Nombre y apellido:

Comision en la cual esta inscripto:

Ejercicio 1. Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Analizar la continuidad de f en el origen
2. Analizar la diferenciabilidad de f en el origen.
3. Analizar la existencia de las derivadas direccionales de f en el origen.

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $g(x,y) = (xy^2, x^2 - 2y)$ y $h = f \circ g$. Sabiendo que $h(1,-1) = 2$ y que $\nabla h(1,-1) = (2,-4)$, halle el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,3,f(1,3))$.

Ejercicio 3. Sean f y g dos campos escalares de clase C^2 tales que $f(1,2) = g(x,y)$, $\nabla f(1,-1) = \nabla g(2,-4)$ y $H_f(1,2) = H_g(1,2)$, calcular

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{f^2(x,y) - g^2(x,y)}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$$

Ejercicio 4. Hallar analíticamente los puntos más lejanos y más cercanos al origen del elipsoide dado por la ecuación $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$

Solución 1. En primer lugar analizamos la continuidad, como f es una función partida, queremos demostrar que f es continua en (0,0) si: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

Utilizando el límite notable conocido: $\lim_{t\to 0} (\frac{e^t-1}{t}) = 1$, sabemos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{\sqrt{t}} = 0$$

Pues, multiplicando arriba y abajo por $\sqrt{t}$, sabiendo que $t \neq 0$, tenemos que

$$\lim_{t\to 0} (\frac{e^t-1}{\sqrt{t}})(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}}) = \lim_{t\to 0} (\frac{e^t-1}{t})\sqrt{t} = 0$$

Llamamos $t(x,y) = x^2+y^2$ y sabemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} t(x,y) = 0$$

Definimos $g(z) = \frac{e^z-1}{\sqrt{z}} = 0$ y realizando la composición $f(x,y) = g\circ t(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - (0,0)$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g\circ t(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(t(x,y)) = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{\sqrt{t}} = 0$$

$\therefore f$ es continua en $(0,0)$

Para analizar la diferenciabilidad de f en el (0,0) en primer lugar vamos a evaluar la existencia de las derivadas direccionales, siendo $\vec{u} = (u_1, u_2)$ con $|\vec{u}| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\vec{u}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2u_1^2+h^2u_2^2}-1}{h\sqrt{h^2u_1^2+h^2u_2^2}}$$

Sabemos que

$$|\vec{u}| = 1 \iff \sqrt{u_1^2+u_2^2} = 1 \iff u_1^2+u_2^2 = 1$$

Por lo cuál

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h^2}\frac{h}{|h|}$$

Tomando límites laterales

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h^2}-1}{h^2}\frac{h}{|h|} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{e^{h^2}-1}{h^2}\frac{h}{|h|} = -1$$

Como los límites laterales son distintos, entonces podemos afirmar que $\nexists \, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \; \forall \vec{u}/|\vec{u}| = 1$, al no existir las derivadas direccionales de f en $(0,0)$, las parciales tampoco.

$\therefore f$ no es diferenciable en $(0,0)$

Solución 2. Como $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es diferenciable en todo su dominio por ser composición de funciones diferenciables, la ecuación de su plano tangente en el punto $(1,3)$ está dada por

$$z = f(1,3) + \nabla f(1,3)(x-1, y-3), \tag{1}$$

luego será suficente con encontar $f(1,3)$ y $\nabla f(1,3)$.

Por un lado, $h(1,-1) = f\circ g(1,-1) = f(1,3) = 2$ y por otro lado, como f y g son ambas diferenciables, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\nabla h(1,-1) = \nabla(f\circ g)(1,-1) = \nabla f(g(1,-1))\,\boldsymbol{D}_g(1,-1) = \nabla f(1,3)\,\boldsymbol{D}_g(1,-1), \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{D}_g$ es la matriz diferencial o jacobiana de g.

Hallemos $\boldsymbol{D}_g$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_g(1,-1) &= \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(xy^2) & \dfrac{\partial}{\partial y}(xy^2) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2-2y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2-2y)\end{pmatrix}\right|_{(1,-1)} \\ &= \left.\begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x & -2\end{pmatrix}\right|_{(1,-1)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Luego, reemplazando en a (2)

$$\nabla h(1,-1) = \nabla f(1,3)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2\end{pmatrix} = (f_x(1,3)+2f_y(1,3),\ -2f_x(1,3)-2f_y(1,3))$$

y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} f_x(1,3)+2f_y(1,3) = 2 \\ -2f_x(1,3)-2f_y(1,3) = -4\end{cases} \iff \begin{cases} f_x(1,3) = 2 \\ f_y(1,3) = 0\end{cases}$$

$\therefore\quad \nabla f(1,3) = (2,0).$

Reemplazando en (1)

$$z = 2 + (2,0)(x-1, y-3)$$

Despejando, la ecuación del plano tangente al grafico de f en el punto $(1,3,f(1,3))$ es

$$z - 2x = 0$$

Solución 3. En primer lugar, reescribimos el límite pedido

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(f-g)_{(x,y)}(f+g)_{(x,y)}}{|(x-1,y-2)|^2}$$

Dado que f y g son dos campos escalares de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$, se define el polinomio de Taylor de primer orden centrado en $(1,2)$ de ambas funciones, que noteremos por $P_2[f,(1,2)]$, $P_2[g,(1,2)]$ como,

$$P_2[f,(1,2)](x,y) = f(1,2) + \nabla f(1,2)\cdot(x-1,y-2) + \frac{1}{2}(x,y)\boldsymbol{H}_f(c_1,c_2)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

$$P_2[g,(1,2)](x,y) = f(1,2) + \nabla f(1,2)\cdot(x-1,y-2) + \frac{1}{2}(x,y)\boldsymbol{H}_f(c_1',c_2')\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

Sabemos que

$$(f-g)_{(x,y)} = P_2[(f-g),(1,2)](x,y) + R_2[(f-g),(C,(x-1,y-2)]$$

Utilizando los datos de enunciado, podemos ver que

$$P_2[(f-g),(1,2)](x,y) = (f-g)_{(1,2)} + \nabla(f-g)_{(1,2)}\cdot(x-1,y-2) + \frac{1}{2}(x-1,y-2)^t\boldsymbol{H}_{(}f-g)_{(C)}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (f-g)_{(x,y)} = R_2[(f-g),(C,(x-1,y-2)]$$

Ademas, sabemos que,

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{R_2[(f-g),(C,(x-1,y-2)]}{|(x-1,y-2)|^2} = 0$$

Utilizando los datos recien mencionados, y sabiendo que $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (f+g)_{(x,y)} = L \in \mathbb{R}$ calculamos el limite solicitado

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(f-g)_{(x,y)}(f+g)_{(x,y)}}{|(x-1,y-2)|^2} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{R_2[(f-g),(C,(x-1,y-2)].(f+g)_{(x,y)}}{|(x-1,y-2)|^2} = 0$$

Solución 4. En este ejercicio debemos hallar los puntos mas lejanos y mas cercanos al origen de la funcion que denominaremos $g(x,y,z) = \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1$, para lo cual utilizaremos la funcion distancia: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
Busco los minimos de f restringidos al conjunto de nivel $g(x,y,z) = 0$ utilizando los multiplicadores de lagrange

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

$$(2x,2y,2z) = \lambda(\frac{2x}{64},\frac{2y}{36},\frac{2z}{25}) \iff \begin{cases} x = \lambda\frac{x}{64} \\ y = \lambda\frac{y}{36} \\ z = \lambda\frac{z}{25} \end{cases}$$

Estas ecuaciones implican que 2 variables deben ser nulas para que el sistema tenga solucion, entonces:

1- Si $x \neq 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Rightarrow \lambda = 64 \Rightarrow x = \pm 8$

2- Si $y \neq 0 \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Rightarrow \lambda = 36 \Rightarrow y = \pm 6$

2- Si $z \neq 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow \lambda = 36 \Rightarrow y = \pm 5$

De esta manera, encontramos 6 posibles maximos y minimos de la funcion f

$$P_1 = (8, 0, 0)$$

$$P_2 = (-8, 0, 0)$$
$$P_3 = (0, 6, 0)$$
$$P_4 = (0, -6, 0)$$
$$P_5 = (0, 0, 5)$$
$$P_6 = (0, 0, -5)$$

Por el teorema de valores extremos de Weierstrass, sean $A \subset \mathbb{R}^3$ conjunto cerrado y acotado y $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funcion continua, entonces f alcanza un maximo y minimo absoluto en A.

De esta manera, reemplazando los puntos en f encontramos los maximos y minimos de la misma, restringida en A (conjunto de nivel 0 de g). Entonces podemos ver que los puntos mas alejados del origen son el $(8, 0, 0)$ y el $(-8, 0, 0)$, y que los mas cercanos son el $(0, 0, 5)$ y el $(0, 0, -5)$

Tambien, se puede ver de forma grafica

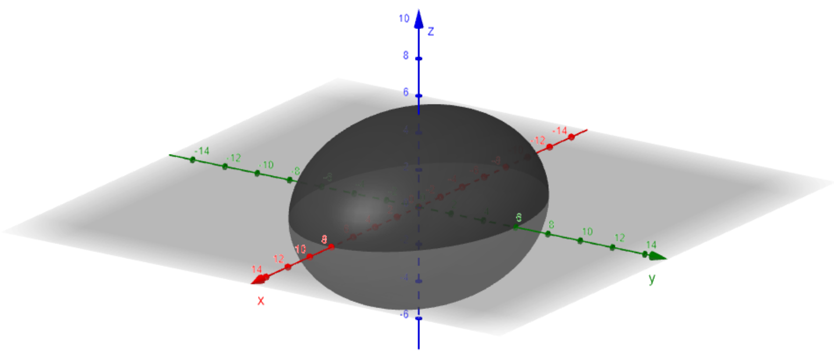

Figura 1: Grafica de $g(x, y, z)$.