



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

Departamento de Ciencias Exactas y Naturales

Área Matemática

**Parciales Resueltos.**

Material de lectura para alumnos.....

## **Parciales Resueltos**

(Pequena explicacion). Este documento presentaremos distintos ejercicios de parcial....

# Índice general

<b>1. Contenido teórico. Primera parte</b>	<b>2</b>
<b>2. Contenido Teórico. Segunda parte</b>	<b>3</b>
2.1. Operadores . . . . .	3
2.2. Curvas . . . . .	4
2.3. Integrales Dobles . . . . .	6
2.4. Integrales Triples . . . . .	9
2.5. Integrales de Línea . . . . .	11
2.6. Integrales de Superficie . . . . .	12
2.7. Campos Conservativos . . . . .	12
2.8. Teoremas Integrales . . . . .	13
<b>3. Primeros parciales resueltos</b>	<b>15</b>
3.1. Fecha 29 de septiembre de 2023 . . . . .	15
3.2. Fecha 25 de abril de 2023 . . . . .	19
3.3. Fecha Recuperatorio 2cuatri 2022 . . . . .	24
<b>4. Segundos parciales resueltos</b>	<b>29</b>
4.1. Fecha 25 de junio de 2023 . . . . .	29
4.2. Fecha recuperatorio 29 de junio de 2023 . . . . .	34
4.3. Fecha 18 de noviembre de 2023 . . . . .	39
4.4. Fecha 11 de junio de 2024 . . . . .	45
4.5. Fecha recuperatorio extra . . . . .	53

algun tipo de nota explicando detalles de notacion, por ej. Los símbolos para los vectores serán marcados en negrita minúscula,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  etc., y mayúscula los campos vectoriales,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$ , etc. Las matrices estarán en negritas e itálicas,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ , etc. El final de una definición, teorema, corolario, propiedad, etc. estará indicado con un  $\diamond$ .

## Contenido teórico. Primera parte

## Contenido Teórico. Segunda parte

### 2.1 Operadores

**Definición 2.1.1.** Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  abierto, diferenciable en  $U$ . Se define el **gradiente** de  $f$ , y si nota  $\nabla f(\mathbf{x})$ , evaluado en  $\mathbf{x}$  como el vector en el espacio  $\mathbb{R}^n$  dado por

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right),$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . ◇

**Definición 2.1.2.** Sea  $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U$  abierto, de clase  $C^1(U)$ . Se define la **divergencia** de  $\mathbf{F}$  como

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n},$$

donde  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , con cada  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). ◇

**Definición 2.1.3.** Sea  $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $U$  abierto, de clase  $C^1(U)$ . Se define el **rotor** de  $\mathbf{F}$  como

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial z}, \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x}, \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial y} \right),$$

donde  $\mathbf{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ . Y para el caso en el que  $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con las mismas condiciones, el **rotor** es

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial y} \right). \quad \diamond$$

Estas fórmulas son más fáciles de recordar si pensamos a “nabla”  $\nabla$  como el operador tal que

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Por lo que, pensando a  $\nabla$  como un vector, la divergencia es el producto escalar de  $\nabla$  con un campo vectorial y para el caso en  $\mathbb{R}^3$  es el producto vectorial. Esto último es

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

**Definición 2.1.4.** Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  abierto, un campo escalar de clase  $C^2(U)$ . Se define el **laplaciano** de  $f$ , y se lo nota, como

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \text{div grad } \mathbf{F}.$$

Y para el caso de un campo vectorial  $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^2(\mathbb{R}^n)$ , el **laplaciano** escalar

$$\Delta \mathbf{F} = (\Delta f_1, \Delta f_2, \dots, \Delta f_n). \quad \diamond$$

## AGREGAR EJEMPLOS

**Definición 2.1.5.** Sea un campo vectorial  $\mathbf{F}$ . Si  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , lo llamamos **irrotacional**. Si  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ , lo llamamos **solenoidal**.  $\diamond$

**Definición 2.1.6.** Sea un campo escalar  $f$  o vectorial  $\mathbf{F}$  vectorial, lo llamamos **armónico** si  $\Delta f = 0$  o  $\Delta \mathbf{F} = 0$ .  $\diamond$

**Propiedad 2.1.1.** Los operadores vectoriales son aplicaciones lineales. Sean  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y  $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable. Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$1. \nabla(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha \nabla f(\mathbf{x}) + \beta \nabla g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

$$2. \nabla \cdot (\alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

$$3. \nabla \times (\alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \alpha \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

$\diamond$

**Propiedad 2.1.2. Regla de Leibniz para el producto.** Sea  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar tal que  $h \in C^1$ .

$$1. \text{ Sea } \mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ de clase } C^1(U), \text{ entonces } \nabla \cdot (h\mathbf{F}) = h \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla h \cdot \mathbf{F}$$

$$2. \text{ Sea } \mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (o } \mathbb{R}^2) \text{ de clase } C^1(U), \text{ entonces } \nabla \times (h\mathbf{F}) = h \nabla \times \mathbf{F} + \nabla h \times \mathbf{F}$$

$\diamond$

**Propiedad 2.1.3.** Productos:

$$1. \nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

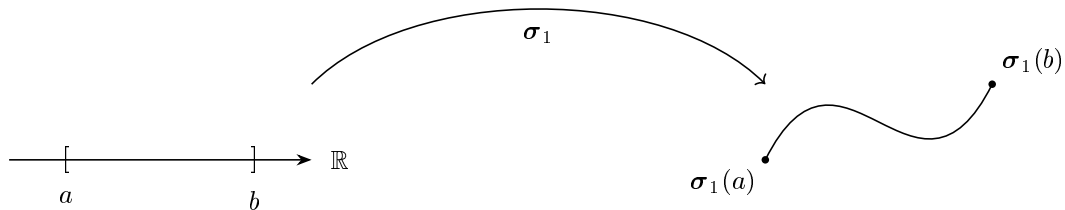
$$2. \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$$

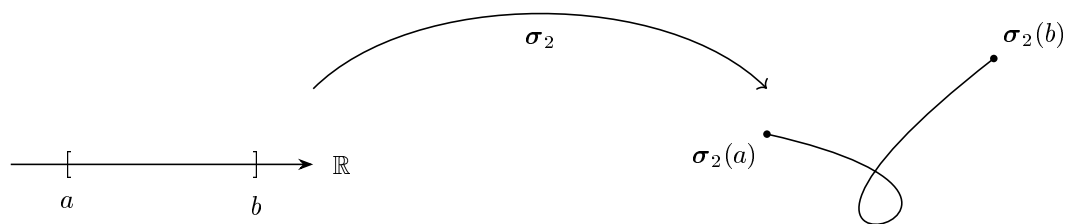
$\diamond$

## 2.2 Curvas

**Definición 2.2.1.** Falta definición  $C^1$  a trozos.

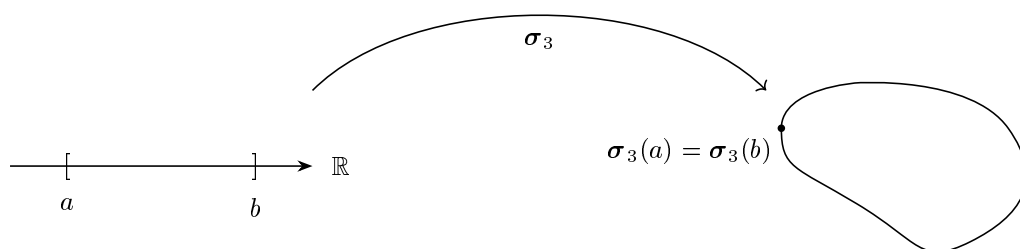
**Definición 2.2.2.** Se define una curva  $\Gamma \in \mathbb{R}^n$  como la imagen de una trayectoria  $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y de clase  $C^1$  a trozos. Si  $I = [a, b]$  a los puntos  $\sigma(a)$  y  $\sigma(b)$  se los llama extremos de la curva.  $\diamond$





desp agrego las leyendas

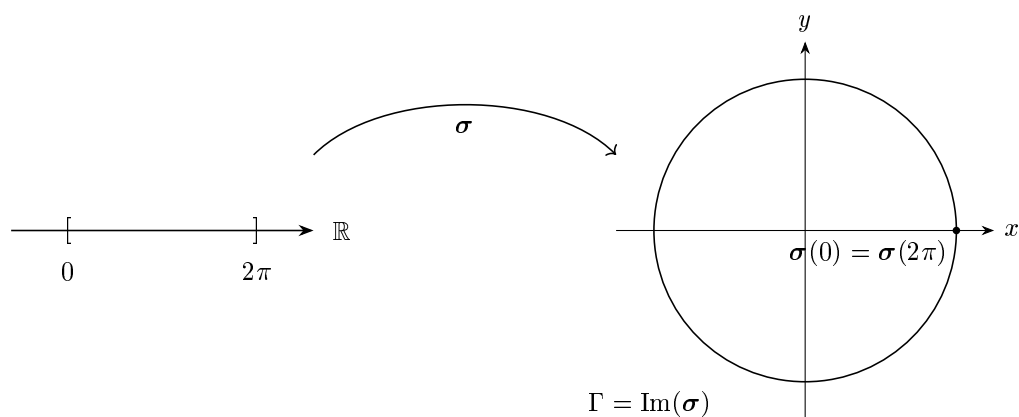
**Definición 2.2.3.** Si  $\sigma(a) = \sigma(b)$  entonces  $\Gamma$  se llama curva cerrada.



**Definición 2.2.4.** Si  $\sigma$  es inyectiva en  $I$ , salvo tal vez en sus bordes, entonces se llama a  $\Gamma$  curva simple.

**Ejemplo 2.2.1.**  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  son curvas simples.  $\Gamma_2$  no es una curva simple.

**Ejemplo 2.2.2.** Sea la trayectoria  $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \Gamma$ , tal que  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ . La curva  $\Gamma = \text{Im}(\sigma)$  es la que se muestra a continuación.



**Definición 2.2.5.** .Continuidad a trozos. Igual que C1 a trozos.

◇

Cada curva simple  $\Gamma$  tiene asociadas dos orientaciones o sentidos posibles. Si los puntos  $P$  y  $Q$  son los extremos de la curva, y  $P \neq Q$ , entonces podemos considerar a  $\Gamma$  con orientación desde  $P$  hacia  $Q$  o bien desde  $Q$  hacia  $P$ . Si  $P=Q$  definir horario y antihorario.

**Definición 2.2.6.** Se define una parametrización de una curva simple  $\Gamma \in \mathbb{R}^n$  como una trayectoria  $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, de clase  $C^1$  a trozos, inyectiva en  $I^\circ$  y  $\text{Im}(\sigma) = \Gamma$ .  $\diamond$

**Definición 2.2.7.** Una parametrización  $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  se llama regular si  $\sigma'(t) \neq 0, \forall t \in I^\circ$ .  $\diamond$

## 2.3 Integrales Dobles

**Definición 2.3.1.** Dada una función continua  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $B$  es un rectángulo en  $\mathbb{R}^2$ , se define la suma de Reimann de  $f$  sobre  $B$ , partiendo los dos lados de  $B$  en  $n$  partes iguales y formando la suma, a

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta A,$$

donde  $c_{ij} \in B_{ij}$ , el  $ij$ -ésimo rectángulo en la partición de  $B$ , y  $\Delta A$  es el área de  $B_{ij}$ .  $\diamond$

**Definición 2.3.2.** Sean  $B = [a, b] \times [c, d]$  y  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. El límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , se llama **integral doble** de  $f$  sobre  $B$ , y se nota  $\iint_U f dA$ , a

$$\iint_U f dA = \iint_U f(x, y) dx dy. \quad \diamond$$

*Aclaremos que el  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{ij} = dA$ ? Y que  $dA = dx dy$ ?*

Para extender esta noción de integral a un conjunto acotado más general, esto es, conjuntos que puedan ser encerrados por un rectángulo, definimos lo siguiente.

**Definición 2.3.3.** Dada  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ , se define la función  $f^*$  tal que

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Entonces si  $B$  es una caja que contiene a  $D$  y  $\partial D$  está formada por las gráficas de un número finito de funciones continuas,  $f^*$  será integrable. Luego, se define

$$\iint_D f dA = \iint_B f^* dA. \quad \diamond$$

**Observación.** Notar que esta integral es independiente de la selección de  $B$ .

**Propiedad 2.3.1.** Sean  $f, g$  dos funciones integrables en una región  $D \subset \mathbb{R}^2$ , entonces:

i.  $\alpha f + \beta g$  es integrable en  $D$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y además

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) dA = \alpha \iint_D f dA + \beta \iint_D g dA.$$



- ii. El producto  $fg$  es integrable en  $D$ .
- iii. Si  $|g(x, y)| \geq k > 0 \forall (x, y) \in D$ , el cociente  $f/g$  es integrable en  $D$ .
- iv. Si  $f \geq 0$  en  $D$ ,  $\iint_D f \, dA \geq 0$ .
- v. Si  $f \leq g$  en  $D$ ,  $\iint_D f \, dA \leq \iint_D g \, dA$ .
- vi. Si  $|f|$  es integrable en  $D$ , entonces

$$\left| \iint_D f \, dA \right| \leq \iint_D |f| \, dA.$$

- vii. Si  $D = D_1 \cup D_2$ ,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ , es una partición de  $D$ ,  $f$  es integrable en  $D \iff f$  es integrable en  $D_1$  y  $D_2$ . En este caso

$$\iint_D f \, dA = \iint_{D_1} f \, dA + \iint_{D_2} f \, dA. \quad \diamond$$

**Definición 2.3.4. Conjuntos elementales en  $\mathbb{R}^2$ .** Sea  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

- i. Decimos que el conjunto elemental  $D$  es de *tipo 1* si existen funciones continuas  $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $D$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  que satisfacen

$$x \in [a, b], \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x),$$

donde  $\phi_1(x) \leq \phi_2(x) \forall x \in [a, b]$ .

- ii. Decimos que el conjunto elemental  $D$  es de *tipo 2* si existen funciones continuas  $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $D$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  que satisfacen

$$y \in [c, d], \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),$$

donde  $\psi_1(y) \leq \psi_2(y) \forall y \in [c, d]$ .

- iii.  $D$  se llama conjunto elemental de *tipo 3* si es *tipo 1* y *tipo 2* a la vez.  $\diamond$

**Corolario 2.3.1.** 1. Sea  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto de tipo 1. Y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Entonces

$$\iint_D f = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

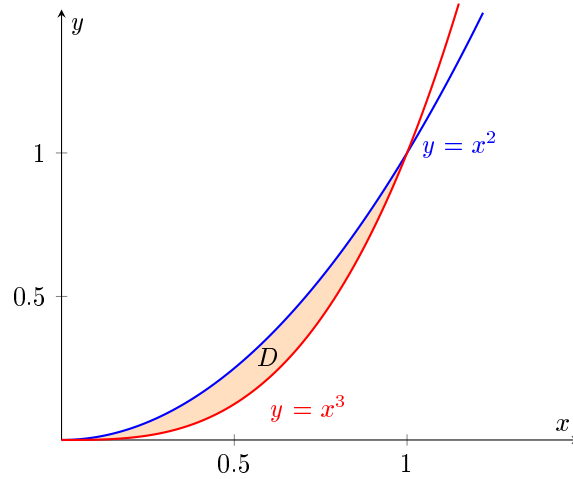
- 2. Sea  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto de tipo 2. Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Entonces

$$\iint_D f = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

3. Si  $D$  es de tipo 3 y  $f$  continua, entonces

$$\iint_D f = \int_a^b \left( \int_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad \diamond$$

**Ejemplo 2.3.1.** Calcular  $\iint_D f$ , donde  $f(x, y) = x^2 y$ , donde  $D$  es la región del plano encerrado entre  $y = x^3$ ,  $y = x^2$ , con  $x \in [0, 1]$ .



En este caso

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; x^3 \leq y \leq x^2\}.$$

Luego  $D$  es de tipo 1. Notar que la única manera de demostrar que un conjunto es elemental es dando su descripción implícita. Por el Corolario 2.3.1

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y dA &= \int_0^1 \left( \int_{x^3}^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left( x^2 \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^3}^{x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 ((x^2)^2 - (x^3)^2) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^6 - \frac{1}{2} x^8 dx \\ &= \frac{1}{14} x^7 - \frac{1}{18} x^9 \Big|_0^1 = \frac{1}{14} - \frac{1}{18}. \end{aligned} \quad \diamond$$

**Definición 2.3.5.** Se define el área de un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , y se nota  $A(D)$  como la integral, si existe, de la función 1. Es decir,

$$A(D) = \iint_D 1 dA. \quad \diamond$$

**Teorema 2.3.1. Teorema del valor medio para integrales dobles.** Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $D$  es un conjunto elemental. Entonces existe  $(x_0, y_0)$  en  $D$  tal que

$$\int_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0) A(D). \quad \diamond$$

**Definición 2.3.6.** Sea  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1(A)$  y sea  $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}$  su matriz diferencial definida en  $A$ . Se define el **jacobiano**, o **determinante jacobiano**, y se lo nota  $J_{\mathbf{F}}$  a

$$J_{\mathbf{F}} = |\det(\mathbf{D}_{\mathbf{F}})|. \quad \diamond$$

*quizas esta definicion convnga ponerla en la primera parte teorica.*

**Teorema 2.3.2. Teorema del cambio de variables para integrales dobles.** Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar integrable. Sea  $\mathbf{T} : D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow D$  continua de clase  $C^1$  en  $D^{*0}$ , inyectiva en  $D^{*0}$  y  $\mathbf{T}(D^*) = D$ . Entonces

$$\iint_D f \, dA = \iint_{D^*} (f \circ \mathbf{T}) J_{\mathbf{T}} \, dV. \quad \diamond$$

## 2.4 Integrales Triples

**Definición 2.4.1.** Dada una función continua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $U$  es un paralelepípedo rectangular (una caja) en  $\mathbb{R}^3$ , se define la suma de Reimann de  $f$  sobre  $U$ , partiendo los tres lados de  $U$  en  $n$  partes iguales, a

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta V,$$

donde  $c_{ijk} \in U_{ijk}$ , el  $ijk$ -ésimo paralelepípedo rectangular en la partición de  $U$ , y  $\Delta V$  es el volumen de  $U_{ijk}$ .  $\diamond$

**Definición 2.4.2.** Sean  $U = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. El límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  se llama **integral triple** de  $f$  sobre  $U$ , y se nota  $\iiint_U f \, dV$  a

$$\iiint_U f \, dV = \iiint_U f(x, y, z) \, dx dy dz. \quad \diamond$$

*Aclaremos que el  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{ijk} = dV$ ? Y que  $dV = dx dy dz$ ?*

Para extender esta noción de integral a un conjunto acotado más general, esto es, conjuntos que puedan ser encerrados por una caja, definimos lo siguiente.

**Definición 2.4.3.** Dada  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , se define la función  $f^*$  tal que

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in W \\ 0 & \text{si } (x, y, z) \notin W. \end{cases}$$

Entonces si  $U$  es una caja que contiene a  $W$  y  $\partial W$  está formada por las gráficas de un número finito de funciones continuas,  $f^*$  será integrable. Luego, se define

$$\iiint_W f \, dV = \iiint_U f^* \, dV. \quad \diamond$$

**Observación.** Notar que esta integral es independiente de la selección de  $U$ .

**Propiedad 2.4.1.** Sean  $f, g$  dos funciones integrables en una región  $W \subset \mathbb{R}^3$ , entonces:

- i.  $\alpha f + \beta g$  es integrable en  $W$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y además

$$\iiint_W (\alpha f + \beta g) \, dV = \alpha \iiint_W f \, dV + \beta \iiint_W g \, dV.$$

- ii. El producto  $fg$  es integrable en  $W$ .
- iii. Si  $|g(x, y, z)| \geq k > 0 \forall (x, y, z) \in W$ , el cociente  $f/g$  es integrable en  $W$ .
- iv. Si  $f \geq 0$  en  $W$ ,  $\iiint_W f dV \geq 0$ .
- v. Si  $f \leq g$  en  $W$ ,  $\iiint_W f dV \leq \iiint_W g dV$ .
- vi. Si  $|f|$  es integrable en  $W$ , entonces

$$\left| \iiint_W f dV \right| \leq \iiint_W |f| dV.$$

- vii. Si  $W = W_1 \cup W_2$ ,  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ , es una partición de  $W$ ,  $f$  es integrable en  $W \iff f$  es integrable en  $W_1$  y  $W_2$ . En este caso

$$\iiint_W f dV = \iiint_{W_1} f dV + \iiint_{W_2} f dV. \quad \diamond$$

**Definición 2.4.4.** Se define el volumen de un conjunto  $W \subset \mathbb{R}^n$ , y se nota  $\text{Vol}(W)$ , como la integral, si existe, de la función 1. Es decir,

$$\text{Vol}(W) = \iiint_W 1 dV. \quad \diamond$$

**Teorema 2.4.1. Teorema del valor medio.** Sea  $f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $W$  es un conjunto elemental. Entonces existe  $(x_0, y_0, z_0)$  en  $W$  tal que

$$\iiint_W f dV = f(x_0, y_0, z_0) \text{Vol}(W). \quad \diamond$$

**Definición 2.4.5. Conjunto elemental en  $\mathbb{R}^3$ .** Sea  $W \subseteq \mathbb{R}^3$ . Sean  $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones y sean  $\gamma_1, \gamma_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas. Un conjunto  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  se llama elemental, si puede ser escrito como el conjunto de puntos  $(x, y, z)$  que satisfacen

$$x \in [a, b], \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \quad \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y).$$

O bien, intercambiando el orden de las variables.  $\diamond$

**Teorema 2.4.2. Teorema del cambio de variables para integrales triples.** Sea  $f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar integrable. Sea  $\mathbf{T} : W^* \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^3$  continua de clase  $C^1$  en  $W^{*0}$ , inyectiva en  $W^{*0}$  y  $\mathbf{T}(W^*) = W$ . Entonces

$$\iiint_W f dV = \iiint_{W^*} (f \circ \mathbf{T}) J_{\mathbf{T}} dV. \quad \diamond$$

## 2.5 Integrales de Línea

**Definición 2.5.1.** Sea  $\Gamma$  una curva simple en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización regular de  $\Gamma$ . Se define la **longitud de  $\Gamma$** , y se nota por  $\text{Long}(\Gamma)$ , a

$$\text{Long}(\Gamma) = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} \|\sigma'(t)\| dt,$$

donde  $\sigma|_{I_i}$  es de clase  $C^1$ . ◇

**Definición 2.5.2.** Sea  $\sigma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , una trayectoria de clase  $C^1(I)$  y sea  $f$  un campo escalar tal que la función compuesta  $f \circ \sigma(t)$  sea continua en  $I$ . Se define la **integral de trayectoria**, o **integral de  $f$  a lo largo de la trayectoria  $\sigma$** , y se la nota por  $\int_{\sigma} f ds$ , a

$$\int_{\sigma} f ds = \int_a^b (f \circ \sigma) \|\sigma'(t)\| dt. \quad \diamond$$

Si  $\sigma(t)$  es sólo  $C^1$  a trozos o  $f \circ \sigma(t)$  es continua a trozos, se define  $\int_{\sigma} f ds$  sobre una partición de  $[a, b]$ , donde sobre cada intervalo de la partición  $(f \circ \sigma) \|\sigma'(t)\|$  sea continua, y sumando las integrales sobre cada intervalo de la partición.

**Definición 2.5.3.** Sea  $\Gamma$  una curva simple en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\sigma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización regular de  $\Gamma$ . Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua sobre  $\Gamma$ . Se define la integral de línea del campo  $f$  sobre la curva  $\Gamma$ , y se nota por  $\int_{\Gamma} f ds$  a

$$\int_{\Gamma} f ds = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f \circ \sigma(t) \|\sigma'(t)\| dt,$$

donde  $\sigma|_{I_i}$  es de clase  $C^1$ . ◇

**Observación.** Si  $f(x, y) > 0$ , entonces la integral de línea tiene una interpretación geométrica como el “área de una valla”. Podemos construir una “valla” cuya base sea la imagen de  $\sigma$  y altura  $f(x, y)$  en  $(x, y)$ . Si  $\sigma$  recorre sólo una vez la imagen de  $\sigma$ , la integral  $\int_{\sigma} f(x, y) ds$  representa el área de una lado de la valla.

### ilustracion de la aplicacion

**Definición 2.5.4.** Integral de un campo vectorial a lo largo de una curva simple. Sea  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo sobre una curva simple orientada  $\Gamma \subset A$ . Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  una parametrización de  $\Gamma$  que preserve su orientación. Se define la **integral de  $\mathbf{F}$  sobre la curva simple  $\Gamma$**  como

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot ds \quad \diamond$$

Si  $\Gamma$  es cerrada, se suele notar a la integral como

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot ds,$$

y se la llama integral de circulación de  $\mathbf{F}$  sobre  $\Gamma$ .

**Definición 2.5.5.** Sean  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial y  $\sigma : [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  una trayectoria  $C^1$  a trozos tales que  $\mathbf{F} \circ \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua. Se define la **integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{F}$  a lo largo de la trayectoria  $\sigma$**  como

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F} \circ \sigma(t) \cdot \sigma'(t) dt. \quad \diamond$$

*por que  $\Gamma$  en vez de  $\sigma$  en la integral?*

Se usa la notación  $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds$ , donde  $\hat{\mathbf{t}}$  es versor tangencial al campo  $\mathbf{F}$  en todo punto.

## 2.6 Integrales de Superficie

## 2.7 Campos Conservativos

**Definición 2.7.1.** Definición conjunto conexo... (no la encuentro en el Tromba)  $\diamond$

**Teorema 2.7.1.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y conexo y  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  una trayectoria  $C^1$  a trozos. Entonces

$$\int_{\sigma} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)). \quad \diamond$$

**Corolario 2.7.1.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y conexo y  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ , entonces  $\int_{\sigma} \nabla f \cdot d\mathbf{s}$  sólo depende de los puntos inicial y final de la trayectoria. Por lo tanto, sean las trayectorias  $\sigma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow A_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $\sigma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ , tales que  $\sigma_1(a_1) = \sigma_2(a_2) \wedge \sigma_1(b_1) = \sigma_2(b_2)$ , entonces

$$\int_{\sigma_1} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma_2} \nabla f \cdot d\mathbf{s}. \quad \diamond$$

**Corolario 2.7.2.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y conexo y  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . Si  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial para el cual  $\exists f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  clase  $C^1$  tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A,$$

entonces para todo par de curvas  $C_1$  y  $C_2$  en  $A$ , con los mismos extremos y misma orientación,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad \diamond$$

Estos últimos dos corolarios nos demuestran que la integral de curva

**Corolario 2.7.3.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y conexo y  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . Si  $\mathbf{F} = \nabla f$ , entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

para toda curva  $C$  simple cerrada contenida en  $A$ .  $\diamond$

**Teorema 2.7.2.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y conexo,  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuo tal que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  es independiente del camino en  $A$ . Entonces  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

con  $\mathbf{x}_0 \in A$ , cumple que:

1.  $f$  es  $C^1$ .

2.  $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A.$

◇

**Teorema 2.7.3.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y conexo,  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuo. Las siguientes condiciones sobre  $\mathbf{F}$  son equivalentes:

1.  $\exists f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in A.$

2. La integral de  $\mathbf{F}$  es independiente del camino en  $A$ .

3.  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$  para toda curva cerrada simple  $C$  en  $A$ .

◇

*esta seccion la copie textual del video Campos Conservativos de youtube. quizas para que quede definida la parte de “La integral de  $\mathbf{F}$  es independiente del camino en  $A$ ” convenga copiar los teoremas y corolarios del tromba?*

## 2.8 Teoremas Integrales

**Teorema 2.8.1. Teorema de Green.** Sea  $D \in \mathbb{R}^2$  una región simplemente conexa (o tipo 3) y sea  $\partial D$  la frontera de  $D$ , con orientación tal que se cumple la regla de la mano derecha. Sea  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$ . Entonces

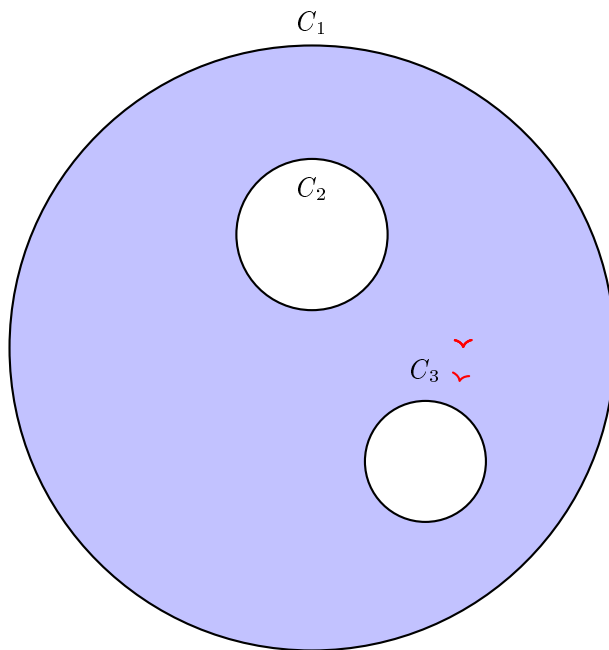
$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}.$$

◇

Otra manera de enunciar el teorema de Green es usando un cambio en la notación vectorial. Pensando el producto escalar  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  como  $P dx + Q dy$ , donde  $\mathbf{F} = (P, Q)$  y sabiendo que el rotor en  $\mathbb{R}^2$  es la componente  $z$  del rotor en  $\mathbb{R}^3$ ; reescribimos el teorema de Green como

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

El teorema de Green es aplicable a regiones aún más generales que simplemente conexas. De hecho, a cualquier región en  $\mathbb{R}^2$  cuya frontera se pueda descomponer en un número finito de curvas cerradas simples orientadas se le puede aplicar el teorema de Green. La idea es “recorrer” dicha frontera pasando por todas las curvas que la conforman.



falta poner las flechas que indican la orientacion

**Teorema 2.8.2. Teorema de la divergencia en el plano.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  una región de tipo 3 y sea  $\partial D$  su frontera. Denotaremos por  $\mathbf{n}$  el versor unitario normal a  $\partial D$  en todo punto. Si  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  es una parametrización orientada de manera positiva de  $\partial D$ ,  $\mathbf{n}$  está dado por

$$\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}.$$

Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial  $C^1$  en  $D$ . Entonces

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA. \quad \diamond$$

**Teorema 2.8.3. Teorema de Stokes.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada por  $\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . Si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial  $C^1$  en  $S$ . Entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \quad \diamond$$

**Teorema 2.8.4. Teorema de la divergencia o de Gauss.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie que encierra un volumen  $\Omega$  orientada de manera exterior, esto es  $S = \partial\Omega$ . Sea  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial clase  $C^1$ . Entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV. \quad \diamond$$



## Primeros parciales resueltos

### 3.1 Fecha 29 de septiembre de 2023

**Ejercicio 1.** Calcule, si existe, el siguiente límite.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cos \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

**Ejercicio 2.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar diferenciable y sea  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$g(x, y) = (e^{xy} - 1, \operatorname{sen}(\pi x + \pi y)).$$

Sabiendo que el gráfico  $h = f \circ g$  en el punto  $(1, 0, h(1, 0))$  tiene plano tangente de ecuación

$$z - 1 = \pi x + (\pi + 1)y,$$

hallar  $f_{\mathbf{v}}(0, 0)$  para la dirección  $\mathbf{v} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ .

**Ejercicio 3.** Considere el campo escalar  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:

$$f(x, y) = e^{\operatorname{sen}(x) + y^2}$$

Se pide aproximar  $f(-0.1, 0.2)$  mediante un polinomio de grado dos adecuado.

**Ejercicio 4.** Dado el campo escalar  $f(x, y) = \cos(y) + \operatorname{sen}(x)$ . Encuentre los puntos críticos de dicho campo en el dominio  $\Omega$  y clasifíquelos como extremos locales, donde:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi\}$$

**Solución 1.** Notemos que la estructura del límite pedido está dada por el producto de dos funciones acotadas, por lo tanto, con mostrar que una de las dos tiende a cero bastará para decir que el límite de dicho producto es cero.

Utilizando la siguiente desigualdad para el argumento del seno

$$0 \leq \left| \frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{2(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

junto al teorema de intercalación tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = 0.$$

Recordando que  $|\sin(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$  podemos concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin\left(\frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = 0.$$

Por último, recordando que  $|\cos(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin\left(\frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cos\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

**Solución 2.** Como  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en todo su dominio por ser composición de funciones diferenciables, la ecuación de su plano tangente en el punto  $(1, 0)$  está dada por

$$z = h(1, 0) + \nabla h(1, 0)(x - 1, y), \quad (3.1)$$

luego será suficiente con encontrar  $h(1, 0)$  y  $\nabla h(1, 0)$ .

Por un lado,  $h(1, 0) = f \circ g(1, 0) = f(0, 0)$  y por otro lado, como  $f$  y  $g$  son ambas diferenciables, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\nabla h(1, 0) = \nabla(f \circ g)(1, 0) = \nabla f(g(1, 0)) \mathbf{D}_g(1, 0) = \nabla f(0, 0) \mathbf{D}_g(1, 0), \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{D}_g$  es la matriz diferencial o jacobiana de  $g$ .

Halleemos  $\mathbf{D}_g$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_g(1, 0) &= \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} - 1 & \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} - 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} \sin(\pi x + \pi y) & \frac{\partial}{\partial y} \sin(\pi x + \pi y) \end{array} \right) \bigg|_{(1,0)} \\ &= \left( \begin{array}{cc} ye^{xy} & xe^{xy} \\ \pi \cos(\pi x + \pi y) & \pi \cos(\pi x + \pi y) \end{array} \right) \bigg|_{(1,0)} \\ &= \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\pi & -\pi \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en a (3.2)

$$\nabla h(1, 0) = \nabla f(0, 0) \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\pi & -\pi \end{array} \right) = (-\pi f_y(0, 0), f_x(0, 0) - \pi f_y(0, 0))$$

Reemplazando en (3.1)

$$\begin{aligned} z &= f(0, 0) + (-\pi f_y(0, 0), f_x(0, 0) - \pi f_y(0, 0)) (x - 1, y) \\ z &= f(0, 0) + \pi f_y(0, 0) - \pi f_y(0, 0)x + (f_x(0, 0) - \pi f_y(0, 0))y, \end{aligned}$$

y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} f_y(0, 0) = -1 \\ f_x(0, 0) - \pi f_y(0, 0) = \pi + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f_y(0, 0) = -1 \\ f_x(0, 0) = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \nabla f(0, 0) = (1, -1).$$

Como  $f$  es diferenciable en todo su dominio, en particular lo es en  $(0, 0)$ , vale que

$$f_{\mathbf{v}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ con } \|\mathbf{v}\| = 1.$$

Luego, tomando  $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ , obtenemos lo pedido, es decir,

$$f_{\mathbf{v}}(0, 0) = (1, -1) \cdot \mathbf{v} = \sqrt{2}.$$

**Solución 3.** Dado que  $f$  es de clase  $C^2(\mathbb{R}^2)$ , se define el polinomio de Taylor de segundo orden centrado en  $(0, 0)$  de  $f$ , que noateremos por  $P_2[f, (0, 0)]$  como,

$$P_2[f, (0, 0)](x, y) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) + \frac{1}{2}(x, y) \mathbf{H}_f(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{H}_f$  es la matriz hessiana de  $f$ .

Hallemos los términos del polinomio.

$$1. f(0, 0) = 1.$$

$$2. \nabla f(0, 0) = \left( e^{\sin(x)+y^2} \cos(x), e^{\sin(x)+y^2} 2y \right) \Big|_{(0,0)} = (1, 0).$$

$$3.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_f(0, 0) &= \left( \begin{array}{cc} e^{\sin(x)+y^2} [\cos^2(x) - \sin(x)] & 2y \cos(x) e^{\sin(x)+y^2} \\ 2y \cos(x) e^{\sin(x)+y^2} & 4y^2 e^{\sin(x)+y^2} + 2e^{\sin(x)+y^2} \end{array} \right) \Big|_{(0,0)} \\ \mathbf{H}_f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos en la expresión (3.3).

$$P_2(x, y) = 1 + (1, 0) \cdot (x, y) + \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P_2(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2)$$

$$P_2(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + x + 1$$

Entonces queda evaluar en  $P_2(-0.1, 0.2) = \frac{189}{200} = 0.945$ .

$$\therefore f(-0.1, 0.2) \approx 0.945.$$

**Solución 4.** En este ejercicio debemos hallar y clasificar los extremos de la función  $f$  sobre  $\Omega$ , un conjunto acotado y abierto. Para ello, primero buscamos los puntos críticos de  $f$  en  $\Omega$ . Como  $f$  es diferenciable en  $\Omega$ , basta con hallar todos los  $(x_0, y_0) \in \Omega$  tal que  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

$$\nabla f(x, y) = (\cos(x), -\sin(y))$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \iff \begin{cases} \cos(x_0) = 0 \\ \sin(y_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y_0 = k'\pi \end{cases} ; k, k' \in \mathbb{Z}$$

Ahora sumamos la condición de que pertenezcan a  $\Omega$ .

$$(x_0, y_0) \in \Omega \iff x_0 = -\frac{\pi}{2} \vee x_0 = \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad y_0 = 0$$

Por lo tanto, el conjunto de puntos críticos es

$$P.C. = \{(-\pi/2, 0), (\pi/2, 0)\}.$$

Ahora, para clasificarlos, debemos aplicar el criterio de la segunda derivada. Para ésto calculamos la matriz hessiana de  $f$ .

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{H}_f)(x, y) = \sin(x) \cos(y)$$

1.  $\det(\mathbf{H}_f)(-\pi/2, 0) = -1 < 0 \implies f$  tiene un punto silla en  $(-\pi/2, 0)$ .
2.  $\det(\mathbf{H}_f)(\pi/2, 0) = 1 > 0 \wedge f_{xx}(\pi/2, 0) = 1 > 0 \implies f$  tiene un mínimo local en  $(\pi/2, 0)$ .

### 3.2 Fecha 25 de abril de 2023

**Ejercicio 1.** Analizar la existencia de los siguientes límites

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1) \cos(\frac{1}{y-1})}{x^2 + 3(y-1)^2} \qquad (b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^3)y}{x^2 - y + x^5}$$

**Ejercicio 2.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{(x^2 - y)^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Analizar la continuidad de  $f$  en el origen
2. Analizar la diferenciabilidad de  $f$  en el origen.
3. Hallar, si existen, las derivadas parciales en el origen.

**Ejercicio 3.** Sea  $g(x, y) = yx^2 + \operatorname{sen}(f(x, y))$  con  $f$  un campo escalar  $C^1(\mathbb{R}^2)$  tal que  $f(0, 0) = 0$ . Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x, y) - xf_x(0, 0) - yf_y(0, 0) + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

**Ejercicio 4.** Analizar la existencia de máximos y mínimos, absolutos o relativos, en todo  $\mathbb{R}^2$  de

$$f(x, y) = e^{xy-1} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

**Solución 1.** (a) Podemos observar que el límite es indeterminado, aún más, el argumento del coseno tiende a infinito. Para resolver, reescribimos el límite de la siguiente manera

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \cos\left(\frac{1}{y-1}\right).$$

Dado que el coseno es una función acotada, bastaría con probar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} = 0.$$

Para esto, usaremos las siguientes desigualdades,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \right| \leq \frac{\|(x, y-1)\|^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \leq \\ &\leq \frac{\|(x, y-1)\|^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{\|(x, y-1)\|^2(y-1)}{\|(x, y-1)\|^2} = y-1. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (y-1) = 0,$$

tenemos, usando el teorema de intercalación, que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left| \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \right| = 0.$$

Luego

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} = 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \cos\left(\frac{1}{y-1}\right) = 0.$$

(b) Tomemos las curvas,  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \alpha(t) = (t, t^5)$  y  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \beta(t) = (t, t^2)$ . Notar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = (0, 0) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = (0, 0).$$

Llamando

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^3)y}{x^2 - y + x^5}$$

tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3)t^5}{t^2 - t^5 + t^5} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin(t^3)t^3 = 0 \quad (3.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \beta(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3)t^2}{t^2 - t^2 + t^5} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3)}{t^3} = 1. \quad (3.5)$$

Como (3.4)  $\neq$  (3.5) concluimos que

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

**Solución 2.** 1. Para que la función sea continua en el origen debe cumplir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

Analícemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{(x^2 - y)^2 + x^4}$$

Tomemos la curva,  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \alpha(t) = (t, t^2)$ , notemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = (0, 0).$$

Podemos observar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha(t) = 1$$

de aquí concluimos que  $f$  no es continua en el origen (aunque nada estamos diciendo de la existencia o no del límite).

2.  $f$  no es diferenciable en el origen pues no es continua en dicho punto.

3. Recordemos la definición de derivada direccional de dirección  $\mathbf{v}$  evaluada en el origen de un campo escalar  $f$ .

$$f_{\mathbf{v}}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h\mathbf{v}) - f(0, 0)}{h},$$

con  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  unitario.

Entonces calculamos

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{v}}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h\mathbf{v})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(hv_1)^4}{((hv_1)^2 - hv_2)^2 + (hv_1)^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(hv_1)^4}{(hv_1)^4 - 2(hv_1)^2 hv_2 + (hv_2)^2 + (hv_1)^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4 v_1^4}{h^4 v_1^4 - 2h^3 v_1^2 v_2 + h^2 v_2^2 + h^4 v_1^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 h^2 v_1^4}{h^2 (h^2 v_1^4 - 2h v_1^2 v_2 + v_2^2 + h^2 v_1^4)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 v_1^4}{h^2 v_1^4 - 2h v_1^2 v_2 + v_2^2 + h^2 v_1^4} = \frac{0}{v_2^2} = 0, \end{aligned}$$

si  $v_2^2 \neq 0 \iff v_1^2 \neq 1 \iff |v_1| \neq 1$ . Veamos el caso  $v_1 = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{h^4}{(h^2)^2 + h^4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{1}{2} = \infty.$$

Es decir, no existe  $f_x(0, 0)$ . El caso  $v_1 = -1$  es análogo.

O sea, las derivadas direccionales existen en todas direcciones, menos en la dirección del eje de abscisas, y son iguales a cero. Es decir,

$$\therefore f_{\mathbf{v}}(0, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : |v_1| \neq 1,$$

$$\nexists f_{\mathbf{v}}(0, 0) \text{ si } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : |v_1| = 1.$$

**Solución 3.** Para resolver este límite debemos intuir que en el numerador se encuentra la función  $g$  menos su plano tangente en el  $(0,0)$ . Entonces buscamos el gradiente de  $g$  en el origen.

Dado que  $f$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$  luego  $g$  resulta de la misma clase. Usando la regla de la cadena y el hecho de que  $f(0,0) = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla g(x,y)\Big|_{(0,0)} &= (2xy + \cos(f(x,y))f_x(x,y), \quad x^2 + \cos(f(x,y))f_y(x,y))\Big|_{(0,0)} \\ &= (f_x(0,0), \quad f_y(0,0)).\end{aligned}$$

Como  $g(0,0) = 0$  podemos reescribir el límite como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{g(x,y) - \nabla g(0,0) \cdot (x,y) - g(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

El primer término tiende a cero dado que  $g$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$  entonces es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$  y, en particular, lo es en el origen. Para el segundo término hacemos un cálculo auxiliar.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

Estamos en condiciones de usar álgebra de límites,

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{g(x,y) - \nabla g(0,0) \cdot (x,y) - g(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0.$$

**Solución 4.** Dado que  $f$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$  para hallar los puntos críticos basta con buscar cuando su gradiente se anula.

$$\nabla f(x,y) = (ye^{xy-1} - x, xe^{xy-1} - y)$$

Igualando el gradiente a cero, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} ye^{xy-1} = x \\ xe^{xy-1} = y \end{cases}$$

Si  $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ , entonces

$$e^{xy-1} = \frac{x}{y} = \frac{y}{x}. \quad (3.6)$$

De la última igualdad hallamos la siguiente relación

$$x^2 = y^2 \iff x = y \vee x = -y.$$

Si  $x = y$  reemplazado en (3.6) queda

$$e^{x^2-1} = 1 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = 1 \vee x = -1.$$

Es fácil ver que el caso  $x = -y$  conlleva a un absurdo. Por último, observar que el  $(0,0)$  también es solución del sistema. Por lo tanto, los puntos críticos son  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  y el  $(-1,-1)$ .

Para clasificarlos, como  $f \in C(\mathbb{R}^2)$  utilizamos el criterio de la segunda derivada.

$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy-1} - 1 & e^{xy-1}(xy + 1) \\ e^{xy-1}(xy + 1) & x^2 e^{xy-1} - 1 \end{pmatrix}$$



Ahora evaluamos el determinante de la matriz hessiana para los puntos críticos

$$\mathbf{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1/e \\ 1/e & -1 \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{H}_f(0,0)) = 1 - \frac{1}{e^2} > 0$$

y como  $f_{xx}(0,0) = -1 < 0 \implies f$  tiene un máximo local en 0.

$$\mathbf{H}_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{H}_f(1,1)) = -4 < 0$$

$\implies f$  tiene un punto silla en  $(1,1)$ .

$$\mathbf{H}_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{H}_f(-1,-1)) = -4 < 0$$

$\implies f$  tiene un punto silla en  $(-1,-1)$ .

Por último, para analizar si el máximo en  $(0,0)$  es local o absoluto basta calcular, por ejemplo,  $f(2,2)$  para ver que es mayor que  $f(0,0)$ .

$\therefore f$  tiene dos puntos silla, uno en  $(1,1)$  y otro en  $(-1,-1)$ , y un máximo local en  $(0,0)$ .

### 3.3 Fecha Recuperatorio 2cuatri 2022

**Ejercicio 1.** Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^3 - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

probar que no existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  sea clase  $C^2$  en  $B_\delta(0, 0)$ .

**Ejercicio 2.** Calcular

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{2x}e^{3y} - 1 - 2x - 3y - 3x^2 - 6yx - \frac{11}{2}y^2}{x^2 + y^2}$$

**Ejercicio 3.** Sea  $S$  el conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^3$  que forman la esfera de centro  $(3, 4, 5)$  tal que el  $(0, 0, 0) \in S$ .

- a. Hallar el plano tangente a  $S$  en  $(0, 0, 0)$ .
- b. Hallar otro plano que sea tangente a  $S$  y paralelo al del ítem a.

**Ejercicio 4.** Hallar los puntos de  $A : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$  que realicen la distancia mínima y máxima al origen.

**Solución 1.** Por el teorema de Schwartz sabemos que si  $f \in C^2$  en  $B_\delta(0,0)$  entonces

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \quad \forall (x,y) \in B_\delta(0,0).$$

En particular, debería pasar que  $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ . Veamos que esto último no sucede.

$$f_x(x,y) = \frac{(3yx^2 - y^3)(x^2 + y^2) - (yx^3 - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3.7)$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - (yx^3 - xy^3)2y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3.8)$$

Para  $(x,y) = (0,0)$ , calculamos las derivadas por definición.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Ya tenemos definidas las derivadas parciales de  $f$  en todo  $\mathbb{R}^2$ .

$$f_x(x,y) = \begin{cases} (3.7) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} (3.8) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Ahora podemos calcular las derivadas parciales cruzadas de segundo orden por definición.

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} \quad (3.9)$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} \quad (3.10)$$

Por (3.7) y (3.8), se puede observar que

$$f_x(0,h) = -h \text{ y } f_y(h,0) = h.$$

Entonces por (3.9) Y (3.10)

$$f_{xy}(0,0) = -1 \neq f_{yx}(0,0) = 1.$$

$\therefore$  no existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  sea clase  $C^2$  en  $B_\delta(0,0)$ .

**Solución 2.** Para resolverlo debemos intuir que está conformado por el límite de buena aproximación de un polinomio de Taylor de segundo orden centrado en el origen de una función. Buscamos una expresión para dicho polinomio y para la función.

Llamemos  $f(x, y) = e^{2x}e^{3y}$ , notemos que  $f$  es de clase  $C^3(\mathbb{R}^2)$ . Entonces, podemos definir su polinomio de Taylor de segundo orden centrado en el origen,  $P_2(x, y)$ , y además vale el teorema de resto de Taylor

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) + \frac{1}{2}(x, y)\mathbf{H}_f(0, 0)(x, y)^T,$$

siendo  $\mathbf{H}_f(0, 0)$  la matriz hessiana de  $f$  evaluada en el origen.

Tenemos que

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 1, \\ \nabla f(x, y) &= (2e^{2x}e^{3y}, 3e^{2x}e^{3y}) \implies \nabla f(0, 0) = (2, 3), \\ \mathbf{H}_f(x, y) &= \begin{pmatrix} 4e^{2x}e^{3y} & 6e^{2x}e^{3y} \\ 6e^{2x}e^{3y} & 9e^{2x}e^{3y} \end{pmatrix} \implies \mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces queda

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= 1 + (2, 3) \cdot (x, y) + \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \iff P_2(x, y) &= 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}y^2. \end{aligned}$$

Expresamos el error como

$$R_2(x, y) = f(x, y) - P_2(x, y).$$

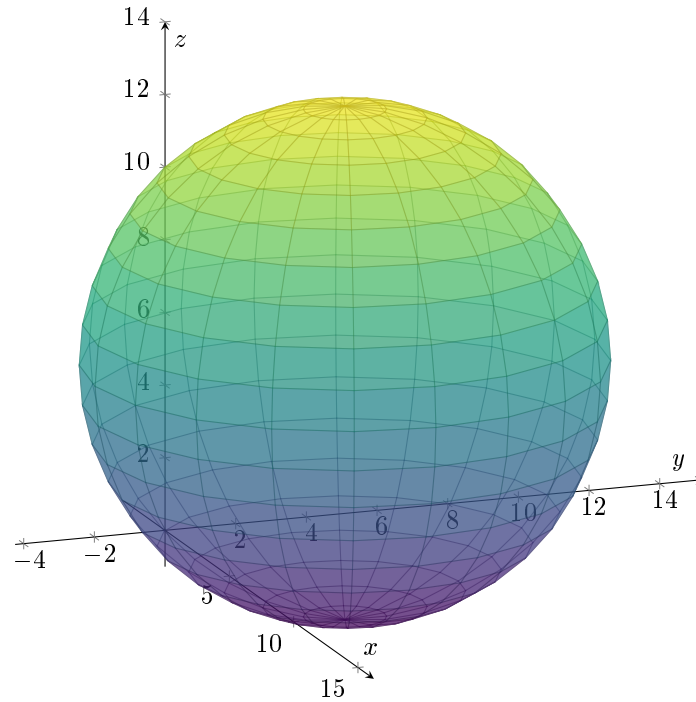
Por tanto, podemos reescribir el límite original como

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{R_2(x, y) - x^2 - y^2}{\|(x, y)\|^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left( \frac{R_2(x, y)}{\|(x, y)\|^2} - \frac{x^2 + y^2}{\|(x, y)\|^2} \right) = -1,$$

pues el primer término tiende a 0 por el teorema de Taylor y el segundo tiende claramente a 1.

**Solución 3.** a. Dado que el origen pertenece a  $S$  y conocemos su centro, podemos hallar la ecuación de la esfera.

$$S : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 50$$



Llamando

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 - 50$$

tenemos que

$$S = C(f, 0).$$

Buscamos el plano  $\Pi$ , tangente a  $C(f, 0)$  y que pase por  $(0, 0, 0)$ . Sabemos que la ecuación de  $\Pi$  es de la forma

$$\Pi : \nabla f(0, 0, 0) \cdot (x - 0, y - 0, z - 0) = 0.$$

Es fácil ver que  $\nabla f(0, 0, 0) = (-6, -8, -10)$ . Luego, una posible ecuación es

$$\Pi : 3x + 4y + 5z = 0.$$

b. Dado que el único plano paralelo a otro tangente a un punto en una esfera es el que se encuentra en el polo opuesto de ésta, buscamos el plano tangente  $\Pi'$  a ese otro punto  $\mathbf{w}$ . Llamando  $\mathbf{v} = (-3, -4, -5)$  al vector que sale del centro de la esfera y termina en el origen, queda que

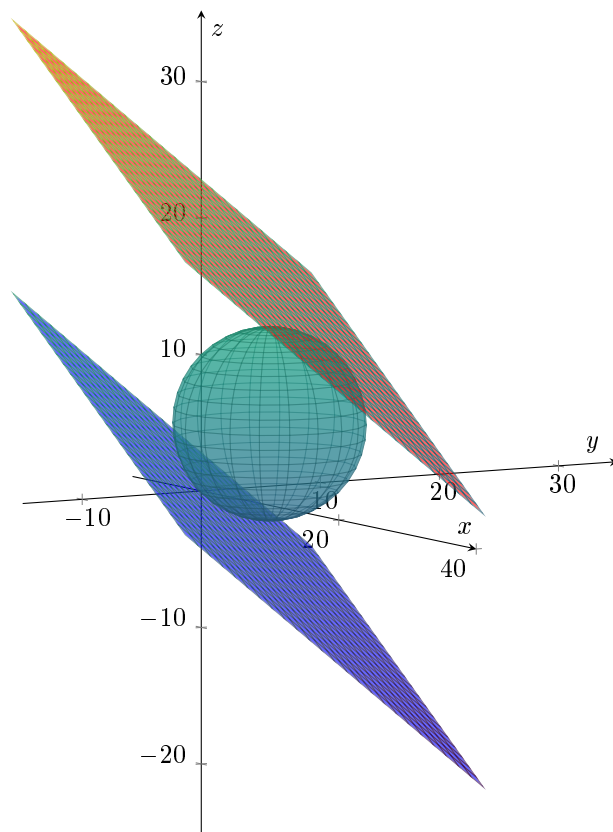
$$\mathbf{w} = (3, 4, 5) - \mathbf{v} = (6, 8, 10).$$

Como  $\Pi$  y  $\Pi'$  son paralelos, su vector normal  $\mathbf{n}$  es el mismo.

$$\implies \Pi' : \mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - \mathbf{w}) = 0$$

$$\iff \Pi' : 3(x - 6) + 4(y - 8) + 5(z - 10) = 0$$

$$\iff \Pi' : 3x + 4y + 5z = 100$$



**Solución 4.** Sean

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \text{dist}^2((x, y); (0, 0)) = x^2 + y^2$$

y

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 4,$$

luego  $A = C(g, 0)$ .

Como  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^1)$ , el teorema de los multiplicadores de Lagrange nos dice que si  $f|_A$  tiene un extremo local en un punto  $\mathbf{x}$  entonces necesariamente los vectores  $\nabla f(\mathbf{x})$  y  $\nabla g(\mathbf{x})$  son paralelos si  $\nabla g(\mathbf{x}) \neq 0$ . Además como  $f$  es continua sobre el conjunto  $A$  que es cerrado y acotado, por el teorema de Weierstrass, sabemos que  $f$  alcanza máximo y mínimo en  $A$ . Luego planteamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in A \iff \begin{cases} 2x = 2\lambda(x - 1) \\ 2y = 2\lambda(y - 1) \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema queda  $x = y$  y

$$\begin{cases} x = x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x = x_2 = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

$\implies (x_1, x_1)$  y  $(x_2, x_2)$  son ambos extremos absolutos de la función  $f$  en  $A$ . Como  $f(x_1, x_1) > f(x_2, x_2) \implies (x_1, x_1)$  es máximo absoluto y  $(x_2, x_2)$  es mínimo absoluto.

Luego la distancia mínima del círculo al origen es  $\sqrt{f(x_2, x_2)} = 2 - \sqrt{2}$  y la distancia máxima  $\sqrt{f(x_1, x_1)} = 2 + \sqrt{2}$ .

## Segundos parciales resueltos

### 4.1 Fecha 25 de junio de 2023

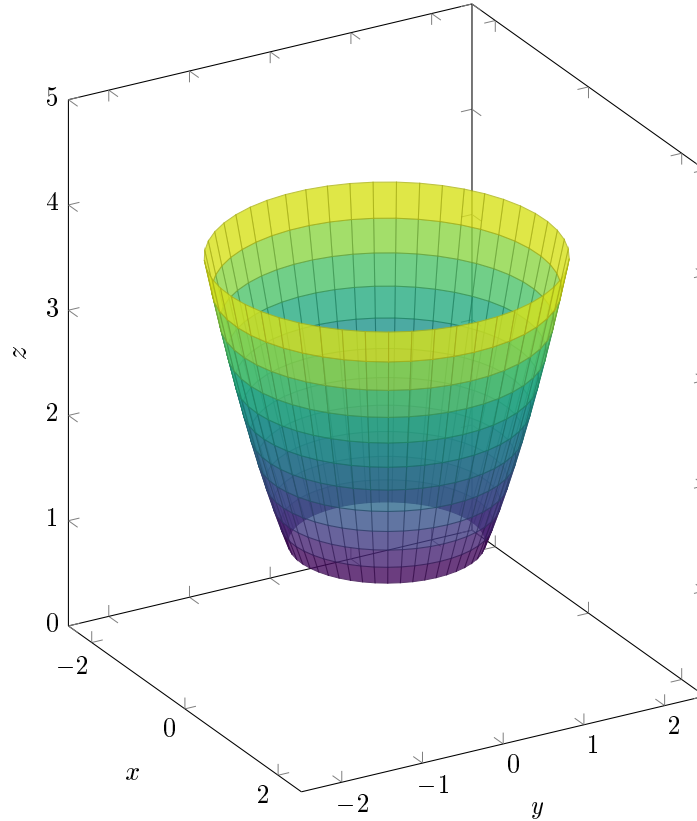
**Ejercicio 1.** Sea  $S$  la superficie dada por  $x^2 + y^2 = z$  con  $z \geq 1$  y  $x^2 + y^2 \leq 4$  y sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo de clase  $C^1$  con tercer componente nula y  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  constante 3. Calcular el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  indicando la orientación elegida.

**Ejercicio 2.** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - 2xz, 2xy + z^3, 3yz^2 - x^2)$  y sea  $C$  una curva simple parametrizada por  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\sigma(0) = (0, 0, 0)$  y  $\sigma(1) = (1, 2, 0)$ . Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  indicando la orientación elegida.

**Ejercicio 3.** Calcular la masa del cuerpo limitado por las ecuaciones  $y - x = 1$  y  $x^2 + z^2 = 1$  en el primer octante con función de densidad  $\rho$  constante.

**Ejercicio 4.** Sean  $k \in \mathbb{R}$ , un campo vectorial  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  tal que  $\nabla \times \mathbf{F} = k$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 ; x \leq y \leq 1\}$ . Hallar  $k$  tal que  $\int_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 8$ .

**Solución 1.** Es útil primero entender con qué superficies y regiones se trabajará.



La idea es aplicar el teorema de Gauss pero  $S$  no es una superficie cerrada. Para ello pensemos en una superficie  $S'$  cerrada tal que  $S \subseteq S'$ . Definamos  $S' = S \cup S_1 \cup S_2$ , donde  $S_1$  y  $S_2$ , son las “tapas” del paraboloid “cortado”. Algebraicamente  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = 1\}$  y  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = 4\}$ .

Llamando  $\Omega$  al cuerpo encerrado por  $S'$  y orientando a  $S'$  de manera exterior estamos en condiciones de usar el teorema de Gauss.

$$\begin{aligned} \oint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \\ \Leftrightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} - \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \\ \Leftrightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= I_1 - I_2 - I_3 \end{aligned}$$

Resolvemos el primer término.

$$I_1 = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_{\Omega} 3 \, dV = 3 \operatorname{Vol}(\Omega)$$

Pasando a  $\Omega$  en coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$



donde,

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{z} \wedge 0 \leq \phi \leq 2\pi \wedge 1 \leq z \leq 4.$$

Entonces nos queda

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_1^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz = 2\pi \int_1^4 \left( \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{z}} \right) dz = \pi \int_1^4 z \, dz = \frac{15\pi}{2}.$$

Luego,  $I_1 = \frac{45}{2}\pi$ .

Para calcular  $I_2$  debemos parametrizar  $S_1$ . Sea  $D_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$  y sea

$$\Sigma : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \Sigma(u, v) = (u, v, 1).$$

Entonces podemos reescribir

$$I_2 = \iint_{D_1} (\mathbf{F} \circ \Sigma) \cdot (\Sigma_u \times \Sigma_v) \, d\mathbf{A}.$$

Primero calculamos las derivadas parciales de la parametrización.

$$\begin{aligned} \Sigma_u &= (1, 0, 0) \\ \Sigma_v &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

Entonces

$$\Sigma_u \times \Sigma_v = (0, 0, 1) = \boldsymbol{\eta}.$$

Podemos observar que  $\boldsymbol{\eta}$  no preserva la orientación para  $S_1$  heredada por la orientación exterior de  $S'$  elegida anteriormente para poder aplicar el teorema de Gauss. En otras palabras,  $\boldsymbol{\eta}$  “apunta” hacia el interior de  $\Omega$ . Por lo que,

$$I_2 = - \iint_{D_1} (\mathbf{F} \circ \Sigma) \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{A}.$$

Calculamos el integrando aparte. Acordémonos que la tercer coordenada de  $\mathbf{F}$  es nula. Podemos llamar

$$\mathbf{F} \circ \Sigma = (P, Q, 0),$$

entonces nos queda que

$$(\mathbf{F} \circ \Sigma) \cdot \boldsymbol{\eta} = (P, Q, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0.$$

Por lo tanto  $I_2 = 0$ .

Procediendo de la misma manera nos daremos cuenta que también  $I_3 = 0$ .

$$\therefore \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = I_1 = \frac{45}{2}\pi$$

**Solución 2.** Busquemos, si existe, una función potencial para  $\mathbf{F}$ , es decir, busquemos  $f$  tal que  $\nabla f = \mathbf{F}$ . Para ello, planteamos el sistema de tres ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{cases} y^2 - 2xz = f_x \\ 2xy + z^3 = f_y \\ 3yz^2 - x^2 = f_z \end{cases}$$

Entonces

$$\int f_x(x, y, z) dx = y^2x - zx^2 + g(y, z) = f(x, y, z), \quad (4.1)$$

donde  $g$  es la constante con respecto a  $x$  producto de la integración. Derivando (4.1) con respecto a  $y$  obtenemos

$$\begin{aligned} f_y(x, y, z) &= 2yx + g_y(y, z) \\ 2yx + g_y(y, z) &= 2xy + z^3 \implies g_y(y, z) = z^3 \\ g(y, z) &= \int g_y(y, z) dy = z^3y + h(z). \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (4.1),

$$y^2x - zx^2 + z^3 + h(z) = f(x, y, z). \quad (4.2)$$

Derivando (4.2) con respecto a  $z$  obtenemos

$$\begin{aligned} f_z(x, y, z) &= -x^2 + 3yz^2 + h_z(z) \\ -x^2 + 3yz^2 + h_z(z) &= 3yz^2 - x^2 \implies h_z(z) = 0 \\ h(z) &= C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo tanto llegamos a una familia de soluciones.

$$f(x, y, z) = y^2x - zx^2 + z^3 + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Demostramos que  $\mathbf{F}$  es un campo conservativo pues  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Luego, podemos calcular

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f(1, 2, 0) - f(0, 0, 0) = 4.$$

**Solución 3.** La masa de un cuerpo de volumen  $\Omega$  es

$$M = \iiint_{\Omega} \rho dV.$$

En este caso

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1 \wedge y \leq 1 + x \wedge x, y, z \geq 0\}.$$

Conviene trabajar en coordenadas cilíndricas. Sea

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = y \\ z = r \sin \phi. \end{cases}$$

Entonces en el nuevo sistema de coordenadas

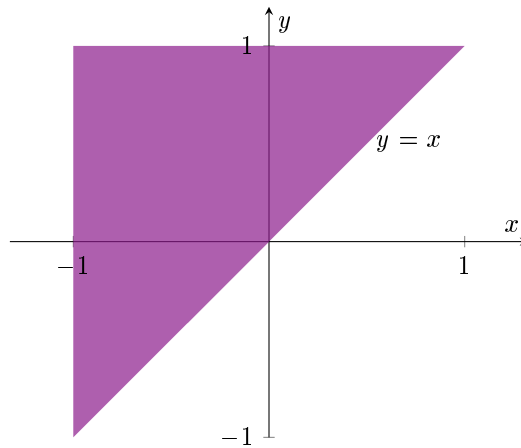
$$\Omega^* = \{(r, \phi, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 + r \cos \phi \wedge 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Ahora podemos reescribir, dado que  $\rho$  es constante,

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{\rho} &= \iiint_{\Omega^*} r \, dy \, d\phi \, dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1+r \sin \phi} r \, dy \, d\phi \, dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(1 + r \sin \phi) \, d\phi \, dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r + r^2 \sin \phi) \, d\phi \, dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \, d\phi \, dr + \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \phi \, d\phi \, dr \\
 &= \int_0^1 r \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi + \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \, d\phi \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\therefore M = \rho \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

**Solución 4.** La región  $D$  se grafica de la siguiente manera.



Podemos observar que  $D$  es simplemente conexo y que  $\partial D$  es una curva simple cerrada, por lo tanto vale el teorema de Green.

$$\oint_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = k \iint_D dA = 8$$

Nos quedaría calcular el  $A(D)$ , área de  $D$ , que, por ser un triángulo, se puede calcular simplemente.

$$A(D) = \iint_D dA = \frac{4}{2} = 2$$

Entonces nos queda

$$2k = 8 \iff k = 4.$$

## 4.2 Fecha recuperatorio 29 de junio de 2023

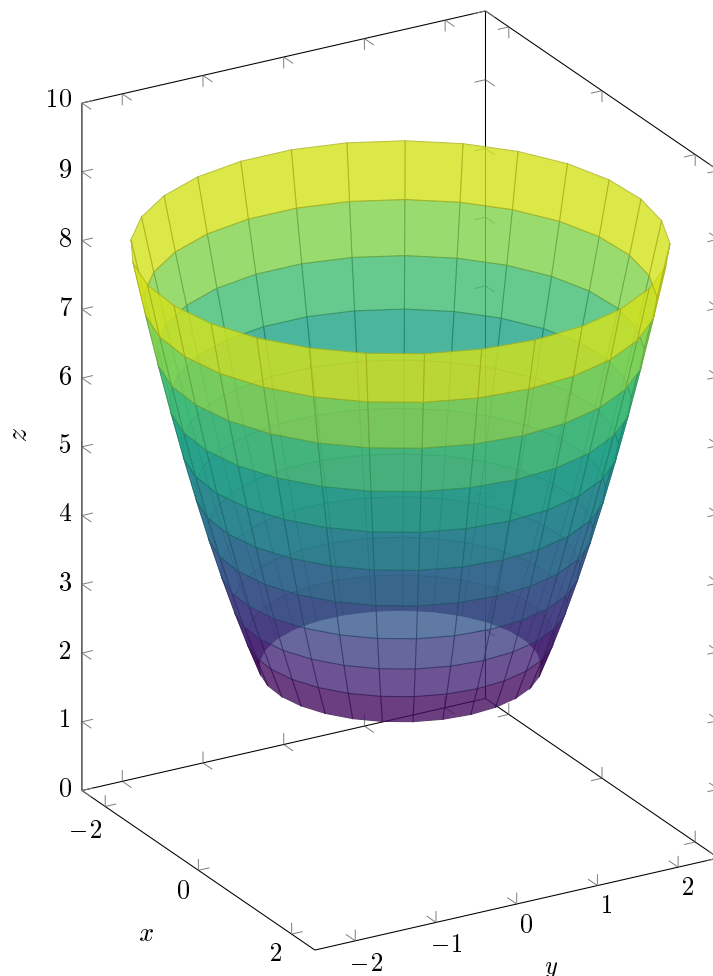
**Ejercicio 1.** Sea  $S$  la superficie dada por  $x^2 + y^2 = z$  con  $z \geq 2$  y  $x^2 + y^2 \leq 9$ . Calcular el área de  $S$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $C$  la curva simple definida por la intersección de las superficies  $x^2 + z^2 = 16$ ,  $y + z = 4$  con  $y \leq 4$  y sea  $g$  una función escalar  $C^1(\mathbb{R})$ . Calcular la integral sobre  $C$  del campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, g(y), g(z))$ . Indicar la orientación elegida.

**Ejercicio 3.** Sean  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-xy + yz, -y^2 + xz, xz)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  positivo y  $S$  la superficie de seis caras que encierra el cuerpo dado por  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$  y  $0 \leq z \leq a$  orientada con normales exteriores. Hallar  $a$  de manera que el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  sin su cara superior sea  $-24$ .

**Ejercicio 4.** Calcule la masa del cuerpo definido por  $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 32$ , en el primer octante, si su densidad es proporcional a la distancia de un punto al plano  $z = 0$ .

**Solución 1.**  $S$  es una sección de paraboloide, como se puede observar en el siguiente gráfico.



Escribimos el conjunto  $S$  como

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z; 2 \leq z \leq 9\}.$$

Queremos calcular

$$A(S) = \iint_S dA.$$

Para ello necesitaremos una parametrización de  $S$ . Sea

$$D = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2} \leq \rho \leq 3; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

y sea

$$\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \Sigma(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, \rho^2).$$

Primero calculamos las derivadas parciales de la parametrización.

$$\Sigma_\rho = (\cos \phi, \sin \phi, 2\rho)$$

$$\Sigma_\phi = (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, 0)$$

Entonces

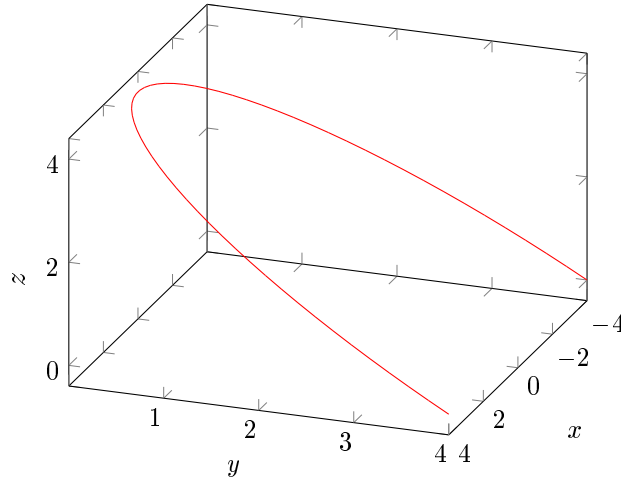
$$\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi = (-2\rho^2 \cos \phi, -2\rho^2 \sin \phi, \rho),$$

$$\|\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi\| = \rho\sqrt{4\rho^2 + 1}.$$

Quedando

$$\begin{aligned} \iint_S dA &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^3 \|\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi\| d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^3 \rho\sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho d\phi, \\ u &= 4\rho^2 + 1 \rightarrow du = 8\rho d\rho, \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_9^{37} \sqrt{u} du d\phi = \frac{2\pi}{8} \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_9^{37} = \frac{\pi}{4} (9^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{\pi}{6} (\sqrt{9^3} - \sqrt{8}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

**Solución 2.** La curva de la intersección se muestra en el siguiente gráfico.



Notemos que  $C$  es una curva no cerrada. Para cerrarla, llamemos  $C = C_1$ ,  $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \wedge y = 4 \wedge |x| \leq 4\}$ , en palabras,  $C_2$  es la recta que une la curva; y  $C_0 = C_1 + C_2$ . Y sea  $\text{int}(C_0) = D$ . Ahora  $C_0$  es una curva simple cerrada. Entonces podemos aplicar el teorema de Stokes, eligiendo la orientación de  $C_0$  tal que se cumpla la regla de la mano derecha.

$$\oint_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A},$$

ya que  $\mathbf{F}$  es  $C^1(\mathbb{R})$ , pues sus componentes son  $C^1(\mathbb{R})$ , y  $D \in \text{dom}(\mathbf{F})$ . Notemos que  $\nabla \times \mathbf{F} \equiv 0 \implies$

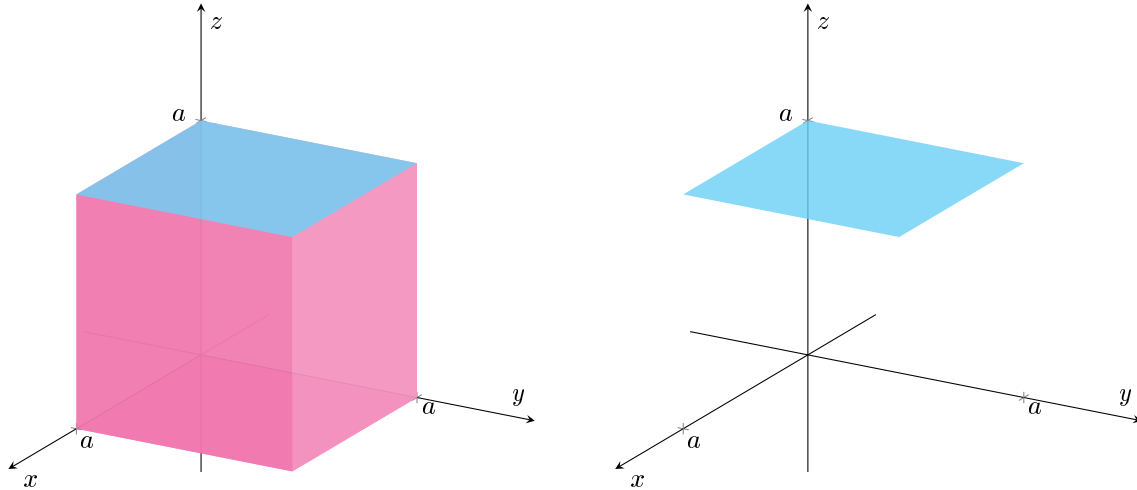
$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Ahora busquemos una trayectoria de  $C_2$  que respete su orientación. Sea  $\sigma : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\sigma(t) = (t, 4, 0)$ . Entonces  $\sigma'(t) = (1, 0, 0)$ . Luego la integral de curva de  $C_2$  es

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-4}^4 (\mathbf{F} \circ \sigma) \cdot \sigma' dt = \int_{-4}^4 t dt = 0.$$

$\therefore$  la integral sobre la curva original  $C = C_1$  es también 0.

**Solución 3.** Llamemos  $\Omega$  al volumen que encierra  $S$  y sea  $S'$  la superficie de la cara superior de  $S$ , por lo que  $S'$  tiene orientación igual que la tapa de  $S$ . En los siguientes gráficos se puede ver la representación de  $S$  y  $S'$  respectivamente.



Por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV.$$

Entonces la integral de flujo que buscamos es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = -24.$$

Primero calculamos el término con la divergencia de  $\mathbf{F}$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -y - 2y + x = x - 3y$$

$$\Rightarrow \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \int_0^a \int_0^a \int_0^a x - 3y \, dx dy dz$$

$$\Leftrightarrow a \int_0^a \left( \frac{x^2}{2} - 3yx \right) \Big|_0^a dy = a \int_0^a \frac{a^2}{2} - 3ya \, dy$$

$$\Leftrightarrow a \left( \frac{a^2}{2}y - 3a\frac{y^2}{2} \right) = \frac{a^4}{2} - 3\frac{a^4}{2} = -a^4$$

Segundo, el flujo sobre la tapa. Sea  $\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S' \subset \mathbb{R}^3$ , una parametrización de  $S'$  tal que  $\Sigma(u, v) = (u, v, a)$ . Donde  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq a; 0 \leq v \leq a\}$ . Entonces

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iint_D \mathbf{F} \circ \Sigma \cdot (\Sigma_u \times \Sigma_v) \, dA.$$

$\Sigma_u = (1, 0, 0)$  y  $\Sigma_v = (0, 1, 0) \Rightarrow \Sigma_u \times \Sigma_v = (0, 0, 1) = \boldsymbol{\eta}$ . Por lo que  $\Sigma$  respeta la orientación de  $S'$ . Y  $\mathbf{F} \circ \Sigma = (-uv + va, -v^2 + ua, ua) \Rightarrow \mathbf{F} \circ \Sigma \cdot \boldsymbol{\eta} = ua$ . Por lo tanto

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_0^a \int_0^a au \, du dv = a^2 \frac{a^2}{2} = \frac{a^4}{2}.$$

$$\therefore -a^4 - \frac{a^4}{2} = -24 \Leftrightarrow \frac{3}{2}a^4 = 24 \Leftrightarrow a^4 = 16 \Leftrightarrow a = 2.$$

**Solución 4.** La distancia  $d$  de un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  en el primer octante a el plano  $z = 0$  está dada por

$$d\left((x_0, y_0, z_0); (x_0, y_0, 0)\right) = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2 + z_0^2} = z_0.$$

Luego la función de densidad del sólido es  $\delta(z) = kz$ , con  $k \in \mathbb{R}$ . Además sea

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 32 \wedge x, y, z \geq 0\}.$$

Trabajaremos en coordenadas esféricas. En este sentido, recordemos lo siguiente.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \cos \theta \\ y = \rho \cos \phi \sin \theta \\ z = \rho \sin \phi \end{cases}$$

Por las condiciones de  $\Omega$  tenemos que

$$z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \iff \rho \sin \phi \leq \sqrt{\rho^2 \cos^2 \phi} = \rho |\cos \phi|.$$

Además, como estamos en el primer octante, nos queda que  $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  y  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Por otro lado,

$$\rho^2 \leq 32 \wedge \rho \geq 0 \iff 0 \leq \rho \leq \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Escribimos nuestro nuevo volumen  $\Omega^*$  y usamos el teorema de cambio de variables.

$$\Omega^* = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 4\sqrt{2} \wedge \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Y la masa del sólido  $\Omega$  queda

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega^*} k\delta(z)\rho^2 \sin \phi \, dV = \iiint_{\Omega^*} k\rho \cos \phi \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{4\sqrt{2}} \rho^3 \cos \phi \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= k2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \phi \sin \phi \, d\phi \int_0^{4\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \\ &= k2\pi \frac{1}{4} 256 = 128k\pi. \end{aligned}$$



### 4.3 Fecha 18 de noviembre de 2023

**Ejercicio 1.** Hallar  $a \in \mathbb{R}$  positivo tal que el volumen encerrado por las superficies  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $z = a(x^2 + y^2)$  sea igual a  $\frac{\pi}{6}$ .

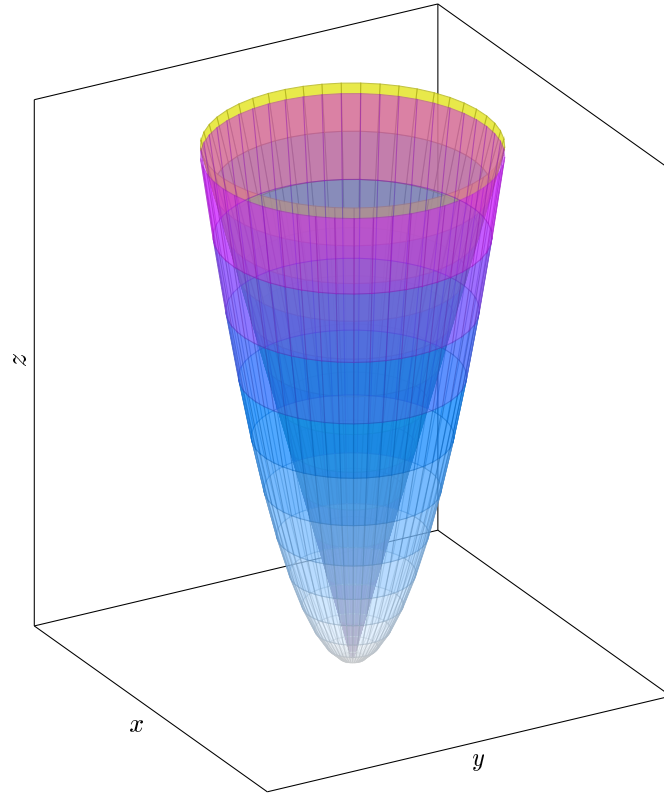
**Ejercicio 2.** Sea  $S$  la superficie parametrizada por  $\Sigma : [-2, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\Sigma(u, v) = (u + v, u - 2v, u^2 + v^2)$ . Hallar las ecuaciones de todos los planos tangentes a  $S$  que resulten paralelos al plano  $x + y + z = 0$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $C$  una curva simple parametrizada por  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\sigma(0) = \sigma(1)$  y sea el campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - 2xz + g(x), 2xy + z^3 - g(y), 3yz^2 - x^2)$  con  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ . Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $C$  la curva simple formada por los segmentos  $y = 0$  si  $x \in [1, 2]$  y  $x = 0$  si  $y \in [1, 2]$ , y por las curvas  $y = \sqrt{4 - x^2}$  y  $y = \sqrt{1 - x^2}$  ambas en el primer cuadrante. Calcular, indicando la orientación elegida,

$$\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

**Solución 1.** Primero, es útil reconocer qué superficies son las que encierran el volumen.



El volumen encerrado  $\Omega$ , entonces, es aquel entre el semicono  $S_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y el paraboloide elíptico  $S_2 : z = a(x^2 + y^2)$ . La intersección de ambas superficies sucede, arbitrariamente, para  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , y, con  $z \neq 0$ , para los puntos:

$$\begin{aligned} a(x^2 + y^2) &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ a\sqrt{x^2 + y^2} &= 1 \\ x^2 + y^2 &= \frac{1}{a} \quad , \quad a \neq 0 \end{aligned}$$

Puesto que tales puntos pertenecen a ambas superficies, la curva intersección es

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{1}{a} \wedge z = \frac{1}{a} \right\}.$$

Así, se puede representar el volumen en coordenadas cartesianas como

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a(x^2 + y^2) \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{a} \right\}.$$

Sin embargo, la representación elemental del conjunto es más conveniente en coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

De tal forma que resulta

$$\Omega = \left\{ (\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \phi < 2\pi \wedge a\rho^2 \leq z \leq \rho \wedge 0 \leq \rho \leq \frac{1}{a} \right\}.$$

Ahora, queda encontrar cual es ese volumen encerrado, realizando la integral, en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dV \\
&= \iiint_{\Omega} dx dy dz \\
&= \iiint_{\Omega} \rho d\phi dz d\rho \\
&= \int_0^{\frac{1}{a}} \int_{a\rho^2}^{\rho} \int_0^{2\pi} \rho d\phi dz d\rho \\
&= \int_0^{\frac{1}{a}} \int_{a\rho^2}^{\rho} \rho \phi|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dz d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} \int_{a\rho^2}^{\rho} \rho dz d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} \rho z|_{z=a\rho^2}^{z=\rho} d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} (\rho^2 - a\rho^3) d\rho \\
&= 2\pi \left( \frac{\rho^3}{3} - a\frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{a}} \\
&= 2\pi \left( \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{4a^3} \right) \\
\text{Vol}(\Omega) &= \frac{\pi}{6a^3} \quad , \quad a \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

Luego, para encontrar  $a$ , la restricción es que el volumen encerrado, es decir, el valor de la integral anterior, sea  $\frac{\pi}{6}$ .

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(\Omega) &= \frac{\pi}{6} \\
\frac{\pi}{6a^3} &= \frac{\pi}{6} \\
a^3 &= 1 \\
\therefore a &= 1
\end{aligned}$$

**Solución 2.** Para este ejercicio, la visualización de la superficie es difícil sin usar una herramienta graficadora. Sin embargo, sabemos que el vector normal al plano tangente punto a punto de la superficie, se calcula, usando la parametrización, como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_S(u, v) &= \Sigma_{\mathbf{u}}(u, v) \times \Sigma_{\mathbf{v}}(u, v) \\
\mathbf{n}_S(u, v) &= (1, 1, 2u) \times (1, -2, 2v) \\
\mathbf{n}_S(u, v) &= (2v + 4u, 2u - 2v, -3)
\end{aligned}$$

Para que un plano tangente sea paralelo al plano  $x + y + z = 0$ , sus vectores normales deben ser paralelos. El vector normal al plano anterior,  $\mathbf{n}_P$ , es:

$$\mathbf{n}_P \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

Con  $x_0$  un punto perteneciente al plano. En este caso, tomando  $x_0 = (0, 0, 0)$ :

$$\mathbf{n}_P \cdot (x, y, z) = 0 = x + y + z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_P = (1, 1, 1)$$

Ahora, para pedir que  $\mathbf{n}_P \parallel \mathbf{n}_S$ , es equivalente pedir, para un  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_S &= k \cdot \mathbf{n}_P \\ (2v + 4u, 2u - 2v, -3) &= k(1, 1, 1)\end{aligned}$$

Lo que resulta en un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\begin{cases} k = (4u + 2v) \\ k = (2u - 2v) \\ k = -3 \end{cases}$$

De la tercera ecuación se obtiene  $k = -3$ , y de sumar la primera y la segunda, reemplazando este valor anterior:

$$\begin{aligned}2(-3) &= 6u \\ -6 &= 6u \\ \Rightarrow u &= -1\end{aligned}$$

Reemplazando en cualquiera de las dos primeras ecuaciones, se obtiene la solución al sistema con  $\{u = -1 \wedge v = \frac{1}{2}\}$ . Entonces, existe un único punto cuyo plano tangente es paralelo al plano  $x + y + z = 0$ , que es

$$(x, y, z) = \Sigma \left( -1, \frac{1}{2} \right) = \left( -\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4} \right).$$

La ecuación del plano tangente de este punto sobre la curva  $S$  es:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_S \left( -1, \frac{1}{2} \right) \cdot \left( (x, y, z) - \left( -\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4} \right) \right) &= 0 \\ (-3)(1, 1, 1) \cdot \left( (x, y, z) - \left( -\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4} \right) \right) &= 0 \\ (1, 1, 1) \cdot \left( (x, y, z) - \left( -\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4} \right) \right) &= 0 \\ \therefore \Pi : \left( x + \frac{1}{2} \right) + (y + 2) + \left( z - \frac{5}{4} \right) &= 0\end{aligned}\tag{4.4}$$

**Solución 3.** En principio, no sabemos la expresión de la parametrización de la curva. La única información que tenemos es que es una curva simple y cerrada, puesto que sus valores inicial y final son iguales. Sin embargo, tenemos la expresión del campo  $\mathbf{F}$ , cuya integral sobre la curva  $C$  hay que calcular. El ejercicio, por lo tanto, apunta a chequear si  $\mathbf{F}$  es un campo conservativo, para que:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

según el corolario para el teorema de la integral sobre una curva de un campo conservativo.

Ya que  $g \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{F}$  queda definida de  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Así, con el campo definido en un conjunto simplemente conexo, se puede usar que:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ es un campo conservativo}$$

Así, se calcula el rotor del campo:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times (y^2 - 2xz + g(x), 2xy + z^3 - g(y), 3yz^2 - x^2) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - 2xz + g(x) & 2xy + z^3 - g(y) & 3yz^2 - x^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(3yz^2 - x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy + z^3 - g(y)) \\ \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - 2xz + g(x)) - \frac{\partial}{\partial x}(3yz^2 - x^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(2xy + z^3 - g(y)) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 2xz + g(x)) \end{pmatrix} \\
&= (3z^2 - 3z^2, -2x + 2x, 2y - 2y)
\end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow \mathbf{F} \text{ es un campo conservativo.}$$

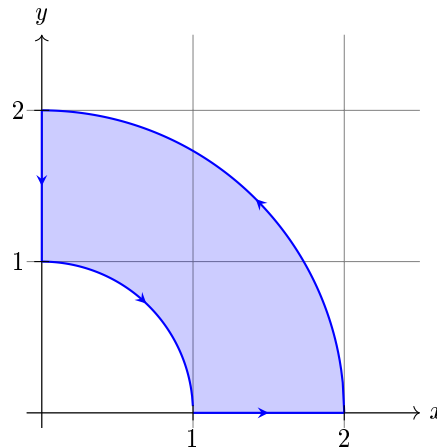
Por lo tanto, con  $\mathbf{F}$  un campo conservativo, podemos usar el corolario antes mencionado y calcular el valor de la integral sobre la curva  $C$ , cerrada, en cero.

$$\therefore \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

**Solución 4.** Cabe notar que la integral pedida es equivalente a escribir:

$$\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \int_C \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \cdot d\mathbf{s}$$

Donde la curva  $C$  es simple y cerrada, por lo que encierra un área  $A$ , tal que  $\partial A^+ = C^+$ , orientada arbitrariamente en sentido antihorario.



Puesto que  $C$  está orientada antihoraria y encierra una región  $A$ , simplemente conexa, se puede usar el teorema de Green.

$$\oint_{C^+} \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \nabla \times \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dA$$

Tal que el rotor del campo en cuestión se calcula:

$$\begin{aligned}\nabla \times \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x \cdot (-2y)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{4yx}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Mientras que la región  $A$  puede ser expresada, convenientemente, en coordenadas polares.

$$A = \left\{ (\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \wedge 1 \leq \rho \leq 2 \right\}$$

Así, la integral se puede resolver en coordenadas polares como:

$$\begin{aligned}\iint_A \nabla \times \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dA &= \iint_A \frac{4yx}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\ &= \iint_A \left( \frac{4\rho \sin(\phi) \rho \cos(\phi)}{\rho^4} \cdot \rho \right) d\rho d\phi \\ &= \iint_A \left( \frac{2 \sin(2\phi)}{\rho} \right) d\rho d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \left( \frac{2 \sin(2\phi)}{\rho} \right) d\rho d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 2 \sin(2\phi) \ln(\rho) \Big|_{\rho=1}^{\rho=2} \right) d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 2 \sin(2\phi) \ln \left( \frac{2}{1} \right) \right) d\phi \\ &= \ln(2) \cdot 2 \left( \frac{-\cos(2\phi)}{2} \right) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} \\ &= \ln(2) \cdot 2 \\ \Rightarrow \iint_A \nabla \times \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dA &= 2 \ln(2)\end{aligned}$$

Que, volviendo a Green, determina el valor de la integral original.

$$\therefore \int_{C^+} \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy = 2 \ln(2)$$

#### 4.4 Fecha 11 de junio de 2024

**Ejercicio 1.** Sean los campos  $\psi(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$  y  $\mathbf{F}(x, y) = (\psi_y(x, y), -\psi_x(x, y))$  y sea  $C$  una curva regular, simple, y cerrada con orientación positiva contenida en el conjunto  $A = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 9\}$ . Hallar los posibles valores de la integral de  $\mathbf{F}$  sobre  $C$ .

**Ejercicio 2.** Calcular el volumen del cilindro  $x^2 + y^2 \leq 9$  limitado por el plano  $z = -1$  y el paraboloides  $z = x^2 + y^2$ .

**Ejercicio 3.** Calcule el flujo del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, -y^2, xz)$  a través de la superficie  $S_1 = \{x^2 + y^2 = 1 \wedge 0 \leq z \leq 3\}$  unión  $S_2 = \{x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = 0\}$ . Indique gráfica y analíticamente la orientación elegida.

**Ejercicio 4.** Sea  $S$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  que encierra un volumen  $\Omega$  y sea el campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (ax, 2y, z)$  con  $a \in \mathbb{R}$ . Hallar  $a$  tal que el flujo saliente de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  sea igual al volumen de  $\Omega$ .

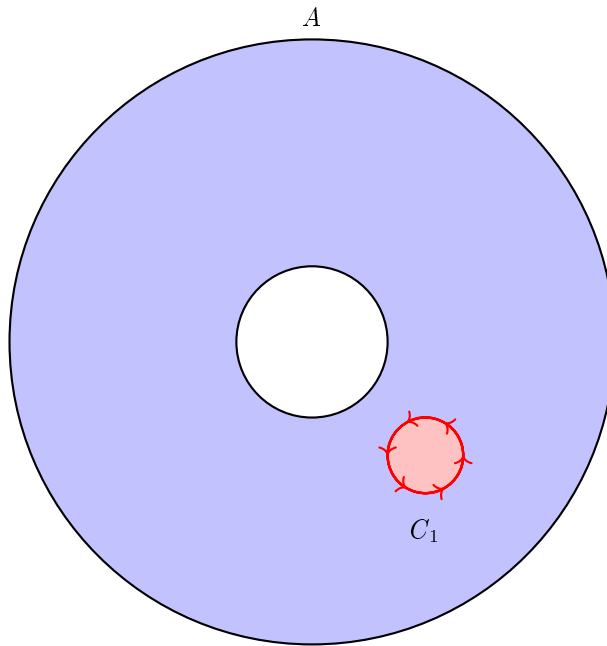
**Solución 1.** Antes que nada, se debe determinar cuál es la expresión del campo  $\mathbf{F}$ , en  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0)\}$ .

$$\begin{aligned}\psi_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x^2 \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y^2 \\ &= \frac{y}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Para comenzar a resolver el problema, se consideran todas las curvas  $C_1$  regulares, simples y cerradas, orientadas positivamente y contenidas en  $A$  tal que su región encerrada  $D_1$ , a su vez, también esté contenida en  $A$ .



En este caso, con  $A$  una función de clase  $C^1$  en  $A$ , valen las hipótesis del teorema de Green (tanto para la curva como para el campo). Entonces:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{D_1} (\nabla \times \mathbf{F}) dA$$



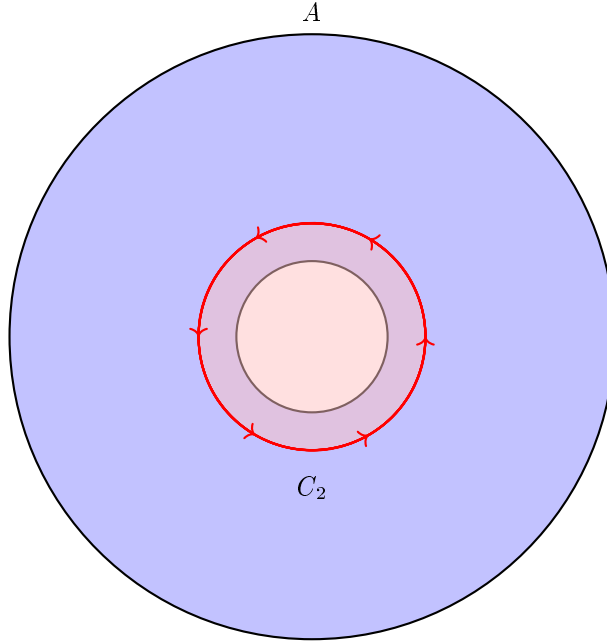
Acto siguiente, se calcula el rotor de  $\mathbf{F}$ , para resolver la integral.

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\
 &= \left( -\frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) - \left( \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\
 &= - \left( \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\
 &= - \left( \frac{-x^2 + y^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\
 \nabla \times \mathbf{F} &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral del campo sobre  $C_1$  resulta:

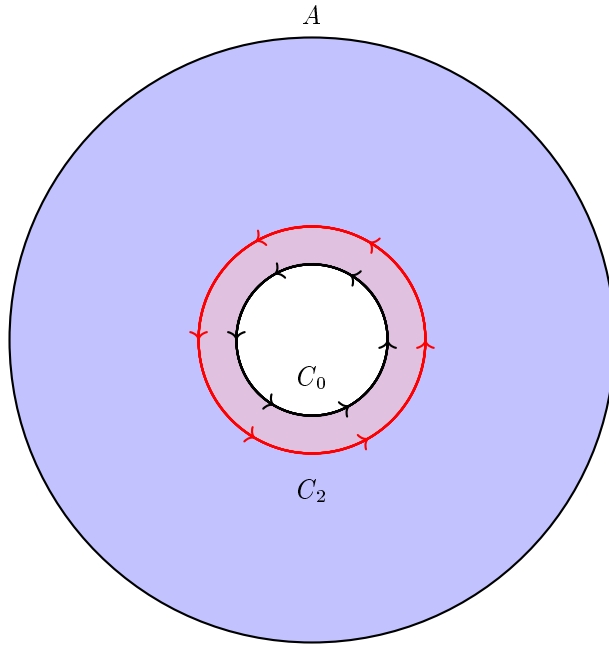
$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_{D_1} (0) dA \\
 \Rightarrow \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= 0
 \end{aligned}$$

Ahora queda considerar los casos de todas las curvas  $C_2$  regulares, simples y cerradas, orientadas positivamente y contenidas en  $A$  tal que su región encerrada  $D_2$  no esté totalmente contenida dentro de  $A$ .



En este caso, ya no se cumplen las condiciones del teorema de Green, puesto que  $\mathbf{F}$  no se encuentra definida en  $(0, 0) \in D_2$ . Sin embargo, es posible utilizar el teorema de Green generalizado. Definiendo previamente, con orientación positiva:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \\
 C_0 &= \partial D_0
 \end{aligned}$$



Luego, se puede utilizar el teorema de Green generalizado:

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{(D_2 - D_0)} (\nabla \times \mathbf{F}) dA$$

Sobre el área entre ambas curvas, el rotor del campo vale cero, puesto que está definido en  $(D_2 - D_0) \subset A$ . Entonces, el término de la derecha, se vuelve cero.

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Para realizar la integral de la derecha, se propone la parametrización:

$$\begin{aligned} \sigma : B = [0; 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 / \sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \\ \sigma'(t) &= (-\sin(t), \cos(t)) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \circ \sigma(t) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin(t), -\cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) - \cos^2(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -(\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt \\ &= -\int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= -(t) \Big|_0^{2\pi} \\ \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= -2\pi \\ \Rightarrow \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= -2\pi \end{aligned}$$

**Solución 2.** Primero, se debe determinar el volumen a calcular como un conjunto elemental, para poder realizar la integral. La primera condición del volumen, es que  $x^2 + y^2 \leq 9$ . Luego, quedaría restringir en qué intervalo se encuentra el valor de  $z$ .

Uno de los límites, como lo dice la consigna es  $z = -1$ . El otro límite es, entonces, la superficie  $z = x^2 + y^2$ . Graficarlos nota claramente que la superficie descrita por el paraboloide se encuentra sobre el plano  $z = -1$ . Por lo tanto, la restricción para es  $-1 \leq z \leq x^2 + y^2$ . También se puede razonar que  $0 \leq x^2 + y^2$  por lo que la  $z = -1 < 0 \leq z = x^2 + y^2$ .

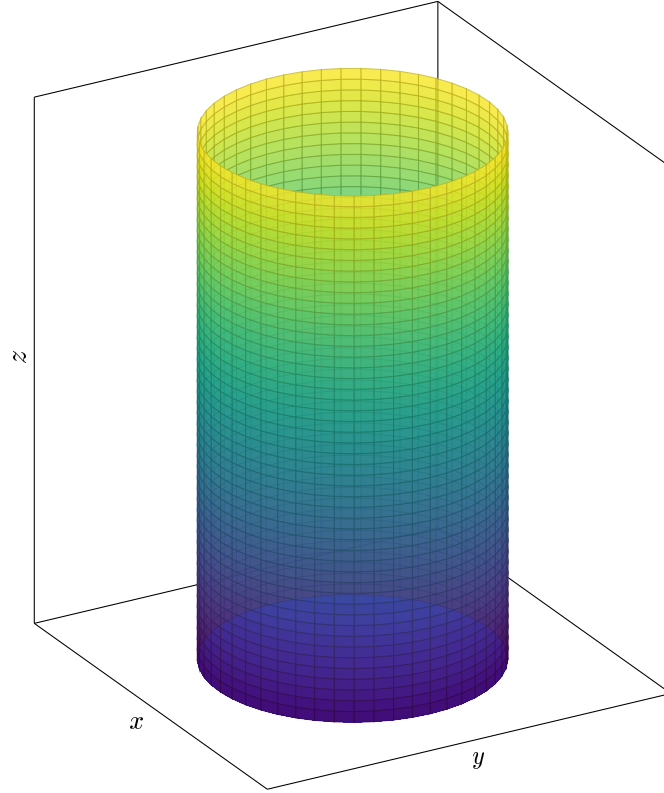
Para expresar el conjunto elemental conviene hacerlo, en coordenadas cilíndricas, con  $x^2 + y^2 = \rho^2$ :

$$\Omega = \{(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 3 \wedge -1 \leq z \leq \rho \wedge 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

Ahora sí, se puede calcular el volumen en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dV \\ &= \iiint_{\Omega} dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \rho d\phi dz d\rho \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^{\rho^2} \int_0^{2\pi} \rho d\phi dz d\rho \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^{\rho^2} \rho \phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dz d\rho \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^{\rho^2} \rho \cdot 2\pi \cdot dz d\rho \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 \rho z \Big|_{z=-1}^{z=\rho^2} d\rho \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 \rho (\rho^2 + 1) d\rho \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 (\rho^3 + \rho) d\rho \\ &= 2\pi \cdot \left( \frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=3} \\ \therefore \text{Vol}(\Omega) &= \frac{99}{2} \pi \end{aligned}$$

**Solución 3.** Para entender el problema, primero grafiquemos las superficies.



Se trata de una superficie cilíndrica, con una tapa inferior en  $z = 0$ , pero no una tapa superior en  $z = 3$ . Para calcular entonces el flujo de  $\mathbf{F}$  habría, en principio, que parametrizar la superficie cilíndrica y la tapa por separadas, y luego calcular dos integrales, una por cada superficie.

Sin embargo, si se le agrega a estas dos superficies una tercera  $S_T$ , que sea la tapa superior del cilindro. Así  $S_C = S_1 \cup S_2 \cup S_T$  encierra el volumen del cilindro ( $\Omega$ ). Esta superficie  $S_C = \partial\Omega$ , si se orienta de saliente, cumple las condiciones del teorema de la divergencia. Con  $\mathbf{F} \in C^1$ :

$$\begin{aligned} \iint_{S_C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \\ \iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \\ \iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV - \iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Ahora, se deben calcular las dos integrales del miembro derecho. Para la primera, se debe representar el  $\Omega$  como un conjunto elemental, lo que resulta fácil en coordenadas cilíndricas:

$$\Omega = \{(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1 \wedge 0 \leq \phi \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq 3\}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iiint_{\Omega} (z - 2y + x) dx dy dz \\
&= \iiint_{\Omega} (z - 2\rho \sin \phi + \rho \cos \phi) \rho d\phi dz d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^3 \int_0^{2\pi} (z\rho - 2\rho^2 \sin \phi + \rho^2 \cos \phi) d\phi dz d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^3 (z\rho\phi + 2\rho^2 \cos \phi + \rho^2 \sin \phi) \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dz d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^3 (z\rho \cdot 2\pi) dz d\rho \\
&= \pi \int_0^1 (z^2 \rho) \Big|_{z=0}^{z=3} d\rho \\
&= \pi \int_0^1 (9\rho) d\rho \\
&= 9\pi \left( \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} \\
\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \frac{9}{2}\pi
\end{aligned}$$

Para la segunda integral a resolver, primero es necesaria la parametrización de  $S_T$ . Para ello, se propone  $D = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1 \wedge 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$  y la parametrización:

$$\mathbf{\Sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 / \mathbf{\Sigma}(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 3)$$

tal que  $\mathbf{\Sigma}_{\rho} \times \mathbf{\Sigma}_{\phi} = (0, 0, \rho)$ , con  $\rho > 0$  orienta la superficie saliente, como se había definido previamente. Luego, ya es posible calcular la integral:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (3\rho \cos \phi, -\rho^2 \sin^2 \phi, 3\rho \cos \phi) \cdot (0, 0, \rho) dA \\
&= \iint_D 3\rho^2 \cos \phi dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^2 \cos \phi d\phi d\rho \\
&= \int_0^1 3\rho^2 \sin \phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\rho \\
&= \int_0^1 3\rho^2 \cdot 0 \cdot d\rho \\
\iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= 0
\end{aligned}$$

Con estos dos resultados, ya es posible calcular la integral que pide la consigna, recordando que la orientación de las superficies se definió saliente.

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV - \iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \frac{9}{2}\pi - 0 \\
\therefore \iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{9}{2}\pi
\end{aligned}$$

**Solución 4.** Primero, notemos que el campo  $\mathbf{F}$  es un campo  $C^1(\mathbb{R}^3)$ , puesto que cada una de sus componentes lo es, independientemente del valor de  $a \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, con  $S = \partial\Omega$  orientada saliente, se cumplen las hipótesis del teorema de la divergencia, tal que:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

Por lo tanto, la condición que plantea la consigna:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \text{Vol}(\Omega)$$

se puede reescribir como:

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_\Omega dV$$

Para que se cumple lo anterior, es suficiente con pedir que la divergencia del campo resulte 1.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial x}(ax) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) &= 1 \\ a + 2 + 1 &= 1 \\ \therefore a &= -2 \end{aligned}$$

## 4.5 Fecha recuperatorio extra

**Ejercicio 1.** Sean  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, y \leq 0, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$  y  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z = 1 - x^2 - y^2\}$ . Calcular el volumen de  $V$  y el área de  $S$ .

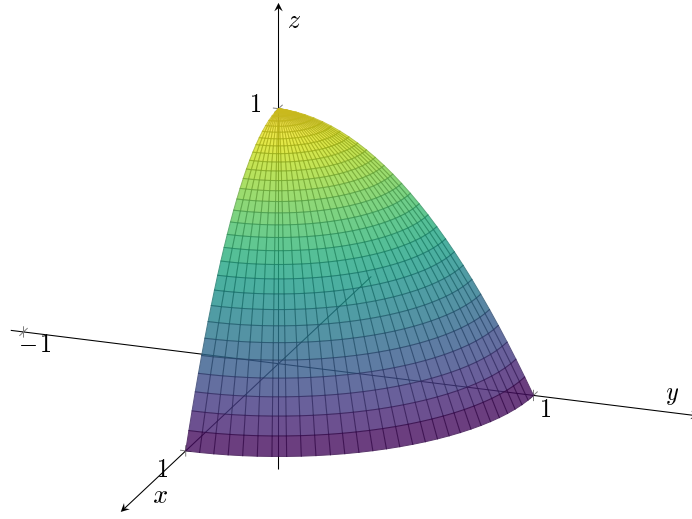
**Ejercicio 2.** Sean  $S$  una superficie esférica de radio  $R$  con centro en el primer octante y  $\mathbf{F}$  un campo de clase  $C^1$  con  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = x + y + z$ . Probar que el flujo saliente de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  es no negativo.

**Ejercicio 3.** Sean  $C$  el borde del triángulo de vértices  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  y el campo  $\mathbf{F}(x, y) = (e^{\cos(x)+x^2} + xy^2 + 2y, \ln(1 + e^{y^2}) + yx^2 + 3x)$ . Calcular, indicando la orientación elegida:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds$$

**Ejercicio 4.** Probar que el campo  $\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy} + y \cos(xy), xe^{xy} + \cos(xy)x)$  es conservativo. Dada  $C$  la curva parametrizada por  $\alpha(t) = (t^2, t)$  con  $t \in [0, 1]$  calcular el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  sobre  $C$ .

**Solución 1.** Nos piden calcular  $\iiint_V dV$  y  $\iint_S dA$ . Para la integral de volumen conviene trabajar en coordenadas cilíndricas y para la de superficie habrá que parametrizar.



Aplicando la transformación  $V \rightarrow V^*$  queda

$$\begin{aligned} V^* &= \{(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho \cos \phi \leq 0, \rho \sin \phi \leq 0, 0 \leq z \leq 1 - \rho^2\} \\ \iff V^* &= \{(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : \pi \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq \rho \leq \sqrt{1-z}\}. \end{aligned}$$

Y por el teorema de cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_V dV &= \iiint_{V^*} \rho dV = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \rho d\rho dz d\phi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{2}(1-z) dz = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Para parametrizar  $S$ , llamamos

$$D = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : \pi \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi, 0 \leq \rho \leq 1\}.$$

y

$$\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \Sigma(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, \rho^2).$$

Calculamos las derivadas parciales de  $\Sigma$ .

$$\begin{aligned} \Sigma_\rho &= (\cos \phi, \sin \phi, 2\rho) \\ \Sigma_\phi &= (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, 0) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \Sigma_\rho \times \Sigma_\phi &= (-2\rho^2 \cos \phi, -2\rho^2 \sin \phi, \rho), \\ \|\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi\| &= \rho \sqrt{4\rho^2 + 1}. \end{aligned}$$

Entonces escribimos, por definición, el área de  $S$  como

$$\iint_S dA = \iint_D \|\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi\| d\rho d\phi = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^1 \rho \sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho d\phi.$$



Nos queda la misma integral que (4.3), sólo que con distintos límites de integración. Por lo que, procediendo de la misma manera, sustituyendo  $u = 4\rho^2 + 1$ , obtenemos

$$\iint_S dA = \frac{1}{8} \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \int_1^5 \sqrt{u} du = \frac{\pi}{16} \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^5 = \frac{\pi}{24} (\sqrt{125} - 1).$$

**Solución 2.** Tenemos que  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2\}$ , con  $R > 0$  y  $(x_0, y_0, z_0)$  en el primer octante. Por el teorema de la divergencia

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz, \quad (4.5)$$

tomando la orientación de  $S$  como exterior.

Aplicando una transformación a coordenadas esféricas, tal que

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \cos \theta + x_0 \\ y &= \rho \cos \phi \sin \theta + y_0 \\ z &= \rho \sin \phi + z_0, \end{aligned}$$

nos queda el conjunto  $S^*$

$$S^* = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

De la ecuación (4.5) y usando el teorema de cambio de variable,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + y + z) dV &= \iiint_{\Omega^*} (\rho \cos \phi \cos \theta + \rho \cos \phi \sin \theta + \rho \sin \phi + x_0 + y_0 + z_0) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R (\rho \cos \phi \cos \theta + \rho \cos \phi \sin \theta + \rho \sin \phi + x_0 + y_0 + z_0) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Al distribuir el  $\rho^2 \sin \phi$  entre los primeros dos términos, queda para estos  $\rho^3 \sin \phi^2 \cos \theta$  y  $\rho^3 \sin \phi^2 \sin \theta$ ; que al integrarlos entre 0 y  $2\pi$ , con respecto a  $\theta$ , se anulan. Entonces queda, distribuyendo la suma del integrando,

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 \cos \phi \sin \phi d\rho d\theta d\phi + \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R (x_0 + y_0 + z_0) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi.$$

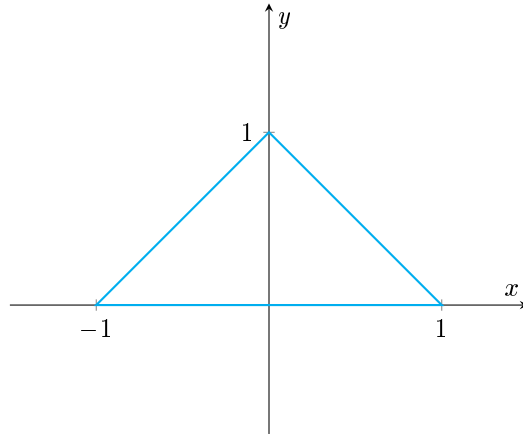
A su vez, la primer integral es 0 porque al integrar una función periódica impar,  $\cos \phi \sin \phi$ , en un semi período ésta se anula. Por último queda

$$(x_0 + y_0 + z_0) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = (x_0 + y_0 + z_0) \frac{4}{3} \pi R^3 > 0,$$

pues  $(x_0, y_0, z_0)$  pertenece al primer octante. Por lo que queda demostrado que el flujo es positivo.

por qué sería -no negativo-? por ej. cuando  $R = 0$  o cuando el centro de la esfera es el origen es = 0

**Solución 3.** Nos piden integrar sobre la siguiente curva  $C$ .



Tomamos la orientación de  $C$  como antihoraria. Dado que el triángulo  $T$  es simplemente conexo,  $T \in \text{dom}(\mathbf{F})$  y  $\mathbf{F} \in C^1$ , entonces por el teorema de Green

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_T \nabla \times \mathbf{F} \, dA.$$

Como  $\nabla \times \mathbf{F} = 1$ , queda que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_T dA = \text{Area}(T) = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

**Solución 4.** Ya que nos piden demostrar que  $\mathbf{F}$  es conservativo y calcular una integral de línea sobre una curva no cerrada nos conviene buscar, si es que existe, la función potencial de  $\mathbf{F}$ . Nos encontramos con la ecuación  $\nabla f = \mathbf{F}$ , la cual describe el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} f_x(x, y) = ye^{xy} + y \cos(xy) \\ f_y(x, y) = xe^{xy} + x \cos(xy) \end{cases}$$

Mirando cada término detenidamente se puede llegar a la conclusión de que

$$f(x, y) = e^{xy} + \sin(xy) + C, \text{ con } C \in \mathbb{R}$$

es solución del sistema. Lo que significa que  $\mathbf{F}$  es un campo conservativo.

Luego para calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  utilizamos el siguiente teorema.

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)) = f((1, 1)) - f((0, 0)) = e + \sin 1 - 1.$$