x_o) = -\|\nabla f(x_o)\|$$

y el mï¿½nimo se realiza en $\breve{u}_2 = -\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}$.

Finalmente, observemos que, si $\nabla f(x_o) = \mathbf{0}$,

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{u}}(x_o) = \nabla f(x_o) \cdot \breve{u} = 0 = \|\nabla f(x_o)\| \quad \forall \breve{u} \in \mathbb{R}^n,$$

y por lo tanto:

$$\max_{\|\breve{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \breve{u}}(x_o) = \|\nabla f(x_o)\| = 0$$

y

$$\min_{\|\breve{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \breve{u}}(x_o) = -\|\nabla f(x_o)\| = 0.$$

□

Teorema 3.5 (Regla de la cadena)**.**
Sean f, g funciones

$$g : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$$
$$f : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p,$$

y un punto $x_o \in \operatorname{int} A$ tal que $g(x_o) \in \operatorname{int} B$. Supongamos que g es diferenciable en x_o y que f es diferenciable en $yo = g(x_o)$. Entonces la composicï¿½n $f \circ g$ es diferenciable en x_o y, ademï¿½s,

$$\mathbf{D}(f \circ g)_{(x_o)} = \mathbf{D}f_{(y_o)} \mathbf{D}g_{(x_o)}.$$

Teorema 3.6 (Teorema de la Funciï¿½n Inversa)**.**
Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y* $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una funciï¿½n de clase* $\mathcal{C}^1$*. Sea* $x_o \in A$ *y supongamos que* $\det\big(\mathbf{D}F_{(x_o)}\big) \neq 0$*. Entonces existen un entorno abierto* $U \subset A$ *de* x_o *y un entorno abierto* $V \subset \mathbb{R}^n$ *de* $F(x_o)$ *tal que* $F : U \to V$ *(la restricciï¿½n de* F *a* U*) tiene inversa* $F^{-1} : V \to U$*. Esta funciï¿½n* F^{-1} *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *y, ademï¿½s,*

$$\mathbf{D}F^{-1}_{(F(x_o))} = \left[\mathbf{D}F_{(x_o)}\right]^{-1}.$$

Si F *es de clase* $\mathcal{C}^p, p \geq 1$*, entonces* F^{-1} *tambiï¿½n.*

Teorema 3.7 (Caso particular del Teorema de la Funciï¿½n Implï¿½cita)**.**
Sean $A \subset \mathbb{R}^3$ *un conjunto abierto y* $F : A \to \mathbb{R}$ *una funciï¿½n de clase* $\mathcal{C}^1$*. Sea* $(x_o, y_o, z_o) \in A$ *tal que* $F(x_o, y_o, z_o) = 0$*. Supongamos que*

$$F_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0.$$

Entonces existen un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ *de* (x_o, y_o) *y una ï¿½nica funciï¿½n* $g : U \to \mathbb{R}$ *tales que* $g(x_o, y_o) = z_o$ *y*

$$F(x, y, g(x, y)) = 0\, \forall (x, y) \in U.$$

Mï¿½s aï¿½n, g *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *y, ademï¿½s,* $\forall (x, y) \in U$ *vale que*

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= -\frac{F_x(x, y, g(x, y))}{F_z(x, y, g(x, y))} \\ g_y(x, y) &= -\frac{F_y(x, y, g(x, y))}{F_z(x, y, g(x, y))} \end{aligned}$$

Si F *es de clase* $\mathcal{C}^p, p \geq 1$*, entonces* g *tambiï¿½n.*

Teorema 3.8 (Teorema de la Funciï¿½n Implï¿½cita)**.**
Sean $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *un conjunto abierto y* $F : A \to \mathbb{R}^m$ *una funciï¿½n de clase* $\mathcal{C}^1$*. Sea* $(x_o, z_o) \in A$ *tal que* $F(x_o, z_o) = \mathbf{0}$*. Formemos el determinante*

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_m} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial z_m} \end{bmatrix},$$

donde $F = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ y todas las derivadas estï¿½n evaluadas en (x_o, z_o). Si $\Delta \neq 0$, entonces existen un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_o y una ï¿½nica funciï¿½n $g : U \to \mathbb{R}^m$ tales que $g(x_o) = z_o$ y

$$F(x, g(x)) = \mathbf{0}\, \forall x \in U.$$

Mï¿½s aï¿½n, g es de clase $\mathcal{C}^1$ y, ademï¿½s, si $g = (g_1, g_2, \cdots, g_m)$,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial z_m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Si F es de clase $\mathcal{C}^p, p \geq 1$, entonces g tambiï¿½n.

4. Extremos de funciones a valores reales.

Definiciï¿½n 4.1 (Extremos locales y globales)**.**
Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x_o \in A$. Decimos que:

- f tiene un *mï¿½ximo local* o *relativo* en x_o si $\exists \delta > 0 : f(x_o) \geq f(x) \forall x \in B_\delta(x_o) \cap A$.
- f tiene un *mï¿½nimo local* o *relativo* en x_o si $\exists \delta > 0 : f(x_o) \leq f(x) \forall x \in B_\delta(x_o) \cap A$.
- f tiene un *mï¿½ximo global* o *absoluto* en x_o si $f(x_o) \geq f(x) \forall x \in A$.
- f tiene un *mï¿½nimo global* o *absoluto* en x_o si $f(x_o) \leq f(x) \forall x \in A$.

Decimos que f tiene un *extremo* en x_o si f tiene un mï¿½ximo o mï¿½nimo (absoluto o relativo) en x_o.

Observaciï¿½n 4.1. Notemos que todo extremo absoluto es *tambiï¿½n* un extremo relativo. La recï¿½proca de esta afirmaciï¿½n es falsa (un extremo relativo no tiene por quï¿½ ser absoluto).

Teorema 4.1 (Condiciï¿½n necesaria de extremo)**.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en algï¿½n entorno abierto de $x_o \in \operatorname{int}(A)$. Supongamos que f tiene un extremo en x_o. Entonces*

$$\nabla f(x_o) = \mathbf{0}.$$

Definiciï¿½n 4.2 (Punto crï¿½tico)**.** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x_o \in \operatorname{int}(A)$. Decimos que x_o es un *punto crï¿½tico* de f si f no es diferenciable en x_o o $\nabla f_{(x_o)} = \mathbf{0}$.

Definiciï¿½n 4.3 (Punto silla)**.** Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x_o \in \operatorname{int}(A)$. Si x_o es un punto crï¿½tico de f y f no tiene un extremo en x_o, decimos que f tiene un *punto silla* en x_o.

Teorema 4.2 (Criterio de la derivada segunda)**.**
Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funciï¿½n de clase $\mathcal{C}^2$. Sea $(x_o, y_o) \in A$ y supongamos que $\boldsymbol{\nabla} f(x_o, y_o) = \mathbf{0}$. Entonces,

I. si $\det(\mathbf{H}_f(x_o, y_o)) > 0$ *y*

- *(a)* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$*, f tiene un mï¿½nimo local en (x_o, y_o);*
- *(b)* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$*, f tiene un mï¿½ximo local en (x_o, y_o);*

II. si $\det(\mathbf{H}_f(x_o, y_o)) < 0$*, f tiene un* punto silla *en (x_o, y_o).*

Teorema 4.3 (de los valores extremos de Weierstrass)**.** *difDir Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y acotado y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funciï¿½n continua. Entonces f alcanza un mï¿½ximo y un mï¿½nimo absoluto en A.*

Teorema 4.4 (Mï¿½todo de multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $x_o \in U$ y sea $c = g(x_o)$. Sea S el conjunto de nivel c de g. Supongamos que $\boldsymbol{\nabla} g(x_o) \neq \mathbf{0}$. Si $f|S$ (que denota a la restricciï¿½n de f a S) tiene un extremo local en x_o, entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\boldsymbol{\nabla} f(x_o) = \lambda \boldsymbol{\nabla} g(x_o).$$