



**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES**

**Departamento de Ciencias Exactas y Naturales**

**Área Matemática**

**Parciales Resueltos.**

Material de lectura para alumnos.....

## **Parciales Resueltos**

(Pequena explicacion). Este documento presentaremos distintos ejercicios de parcial....

# Índice general

<b>1. Contenido teórico. Primera parte</b>	<b>2</b>
1.1. Recuerdo de Análisis Matemático 1	2
1.2. Recuerdo de Álgebra	3
1.3. Campos vectoriales y escalares	5
1.4. Nociones de Topología	7
1.5. Gráficas	8
1.6. Conjuntos de nivel	10
1.7. Límite de Funciones	13
1.8. Diferenciabilidad	23
1.9. Extremos de funciones escalares	30
<b>2. Contenido Teórico. Segunda parte</b>	<b>32</b>
2.1. Operadores	32
2.2. Curvas	34
2.3. Integrales Dobles	36
2.4. Integrales Triples	39
2.5. Integrales de Línea	41
2.6. Integrales de Superficie	42
2.7. Campos Conservativos	44
2.8. Teoremas Integrales	45
<b>3. Primeros parciales resueltos</b>	<b>48</b>
3.1. Fecha 29 de septiembre de 2023	48
3.2. Fecha 25 de abril de 2023	52
3.3. Fecha 23 de septiembre de 2023	57
3.4. Fecha 18 de abril de 2024	62
3.5. Fecha Recuperatorio 2cuatri 2022	69
<b>4. Segundos parciales resueltos</b>	<b>74</b>
4.1. Fecha 25 de junio de 2023	74
4.2. Fecha recuperatorio 29 de junio de 2023	79
4.3. Fecha 18 de noviembre de 2023	84
4.4. Fecha 11 de junio de 2024	90
4.5. Fecha recuperatorio extra	98

# Contenido teórico. Primera parte

## 1.1 Recuerdo de Análisis Matemático 1

**Definición 1.1.1.** Se llama *función* a la regla que asigna a cada elemento de un conjunto  $A$  un y sólo un elemento de un conjunto  $B$ . Tomaremos, en esta sección, el caso donde  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ . La manera habitual de denotar una función  $f$  es

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}.$$

A los conjuntos  $A$  y  $B$  se los llama, respectivamente, *dominio* y *codominio* de la función y la notación usual para los mismos es  $A = \text{Dom}(f)$  y  $B = \text{Cod}(f)$ .

**Definición 1.1.2.** Dada una función  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ , se llama *imagen* de una función y se nota  $\text{Im}(f)$ , a al conjunto

$$\text{Im}(f) = \{y \in B : \exists x \in A \mid f(x) = y\}.$$

**Definición 1.1.3.** Dada una función  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$  se define la *gráfica* de  $f$ , y se nota  $\text{Graf}(f)$ , al conjunto

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A \wedge y = f(x)\}.$$

Aca hay un lio en los ejemplos, la tabla y el grafico no corresponden a la formula. Hacer dos ejemplos completo por separado.

**Ejemplo 1.1.1.** Sea

$$f : [0, \infty] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = 2x - 1$$

tenemos que,  $f$  es el nombre de la función,  $x$  es la variable independiente de  $f$  y  $2x - 1$  su fórmula, es decir, el valor que la asigna  $f$  a cada  $x \in [0, \infty]$ . Además,  $\text{Dom}(f) = [0, \infty]$ ,  $\text{Cod}(f) = \mathbb{R}$  y  $\text{Im}(f) = [-1, \infty]$

**Ejemplo 1.1.2.** Sea

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \dots\dots\dots$$

, armar la siguiente tabla de valores:

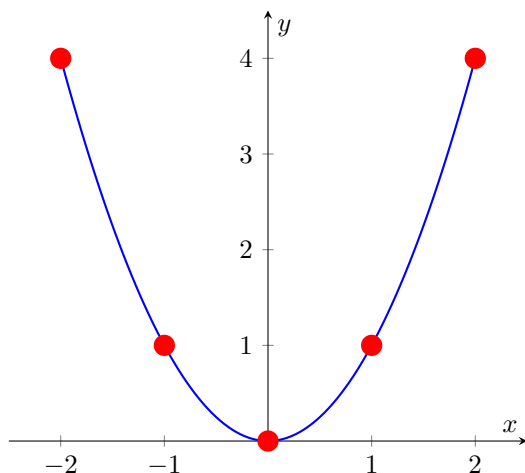
$x$	$y = f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Luego, el siguiente conjunto de puntos, se encuentran incluidos en la gráfica de la función (que cabe aclarar, tiene infinitos elementos).

$$\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\} \subset \text{Graf}(f)$$

hacer dos dibujos, el primero solo con los puntos rojos y el segundo con los mismos puntos mas el trazo. Decir algo así como: por conocimiento previo sabemos que la manera de unir los puntos es a través de.....

De hecho, si se fuera a posicionar los puntos de  $\text{Graf}(f)$ , se obtendría lo que se entiende normalmente si se habla de la gráfica de la función. De hecho, graficando la función como uno lo haría normalmente, en realidad se están dibujando los infinitos puntos pertenecientes al  $\text{Graf}(f)$  sobre el plano.



**Definición 1.1.4.** Sea la función  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ . Diremos que  $f$  es *sobreyectiva* si se cumple que su codominio es igual a su imagen, esto es

$$\text{Cod}(f) = \text{Im}(f).$$

Es decir que cada elemento del conjunto de salida es la evaluación de la función en al menos un elemento del dominio.

Diremos que  $f$  es *inyectiva* si a cada elemento en el conjunto imagen le corresponde un único valor del conjunto dominio, esto es, si  $a, b \in \text{Dom}(f)$ , entonces:

$$a = b \iff f(a) = f(b),$$

Finalmente, diremos que  $f$  es *biyectiva* cuando es simultáneamente *sobreyectiva* e *inyectiva* a la vez.

## 1.2 Recuerdo de Álgebra

**Definición 1.2.1.** Se define el espacio  $\mathbb{R}^n$  como el conjunto formado por todas las  $n$ -uplas de números reales ordenados. Es decir:

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{v} / \mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R} \forall 1 \leq i \leq n\}$$

**Definición 1.2.2.** Sean  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{W}$  sub-espacios vectoriales de  $\mathbb{R}^n$ . Se define a una transformación lineal como a una función

$$\mathbf{T} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$$

que cumple con la condición de linealidad:

$$\mathbf{T}(\alpha \cdot \mathbf{v}_1 + \beta \cdot \mathbf{v}_2) = \alpha \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}_1) + \beta \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}_2), \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{V}$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Definición 1.2.3.** Sean  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  no nulo y  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , el conjunto  $L \subset \mathbb{R}^n$  que cumple

$$L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mathbf{x}_0, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

es una recta en  $\mathbb{R}^n$  y a la ecuación

$$\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mathbf{x}_0$$

se llama **expresión vectorial** de la misma. Además, llamaremos al vector  $\mathbf{x}_0$  como **vector posición** ( o punto de paso ) de la recta y al vector  $\mathbf{v}$  como **vector director** de la recta.

## DIBUJO

**Definición 1.2.4.** Sean  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$  no nulo y  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ , el conjunto  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  que cumple

$$\pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0\}.$$

es un plano en  $\mathbb{R}^3$  y a la ecuación

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

se llama **expresión canónica** del mismo. Además, llamaremos al vector  $\mathbf{n}$  como **vector normal** del plano y al vector  $\mathbf{x}_0$  **punto de paso** del plano.

## DIBUJO

### Agregar forma vectorial del plano

**Definición 1.2.5.** Sean  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  y  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ .

El conjunto  $C \subset \mathbb{R}^2$  que cumple

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$

es una circunferencia en el plano. Además, al vector  $(x_0, y_0)$  se lo llama centro y al número  $r$  se lo llama radio de la misma.

El conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  que cumple

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$$

es un círculo en el plano. Además, al vector  $(x_0, y_0)$  se lo llama centro y al número  $r$  se lo llama radio del mismo.

## DIBUJO

Copiar el mismo formato para la cascara de la esfera y la esfera

**Definición 1.2.6. Ecuación de la esfera.** La cáscara de una esfera (es decir, sólo su superficie exterior, hueca) en  $\mathbb{R}^3$  se expresa con la ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Se tiene  $(x_0, y_0, z_0)$  como el centro de la cáscara y  $r$  como el radio de la misma. Para obtener la esfera completa, es decir, cáscara y relleno interior, se usa la inecuación:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2$$

Esto es análogo al caso de la circunferencia y el círculo.

## DIBUJO

### 1.3 Campos vectoriales y escalares

Observación: (enumerar). Si en la definición (recuerdo de mate 1. poner referencia) cambiemos  $A \subset \mathbb{R}$  y  $B \subset \mathbb{R}$  por  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^m$  obtenemos de manera analoga la siguiente definición.

**Definición 1.3.1.** Un campo  $\mathbf{F}$  es una función tal que  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$ . Si  $m = 1$  lo llamaremos *campo vectorial* y si  $m \geq 2$  lo llamaremos *campo escalar*. Al igual que en (recuerdo de mate 1. poner referencia) a los conjuntos  $A$  y  $B$  se los llama, respectivamente, *dominio* y *codominio* del campo  $F$  y la notación usual para los mismos es  $A = \text{Dom}(\mathbf{F})$  y  $B = \text{Cod}(\mathbf{F})$ .

Notación: (enumerar) En general, para nombrar a campos escalars lo haremos con letras minúsculas de imprenta y para nombrar a campos vectoriales lo haremos con letras mayúsculas de imprenta.

**Definición 1.3.2.** Sea  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$  un campo vectorial, dado  $\mathbf{X} \in A$  se puede pensar a  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  como la evaluación de  $m$  campos escalares en  $\mathbf{X}$ , es decir,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (f_0(\mathbf{X}), f_1(\mathbf{X}), \dots, f_m(\mathbf{X})).$$

Para  $1 \leq i \leq n$ , el campo escalar  $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se llama la *i-ésima componente* de  $\mathbf{F}$ .

**Definición 1.3.3.** Sea  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$ , se define el conjunto imagen de  $\mathbf{F}$ , y se nota  $\text{Img}(\mathbf{F})$ , a

$$\text{Img}(\mathbf{F}) = \{\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}, \mathbf{X} \in A\}$$

**Ejemplo 1.3.1.** La función  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \mathbf{T}(x, y) = (x + y, x - y, xy)$  es un campo vectorial.

decir quies es dominio, imagen, las componentes, y hacer un dibujo del dominio al codominio y sus componentes, revisar que todo lo pedido este definido previamente

$$\mathbf{T}(1, 1) = (2, 0, 1)$$

**Ejemplo 1.3.2.** La función  $d : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} / d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  es un campo escalar.

decir quies es dominio, imagen, las componentes, y hacer un dibujo del dominio al codominio

Observacion: **ENUMERAR** En particular, si se piensa el vector argumento como un punto en el espacio,  $d$  devuelve su distancia euclídea al origen.

$$\Rightarrow d(1, 2, 3) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

**Ejemplo 1.3.3.** Probar que el campo  $T(x, y) = (x + y, x - y, x + y)$  es una transformación lineal, es decir, que cumple la condición de (1.1). Calcular su dominio, Imagen y mostrar sus componetes.

Resolver hacer un dibujo de dominio y codominio

**Definición 1.3.4.** Se llaman parametrizaciones a las funciones de la forma  $\sigma : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$  con  $m > 1$ .

Notación: (**enumerar**) En general, a una parametrización se la suele notar con una letra minúscula del alfabeto griego.

**Ejemplo 1.3.4.** Hallar una parametrización del conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Para parametrizar una circunferencia, primero pensemos en el círculo unitario. En el círculo unitario, la abscisa (coordenada  $x$ ) de cualquier punto es el coseno del ángulo que forma el eje horizontal con el segmento de radio que une el origen con tal punto. Asimismo, el seno del ángulo representa la ordenada (coordenada  $y$ ).

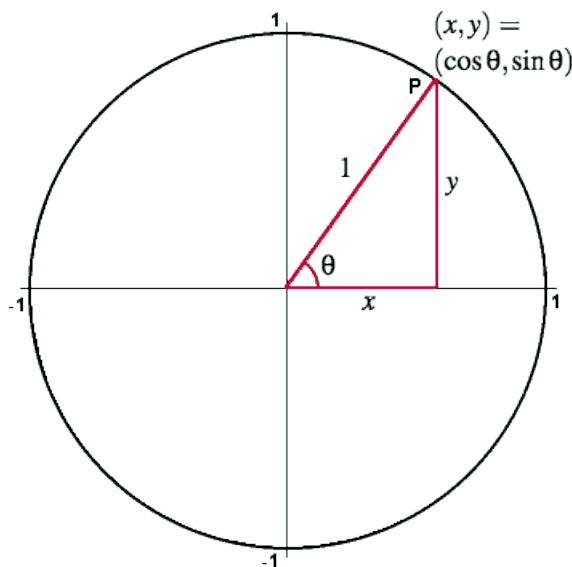


Figura 1.1: Coordenadas de los puntos sobre una circunferencia unitaria.

Por lo tanto, se propone una parametrización de la circunferencia unitaria de la forma:

$$\sigma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sigma(t) = (\cos t, \sin t)$$



Así, si se graficase  $\text{Img}(\sigma)$  como puntos en el plano se obtendría toda la circunferencia unitaria. Vale aclarar que se tomó el dominio como cerrado en 0 y abierto en  $2\pi$ , para que, puesto que ambos valores de entrada corresponden al mismo punto de salida, la parametrización no tenga "puntos repetidos", es decir, que sea inyectiva (análogo a la inyectividad de funciones de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ ).

**Ejemplo 1.3.5.** Hallar una parametrización del conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$

Para contemplar circunferencias de radio distinto de  $r$  centro  $(0, 0)$  vale con multiplicar por el radio a cada componente de la parametrización [referencia](#). Además, para parametrizar aquellas que no estén centradas en el origen, se desplaza cada punto de salida de la parametrización por  $(x_0, y_0)$ , el centro de la nueva circunferencia. Por lo tanto, la parametrización de una circunferencia de radio  $r \in \mathbb{R}^+$  centrada en  $(x_0, y_0)$  es:

$$\sigma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sigma(t) = (r \cdot \cos t + x_0, r \cdot \sin t + y_0)$$

Agregar la otra manera de parametrización de la circunferencia con el dibujo y la explicación

## 1.4 Nociones de Topología

Falta definición de distancia, de norma y la relación entre ellas. Como ejemplo poner la norma 1 y 2. Graficar algunos mismos conjuntos con diferentes normas

**Definición 1.4.1** (Bola de radio  $\delta$  y centro  $x_o$ ). Sean  $x_o \in \mathbb{R}^n$ ,  $\delta > 0$  y  $d$  una distancia en  $\mathbb{R}^n$ . La bola de radio  $\delta$  y centro  $x_o$ , que denotamos con  $B_\delta(x_o)$ , es el conjunto:

$$B_\delta(x_o) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_o) < \delta\}.$$

El conjunto

$$B_\delta^*(x_o) = B_\delta(x_o) - \{x_o\}$$

es la bola reducida de radio  $\delta$  y centro  $x_o$ .

**Definición 1.4.2** (Punto interior, interior de un conjunto). Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $x_o \in A$ . Decimos que  $x_o$  es punto interior de  $A$  si

$$\exists \delta > 0 / B_\delta(x_o) \subset A.$$

El interior de  $A$ , que denotamos con  $A^\circ$ , es el conjunto de todos los puntos interiores de  $A$ :

$$A^\circ = \{x \in A : x \text{ es punto interior de } A\}.$$

**Definición 1.4.3** (Conjunto abierto). Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $A$  es abierto si

$$\forall x_o \in A \exists \delta > 0 : B_\delta(x_o) \subset A. \quad (1)$$

**Propiedad 1.4.1.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

1.  $A \subseteq A^\circ$ .
2.  $A$  es abierto  $\iff A = A^\circ$ .

---

<sup>(1)</sup>i.e.:  $A$  es abierto si todos sus puntos son interiores.

**Definición 1.4.4** (Conjunto cerrado). Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $A$  es *cerrado* si su complemento  $A^c = \mathbb{R}^n - A$  es abierto.

**Definición 1.4.5** (Frontera de un conjunto). Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . La *frontera* de  $A$ , que denotamos con  $\partial A$  o  $\text{front}(A)$ , es el conjunto:

$$\partial A = \{x_o \in \mathbb{R}^n : \forall \delta > 0 \ B_\delta(x_o) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\delta(x_o) \cap A^c \neq \emptyset\}.$$

**Propiedad 1.4.2.** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado si y solo si  $\partial A \subset A$ .

**Definición 1.4.6** (Punto de acumulación). Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $x_o \in \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $x_o$  es *punto de acumulación* de  $A$  si

$$\forall \delta > 0 \ (B_\delta(x_o) - \{x_o\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Denotamos el conjunto de todos los puntos de acumulación de  $A$  con  $A'$ :

$$A' = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto de acumulación de } A\}.$$

**Definición 1.4.7** (Entorno de un punto). Sean  $N \subset \mathbb{R}^n$  y  $x_o \in \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $N$  es *entorno* de  $x_o$  si

$$\exists \delta > 0 : B_\delta(x_o) \subset N.$$

**Definición 1.4.8** (Punto aislado). Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $x_o \in A$ . Decimos que  $x_o$  es *punto aislado* de  $A$  si  $x_o$  no es punto de acumulación de  $A$ .

**Definición 1.4.9** (Conjunto acotado). Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $A$  es un *conjunto acotado* si existe  $\delta > 0$  tal que la bola de radio  $\delta$  centrada en el origen contiene al conjunto  $A$ , es decir, si  $\exists \delta > 0 : A \subset B_\delta(\mathbf{0})$ .

Equivalentemente,  $A$  es un *conjunto acotado* si  $\exists \delta > 0, x_o \in \mathbb{R}^n : A \subset B_\delta(x_o)$ .

**Definición 1.4.10.** Sea un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $A$  se llama **conexo** si dados dos puntos cualquiera de  $A$  se los puede unir por una curva continua que este incluida en  $A$ .

**Definición 1.4.11.** **conjunto convexo, simplemente conexo**

Agregar algunos dibujos y ejemplos. Uno podría ser los conocidos intervalos abiertos, cerrados etc de Mate 1.

## 1.5 Gráficas

Observacion: (enumerar) Si en la definición (recuerdo de mate 1. poner referencia) (1.1.3) cambiamos  $A \subseteq \mathbb{R}$  por  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  obtenemos de manera análoga la siguiente definición.

**Definición 1.5.1.** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ; se define la *gráfica de  $f$* , y se nota  $\text{graf}(f)$ , a

$$\text{graf}(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \wedge f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}\}$$

Observación: Enumerar Si  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  entonces  $\text{graf}(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Observación: **Enumerar** Dada la anterior observación y con el objetivo de poder dibujar, nos tendremos especialmente en el caso de gráficas de campos  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , cuya definición se desprende automáticamente de (1.5.1), o sea, el caso

$$\text{graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \wedge z = f(x, y)\}$$

Todo esto va en el recuerdo de mate 1 para completar y corregir los ejemplos

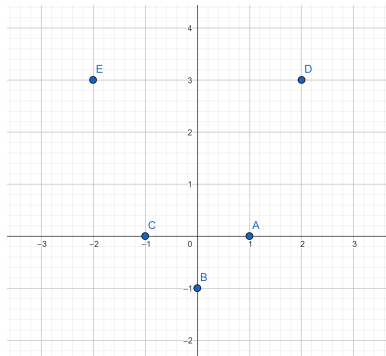


Figura 1.2: Puntos de tabla 1.

De esta manera, se puede empezar a representar la gráfica de  $f$

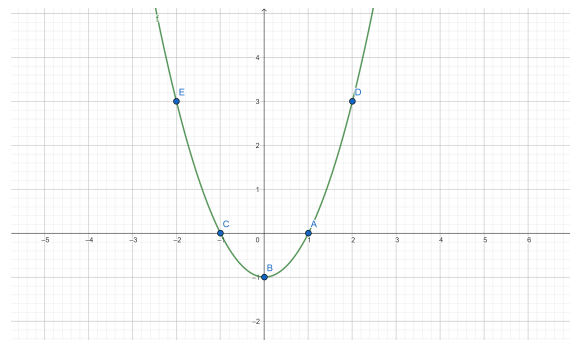


Figura 1.3: Gráfica de  $f(x)$ .

Hasta aca

no esta definido conjuntos de nivel

En este curso, se analizarán las gráficas de funciones en  $\mathbb{R}^3$ . Analizamos un ejemplo, tomando  $h(x, y) = x^2 + y^2$ . Para la función, que representa un paraboloide, los conjuntos de nivel están dados por  $h(x, y) = c$ , que son círculos concéntricos en el plano  $xy$ . Graficando esta función en 3D, podemos ver una superficie parabólica, donde los conjuntos de nivel son las proyecciones de estas circunferencias a diferentes alturas en el eje  $z$  y con radio creciente.

Hasta aca

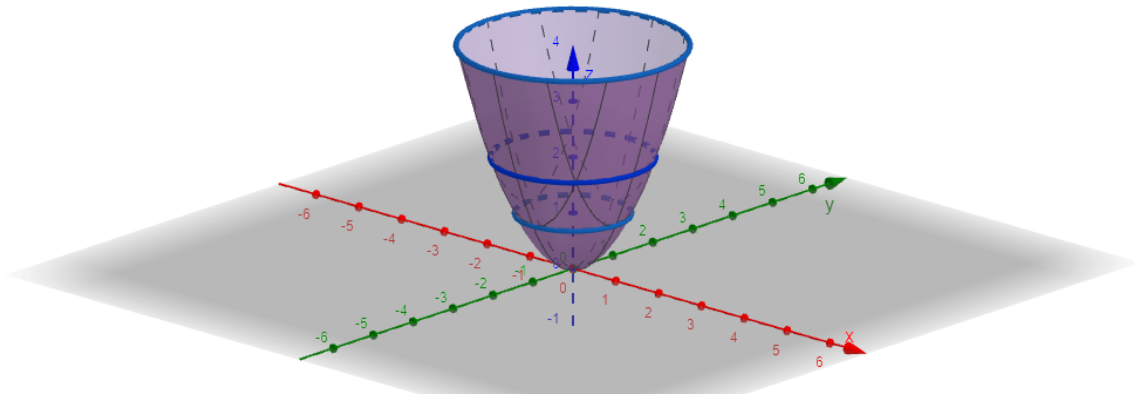


Figura 1.4: Gráfica de  $h$  y conjuntos de nivel tomando  $c=\{1,2,4\}$

## 1.6 Conjuntos de nivel

**Definición 1.6.1** (Conjunto de nivel).

Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $c \in \mathbb{R}$ , se define el conjunto de nivel de  $f$  de nivel  $c$ , y se nota  $C(c, f)$ , a

$$C(c, f) = \{x \in U \mid f(x) = c\}.$$

Es decir,  $C(c, f)$  son aquellos puntos  $x \in U$  para las cuales  $f(x) = c$ , o dicho de otra manera,  $C(c, f)$  es la preimagen de  $c$  por  $f$ . Si  $n = 2$  hablamos de curva de nivel y si  $n = 3$  hablamos de superficie de nivel

Observación: **Enumerar** Si  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  entonces  $C(c, f) \subset \mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 1.6.1.** Sea el campo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = x^2 + y^2$ .

1. Calcular y graficar los conjuntos de nivel de  $f$ .
2. Hacer un gráfico de  $\text{graf}(f)$ .

Observemos que, dado  $c \in \mathbb{R}$ :

$$C(c, f) = \{(x, y) \in U \mid x^2 + y^2 = c\}.$$

Tomando, para ilustrar,  $c = 0$ ,  $c = 1$  y  $c = 4$ , quedando (ver (1.2.5))

$$C(0, f) = \{(x, y) \in U \mid x^2 + y^2 = 0\}$$

$$C(1, f) = \{(x, y) \in U \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$$C(4, f) = \{(x, y) \in U \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

En general, podemos determinar:

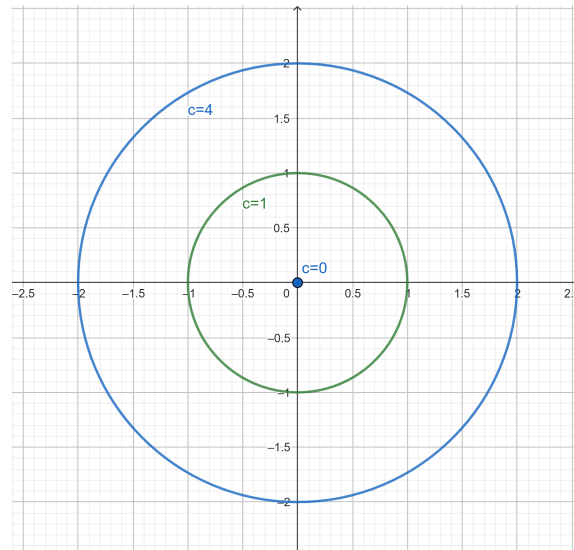


Figura 1.5: Conjuntos de nivel

$$C(c, f) = \begin{cases} \text{Circunferencia centrada en } (0,0) \text{ de radio } \sqrt{c}, & \text{si } c > 0 \\ (0, 0) & \text{si } c = 0 \\ \emptyset & \text{si } c < 0 \end{cases}$$

Aca “dibujar” los conjuntos de nivel en  $\mathbb{R}^3$  y notar que no es suficiente para graficar.

Definir cortes transversales y dibujarlos.

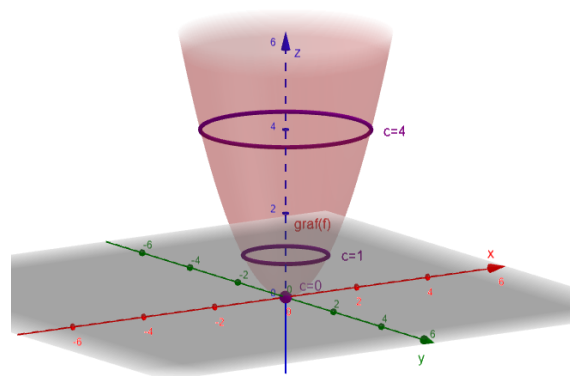


Figura 1.6:  $\text{graf}(f)$

**Ejemplo 1.6.2.** Sea el campo  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

1. Calcular y graficar los conjuntos de nivel de  $g$ .
2. Hacer un gráfico de  $\text{graf}(g)$ .

Resolver identico al ejercicio anterior.

: Se toma la funcion  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , donde empezamos a analizar los distintos conjuntos de nivel, tomando  $c$  con diferentes constantes

$$C(0, f) = \{(x, y) \in U \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 0\}$$

$$C(1, f) = \{(x, y) \in U \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$$

$$C(2, f) = \{(x, y) \in U \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 2\}$$

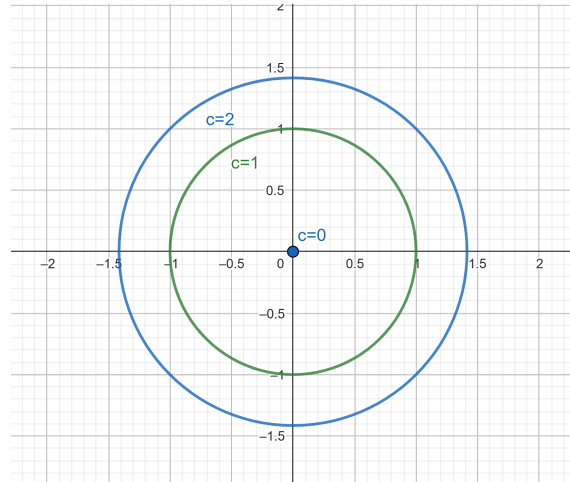


Figura 1.7: Conjuntos de nivel

En general, podemos determinar:

$$C(c, f) = \begin{cases} \text{Circunferencia centrada en } (0,0) \text{ de radio } c, & \text{si } : c > 0 \\ (0, 0) & \text{si } : c = 0 \\ \emptyset & \text{si } : c < 0 \end{cases}$$

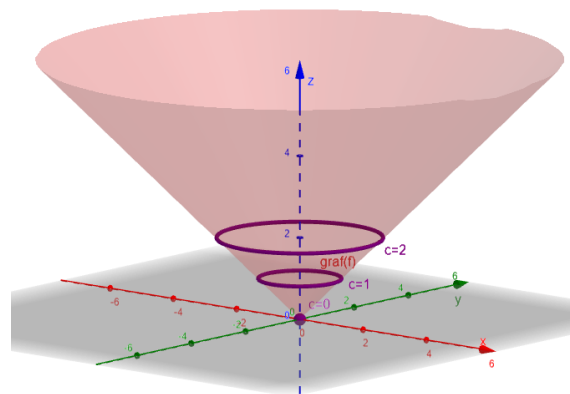


Figura 1.8: Conjuntos de nivel y graf(f)

De esta manera, considerando la definicion de gráfica de una función, podemos representar la misma en  $\mathbb{R}^3$  tomando la ecuación de la parte superior de un cono:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Corregir esta observación. esta mal escrito, quien es la función f?

Observación **enumerar**: Dada la ecuación  $z^2 = x^2 + y^2$  al despejar  $z$  obtenemos  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  obtendríamos que:

$$C(c, f) = \begin{cases} \text{Circunferencia centrada en } (0,0) \text{ de radioc,} & \text{si : } c > 0 \\ (0,0) & \text{si : } c = 0 \\ \text{Circunferencia centrada en } (0,0) \text{ de radioc,} & \text{si : } c < 0 \end{cases}$$

De esta manera, considerando la definicion de gráfica de una funcion, podemos representar la misma en  $\mathbb{R}^3$  tomando la ecuacion del cono:  $z^2 = x^2 + y^2$

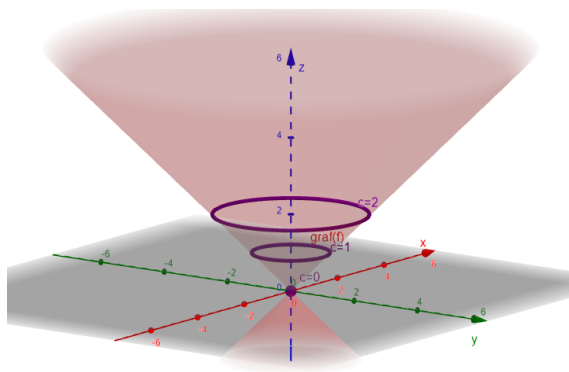


Figura 1.9: Conjuntos de nivel y graf(f)

Mejorar la figura, no se llega a apreciar el cono completo

## 1.7 Límite de Funciones

**Definición 1.7.1** (Límite). Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función,  $L \in \mathbb{R}^m$  y  $x_0$  un punto de acumulación de  $A$ . Decimos que *el límite de  $f$  para  $x$  tendiendo a  $x_0$  es  $L$*  o que  *$f$  tiende a  $L$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$*  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / f(x) \in B_\varepsilon(L) \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A.$$

En este caso, utilizamos la notación

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

**Observación 1.7.1.** Si  $f$  es un *campo escalar* (es decir, si en la definición (1.7.1) es  $m = 1$ ), la condición

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / f(x) \in B_\varepsilon(L) \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A$$

es equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |f(x) - L| < \varepsilon \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A.$$

**Observación 1.7.2.** La definición de límite puede expresarse equivalentemente en términos de distancias o de normas:

- Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función,  $L \in \mathbb{R}^m$  y  $x_0$  un punto de acumulación de  $A$ . Decimos que *el límite de  $f$  para  $x$  tendiendo a  $x_0$  es  $L$*  o que  *$f$  tiende a  $L$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$*  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / d_m(f(x), L) < \varepsilon \forall x \in A : 0 < d_n(x, x_0) < \delta,$$

donde  $d_n$  y  $d_m$  son las distancias en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente.

- Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función,  $L \in \mathbb{R}^m$  y  $x_0$  un punto de acumulación de  $A$ . Decimos que *el límite de  $f$  para  $x$  tendiendo a  $x_0$  es  $L$*  o que  *$f$  tiende a  $L$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$*  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \|f(x) - L\|_m < \varepsilon \forall x \in A : 0 < \|x - x_0\|_n < \delta,$$

donde  $\|\cdot\|_n$  y  $\|\cdot\|_m$  son las normas en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente.

**Ejemplo 1.7.1.** Probar, usando la definición, los siguientes límites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin(y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

mejorar los espacios. Resolver los ejemplos. Hacer mención de los cotas utiles

**Teorema 1.7.1. Unicidad del límite.**

Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función,  $x_0$  un punto de acumulación de  $A$  y  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^m$  tales que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L_1 \quad \wedge \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L_2.$$

Entonces  $L_1 = L_2$ .

*Demostración.*

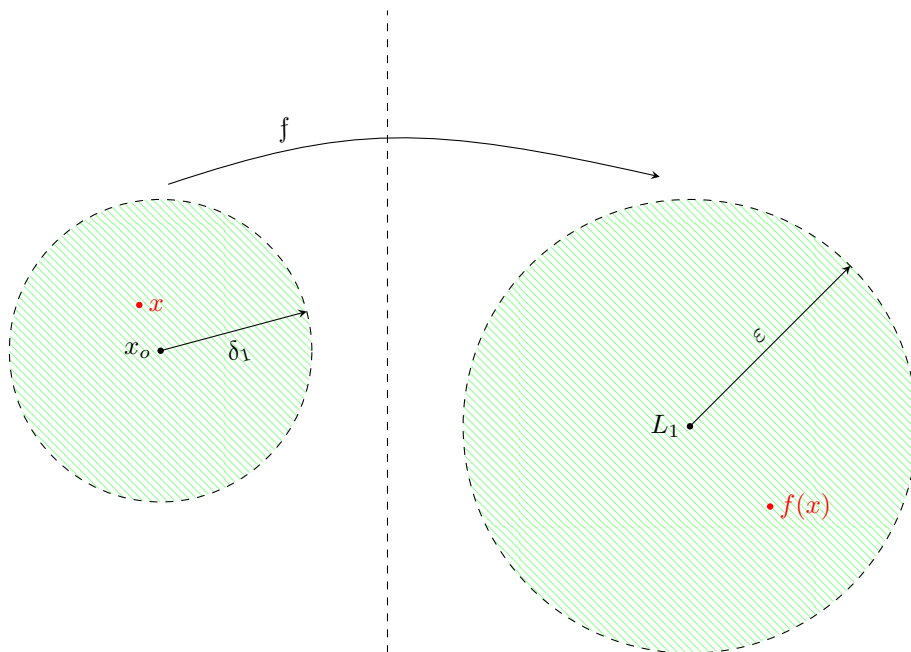
Las ideas utilizadas en la demostración de este teorema son las que siguen.

Como

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L_1,$$

dado  $\varepsilon > 0$  existe algún  $\delta_1 > 0$  tal que cada punto  $x \in B_{\delta_1}^*(x_0) \cap A$  se aplica a través de  $f$  en algún punto de la bola de centro  $L_1$  y radio  $\varepsilon$ .

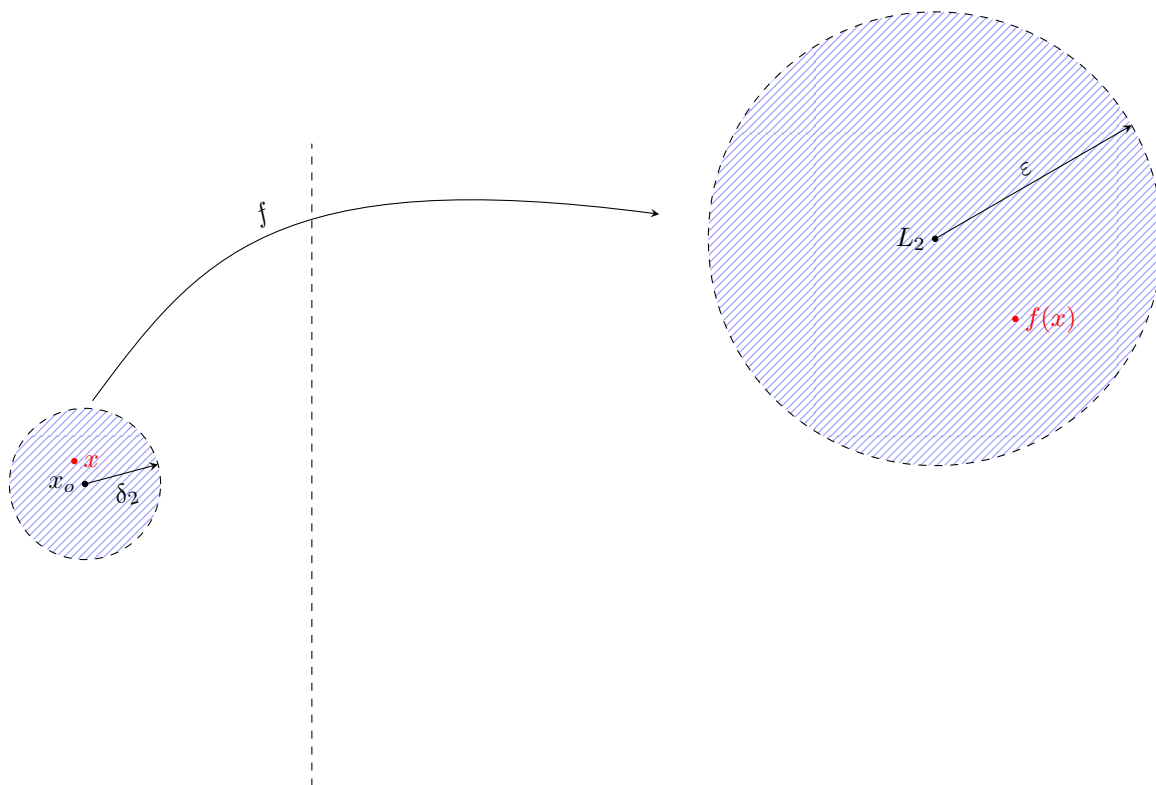




De la misma manera, como

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_o} L_2,$$

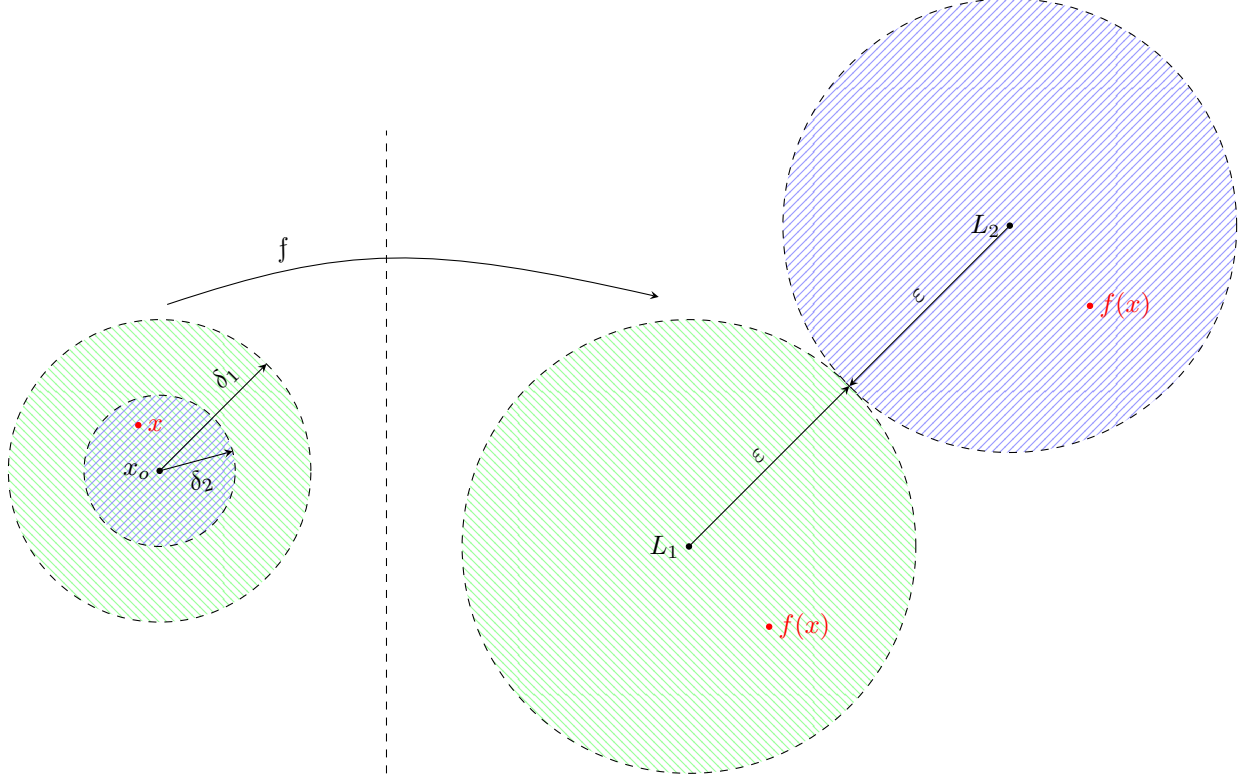
dato  $\varepsilon > 0$  existe algún  $\delta_2 > 0$  tal que cada punto  $x \in B_{\delta_2}^*(x_o) \cap A$  se aplica a través de  $f$  en algún punto de la bola de centro  $L_2$  y radio  $\varepsilon$ .



Si suponemos que  $L_1 \neq L_2$ , por propiedad de la distancia es  $d(L_1, L_2) > 0$  y podemos elegir

$$\varepsilon = \frac{d(L_1, L_2)}{2}.$$

Para este valor de  $\varepsilon$  podemos encontrar un punto  $x$  que se aplica por  $f$  en algún punto de la bola de centro  $L_1$  y radio  $\varepsilon$  **y también** se aplica por  $f$  en algún punto de la bola de centro  $L_2$  y radio  $\varepsilon$ , lo cual es absurdo, pues estas dos bolas son disjuntas.



Ahora sí, veamos la demostración formal del teorema.

Supongamos, por el absurdo, que  $L_1 \neq L_2$ , y sea  $\varepsilon = d(L_1, L_2)/2 > 0$ .

Como

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_o} L_1,$$

podemos elegir  $\delta_1 > 0$  tal que  $x \in B_{\delta_1}^*(x_o) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(L_1)$ .

Como

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_o} L_2,$$

podemos elegir  $\delta_2 > 0$  tal que  $x \in B_{\delta_2}^*(x_o) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(L_2)$ .

Notemos que, como sugiere la figura,

$$B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2) = \emptyset.$$

En efecto, de no ser así, sea  $z \in B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2)$ . Tenemos que:

$$2\varepsilon = d(L_1, L_2) \leq d(L_1, z) + d(z, L_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon. \text{ Absurdo.}$$

Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ .

Como  $B_\delta^*(x_o) \subset B_{\delta_1}^*(x_o)$  y  $B_\delta^*(x_o) \subset B_{\delta_2}^*(x_o)$ , si tomamos algún  $x \in B_\delta^*(x_o) \cap A^{(2)}$ , vale que

<sup>(2)</sup>Notemos que  $B_\delta^*(x_o) \cap A \neq \emptyset$  porque  $x_o$  es un punto de acumulación de  $A$ .

$f(x) \in B_\varepsilon(L_1)$  y también  $f(x) \in B_\varepsilon(L_2)$ , por lo que  $f(x) \in B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2)$ . Absurdo, pues  $B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2) = \emptyset$ . El absurdo provino de suponer que  $L_1 \neq L_2$ , por lo cual debe ser  $L_1 = L_2$ .

□

**Propiedad 1.7.1. álgebra de límites.** Sean  $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  funciones y  $x_0$  un punto de acumulación de  $A$ . Supongamos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= L_1 \in \mathbb{R}^m \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= L_2 \in \mathbb{R}^m.\end{aligned}$$

Entonces:

1. Linealidad

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = L_1 + L_2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f)(x) = \alpha L_1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2^{(3)}$$

3. Si  $m = 1$  (i.e., si  $f$  y  $g$  son campos escalares),  $g$  es no nula en algún entorno de  $x_0$  y  $L_2 \neq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

**Ejemplo 1.7.2.** Calcular los siguientes límites usando Algebra de Límites

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 1 + y}{(x-1)^2 + y^2} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\exp\{x\} \log(\cos(y))}{x^2 + (y+1)^2}\end{aligned}$$

mejorar los espacios. Resolver los ejemplos. Hacer mención sobre los límites notables de mate 1 una variable

**Propiedad 1.7.2.** Sea  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  un campo vectorial y  $x_0$  un punto de acumulación de  $A$ . Sean  $f_j : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) campos escalares tales que  $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \quad \forall x \in A^{(4)}$ .

Sea  $L = (L_1, L_2, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $L_j \in \mathbb{R} \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$ . Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f_j(x) = L_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

<sup>(3)</sup> Si  $m \geq 2$ , “ $\cdot$ ” representa el producto escalar en  $\mathbb{R}^m$ .

<sup>(4)</sup> Los campos escalares  $f_j$  quedan determinados unívocamente por  $F$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}f_j : A \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ f_j(x) &= F(x) \cdot e_j,\end{aligned}$$

donde  $e_j$  es el  $j$ -ésimo vector canónico de  $\mathbb{R}^m$ .

**Propiedad 1.7.3.** Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $x_0$  un punto de acumulación de  $A$ . Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ .

*Demostración.*

1. Veamos que (I) implica (II). Como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0,$$

por definición de límite, dado  $\varepsilon > 0$  podemos tomar  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A.$$

Para este valor de  $\delta$  se cumple que

$$\left| |f(x)| - 0 \right| = \left| |f(x)| \right| = |f(x)| = |f(x) - 0| < \varepsilon \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A,$$

de modo que, por definición,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0.$$

2. Veamos que (II) implica (I). Como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0,$$

por definición de límite, dado  $\varepsilon > 0$  podemos tomar  $\delta > 0$  tal que

$$\left| |f(x)| - 0 \right| < \varepsilon \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A.$$

Para este valor de  $\delta$  se cumple que

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = \left| |f(x)| \right| = \left| |f(x)| - 0 \right| < \varepsilon \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A,$$

de modo que, por definición,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

□

**Propiedad 1.7.4.** Sean  $f, g, h : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones y  $x_0$  un punto de acumulación de  $A$ . Supongamos que  $\exists \delta_0 > 0$  tal que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x \in B_{\delta_0}(x_0) \cap A.$$

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$$

**Propiedad 1.7.5.** Sean  $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones y  $x_o$  un punto de acumulación de  $A$ . Si  $\exists \delta_o > 0$  tal que  $f$  es acotada en  $B_{\delta_o}(x_o) \cap A$  (i.e.:  $\exists M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M \forall x \in B_{\delta_o}(x_o) \cap A$ ) y  $\lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_o} (f \cdot g)(x) = 0.$$

*Demostración.*

Supongamos que, para cierto  $\delta_o > 0$ ,  $f$  es acotada en  $B_{\delta_o}(x_o) \cap A$ , y sea  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in B_{\delta_o}(x_o) \cap A$ . Como

$$\lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = 0,$$

dado  $\varepsilon > 0$ , por definición de límite, podemos elegir  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \forall x \in B_{\delta_1}^*(x_o) \cap A.$$

Sea  $\delta = \min \{\delta_o, \delta_1\}$ .

Se cumple que

$$|(f \cdot g)(x) - 0| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq M |g(x)| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \forall x \in B_{\delta}^*(x_o) \cap A,$$

Por lo tanto, por definición de límite,

$$\lim_{x \rightarrow x_o} (f \cdot g)(x) = 0.$$

□

**Propiedad 1.7.6** (Límite de la composición).

Sean  $f, g$  funciones

$$\begin{aligned} g &: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m \\ f &: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p, \end{aligned}$$

y puntos  $a \in A', b \in B'$  tales que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \quad \wedge \quad \lim_{u \rightarrow b} f(u) = L.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = L.$$

**Ejemplo 1.7.3.** Veamos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

En efecto, sabemos que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1,$$

y que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 = 0.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(u) &= \frac{\sin(u)}{u} \\ g : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(x,y) &= x^2 + y^2, \end{aligned}$$

por la propiedad (1.7.6) es

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f \circ g)_{(x,y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Una consecuencia directa de la propiedad (1.7.6) es el siguiente corolario:

**Corolario 1.7.1** (Límites por curvas). Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_o, y_o)$  un punto de acumulación de  $A$  y  $L \in \mathbb{R}$  tales que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x,y) = L.$$

Entonces, para cualesquiera funciones continuas  $g_1, g_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que, para algún  $t_o \in I'$

$$\lim_{t \rightarrow t_o} (g_1(t), g_2(t)) = (x_o, y_o)$$

y, además,  $(g_1(t), g_2(t)) \in A \forall t \in (I - \{t_o\})$ , se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow t_o} f(g_1(t), g_2(t)) = L.$$

**Ejemplo 1.7.4.** Probar que  $f$  no tiene límite para  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  siendo

$$f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x,y) = \frac{x^2}{x-y}$$

1. Sean  $g_1(t) = t$ ,  $g_2(t) = t + t^2$ .

$$f(g_1(t), g_2(t)) = f(t, t + t^2) = \frac{t^2}{-t^2} \rightarrow -1 \text{ cuando } t \rightarrow 0,$$

de modo que, *si  $f$  tiene límite*, el límite es -1, por (1.7.1) y la unicidad del límite.

2. Sean  $g_1(t) = t$ ,  $g_2(t) = t - t^2$ .

$$f(g_1(t), g_2(t)) = f(t, t - t^2) = \frac{t^2}{t^2} \rightarrow 1 \text{ cuando } t \rightarrow 0,$$

de modo que, *si  $f$  tiene límite*, el límite es 1, por (1.7.1) y la unicidad del límite.

Por lo tanto, por la unicidad del límite (teorema (1.7.1)), *si  $f$  tiene límite  $L$* ,  $L = 1$  y  $L = -1$ , lo que es un absurdo. Por lo cual  $f$  no puede tener límite cuando  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ .

**Propiedad 1.7.7. Límites iterados.** Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_o, y_o)$  un punto de acumulación de  $A$  y  $L \in \mathbb{R}$  tales que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_o, y_o)} f(x, y) = L.$$

1. Si para cada  $x \neq x_o$  existe el límite

$$\lim_{y \rightarrow y_o} f(x, y) = g(x)$$

y además existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_o} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_o} \left( \lim_{y \rightarrow y_o} f(x, y) \right) = L_1,$$

entonces  $L = L_1$ .

2. Si para cada  $y \neq y_o$  existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x, y) = h(y)$$

y además existe el límite

$$\lim_{y \rightarrow y_o} h(y) = \lim_{y \rightarrow y_o} \left( \lim_{x \rightarrow x_o} f(x, y) \right) = L_2,$$

entonces  $L = L_2$ .

**Propiedad 1.7.8. Límites por conjuntos.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función, con  $A = A_1 \cup A_2$ . Sea  $f_1$  la *restricción de  $f$  a  $A_1$* :

$$\begin{aligned} f_1 : A_1 \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ f_1(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Sea  $f_2$  la *restricción de  $f$  a  $A_2$* :

$$\begin{aligned} f_2 : A_2 \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ f_2(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Sean  $x_o \in A'_1 \cap A'_2$  y  $L \in \mathbb{R}^m$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_o} f_1(x) = L \wedge \lim_{x \rightarrow x_o} f_2(x) = L.$$

**Ejemplo 1.7.5.**

Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Veamos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$ .

Sean  $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ ,  $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$  y

$$\begin{aligned} f_1 : A_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f_1(x, y) &= \frac{e^x - 1}{x}, \\ f_2 : A_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f_2(x, y) &= 1. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0,$$

por la propiedad (1.7.6) es

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = 1.$$

Como además  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) = 1$  y  $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}^2$ , por la propiedad (1.7.8) es

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1.$$

**Definición 1.7.2. Límite infinito.** Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $x_0$  un punto de acumulación de  $A$ .

1. Decimos que *el límite de  $f$  para  $x$  tendiendo a  $x_0$  es  $+\infty$*  o que  *$f$  tiende a  $+\infty$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$*  si

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 / f(x) > M \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A.$$

En este caso, utilizamos la notación

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$

2. Decimos que *el límite de  $f$  para  $x$  tendiendo a  $x_0$  es  $-\infty$*  o que  *$f$  tiende a  $-\infty$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$*  si

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 / f(x) < -M \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A.$$

En este caso, utilizamos la notación

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

3. Decimos que *el límite de  $f$  para  $x$  tendiendo a  $x_0$  es  $\infty$*  o que  *$f$  tiende a  $\infty$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$*  si

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 / |f(x)| > M \forall x \in B_\delta^*(x_0) \cap A.$$

En este caso, utilizamos la notación

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

**Definición 1.7.3. Límite en el infinito.** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $L \in \mathbb{R}$ . Decimos que

$$f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} L \quad \text{o} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / f(x) \in B_\varepsilon(L) \forall x / \|x\| > \delta.$$



## 1.8 Diferenciabilidad

**Definición 1.8.1. Diferenciabilidad de campos escalares.** Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_o \in (A)^\circ$ . Decimos que  $f$  es *diferenciable en  $x_o$*  si  $\exists m \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0.$$

Si  $A$  es un conjunto abierto, decimos que  $f$  es *diferenciable* si es diferenciable en cada punto  $x_o \in A$ .

**Definición 1.8.2. Diferenciabilidad, caso general.**

Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $x_o \in (A)^\circ$ . Decimos que  $f$  es *diferenciable en  $x_o$*  si  $\exists M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{\|f(x) - f(x_o) - M \cdot (x - x_o)\|}{\|x - x_o\|} = 0.$$

Si  $A$  es un conjunto abierto, decimos que  $f$  es *diferenciable* si es diferenciable en cada punto  $x_o \in A$ .

**Teorema 1.8.1. Diferenciabilidad y continuidad.**

Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_o \in A^\circ$ . Si  $f$  es diferenciable en  $x_o$ , entonces  $f$  es continua en  $x_o$ .

*Demostración.*

Como  $f$  es diferenciable en  $x_o$ ,  $\exists m \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0.$$

Por lo tanto,  $\exists \delta_o > 0$  tal que

$$x \in B_{\delta_o}^* \cap A \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} \right| < 1.$$

Entonces, para este  $\delta_o$ , se cumple que

$$|f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)| < \|x - x_o\|, \forall x \in B_{\delta_o}^* \cap A.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_o)| &= |f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o) + m \cdot (x - x_o)| \leq \\ &\leq |f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)| + |m \cdot (x - x_o)| < \\ &< \|x - x_o\| + |m \cdot (x - x_o)|, \forall x \in B_{\delta_o}^* \cap A. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,  $|m \cdot (x - x_o)| \leq \|m\| \|x - x_o\|$ , y entonces:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_o)| &< \|x - x_o\| + |m \cdot (x - x_o)| \leq \\ &\leq \|x - x_o\| + \|m\| \|x - x_o\| = \\ &= (1 + \|m\|) \|x - x_o\|, \forall x \in B_{\delta_o}^* \cap A. \end{aligned}$$

Esta condición garantiza la continuidad de  $f$  en  $x_o$ . En efecto, dado  $\epsilon > 0$ , sea  $\delta = \min\{\delta_o, \frac{\epsilon}{1+\|m\|}\}$ .

Para este  $\delta$  se cumple que:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_o)| &< (1 + \|m\|) \|x - x_o\| < \\ &< (1 + \|m\|) \delta \leq \\ &\leq (1 + \|m\|) \frac{\epsilon}{1 + \|m\|} = \epsilon, \forall x \in B_\delta^* \cap A, \end{aligned}$$

lo que, por definición de límite <sup>(5)</sup>, significa que

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o).$$

Es decir,  $f$  es continua en  $x_o$ . □

**Observación 1.8.1.** La implicación recíproca de la proposición (1.8.1) es falsa.

*Demostración.* La función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(t) &= |t| \end{aligned}$$

es continua en  $t_o = 0$ , pero no es diferenciable en  $t_o = 0$ . Se deja como ejercicio para el lector verificar esta afirmación. □

**Teorema 1.8.2. Diferenciabilidad y existencia de derivadas parciales.**

Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_o \in (A)^\circ$ , tales que  $\exists m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n /$

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0$$

(es decir,  $f$  es diferenciable en  $x_o$ ). Entonces existen las derivadas parciales de  $f$  en  $x_o$  y, además,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) = m_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

*Demostración.*

Sea  $x = x_o + he_j$ , siendo  $h \in \mathbb{R}$  y  $e_j$  el  $j$ -ésimo vector canónico (el vector de  $\mathbb{R}^n$  que tiene un 1 en la posición  $j$  y ceros en todas las demás). Es decir, definimos una función  $g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n / g(h) = x_o + he_j$ , con  $\delta > 0$ , lo suficientemente pequeño como para que  $\text{Im}(g) \subset A$  <sup>(6)</sup>, y llamamos  $x = g(h)$ . Notemos que  $g(h) \rightarrow x_o$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

Por la diferenciabilidad, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - m \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0$$

y entonces, si componemos con la función  $g$  (reemplazamos  $x = x_o + he_j$ ), la propiedad del límite de la composición (1.7.6) implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - m \cdot ((x_o + he_j) - x_o)}{\|(x_o + he_j) - x_o\|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - m \cdot (he_j)}{\|he_j\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - h(m \cdot e_j)}{\|he_j\|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{|h|}. \end{aligned}$$

---

<sup>(5)</sup> Como  $x_o \in (A)^\circ$ ,  $x_o$  es un punto de acumulación de  $A$ .

<sup>(6)</sup> ¿Cuál de las hipótesis asegura la existencia de un tal  $\delta$ ?

Ahora bien, este límite es 0 si y solo si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{|h|} \right| = 0,$$

por la propiedad (1.7.3). Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{|h|} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j|}{||h||} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{h} \right|, \end{aligned}$$

lo cual, otra vez por la propiedad (1.7.3), implica que

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o) - hm_j}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right).$$

Es fácil probar por definición que esta última condición implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} = m_j.$$

En efecto, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \left( \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right) - 0 \right| < \epsilon, \forall h : 0 < |h| < \delta,$$

porque el límite es 0. Como claramente

$$\left| \left( \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right) - 0 \right| = \left| \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right|,$$

se tiene (por definición de límite) que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} = m_j.$$

Esto último, por definición de derivada parcial, significa que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) = m_j,$$

como queríamos probar.

□

**Observación 1.8.2.** Es un error decir, en el último paso de la demostración, que por la linealidad del límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} - m_j \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} m_j = 0,$$

ya que la existencia del límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_o + he_j) - f(x_o)}{h} \right)$$

es parte de lo que debemos probar.

**Observación 1.8.3.** La implicación recíproca de la proposición (1.8.2) es falsa.

*Demostración.*

La función

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el origen, pero no es diferenciable en el origen. Se deja como ejercicio para el lector la demostración de esta afirmación.  $\square$

Una consecuencia directa del teorema (1.8.2) es el siguiente corolario:

**Corolario 1.8.1.** Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_o \in A^\circ$ . Son equivalentes:

1.  $f$  es diferenciable en  $x_o$ ;
2. existen todas las derivadas parciales de  $f$  en  $x_o$  y

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - \nabla f(x_o) \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0.$$

**Teorema 1.8.3. Diferenciabilidad y existencia de derivadas direccionales.**

Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $x_o \in A^\circ$ . Entonces,  $\forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\tilde{u}\| = 1$  existe en  $x_o$  la derivada de  $f$  en la dirección de  $\tilde{u}$  y, además,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}.$$

*Demostración.*

Sea  $x = x_o + h\tilde{u}$ , siendo  $h \in \mathbb{R}$ . Es decir, definimos una función

$$g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g(h) = x_o + h\tilde{u}$$

con  $\delta > 0$ , lo suficientemente pequeño como para que  $\text{Im}(g) \subset A$ , y llamamos  $x = g(h)$ . Notemos que  $g(h) \rightarrow x_o$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

Por la diferenciabilidad, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o) - \nabla f(x_o) \cdot (x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0$$

y entonces, si componemos con la función  $g$  (reemplazamos  $x = x_o + h\tilde{u}$ ), la propiedad del límite de la composición (1.7.6) implica que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o) - \nabla f(x_o) \cdot ((x_o + h\delta(x_o)\tilde{u}) - x_o)}{\|(x_o + h\tilde{u}) - x_o\|} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o) - \nabla f(x_o) \cdot (h\tilde{u})}{\|h\tilde{u}\|} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o) - h\nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}}{|h|\|\tilde{u}\|} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o) - h\nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}}{|h|}.
\end{aligned}$$

Como en la demostración de la propiedad (1.8.2), este límite es 0 si y solo si

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o) - h\nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o)}{h} - \nabla f(x_o) \cdot \tilde{u} \right),$$

que, como en la demostración de (1.8.2), implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o + h\tilde{u}) - f(x_o)}{h} = \nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}$$

y por lo tanto, por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}.$$

□

#### Teorema 1.8.4. Valores extremos de la derivada direccional.

Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en un punto  $x_o \in A^\circ$ . Entonces

$$\max_{\|\tilde{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \|\nabla f(x_o)\|, \quad \min_{\|\tilde{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = -\|\nabla f(x_o)\|$$

y, si  $\nabla f(x_o) \neq \mathbf{0}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \|\nabla f(x_o)\| \iff \tilde{u} = \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = -\|\nabla f(x_o)\| \iff \tilde{u} = -\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}.$$

*Demostración.*

Como  $f$  es diferenciable en  $x_o$ , por el teorema (1.8.3),  $\forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\tilde{u}\| = 1$  existe en  $x_o$  la derivada de  $f$  en la dirección de  $\tilde{u}$  y, además,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) \right| = |\nabla f(x_o) \cdot \tilde{u}| \leq \|\nabla f(x_o)\| \|\tilde{u}\| = \|\nabla f(x_o)\|,$$

de modo que tenemos las cotas:

$$-\|\nabla f(x_o)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) \leq \|\nabla f(x_o)\|.$$

Además, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dice que vale

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) \right| = \|\nabla f(x_o)\|$$

si y solo si el conjunto  $\{\nabla f(x_o), \tilde{u}\}$  es linealmente dependiente, condición que, si  $\nabla f(x_o) \neq \mathbf{0}$ , es equivalente a decir que  $\tilde{u}$  es un vector unitario en la dirección de  $\nabla f(x_o)$ . Existen exactamente dos vectores  $\tilde{u}$  con esta característica:

$$\tilde{u}_1 = \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} \quad \text{y} \quad \tilde{u}_2 = -\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}.$$

Por cálculo directo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}_1}(x_o) &= \nabla f(x_o) \cdot \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} = \frac{\nabla f(x_o) \cdot \nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} = \frac{\|\nabla f(x_o)\|^2}{\|\nabla f(x_o)\|} = \|\nabla f(x_o)\| \\ \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}_2}(x_o) &= \nabla f(x_o) \cdot \left( -\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} \right) = -\frac{\nabla f(x_o) \cdot \nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|} = -\frac{\|\nabla f(x_o)\|^2}{\|\nabla f(x_o)\|} = -\|\nabla f(x_o)\|, \end{aligned}$$

de modo que efectivamente

$$\max_{\|\tilde{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \|\nabla f(x_o)\|$$

y el máximo se realiza en  $\tilde{u}_1 = \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}$ , y

$$\min_{\|\tilde{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = -\|\nabla f(x_o)\|$$

y el mónimo se realiza en  $\tilde{u}_2 = -\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}$ .

Finalmente, observemos que, si  $\nabla f(x_o) = \mathbf{0}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \nabla f(x_o) \cdot \tilde{u} = 0 = \|\nabla f(x_o)\| \quad \forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^n,$$

y por lo tanto:

$$\max_{\|\tilde{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = \|\nabla f(x_o)\| = 0$$

y

$$\min_{\|\tilde{u}\|=1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}(x_o) = -\|\nabla f(x_o)\| = 0.$$

□

### Teorema 1.8.5. Regla de la cadena.

Sean  $f, g$  funciones

$$\begin{aligned} g &: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m \\ f &: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p, \end{aligned}$$

y un punto  $x_o \in A^\circ$  tal que  $g(x_o) \in B^\circ$ . Supongamos que  $g$  es diferenciable en  $x_o$  y que  $f$  es diferenciable en  $y_o = g(x_o)$ . Entonces la composición  $f \circ g$  es diferenciable en  $x_o$  y, además,

$$D(f \circ g)_{(x_o)} = Df_{(y_o)} Dg_{(x_o)}.$$

**Teorema 1.8.6. Teorema de la Función Inversa.**

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$ . Sea  $x_o \in A$  y supongamos que  $\det(\mathbf{D}F_{(x_o)}) \neq 0$ . Entonces existen un entorno abierto  $U \subset A$  de  $x_o$  y un entorno abierto  $V \subset \mathbb{R}^n$  de  $F(x_o)$  tal que  $F : U \rightarrow V$  (la restricción de  $F$  a  $U$ ) tiene inversa  $F^{-1} : V \rightarrow U$ . Esta función  $F^{-1}$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  y, además,

$$\mathbf{D}F_{(F(x_o))}^{-1} = [\mathbf{D}F_{(x_o)}]^{-1}.$$

Si  $F$  es de clase  $\mathcal{C}^p, p \geq 1$ , entonces  $F^{-1}$  también.

**Teorema 1.8.7. Caso particular del Teorema de la Función Implícita.**

Sean  $A \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto y  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$ . Sea  $(x_o, y_o, z_o) \in A$  tal que  $F(x_o, y_o, z_o) = 0$ . Supongamos que

$$F_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0.$$

Entonces existen un entorno abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  de  $(x_o, y_o)$  y una única función  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $g(x_o, y_o) = z_o$  y

$$F(x, y, g(x, y)) = 0 \forall (x, y) \in U.$$

Más aún,  $g$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  y, además,  $\forall (x, y) \in U$  vale que

$$g_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, g(x, y))}{F_z(x, y, g(x, y))}$$

$$g_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, g(x, y))}{F_z(x, y, g(x, y))}$$

Si  $F$  es de clase  $\mathcal{C}^p, p \geq 1$ , entonces  $g$  también.

**Teorema 1.8.8. Teorema de la Función Implícita.**

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  un conjunto abierto y  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$ . Sea  $(x_o, z_o) \in A$  tal que  $F(x_o, z_o) = \mathbf{0}$ . Formemos el determinante

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial z_m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_m} \end{bmatrix},$$

donde  $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  y todas las derivadas están evaluadas en  $(x_o, z_o)$ . Si  $\Delta \neq 0$ , entonces existen un entorno abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $x_o$  y una única función  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  tales que  $g(x_o) = z_o$  y

$$F(x, g(x)) = \mathbf{0} \forall x \in U.$$

Más aún,  $g$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  y, además, si  $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Si  $F$  es de clase  $\mathcal{C}^p$ ,  $p \geq 1$ , entonces  $g$  también.

## 1.9 Extremos de funciones escalares

Contenido teorico: Falta Poli de Taylor.

**Definición 1.9.1** (Extremos locales y globales).

Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_o \in A$ . Decimos que:

- $f$  tiene un *máximo local* o *relativo* en  $x_o$  si  $\exists \delta > 0 : f(x_o) \geq f(x) \forall x \in B_\delta(x_o) \cap A$ .
- $f$  tiene un *mínimo local* o *relativo* en  $x_o$  si  $\exists \delta > 0 : f(x_o) \leq f(x) \forall x \in B_\delta(x_o) \cap A$ .
- $f$  tiene un *máximo global* o *absoluto* en  $x_o$  si  $f(x_o) \geq f(x) \forall x \in A$ .
- $f$  tiene un *mínimo global* o *absoluto* en  $x_o$  si  $f(x_o) \leq f(x) \forall x \in A$ .

Decimos que  $f$  tiene un *extremo* en  $x_o$  si  $f$  tiene un máximo o mínimo (absoluto o relativo) en  $x_o$ .

**Observación 1.9.1.** Notemos que todo extremo absoluto es *también* un extremo relativo. La recíproca de esta afirmación es falsa (un extremo relativo no tiene por qué ser absoluto).

**Teorema 1.9.1. Condición necesaria de extremo.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en algún entorno abierto de  $x_o \in (A)^\circ$ . Supongamos que  $f$  tiene un extremo en  $x_o$ . Entonces

$$\nabla f(x_o) = \mathbf{0}.$$

**Definición 1.9.2** (Punto crítico). Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_o \in (A)^\circ$ . Decimos que  $x_o$  es un *punto crítico* de  $f$  si  $f$  no es diferenciable en  $x_o$  o  $\nabla f(x_o) = \mathbf{0}$ .

**Definición 1.9.3** (Punto silla). Sean  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_o \in (A)^\circ$ . Si  $x_o$  es un punto crítico de  $f$  y  $f$  no tiene un extremo en  $x_o$ , decimos que  $f$  tiene un *punto silla* en  $x_o$ .

**Teorema 1.9.2. Criterio de la derivada segunda.**



Sean  $A \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $\mathcal{C}^2$ . Sea  $(x_o, y_o) \in A$  y supongamos que  $\nabla f(x_o, y_o) = \mathbf{0}$ . Entonces,

1. si  $\det(\mathbf{H}_f(x_o, y_o)) > 0$  y

a)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ ,  $f$  tiene un mínimo local en  $(x_o, y_o)$ ;

b)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ ,  $f$  tiene un máximo local en  $(x_o, y_o)$ ;

2. si  $\det(\mathbf{H}_f(x_o, y_o)) < 0$ ,  $f$  tiene un *punto silla* en  $(x_o, y_o)$ .

**Teorema 1.9.3. de los valores extremos de Weierstrass.** Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado y acotado y  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces  $f$  alcanza un máximo y un mínimo absoluto en  $A$ .

**Teorema 1.9.4** (Método de multiplicadores de Lagrange). Sean  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $\mathcal{C}^1$ . Sea  $x_o \in U$  y sea  $c = g(x_o)$ . Sea  $S$  el conjunto de nivel  $c$  de  $g$ . Supongamos que  $\nabla g(x_o) \neq \mathbf{0}$ . Si  $f|_S$  (que denota a la restricción de  $f$  a  $S$ ) tiene un extremo local en  $x_o$ , entonces  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla f(x_o) = \lambda \nabla g(x_o).$$

## Contenido Teórico. Segunda parte

### 2.1 Operadores

Unificar lo siguiente: lo nombres en capitulos anteriores no estan en negritas sino que estan con textit

**Definición 2.1.1.** Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $U$  abierto y  $f$  diferenciable en  $U$ . Se define el **gradiente** de  $f$  evaluado en  $\mathbf{x} \in U$ , y se nota  $\nabla f(\mathbf{x})$ , como el vector en el espacio  $\mathbb{R}^n$  dado por

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right),$$

**Definición 2.1.2.** Sea  $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $U$  abierto y  $\mathbf{F}$  de clase  $\mathcal{C}^1(U)$ . Se define la **divergencia** de  $\mathbf{F}$  como

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n}.$$

donde  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , con cada  $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

**Definición 2.1.3.** Sea  $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $U$  abierto y  $\mathbf{F}$  de clase  $\mathcal{C}^1(U)$ . Se define el **rotor** de  $\mathbf{F}$  evaluado en  $\mathbf{x} \in U$ , y se nota  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , como el vector en el espacio  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial z}, \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x}, \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial y} \right),$$

donde  $\mathbf{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ .

Sea  $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $U$  abierto y  $\mathbf{F}$  de clase  $\mathcal{C}^1(U)$ . Se define el **rotor** de  $\mathbf{F}$  evaluado en  $\mathbf{x} \in U$ , y se nota  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , como el escalar dado por

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial y} \right).$$

donde  $\mathbf{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$

Unificar lo siguiente: lo nombres en capitulos anteriores no estan en negritas sino que estan con textit: laplaciano. irrotacional etc

**Definición 2.1.4.** Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $U$  abierto y  $f$  de clase  $\mathcal{C}^2(U)$ . Se define el **laplaciano** de  $f$ , y se lo nota  $\Delta f$  o  $\nabla^2 f$ , a

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f.$$

Y para el caso de un campo vectorial  $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ , el **laplaciano** escalar

$$\Delta \mathbf{F} = (\Delta f_1, \Delta f_2, \dots, \Delta f_n).$$

**Observación 2.1.1.** Estas fórmulas son más fáciles de recordar si pensamos a nabra ( $\nabla$ ) como el siguiente operador

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

De esta manera, la divergencia es el producto escalar de  $\nabla$  con un campo vectorial y para el caso del rotor en  $\mathbb{R}^3$  es el producto cruz con un campo vectorial. Es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

Agregar a la obs lo mismo para el laplaciano

**Ejemplo 2.1.1.** Sea  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ . Calcular  $\Delta f(x, y)$ .

Primero calculamos el gradiente de  $f$ .

$$\nabla f(x, y) = (2x \cos(x^2 + y^2), 2y \cos(x^2 + y^2))$$

Luego le aplicamos la divergencia.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla f(x, y) &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (2x \cos(x^2 + y^2), 2y \cos(x^2 + y^2)) \\ &= 2 \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2) + 2 \cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2) \\ &= 4 \cos(x^2 + y^2) - 4(x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2) = \Delta f \end{aligned}$$

**Definición 2.1.5.** Sea un campo vectorial  $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  se llama **irrotacional**.

**Definición 2.1.6.** Sea un campo vectorial  $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  se llama **solenoidal**.

**Definición 2.1.7.** Sea un campo escalar  $f$  o un campo vectorial  $\mathbf{F}$ . Si  $\Delta f = 0$  o  $\Delta \mathbf{F} = 0$  se llama **armónico**.

**Propiedad 2.1.1.** Sean  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ambas diferenciables en  $U$  y sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$1. \nabla(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha \nabla f(\mathbf{x}) + \beta \nabla g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

Además, si ambas son de clase  $C^1(U)$

$$2. \nabla \cdot (\alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

$$3. \nabla \times (\alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \alpha \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

**Propiedad 2.1.2. Regla de Leibniz para el producto.** Sea  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar tal que  $h \in C^1$ .

1. Sea  $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^1(U)$ , entonces  $\nabla \cdot (h\mathbf{F}) = h\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla h \cdot \mathbf{F}$
2. Sea  $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{R}^2$ ) de clase  $\mathcal{C}^1(U)$ , entonces  $\nabla \times (h\mathbf{F}) = h\nabla \times \mathbf{F} + \nabla h \times \mathbf{F}$

**Propiedad 2.1.3.** hipotesis Productos:

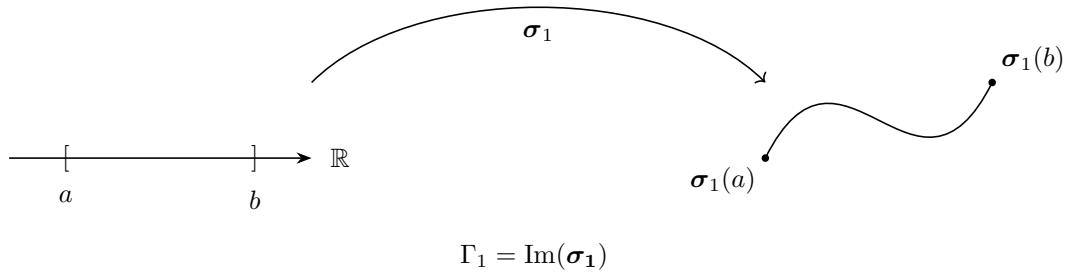
1.  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
2.  $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$

## 2.2 Curvas

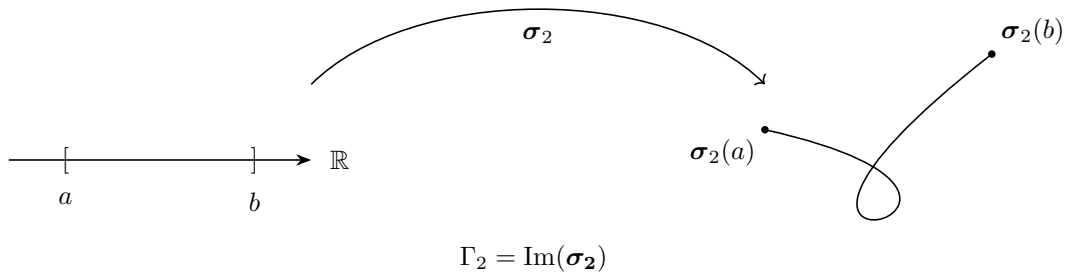
**Definición 2.2.1.** A un campo  $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuo de lo llama *Trayectoria*.

**Definición 2.2.2.** Falta definición de trayectoria  $\mathcal{C}^1$  a trozos.

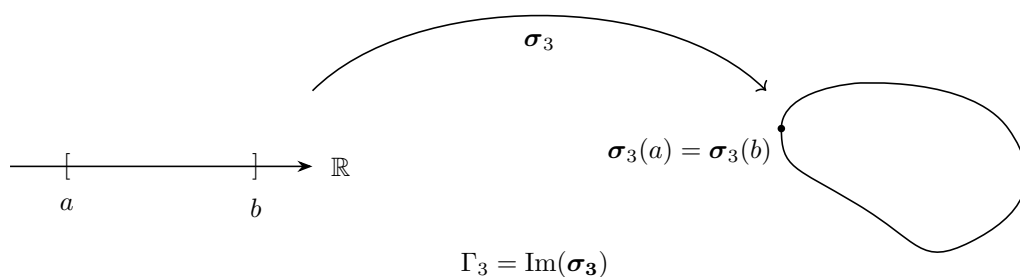
**Definición 2.2.3.** Se define una curva  $\Gamma \in \mathbb{R}^n$  como la imagen de una trayectoria  $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos. Si  $I = [a, b]$  a los puntos  $\sigma(a)$  y  $\sigma(b)$  son los extremos de la curva.



**Definición 2.2.4.** Diremos que  $\Gamma \in \mathbb{R}^n$  es una curva simple si  $\Gamma = \text{Im}(\sigma)$  con  $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  inyectiva en  $I^\circ$ .

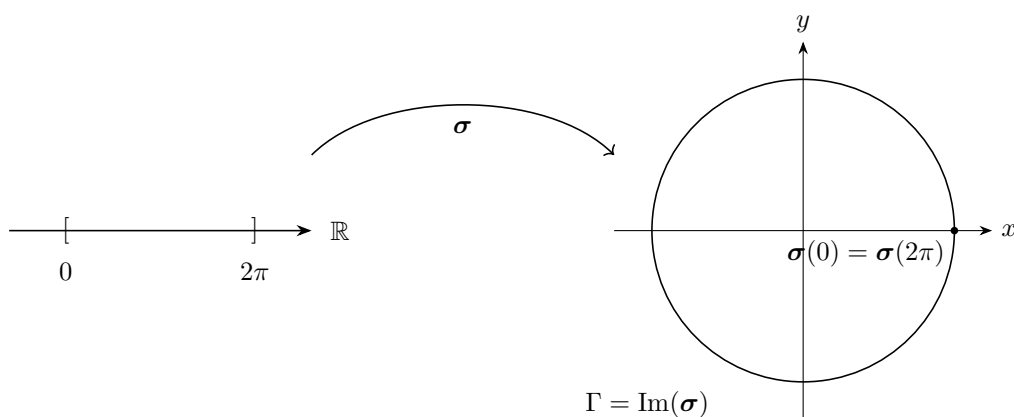


**Definición 2.2.5.** Si  $\sigma(a) = \sigma(b)$  entonces  $\Gamma$  se llama curva cerrada.

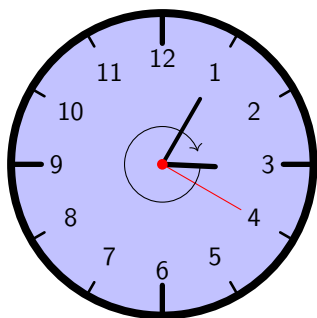


**Ejemplo 2.2.1.**  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  son curvas simples, mientras que  $\Gamma_2$  no lo es. Además  $\Gamma_3$  es una curva cerrada.

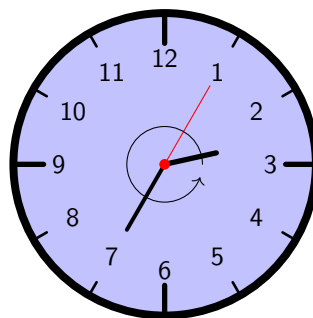
**Ejemplo 2.2.2.** Sea la trayectoria  $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \Gamma$ , tal que  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ . La curva  $\Gamma = \text{Im}(\sigma)$  es la que se muestra a continuación.



**Observación 2.2.1.** Cada curva simple  $\Gamma$  tiene asociadas dos orientaciones o sentidos posibles. Si los puntos  $P$  y  $Q$  son los extremos de la curva, y  $P \neq Q$ , entonces podemos considerar a  $\Gamma$  con orientación desde  $P$  hacia  $Q$  o bien desde  $Q$  hacia  $P$ . Si  $P = Q$  y  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  podemos pensar de manera semejante al movimiento de las manecillas de un reloj analógico. Se define la orientación **horaria** o **negativa** tal que si se avanza en la dirección de la parametrización, el interior de la curva queda a la derecha. Y se define la orientación **antihoraria** o **positiva** tal que si se avanza en la dirección de la parametrización, el interior de la curva queda a la izquierda.



Orientación horaria



Orientación antihoraria

**Definición 2.2.6.** Se define una parametrización de una curva simple  $\Gamma \in \mathbb{R}^n$  como una trayectoria  $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos, inyectiva en  $I^\circ$  y tal que  $\text{Im}(\sigma) = \Gamma$ .

**Definición 2.2.7.** Una parametrización  $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  se llama regular si  $\sigma'(t) \neq 0 \forall t \in I^\circ$ .

## 2.3 Integrales Dobles

definir rectangulo B en R2. definir particion de un rectangulo B. quien es  $\Delta A_{ij}$  quien es  $B_{ij}$ . Explicar la notacion que aparece en la primer definicion

**Definición 2.3.1.** Dada una función  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $B$  es un rectángulo en  $\mathbb{R}^2$ , se define la suma de Reimann de  $f$  sobre  $B$  a

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta A_{ij},$$

donde  $c_{ij} \in B_{ij}$ , el  $ij$ -ésimo rectángulo en la partición de  $B$ , y  $\Delta A$  es el área de  $B_{ij}$ .

**Definición 2.3.2.** Sea  $f : B = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Diremos que  $f$  es integrable sobre  $B$  si el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existe y es finito, en tal caso el valor de dicho límite se llama **integral doble** de  $f$  sobre  $B$  y se nota

$$\iint_B f \, dA = \iint_B f(x, y) \, dx dy.$$

**Observación 2.3.1.** agregar condiciones sobre f para la existencia del limite

Para extender esta noción de integral a conjuntos acotados más generales que no sean rectángulos, definimos lo siguiente.

**Definición 2.3.3.** Hacer un dibujo Dada  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , se define la función  $f^*$  tal que quien es D?

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Entonces si  $B$  es un rectángulo que contiene a  $D$  y  $\partial D$  está formada por las gráficas de un número finito de funciones continuas,  $f^*$  será integrable. Se define

$$\iint_D f \, dA = \iint_B f^* \, dA.$$

Mejor la explicacion anterior

**Observación 2.3.2.** La definición (2.3.3) es independiente de la selección de  $B$ .

**Propiedad 2.3.1.** Sean  $f, g$  dos funciones integrables en una región  $D \subset \mathbb{R}^2$ , entonces:

i.  $\alpha f + \beta g$  es integrable en  $D$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y, además,

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) \, dA = \alpha \iint_D f \, dA + \beta \iint_D g \, dA.$$

- ii. El producto  $fg$  es integrable en  $D$ .
- iii. Si  $|g(x, y)| \geq k > 0 \forall (x, y) \in D$ , el cociente  $f/g$  es integrable en  $D$ .
- iv. Si  $f \geq 0$  en  $D$ ,  $\iint_D f \, dA \geq 0$ .
- v. Si  $f \leq g$  en  $D$ ,  $\iint_D f \, dA \leq \iint_D g \, dA$ .
- vi. Si  $|f|$  es integrable en  $D$ , entonces

$$\left| \iint_D f \, dA \right| \leq \iint_D |f| \, dA.$$

- vii. Si  $D = D_1 \cup D_2$  donde  $D_1 \cap D_2$  es un conjunto de medida nula, entonces  $f$  es integrable sobre  $D_1$  y sobre  $D_2$  y, además,

$$\iint_D f \, dA = \iint_{D_1} f \, dA + \iint_{D_2} f \, dA.$$

**Definición 2.3.4.** Un conjunto  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  se llama elemental si puede ser descrito de alguna de las siguientes maneras.

- i. Existen funciones continuas  $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $D$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  que satisfacen

$$x \in [a, b], \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x),$$

donde  $\phi_1(x) < \phi_2(x) \forall x \in [a, b]$ . En tal el conjunto  $D$  se llama *elemental de tipo 1*.

- ii. Si existen funciones continuas  $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $D$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  que satisfacen

$$y \in [c, d], \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),$$

donde  $\psi_1(y) < \psi_2(y) \forall y \in [c, d]$ . En tal el conjunto  $D$  se llama *elemental de tipo 2*.

- iii.  $D$  se llama conjunto elemental de *tipo 3* si es *tipo 1* y *tipo 2* a la vez.

Dibujar los casos.

**Propiedad 2.3.2.** 1. Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua sobre  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto de tipo 1, entonces

$$\iint_D f = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

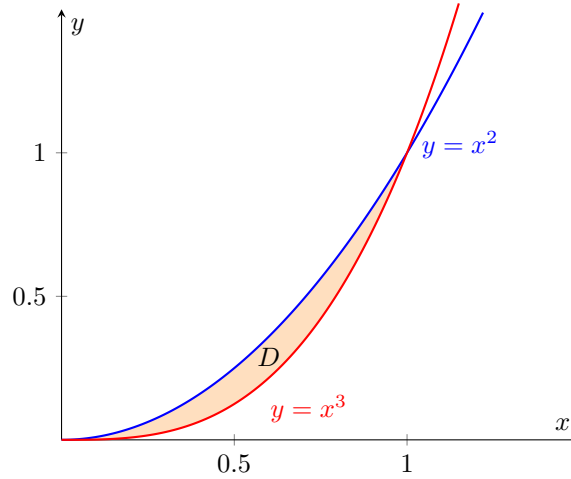
2. Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua sobre  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto de tipo 2, entonces

$$\iint_D f = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

3. Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua sobre  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto de tipo 3, entonces

$$\iint_D f = \int_a^b \left( \int_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Ejemplo 2.3.1.** Calcular  $\iint_D f$ , donde  $f(x, y) = x^2 y$ , donde  $D$  es la región del plano encerrado entre  $y = x^3$ ,  $y = x^2$ , con  $x \in [0, 1]$ .



En este caso

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; x^3 \leq y \leq x^2\}.$$

Luego  $D$  es de tipo 1. Notar que la única manera de demostrar que un conjunto es elemental es dando su descripción implícita. Por el Propiedad 2.3.2

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y dA &= \int_0^1 \left( \int_{x^3}^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left( x^2 \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^3}^{x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 ((x^2)^2 - (x^3)^2) = \int_0^1 \frac{1}{2} x^6 - \frac{1}{2} x^8 dx \\ &= \frac{1}{14} x^7 - \frac{1}{18} x^9 \Big|_0^1 = \frac{1}{14} - \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

**Definición 2.3.5.** Se define el área de un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$ , y se nota  $A(D)$ , a

$$A(D) = \iint_D 1 dA.$$

**Teorema 2.3.1. Teorema del valor medio para integrales dobles.** Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $D$  es un conjunto elemental. Entonces existe  $(x_0, y_0)$  en  $D$  tal que

$$\int_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0) A(D).$$

Falta definir  $D_F$



**Definición 2.3.6.** Sea  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $\mathcal{C}^1(A)$  y sea  $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}$  su matriz diferencial definida en  $A$ . Se define el **jacobiano**, o **determinante jacobiano**, y se lo nota  $J_{\mathbf{F}}$  a

$$J_{\mathbf{F}} = |\det(\mathbf{D}_{\mathbf{F}})|.$$

dos ejemplos sencillos en  $n=2$  y  $n=3$

**Teorema 2.3.2. Teorema del cambio de variables para integrales dobles.** Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo escalar integrable. Sea  $\mathbf{T} : D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow D$  continua de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $(D^*)^o$ , inyectiva en  $(D^*)^o$  y tal que  $\mathbf{T}(D^*) = D$ . Entonces

$$\iint_D f \, dA = \iint_{D^*} (f \circ \mathbf{T}) J_{\mathbf{T}} \, dA.$$

## 2.4 Integrales Triples

definir paralelepípedo rectangular B en  $\mathbb{R}^3$ . definir particion de un paralelepípedo rectangular. quien es  $\Delta V_{ijk}$  quien es  $V_{ijk}$ . Explicar la notacion que aparece en la primer definicion se podria hacer algun dibujo

**Definición 2.4.1.** Dada una función continua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $U$  es un paralelepípedo rectangular (una caja) en  $\mathbb{R}^3$ , se define la suma de Reimann de  $f$  sobre  $U$ , partiendo los tres lados de  $U$  en  $n$  partes iguales, a

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta V_{ijk},$$

donde  $c_{ijk} \in U_{ijk}$ , el  $ijk$ -ésimo paralelepípedo rectangular en la partición de  $U$ , y  $\Delta V_{ijk}$  es el volumen de  $U_{ijk}$ .

**Definición 2.4.2.** Sean  $U = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Diremos que  $f$  es integrable sobre  $U$  si existe y es finito el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , en tal caso el valor de dicho límite se llama **integral triple** de  $f$  sobre  $U$  y se nota

$$\iiint_U f \, dV = \iiint_U f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

**Observación 2.4.1.** agregar condiciones sobre f para la existencia del limite

Para extender esta noción de integral a un conjunto acotado más general, esto es, conjuntos que puedan ser encerrados por una caja, definimos lo siguiente.

**Definición 2.4.3.** Dada  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , se define la función  $f^*$  tal que

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in W \\ 0 & \text{si } (x, y, z) \notin W. \end{cases}$$

Entonces si  $U$  es una caja que contiene a  $W$  y  $\partial W$  está formada por las gráficas de un número finito de funciones continuas,  $f^*$  será integrable. Se define

$$\iiint_W f \, dV = \iiint_U f^* \, dV.$$

**Observación 2.4.2.** Esta definición es independiente de la selección de  $U$ .

**Propiedad 2.4.1.** Sean  $f, g$  dos funciones integrables en una región  $W \subset \mathbb{R}^3$ , entonces:

i.  $\alpha f + \beta g$  es integrable en  $W$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y además

$$\iiint_W (\alpha f + \beta g) dV = \alpha \iiint_W f dV + \beta \iiint_W g dV.$$

ii. El producto  $fg$  es integrable en  $W$ .

iii. Si  $|g(x, y, z)| \geq k > 0 \forall (x, y, z) \in W$ , el cociente  $f/g$  es integrable en  $W$ .

iv. Si  $f \geq 0$  en  $W$ ,  $\iiint_W f dV \geq 0$ .

v. Si  $f \leq g$  en  $W$ ,  $\iiint_W f dV \leq \iiint_W g dV$ .

vi. Si  $|f|$  es integrable en  $W$ , entonces

$$\left| \iiint_W f dV \right| \leq \iiint_W |f| dV.$$

vii. Si  $W = W_1 \cup W_2$ , y  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ , es una partición de  $W$ ,  $f$  es integrable en  $W \iff f$  es integrable en  $W_1$  y  $W_2$ . En este caso

$$\iiint_W f dV = \iiint_{W_1} f dV + \iiint_{W_2} f dV.$$

**Definición 2.4.4.** Se define el volumen de un conjunto  $W \subset \mathbb{R}^3$  y se nota  $\text{Vol}(W)$ , a

$$\text{Vol}(W) = \iiint_W 1 dV.$$

**Teorema 2.4.1. Teorema del valor medio.** Sea  $f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $W$  es un conjunto elemental. Entonces existe  $(x_0, y_0, z_0)$  en  $W$  tal que

$$\iiint_W f dV = f(x_0, y_0, z_0) \text{Vol}(W).$$

**Definición 2.4.5.** No queda claro quien es el conjunto  $D$ . **Conjunto elemental en  $\mathbb{R}^3$ .** Sea  $W \subseteq \mathbb{R}^3$ . Sean  $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones y sean  $\gamma_1, \gamma_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas. Un conjunto  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  se llama elemental, si puede ser escrito de algunas de las siguientes 6 maneras: es largo pero escribirlas todas, ojo con la notacion como el conjunto de puntos  $(x, y, z)$  que satisfacen

$$x \in [a, b], \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \quad \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y).$$

O bien, intercambiando el orden de las variables.

### Ilustracion

**Teorema 2.4.2. Teorema del cambio de variables para integrales triples.** Sea  $f : W \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar integrable. Sea  $\mathbf{T} : W^* \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^3$  continua, de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $(W^*)^o$ , inyectiva en  $(W^*)^o$  y tal que  $\mathbf{T}(W^*) = W$ . Entonces

$$\iiint_W f \, dV = \iiint_{W^*} (f \circ \mathbf{T}) J_{\mathbf{T}} \, dV.$$

## 2.5 Integrales de Línea

Falta decir quies es  $I_i$

**Definición 2.5.1.** Sea  $\Gamma$  una curva simple en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización regular de  $\Gamma$ . Se define la **longitud de  $\Gamma$** , y se nota  $\text{Long}(\Gamma)$ , a

$$\text{Long}(\Gamma) = \sum_{i=1}^m \int_{I_i} \|\sigma'(t)\| \, dt,$$

donde  $\sigma|_{I_i}$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ .

Ejemplos: puede ser la circunsferencia y un segmento. Ilustrar

**Definición 2.5.2.** Sea  $\sigma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria continua y de clase  $\mathcal{C}^1(I^o)$  y sea  $f$  un campo escalar tal que la función compuesta  $f \circ \sigma(t)$  sea continua en  $I$ . Se define la **integral de trayectoria**, o **integral de  $f$  a lo largo de la trayectoria  $\sigma$** , y se la nota  $\int_{\sigma} f \, ds$ , a

$$\int_{\sigma} f \, ds = \int_a^b (f \circ \sigma) \|\sigma'(t)\| \, dt.$$

Si  $\sigma(t)$  es sólo  $\mathcal{C}^1$  a trozos o  $f \circ \sigma(t)$  es continua a trozos, se define  $\int_{\sigma} f \, ds$  sobre una partición de  $[a, b]$ , donde sobre cada intervalo de la partición  $(f \circ \sigma) \|\sigma'(t)\|$  sea continua, y sumando las integrales sobre cada intervalo de la partición.

**Definición 2.5.3.** Sea  $\Gamma$  una curva simple en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\sigma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización regular de  $\Gamma$ . Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $\Gamma \subset A$ . Se define la integral de línea del campo  $f$  sobre la curva  $\Gamma$ , y se nota por  $\int_{\Gamma} f \, ds$  a

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \sum_{i=1}^m \int_{I_i} f \circ \sigma(t) \|\sigma'(t)\| \, dt,$$

donde  $\sigma|_{I_i}$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ .

Falta decir quies es  $I_i$

**Observación 2.5.1.** La definicion anterior no depende de la parametrizacion

Ejemplos.

**Observación 2.5.2.** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) > 0 \forall (x, y) \in A$  y sea  $\Gamma \subset A$  una curva simple en  $\mathbb{R}^2$ . La integral de línea tiene de  $f$  sobre  $\Gamma$  se puede interpretar geoméricamente como el “área de la valla de base  $\Gamma$  y altura  $f$ ”. [ilustracion de la aplicacion](#)

**Ejemplo.**

**Definición 2.5.4.** Copiar exactamente la estructura y orden de las definiciones para campos escalares. Integral de un campo vectorial a lo largo de una curva simple. Sea  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo sobre una curva simple orientada  $\Gamma \subset A$ . Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  una parametrización de  $\Gamma$  que preserve su orientación. Se define la **integral de  $\mathbf{F}$  sobre la curva simple  $\Gamma$**  como

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

**Definición.** poner referencia a la definicion necesaria Si  $\Gamma$  es cerrada, se suele notar a la integral como

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

y se la llama integral de circulación de  $\mathbf{F}$  sobre  $\Gamma$ .

**Definición 2.5.5.** Sean  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial y  $\sigma : [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  una trayectorial  $\mathcal{C}^1$  a trozos tales que  $\mathbf{F} \circ \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua. Se define la **integral de de línea del campo vectorial  $\mathbf{F}$  a lo largo de la trayectoria  $\sigma$**  como

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F} \circ \sigma(t) \cdot \sigma'(t) dt.$$

Se usa la notación  $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds$ , donde  $\hat{\mathbf{t}}$  es versor tangencial a la curva  $\Gamma = \text{Img}(\sigma)$ .

## 2.6 Integrales de Superficie

**Definición 2.6.1.** Sea  $\Sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua y de clase  $\mathcal{C}^1(D^\circ)$ . Al conjunto  $S = \text{Img}(\Sigma)$  se lo llama **superficie parametrizada por  $\Sigma$**  y a  $\Sigma$  una **parametrización** de  $S$ .

**Definición 2.6.2.** Sea  $\Sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de  $S$  y sea  $(u_0, v_0) \in D^\circ$ .  $\Sigma$  se llama **parametrización regular de  $S$**  en  $(u_0, v_0)$  si

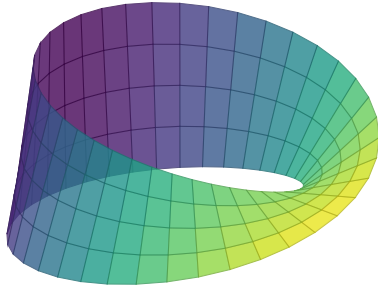
$$\Sigma_u(u_0, v_0) \times \Sigma_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}.$$

En tal caso,  $S$  se llama superficie regular en  $\Sigma(u_0, v_0)$ . Si  $S$  admite una parametrización regular en todo el interior de su dominio diremos que  $S$  es una superficie regular.

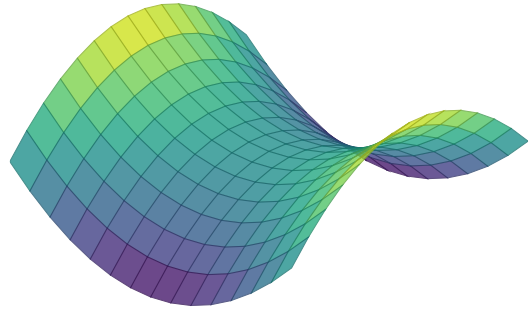
**Definición 2.6.3.** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ . Se define a  $S$  como **orientable** si existe un campo vectorial  $\boldsymbol{\eta} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , continuo talque  $\boldsymbol{\eta}(p)$  es ortogonal a  $S$  en  $p$  y  $\|\boldsymbol{\eta}(p)\| = 1 \forall p \in S$ . Al campo  $\boldsymbol{\eta}$  se lo llama **orientación** de  $S$ . De no existir tal  $\boldsymbol{\eta}$  diremos que la superficie se **no orientable**.

**Observación 2.6.1.** Vincular la grafica de un  $f$  con una superficie y mostrar una parametrizacio  $\Sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Lo necesitan para que se entienda el ejemplo

**Ejemplo 2.6.1.** Un ejemplo de una superficie no orientable es el de una cinta de Möbius, y el de una orientable la gráfica de  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .



Superficie no orientable



Superficie orientable

**Observación 2.6.2.** Sea  $S$  una superficie orientable. Entonces  $S$  admite dos orientaciones posibles:  $\eta$  y  $-\eta$ .

Se podría explicar un poco más el ejemplo?

**Definición 2.6.4.** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie orientada por  $\eta$ . Sea  $\Sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  una parametrización continua de clase  $\mathcal{C}^1$  y regular de  $S$ .

- Si

$$\frac{\Sigma_u \times \Sigma_v}{\|\Sigma_u \times \Sigma_v\|}(u, v) = \eta(\Sigma(u, v)),$$

decimos que  $\Sigma$  **preserva** la orientación de  $S$ .

- Si

$$\frac{\Sigma_u \times \Sigma_v}{\|\Sigma_u \times \Sigma_v\|}(u, v) = -\eta(\Sigma(u, v)),$$

decimos que  $\Sigma$  **invierte** la orientación de  $S$ .

OJO. Falta todo lo de campos escalares.

**Definición 2.6.5.** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie orientada por  $\eta$ . Sea  $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $S \subset A$  un campo continuo. Se define la integral de superficie de  $\mathbf{F}$  sobre  $S$ , y se nota  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ , a

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \eta) dS.$$

**Observación 2.6.3.** Sean  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie orientada por  $\eta$  y sea  $\Sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  una parametrización de  $S$  tal que preserve su orientación, entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \circ \Sigma \cdot (\Sigma_u \times \Sigma_v) dudv.$$

Veamos que esto efectivamente es así. Sabemos que [por referencia](#)

$$\frac{\Sigma_u \times \Sigma_v}{\|\Sigma_u \times \Sigma_v\|}(u, v) = \boldsymbol{\eta}(\Sigma(u, v)).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_D (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}) \circ \Sigma \|\Sigma_u \times \Sigma_v\| \, dudv \\ &= \iint_D (\mathbf{F} \circ \Sigma) \cdot (\boldsymbol{\eta} \circ \Sigma) \|\Sigma_u \times \Sigma_v\| \, dudv = \iint_D \mathbf{F} \circ \Sigma \cdot (\Sigma_u \times \Sigma_v) \, dudv, \end{aligned}$$

concluyendo lo que queríamos ver.

**Observación 2.6.4.** Sea  $S$  una superficie con orientación  $\boldsymbol{\eta}$ . Sea  $\Sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ , una parametrización de  $S$  que invierte la orientación. Entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = - \iint_D \mathbf{F} \circ \Sigma \cdot (\Sigma_u \times \Sigma_v) \, dudv.$$

## 2.7 Campos Conservativos

**Teorema 2.7.1.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y conexo y  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un campo de clase  $\mathcal{C}^1(A^\circ)$ . Si  $\sigma : [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  es una trayectoria continua, entonces

$$\int_{\sigma} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

**Demostracion**

**Corolario 2.7.1.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y conexo y  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un campo de clase  $\mathcal{C}^1(A^\circ)$ . Si  $\sigma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow A_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $\sigma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  son dos trayectorias continuas tales que  $\sigma_1(a_1) = \sigma_2(a_2) \wedge \sigma_1(b_1) = \sigma_2(b_2)$ , entonces

$$\int_{\sigma_1} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma_2} \nabla f \cdot d\mathbf{s}.$$

Es decir,  $\int_{\sigma} \nabla f \cdot d\mathbf{s}$  sólo depende de los puntos inicial y final de la trayectoria.

**Demostracion**

**Corolario 2.7.2.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y conexo y  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$ . Si  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial para el cual  $\exists f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$  tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A,$$

entonces para todo par de curvas  $C_1$  y  $C_2$  en  $A$ , con los mismos extremos y misma orientación,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

**Demostracion**

**Corolario 2.7.3.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y conexo y  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$ . Si  $\mathbf{F} = \nabla f$ , entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

para toda curva  $C$  simple cerrada contenida en  $A$ .

**Demostracion**

falta decir que quiere decir ser independiente del camino

Notacion: Explicar que quiere decir la notacion:  $\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$

**Teorema 2.7.2.** Sea  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuo con  $A$  abierto y conexo. Si  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  es independiente del camino en  $A$  entonces el campo

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \text{ con } \mathbf{x}_0 \in A,$$

cumple que:

1.  $f$  es  $\mathcal{C}^1$ .
2.  $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A$ .

**Teorema 2.7.3.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y conexo,  $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuo. Las siguientes proposiciones sobre  $\mathbf{F}$  son equivalentes:

1.  $\exists f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$  tal que  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in A$ .
2. La integral de  $\mathbf{F}$  es independiente del camino en  $A$ .
3.  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$  para toda curva cerrada simple  $C$  en  $A$ .

**Demostracion:** las que se pueden hacer referencia a lo escrito antes

## 2.8 Teoremas Integrales

**Definición 2.8.1.** Sea  $\Sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización continua e inyectiva de una superficie  $S$ . Si  $\partial D$  es la curva cerrada, simple, frontera del conjunto  $D$ , se define el **borde** o **frontera** de  $S$ , y se lo nota  $\partial S$ , a la curva cerrada simple en  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$\partial S = \Sigma(\partial D).$$

**Observación 2.8.1.** Si  $\partial D$  está orientada de manera antihoraria, entonces  $\Sigma$  **induce** una orientación sobre  $\partial S$ . Además  $\Sigma$  **induce** una orientación sobre  $S$ .

**Mano derecha.** Explicacion e ilustracion

**Definición 2.8.2.** mandar a topología y referenciar Sea  $D$  un conjunto conexo (en  $\mathbb{R}^2$  o en  $\mathbb{R}^3$ ).  $D$  se llama **simplemente conexo** si toda curva cerrada y simple  $C \subset D$  es el borde de un conjunto  $\hat{D}$  tal que  $\hat{D} \subset D$ .

**Teorema 2.8.1. Teorema de Green.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto simplemente conexo y sea la curva simple y cerrada  $\partial D$  su frontera. Si  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  es continuo y de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces

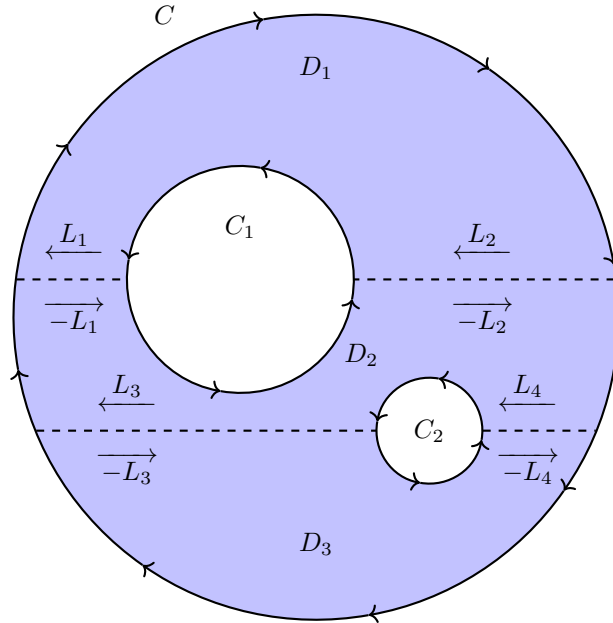
$$\oint_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}.$$

**Observación 2.8.2.** Notacion: dar

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = .$$

**Observación 2.8.3. Extensión de Green.** El teorema de Green es aplicable a regiones aún más generales que simplemente conexas. De hecho, a cualquier región en  $\mathbb{R}^2$  cuya frontera se pueda descomponer en un número finito de curvas cerradas simples orientadas se le puede aplicar el teorema de Green. La idea es “recorrer” dicha frontera pasando por todas las curvas que la conforman.

Por ejemplo, sea  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$  una región en  $\mathbb{R}^2$  no simplemente conexa, como muestra la figura a continuación.



El borde de  $D$  es  $\partial D = C \cup C_1 \cup C_2$ . Y las orientaciones están definidas tal que  $C$  sea horaria y  $C_1$  y  $C_2$  sean antihorarias. Para poder aplicar el teorema de Green, se puede pensar en subdividir la región  $D$  en tres regiones que sí sean simplemente conexas  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ . Dichas regiones las delimitan las curvas  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  y  $L_4$ . Notar que al “recorrer” cada una de las regiones subdivididas, las integrales sobre  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  y  $L_4$  se “cancelan” entre las regiones limítrofes ya que poseen orientación opuesta.



Por lo tanto, si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial definido en  $D$ , aplicando el teorema de Green.

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\
&= \oint_{\partial D_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\partial D_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\partial D_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\
&= \iint_{D_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{D_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{D_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \\
&= \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}
\end{aligned}$$

Lo que significa que el teorema de Green se puede aplicar a regiones no simplemente conexas.

**Teorema 2.8.2. Teorema de la divergencia en el plano.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  una región donde valga el teorema de Green y sea  $\partial D$  su frontera. Denotaremos por  $\mathbf{n}$  el versor unitario normal a  $\partial D$ . Si  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  es una parametrización que recorre a  $\partial D$  de manera positiva, entonces  $\mathbf{n}$  está dado por

$$\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}.$$

Si  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un campo vectorial continuo y de clase  $\mathcal{C}^1(D^\circ)$ , entonces

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA.$$

explicar: son las inducidas por  $\Sigma$ . Se puede referenciar a la regla de la mano derecha

**Teorema 2.8.3. Teorema de Stokes.** Sea  $\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización de una superficie  $S$ . Si  $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial continuo, de clase  $\mathcal{C}^1(A^\circ)$  tal que  $S \subset A$ , entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A},$$

donde las orientaciones tanto de  $S$  como de  $\partial S$  son las inducidas por  $\Sigma$  sobre ellas.

**Teorema 2.8.4. Teorema de la divergencia o de Gauss.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie que encierra un volumen  $\Omega$  ( $S = \partial\Omega$ ) orientada de manera exterior. Si  $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial continuo y de clase  $\mathcal{C}^1(A^\circ)$  tal que  $\Omega \subset A^\circ$ , entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV.$$

## Primeros parciales resueltos

### 3.1 Fecha 29 de septiembre de 2023

**Ejercicio 1.** Calcule, si existe, el siguiente límite.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin\left(\frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cos\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

**Ejercicio 2.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar diferenciable y sea  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$g(x, y) = (e^{xy} - 1, \sin(\pi x + \pi y)).$$

Sabiendo que el gráfico  $h = f \circ g$  en el punto  $(1, 0, h(1, 0))$  tiene plano tangente de ecuación

$$z - 1 = \pi x + (\pi + 1)y,$$

hallar  $f_{\mathbf{v}}(0, 0)$  para la dirección  $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

**Ejercicio 3.** Considere el campo escalar  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:

$$f(x, y) = e^{\sin(x) + y^2}$$

Se pide aproximar  $f(-0.1, 0.2)$  mediante un polinomio de grado dos adecuado.

**Ejercicio 4.** Dado el campo escalar  $f(x, y) = \cos(y) + \sin(x)$ . Encuentre los puntos críticos de dicho campo en el dominio  $\Omega$  y clasifíquelos como extremos locales, donde:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi\}$$

**Solución 1.** Notemos que la estructura del límite pedido está dada por el producto de dos funciones acotadas, por lo tanto, con mostrar que una de las dos tiende a cero bastará para decir que el límite de dicho producto es cero.

Utilizando la siguiente desigualdad para el argumento del seno

$$0 \leq \left| \frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{2(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

junto al teorema de intercalación tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = 0.$$

Recordando que  $|\sin(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$  podemos concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin \left( \frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0.$$

Por último, recordando que  $|\cos(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin \left( \frac{\pi(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cos \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

**Solución 2.** Como  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en todo su dominio por ser composición de funciones diferenciables, la ecuación de su plano tangente en el punto  $(1, 0)$  está dada por

$$z = h(1, 0) + \nabla h(1, 0)(x - 1, y), \quad (3.1)$$

luego será suficiente con encontrar  $h(1, 0)$  y  $\nabla h(1, 0)$ .

Por un lado,  $h(1, 0) = f \circ g(1, 0) = f(0, 0)$  y por otro lado, como  $f$  y  $g$  son ambas diferenciables, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\nabla h(1, 0) = \nabla(f \circ g)(1, 0) = \nabla f(g(1, 0)) \mathbf{D}_g(1, 0) = \nabla f(0, 0) \mathbf{D}_g(1, 0), \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{D}_g$  es la matriz diferencial o jacobiana de  $g$ .

Halleemos  $\mathbf{D}_g$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_g(1, 0) &= \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} - 1 & \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} - 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} \sin(\pi x + \pi y) & \frac{\partial}{\partial y} \sin(\pi x + \pi y) \end{array} \right) \bigg|_{(1,0)} \\ &= \left( \begin{array}{cc} ye^{xy} & xe^{xy} \\ \pi \cos(\pi x + \pi y) & \pi \cos(\pi x + \pi y) \end{array} \right) \bigg|_{(1,0)} \\ &= \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\pi & -\pi \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en a (3.11)

$$\nabla h(1, 0) = \nabla f(0, 0) \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\pi & -\pi \end{array} \right) = (-\pi f_y(0, 0), f_x(0, 0) - \pi f_y(0, 0))$$

Reemplazando en (3.7)

$$\begin{aligned} z &= f(0,0) + (-\pi f_y(0,0), f_x(0,0) - \pi f_y(0,0))(x-1, y) \\ z &= f(0,0) + \pi f_y(0,0) - \pi f_y(0,0)x + (f_x(0,0) - \pi f_y(0,0))y, \end{aligned}$$

y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} f_y(0,0) = -1 \\ f_x(0,0) - \pi f_y(0,0) = \pi + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f_y(0,0) = -1 \\ f_x(0,0) = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \nabla f(0,0) = (1, -1).$$

Como  $f$  es diferenciable en todo su dominio, en particular lo es en  $(0,0)$ , vale que

$$f_{\mathbf{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ con } \|\mathbf{v}\| = 1.$$

Luego, tomando  $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ , obtenemos lo pedido, es decir,

$$f_{\mathbf{v}}(0,0) = (1, -1) \cdot \mathbf{v} = \sqrt{2}.$$

**Solución 3.** Dado que  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ , se define el polinomio de Taylor de segundo orden centrado en  $(0,0)$  de  $f$ , que notaremos por  $P_2[f, (0,0)]$  como,

$$P_2[f, (0,0)](x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y) \mathbf{H}_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{H}_f$  es la matriz hessiana de  $f$ .

Hallemos los términos del polinomio.

$$1. f(0,0) = 1.$$

$$2. \nabla f(0,0) = \left( e^{\sin(x)+y^2} \cos(x), e^{\sin(x)+y^2} 2y \right) \Big|_{(0,0)} = (1,0).$$

$$3.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_f(0,0) &= \begin{pmatrix} e^{\sin(x)+y^2} [\cos^2(x) - \sin(x)] & 2y \cos(x) e^{\sin(x)+y^2} \\ 2y \cos(x) e^{\sin(x)+y^2} & 4y^2 e^{\sin(x)+y^2} + 2e^{\sin(x)+y^2} \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} \\ \mathbf{H}_f(0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos en la expresión (3.10).

$$P_2(x,y) = 1 + (1,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P_2(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2)$$

$$P_2(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + x + 1$$

Entonces queda evaluar en  $P_2(-0.1, 0.2) = \frac{189}{200} = 0.945$ .

$$\therefore f(-0.1, 0.2) \approx 0.945.$$

**Solución 4.** En este ejercicio debemos hallar y clasificar los extremos de la función  $f$  sobre  $\Omega$ , un conjunto acotado y abierto. Para ello, primero buscamos los puntos críticos de  $f$  en  $\Omega$ . Como  $f$  es diferenciable en  $\Omega$ , basta con hallar todos los  $(x_0, y_0) \in \Omega$  tal que  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

$$\nabla f(x, y) = (\cos(x), -\sin(y))$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \iff \begin{cases} \cos(x_0) = 0 \\ \sin(y_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y_0 = k'\pi \end{cases} ; k, k' \in \mathbb{Z}$$

Ahora sumamos la condición de que pertenezcan a  $\Omega$ .

$$(x_0, y_0) \in \Omega \iff x_0 = -\frac{\pi}{2} \vee x_0 = \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad y_0 = 0$$

Por lo tanto, el conjunto de puntos críticos es

$$P.C. = \{(-\pi/2, 0), (\pi/2, 0)\}.$$

Ahora, para clasificarlos, debemos aplicar el criterio de la segunda derivada. Para ésto calculamos la matriz hessiana de  $f$ .

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{H}_f)(x, y) = \sin(x) \cos(y)$$

1.  $\det(\mathbf{H}_f)(-\pi/2, 0) = -1 < 0 \implies f$  tiene un punto silla en  $(-\pi/2, 0)$ .
2.  $\det(\mathbf{H}_f)(\pi/2, 0) = 1 > 0 \wedge f_{xx}(\pi/2, 0) = 1 > 0 \implies f$  tiene un mínimo local en  $(\pi/2, 0)$ .

### 3.2 Fecha 25 de abril de 2023

**Ejercicio 1.** Analizar la existencia de los siguientes límites

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1) \cos\left(\frac{1}{y-1}\right)}{x^2 + 3(y-1)^2} \qquad (b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^3)y}{x^2 - y + x^5}$$

**Ejercicio 2.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{(x^2 - y)^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Analizar la continuidad de  $f$  en el origen
2. Analizar la diferenciabilidad de  $f$  en el origen.
3. Hallar, si existen, las derivadas parciales en el origen.

**Ejercicio 3.** Sea  $g(x, y) = yx^2 + \operatorname{sen}(f(x, y))$  con  $f$  un campo escalar  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  tal que  $f(0, 0) = 0$ . Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x, y) - xf_x(0, 0) - yf_y(0, 0) + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

**Ejercicio 4.** Analizar la existencia de máximos y mínimos, absolutos o relativos, en todo  $\mathbb{R}^2$  de

$$f(x, y) = e^{xy-1} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

**Solución 1.** (a) Podemos observar que el límite es indeterminado, aún más, el argumento del coseno tiende a infinito. Para resolver, reescribimos el límite de la siguiente manera

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \cos\left(\frac{1}{y-1}\right).$$

Dado que el coseno es una función acotada, bastaría con probar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} = 0.$$

Para esto, usaremos las siguientes desigualdades,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \right| \leq \frac{\|(x, y-1)\|^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \leq \\ &\leq \frac{\|(x, y-1)\|^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{\|(x, y-1)\|^2(y-1)}{\|(x, y-1)\|^2} = y-1. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (y-1) = 0,$$

tenemos, usando el teorema de intercalación, que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left| \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \right| = 0.$$

Luego

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} = 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2 + 3(y-1)^2} \cos\left(\frac{1}{y-1}\right) = 0.$$

(b) Tomemos las curvas,  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \alpha(t) = (t, t^5)$  y  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \beta(t) = (t, t^2)$ . Notar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = (0, 0) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = (0, 0).$$

Llamando

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^3)y}{x^2 - y + x^5}$$

tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3)t^5}{t^2 - t^5 + t^5} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin(t^3)t^3 = 0 \quad (3.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \beta(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3)t^2}{t^2 - t^2 + t^5} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3)}{t^3} = 1. \quad (3.5)$$

Como (3.4)  $\neq$  (3.5) concluimos que

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

**Solución 2.** 1. Para que la función sea continua en el origen debe cumplir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

Analicemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{(x^2 - y)^2 + x^4}$$

Tomemos la curva,  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \alpha(t) = (t, t^2)$ , notemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = (0, 0).$$

Podemos observar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha(t) = 1$$

de aquí concluimos que  $f$  no es continua en el origen (aunque nada estamos diciendo de la existencia o no del límite).

2.  $f$  no es diferenciable en el origen pues no es continua en dicho punto.

3. Recordemos la definición de derivada direccional de dirección  $\mathbf{v}$  evaluada en el origen de un campo escalar  $f$ .

$$f_{\mathbf{v}}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h\mathbf{v}) - f(0, 0)}{h},$$

con  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  unitario.

Entonces calculamos

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{v}}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h\mathbf{v})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(hv_1)^4}{((hv_1)^2 - hv_2)^2 + (hv_1)^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(hv_1)^4}{(hv_1)^4 - 2(hv_1)^2 hv_2 + (hv_2)^2 + (hv_1)^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4 v_1^4}{h^4 v_1^4 - 2h^3 v_1^2 v_2 + h^2 v_2^2 + h^4 v_1^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 h^2 v_1^4}{h^2 (h^2 v_1^4 - 2h v_1^2 v_2 + v_2^2 + h^2 v_1^4)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 v_1^4}{h^2 v_1^4 - 2h v_1^2 v_2 + v_2^2 + h^2 v_1^4} = \frac{0}{v_2^2} = 0, \end{aligned}$$

si  $v_2^2 \neq 0 \iff v_1^2 \neq 1 \iff |v_1| \neq 1$ . Veamos el caso  $v_1 = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{h^4}{(h^2)^2 + h^4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{1}{2} = \infty.$$

Es decir, no existe  $f_x(0, 0)$ . El caso  $v_1 = -1$  es análogo.

O sea, las derivadas direccionales existen en todas direcciones, menos en la dirección del eje de abscisas, y son iguales a cero. Es decir,

$$\therefore f_{\mathbf{v}}(0, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : |v_1| \neq 1,$$

$$\nexists f_{\mathbf{v}}(0, 0) \text{ si } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : |v_1| = 1.$$



**Solución 3.** Para resolver este límite debemos intuir que en el numerador se encuentra la función  $g$  menos su plano tangente en el  $(0,0)$ . Entonces buscamos el gradiente de  $g$  en el origen.

Dado que  $f$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$  luego  $g$  resulta de la misma clase. Usando la regla de la cadena y el hecho de que  $f(0,0) = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla g(x,y)\Big|_{(0,0)} &= \left( 2xy + \cos(f(x,y))f_x(x,y), \quad x^2 + \cos(f(x,y))f_y(x,y) \right)\Big|_{(0,0)} \\ &= (f_x(0,0), \quad f_y(0,0)).\end{aligned}$$

Como  $g(0,0) = 0$  podemos reescribir el límite como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{g(x,y) - \nabla g(0,0) \cdot (x,y) - g(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

El primer término tiende a cero dado que  $g$  es de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$  entonces es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$  y, en particular, lo es en el origen. Para el segundo término hacemos un cálculo auxiliar.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

Estamos en condiciones de usar álgebra de límites,

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{g(x,y) - \nabla g(0,0) \cdot (x,y) - g(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0.$$

**Solución 4.** Dado que  $f$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$  para hallar los puntos críticos basta con buscar cuando su gradiente se anula.

$$\nabla f(x,y) = (ye^{xy-1} - x, xe^{xy-1} - y)$$

Igualando el gradiente a cero, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} ye^{xy-1} = x \\ xe^{xy-1} = y \end{cases}$$

Si  $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ , entonces

$$e^{xy-1} = \frac{x}{y} = \frac{y}{x}. \quad (3.6)$$

De la última igualdad hallamos la siguiente relación

$$x^2 = y^2 \iff x = y \vee x = -y.$$

Si  $x = y$  reemplazado en (3.6) queda

$$e^{x^2-1} = 1 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = 1 \vee x = -1.$$

Es fácil ver que el caso  $x = -y$  conlleva a un absurdo. Por último, observar que el  $(0,0)$  también es solución del sistema. Por lo tanto, los puntos críticos son  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  y el  $(-1,-1)$ .

Para clasificarlos, como  $f \in C(\mathbb{R}^2)$  utilizamos el criterio de la segunda derivada.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy-1} - 1 & e^{xy-1}(xy + 1) \\ e^{xy-1}(xy + 1) & x^2 e^{xy-1} - 1 \end{pmatrix}$$

Ahora evaluamos el determinante de la matriz hessiana para los puntos críticos

$$\mathbf{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1/e \\ 1/e & -1 \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{H}_f(0,0)) = 1 - \frac{1}{e^2} > 0$$

y como  $f_{xx}(0,0) = -1 < 0 \implies f$  tiene un máximo local en 0.

$$\mathbf{H}_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{H}_f(1,1)) = -4 < 0$$

$\implies f$  tiene un punto silla en  $(1,1)$ .

$$\mathbf{H}_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(\mathbf{H}_f(-1,-1)) = -4 < 0$$

$\implies f$  tiene un punto silla en  $(-1,-1)$ .

Por último, para analizar si el máximo en  $(0,0)$  es local o absoluto basta calcular, por ejemplo,  $f(2,2)$  para ver que es mayor que  $f(0,0)$ .

$\therefore f$  tiene dos puntos silla, uno en  $(1,1)$  y otro en  $(-1,-1)$ , y un máximo local en  $(0,0)$ .

### 3.3 Fecha 23 de septiembre de 2023

**Ejercicio 1.** Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Analizar la continuidad de  $f$  en el origen
2. Analizar la diferenciabilidad de  $f$  en el origen.
3. Analizar la existencia de las derivadas direccionales de  $f$  en el origen.

**Ejercicio 2.** Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable,  $g(x, y) = (xy^2, x^2 - 2y)$  y  $h = f \circ g$ . Sabiendo que  $h(1, -1) = 2$  y que  $\nabla h(1, -1) = (2, -4)$ , halle el plano tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(1, 3, f(1, 3))$ .

**Ejercicio 3.** Sean  $f$  y  $g$  dos campos escalares de clase  $\mathcal{C}^2$  tales que  $f(1, 2) = g(x, y)$ ,  $\nabla f(1, -1) = \nabla g(2, -4)$  y  $H_f(1, 2) = H_g(1, 2)$ , calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{f^2(x, y) - g^2(x, y)}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$$

**Ejercicio 4.** Hallar analíticamente los puntos más lejanos y más cercanos al origen del elipsoide dado por la ecuación  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$

**Solución 1.** En primer lugar analizamos la continuidad, como  $f$  es una función partida, queremos demostrar que  $f$  es continua en  $(0,0)$  si:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

Utilizando el límite notable conocido:  $\lim_{t \rightarrow 0} (\frac{e^t - 1}{t}) = 1$ , sabemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{\sqrt{t}} = 0$$

Pues, multiplicando arriba y abajo por  $\sqrt{t}$ , sabiendo que  $t \neq 0$ , tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{e^t - 1}{\sqrt{t}} \right) \left( \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{e^t - 1}{t} \right) \sqrt{t} = 0$$

Llamamos  $t(x,y) = x^2 + y^2$  y sabemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} t(x,y) = 0$$

Definimos  $g(z) = \frac{e^z - 1}{\sqrt{z}} = 0$  y realizando la composición  $f(x,y) = g \circ t(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - (0,0)$  tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g \circ t(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(t(x,y)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{\sqrt{t}} = 0$$

$\therefore f$  es continua en  $(0,0)$

Para analizar la diferenciabilidad de  $f$  en el  $(0,0)$  en primer lugar vamos a evaluar la existencia de las derivadas direccionales, siendo  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  con  $|\vec{u}| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h\vec{u}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2 u_1^2 + h^2 u_2^2} - 1}{h \sqrt{h^2 u_1^2 + h^2 u_2^2}}$$

Sabemos que

$$|\vec{u}| = 1 \iff \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1 \iff u_1^2 + u_2^2 = 1$$

Por lo cual

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2} - 1}{h|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2} - 1}{h^2} \frac{h}{|h|}$$

Tomando límites laterales

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{h^2} - 1}{h^2} \frac{h}{|h|} &= 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{h^2} - 1}{h^2} \frac{h}{|h|} &= -1 \end{aligned}$$

Como los límites laterales son distintos, entonces podemos afirmar que  $\nexists \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \quad \forall \vec{u}/|\vec{u}| = 1$ , al no existir las derivadas direccionales de  $f$  en  $(0,0)$ , las parciales tampoco.

$\therefore f$  no es diferenciable en  $(0,0)$

**Solución 2.** Como  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en todo su dominio por ser composición de funciones diferenciables, la ecuación de su plano tangente en el punto  $(1, 3)$  está dada por

$$z = f(1, 3) + \nabla f(1, 3)(x - 1, y - 3), \quad (3.7)$$

luego será suficiente con encontrar  $f(1, 3)$  y  $\nabla f(1, 3)$ .

Por un lado,  $h(1, -1) = f \circ g(1, -1) = f(1, 3) = 2$  y por otro lado, como  $f$  y  $g$  son ambas diferenciables, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\nabla h(1, -1) = \nabla(f \circ g)(1, -1) = \nabla f(g(1, -1)) D_g(1, -1) = \nabla f(1, 3) D_g(1, -1), \quad (3.8)$$

donde  $D_g$  es la matriz diferencial o jacobiana de  $g$ .

Hallemos  $D_g$

$$\begin{aligned} D_g(1, -1) &= \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) & \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 2y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 2y) \end{array} \right) \bigg|_{(1, -1)} \\ &= \left( \begin{array}{cc} y^2 & 2xy \\ 2x & -2 \end{array} \right) \bigg|_{(1, -1)} \\ &= \left( \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en a (3.11)

$$\nabla h(1, -1) = \nabla f(1, 3) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (f_x(1, 3) + 2f_y(1, 3), -2f_x(1, 3) - 2f_y(1, 3))$$

y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} f_x(1, 3) + 2f_y(1, 3) = 2 \\ -2f_x(1, 3) - 2f_y(1, 3) = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} f_x(1, 3) = 2 \\ f_y(1, 3) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \nabla f(1, 3) = (2, 0).$$

Reemplazando en (3.7)

$$z = 2 + (2, 0)(x - 1, y - 3)$$

Despejando, la ecuación del plano tangente al grafico de  $f$  en el punto  $(1, 3, f(1, 3))$  es

$$z - 2x = 0$$

**Solución 3.** En primer lugar, reescribimos el límite pedido

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(f-g)_{(x,y)}(f+g)_{(x,y)}}{|(x-1, y-2)|^2}$$

Dado que  $f$  y  $g$  son dos campos escalares de clase  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ , se define el polinomio de Taylor de primer orden centrado en  $(1, 2)$  de ambas funciones, que notaremos por  $P_2[f, (1, 2)]$ ,  $P_2[g, (1, 2)]$  como,

$$P_2[f, (1, 2)](x, y) = f(1, 2) + \nabla f(1, 2) \cdot (x-1, y-2) + \frac{1}{2}(x, y) \mathbf{H}_f(c_1, c_2) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$P_2[g, (1, 2)](x, y) = g(1, 2) + \nabla g(1, 2) \cdot (x-1, y-2) + \frac{1}{2}(x, y) \mathbf{H}_g(c'_1, c'_2) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

Sabemos que

$$(f-g)_{(x,y)} = P_2[(f-g), (1, 2)](x, y) + R_2[(f-g), (C, (x-1, y-2))]$$

Utilizando los datos de enunciado, podemos ver que

$$\begin{aligned} P_2[(f-g), (1, 2)](x, y) &= (f-g)_{(1,2)} + \nabla(f-g)_{(1,2)} \cdot (x-1, y-2) + \frac{1}{2}(x-1, y-2)^t \mathbf{H}_{(f-g)}(C) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow (f-g)_{(x,y)} &= R_2[(f-g), (C, (x-1, y-2))] \end{aligned}$$

Ademas, sabemos que,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{R_2[(f-g), (C, (x-1, y-2))]}{|(x-1, y-2)|^2} = 0$$

Utilizando los datos recién mencionados, y sabiendo que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (f+g)_{(x,y)} = L \in \mathbb{R}$  calculamos el límite solicitado

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(f-g)_{(x,y)}(f+g)_{(x,y)}}{|(x-1, y-2)|^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{R_2[(f-g), (C, (x-1, y-2))] \cdot (f+g)_{(x,y)}}{|(x-1, y-2)|^2} = 0$$

**Solución 4.** En este ejercicio debemos hallar los puntos mas lejanos y mas cercanos al origen de la función que denominaremos  $g(x, y, z) = \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1$ , para lo cual utilizaremos la función distancia:  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$   
Busco los mínimos de  $f$  restringidos al conjunto de nivel  $g(x, y, z) = 0$  utilizando los multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda \left( \frac{2x}{64}, \frac{2y}{36}, \frac{2z}{25} \right) \iff \begin{cases} x = \lambda \frac{x}{64} \\ y = \lambda \frac{y}{36} \\ z = \lambda \frac{z}{25} \end{cases}$$

Estas ecuaciones implican que 2 variables deben ser nulas para que el sistema tenga solución, entonces:

1- Si  $x \neq 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Rightarrow \lambda = 64 \Rightarrow x = \pm 8$

2- Si  $y \neq 0 \wedge x = 0 \wedge z = 0 \Rightarrow \lambda = 36 \Rightarrow y = \pm 6$

2- Si  $z \neq 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow \lambda = 36 \Rightarrow y = \pm 5$

De esta manera, encontramos 6 posibles máximos y mínimos de la función  $f$

$$P_1 = (8, 0, 0)$$

$$P_2 = (-8, 0, 0)$$

$$P_3 = (0, 6, 0)$$

$$P_4 = (0, -6, 0)$$

$$P_5 = (0, 0, 5)$$

$$P_6 = (0, 0, -5)$$

Por el teorema de valores extremos de Weierstrass, sean  $A \subset \mathbb{R}^3$  conjunto cerrado y acotado y  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  función continua, entonces  $f$  alcanza un máximo y mínimo absoluto en  $A$ .

De esta manera, reemplazando los puntos en  $f$  encontramos los máximos y mínimos de la misma, restringida en  $A$  (conjunto de nivel 0 de  $g$ ). Entonces podemos ver que los puntos más alejados del origen son el  $(8, 0, 0)$  y el  $(-8, 0, 0)$ , y que los más cercanos son el  $(0, 0, 5)$  y el  $(0, 0, -5)$

También, se puede ver de forma gráfica

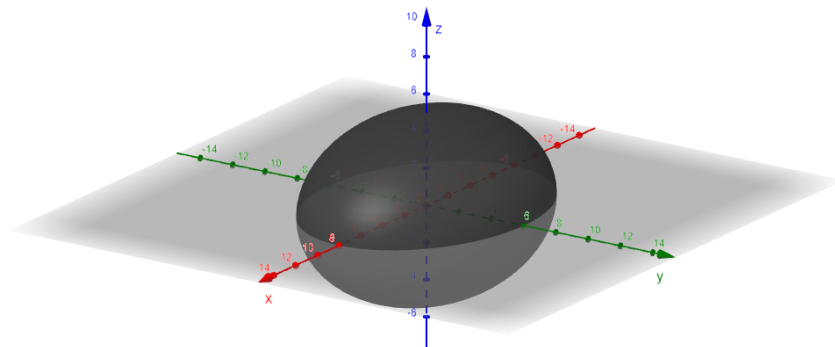


Figura 3.1: Gráfica de  $g(x, y, z)$ .

### 3.4 Fecha 18 de abril de 2024

**Ejercicio 1.** a) Calcular, si existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(x^{\frac{1}{3}}y)(e^{x^2+y^2} - 1)}{(x^2 + y^2)^2}$$

b) Calcular por definicion,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$$

**Ejercicio 2.** Sea  $f$  un campo escalar diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$  y sea  $\pi : 2x + 3y + 4z = 1$  el plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(1, 2, f(1, 2))$ . Hallar todos los vectores unitarios  $v$  tales que  $f_v(1, 2) = 0$ .

**Ejercicio 3.** Analizar la diferenciabilidad de  $f$  en  $(0,0)$  siendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Ejercicio 4.** Sean  $g(x, y) = (xy^2, x^2 - 2y)$  y  $h(x, y) = f \circ g(x, y)$  con  $f$  de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathbb{R}^2$ . Sabiendo que  $h(1, -1) = 2$  y que  $\nabla h(1, -1) = (2, -4)$ . Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{f(x, y) - 2x + (x - 1)^3}{\sqrt{(x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2}}$$



**Solución 1.** Para resolver el ítem a, se busca utilizar los notables conocidos de funciones del tipo  $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$  para resolver el límite pedido, en primer lugar se multiplica arriba y abajo por  $(x^{\frac{2}{3}}y^2)$  sabiendo que  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(x^{\frac{1}{3}}y)}{(x^{\frac{2}{3}}y^2)} \frac{(e^{x^2+y^2} - 1)}{(x^2 + y^2)} \frac{(x^{\frac{2}{3}}y^2)}{(x^2 + y^2)}$$

Primero se utiliza el límite notable conocido:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{e^t - 1}{t} \right) = 1$$

Llamamos  $t_1(x, y) = x^2 + y^2$  y sabemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} t_1(x, y) = 0$$

Definimos  $g_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}$  y realizando la composición  $f(x, y) = g_1 \circ t_1(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$  tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g_1 \circ t_1(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g_1(t_1(x, y)) = \lim_{t_1(x,y) \rightarrow 0} \frac{e^{t_1(x,y)} - 1}{t_1(x, y)} = 1$$

En segundo lugar, se utiliza el notable conocido:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(t)}{t^2} = 1$$

Llamamos  $t_2(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y$  y sabemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} t_2(x, y) = 0$$

Definimos  $g_2(z) = \frac{\sin^2(z)}{z^2}$  y realizando la composición  $f(x, y) = g_2 \circ t_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$  tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g_2 \circ t_2(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g_2(t_2(x, y)) = \lim_{t_2(x,y) \rightarrow 0} \frac{\sin^2(t_2(x, y))}{t_2(x, y)^2} = 1$$

De esta manera, se resuelve en un cálculo auxiliar el tercer término del límite solicitado

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^{\frac{2}{3}}y^2)}{(x^2 + y^2)} = 0$$

Ya que podemos utilizar la propiedad de acotada por cero:

$$0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$$

Por lo cual, finalmente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(x^{\frac{1}{3}}y)(e^{x^2+y^2} - 1)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Para el ítem b, se nos pide calcular el siguiente límite por definición

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$$

Sabemos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$$

si, para cada  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  /  $0 < |(x, y)| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon$ . Partimos de

$$\left| \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} - L \right| = \left| 3 + \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} - L \right|$$

Propongo  $L = 3$ , entonces

$$|f(x, y) - L| = \left| \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{5|x|y^2}{x^2 + y^2}$$

Sabemos que

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2$$

Por lo cual

$$\frac{5|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{5(\sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 5(\sqrt{x^2 + y^2}) < 5\delta$$

Basta con tomar  $\delta = \frac{\epsilon}{5}$  de manera que resulta

$$5(\sqrt{x^2 + y^2}) < 5\delta < \epsilon$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5xy^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} = 3$$

**Solución 2.** Sabemos que el plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(1, 2, f(1, 2))$  se escribe como:

$$z = f(1, 2) + \nabla f(1, 2)(x - 1, y - 2)$$

Además, se nos da de dato que el plano tangente de  $f$  en el punto  $(1, 2, f(1, 2))$  es  $\pi : 2x + 3y + 4z = 1$ , por lo cual lo vamos a reescribir de la siguiente forma:

$$z = -\frac{7}{4} + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)(x - 1, y - 2)$$

Por lo cual sabemos que,

$$\begin{aligned} f(1, 2) &= -\frac{7}{4} \\ \nabla f(1, 2) &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Como  $f$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $f$  admite todas sus derivadas direccionales en  $(1, 2)$  y además,  $f_v(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot v / \|\mathbf{v}\| = 1$ , de esta manera definimos un  $v = (v_1, v_2)$  y armamos un sistema de ecuaciones. y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)(v_1, v_2) = 0 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$$

De esta manera, obtenemos dos vectores resultantes:

$$\begin{aligned} v &= \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \\ v &= \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \end{aligned}$$

**Solución 3.** En primer lugar analizamos la continuidad, como  $f$  es una función partida, queremos demostrar que  $f$  es continua en  $(0,0)$  si:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

Este limite se analiza tomando curvas distintas:

1) Curva 1:  $\alpha_1(t) = (0, t) / \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_1(t) = (0, 0)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0^2 t^2}{0^2 t^2 + (0-t)^2} \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

2) Curva 2:  $\alpha_2(t) = (t, t) / \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_2(t) = (0, 0)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha_2(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 t^2}{t^2 t^2 + (t-t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 1 = 1$$

Sabemos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L \iff \lim_{t \rightarrow 0} f \circ \alpha(t) = L \forall \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

De esta manera, encontramos dos curvas cuyos limites no son iguales, por lo tanto  $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

Para responder a la consigna, utilizamos la siguiente proposicion:

Si  $f$  es diferenciable  $\Rightarrow f$  es continua

Entonces, utilizando el contrareciproco:

Si  $f$  no es continua  $\Rightarrow f$  no es diferenciable

$\therefore f$  no es diferenciable en  $(0,0)$

**Solución 4.** Sean  $g(x,y) = (xy^2, x^2 - 2y)$  y  $h(x,y) = f \circ g(x,y)$  con  $f$  de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$ . Sabiendo que  $h(1, -1) = 2$  y que  $\nabla h(1, -1) = (2, -4)$ . Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{f(x,y) - 2x + (x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2}}$$

Por un lado,  $h(1, -1) = f \circ g(1, -1) = f(1, 3) = 2$  y por otro lado, como  $f$  y  $g$  son ambas diferenciables, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\nabla h(1, -1) = \nabla(f \circ g)(1, -1) = \nabla f(g(1, -1)) D_g(1, -1) = \nabla f(1, 3) D_g(1, -1), \quad (3.11)$$

donde  $D_g$  es la matriz diferencial o jacobiana de  $g$ .

Hallemos  $D_g$

$$\begin{aligned} D_g(1, -1) &= \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) & \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 2y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 2y) \end{array} \right) \bigg|_{(1, -1)} \\ &= \left( \begin{array}{cc} y^2 & 2xy \\ 2x & -2 \end{array} \right) \bigg|_{(1, -1)} \\ &= \left( \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en a (3.11)

$$\nabla h(1, -1) = \nabla f(1, 3) \left( \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{array} \right) = (f_x(1, 3) + 2f_y(1, 3), -2f_x(1, 3) - 2f_y(1, 3))$$

y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} f_x(1, 3) + 2f_y(1, 3) = 2 \\ -2f_x(1, 3) - 2f_y(1, 3) = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} f_x(1, 3) = 2 \\ f_y(1, 3) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \nabla f(1, 3) = (2, 0).$$

Entonces la ecuación del plano tangente al grafico de  $f$  en el punto  $(1, 3, f(1, 3))$  es  $z = 2x$ , ahora se analiza el limite solicitado separandolo en dos partes

$$\begin{aligned} &\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 3)} \frac{f(x, y) - 2x + (x - 1)^3}{\sqrt{(x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \\ &\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 3)} \frac{f(x, y) - 2x}{\sqrt{(x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2}} + \frac{(x - 1)^3}{\sqrt{(x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \end{aligned}$$

En primer lugar, buscamos acotar la funcion

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \leq (x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \\ 0 &\leq \frac{1}{\sqrt{(x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \\ 0 &\leq \frac{|f(x, y) - 2x|}{\sqrt{(x - 1)^4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \leq \frac{|f(x, y) - 2x|}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \end{aligned}$$

Ademas sabemos que  $f$  es C1, que el plano tangente de  $f$  en el punto  $(1, 3)$  es:  $z = 2x$  y que  $\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} = |(x - 1, y - 3)|$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 3)} \frac{f(x, y) - 2x}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}} = 0$$

Utilizando la regla del sandwich

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{|f(x,y) - 2x|}{\sqrt{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2}} = 0$$

Y por ultimo tenemos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} g(x,y) = 0 \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} |g(x,y)| = 0$ , entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{f(x,y) - 2x}{\sqrt{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2}} = 0$$

En segundo lugar, se analiza el segundo termino del limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2}}$$

Donde repetimos la misma cota que antes

$$0 \leq \frac{1}{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2} \leq \frac{1}{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

$$0 \leq \frac{|(x-1)^3|}{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2} \leq \frac{|(x-1)^3|}{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

donde

$$(x-1)^2 \leq (x-1)^2 + (y-3)^2$$

$$|(x-1)| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

$$|(x-1)^3| \leq (\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2})^3$$

de manera que

$$0 \leq \frac{|(x-1)^3|}{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

Utilizando el teorema del sandwich y la propiedad donde  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} g(x,y) = 0 \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} |g(x,y)| = 0$ , entonces resulta que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2}} = 0$$

Por lo cual, finalmente se analiza en completo el limite solicitado

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{f(x,y) - 2x + (x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4 + (x-1)^2 + (y-3)^2}} = 0$$

### 3.5 Fecha Recuperatorio 2cuatri 2022

**Ejercicio 1.** Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^3 - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

probar que no existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  sea clase  $\mathcal{C}^2$  en  $B_\delta(0, 0)$ .

**Ejercicio 2.** Calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{2x}e^{3y} - 1 - 2x - 3y - 3x^2 - 6yx - \frac{11}{2}y^2}{x^2 + y^2}$$

**Ejercicio 3.** Sea  $S$  el conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^3$  que forman la esfera de centro  $(3, 4, 5)$  tal que el  $(0, 0, 0) \in S$ .

- a. Hallar el plano tangente a  $S$  en  $(0, 0, 0)$ .
- b. Hallar otro plano que sea tangente a  $S$  y paralelo al del ítem a.

**Ejercicio 4.** Hallar los puntos de  $A : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$  que realicen la distancia mínima y máxima al origen.

**Solución 1.** Por el teorema de Schwartz sabemos que si  $f \in \mathcal{C}^2$  en  $B_\delta(0,0)$  entonces

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \quad \forall (x,y) \in B_\delta(0,0).$$

En particular, debería pasar que  $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ . Veamos que esto último no sucede.

$$f_x(x,y) = \frac{(3yx^2 - y^3)(x^2 + y^2) - (yx^3 - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3.12)$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - (yx^3 - xy^3)2y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3.13)$$

Para  $(x,y) = (0,0)$ , calculamos las derivadas por definición.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Ya tenemos definidas las derivadas parciales de  $f$  en todo  $\mathbb{R}^2$ .

$$f_x(x,y) = \begin{cases} (3.12) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} (3.13) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Ahora podemos calcular las derivadas parciales cruzadas de segundo orden por definición.

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} \quad (3.14)$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} \quad (3.15)$$

Por (3.12) y (3.13), se puede observar que

$$f_x(0,h) = -h \text{ y } f_y(h,0) = h.$$

Entonces por (3.14) Y (3.15)

$$f_{xy}(0,0) = -1 \neq f_{yx}(0,0) = 1.$$

$\therefore$  no existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  sea clase  $\mathcal{C}^2$  en  $B_\delta(0,0)$ .



**Solución 2.** Para resolverlo debemos intuir que está conformado por el límite de buena aproximación de un polinomio de Taylor de segundo orden centrado en el origen de una función. Buscamos una expresión para dicho polinomio y para la función.

Llamemos  $f(x, y) = e^{2x}e^{3y}$ , notemos que  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ . Entonces, podemos definir su polinomio de Taylor de segundo orden centrado en el origen,  $P_2(x, y)$ , y además vale el teorema de resto de Taylor

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) + \frac{1}{2}(x, y)\mathbf{H}_f(0, 0)(x, y)^T,$$

siendo  $\mathbf{H}_f(0, 0)$  la matriz hessiana de  $f$  evaluada en el origen.

Tenemos que

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 1, \\ \nabla f(x, y) &= (2e^{2x}e^{3y}, 3e^{2x}e^{3y}) \implies \nabla f(0, 0) = (2, 3), \\ \mathbf{H}_f(x, y) &= \begin{pmatrix} 4e^{2x}e^{3y} & 6e^{2x}e^{3y} \\ 6e^{2x}e^{3y} & 9e^{2x}e^{3y} \end{pmatrix} \implies \mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces queda

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= 1 + (2, 3) \cdot (x, y) + \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \iff P_2(x, y) &= 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}y^2. \end{aligned}$$

Expresamos el error como

$$R_2(x, y) = f(x, y) - P_2(x, y).$$

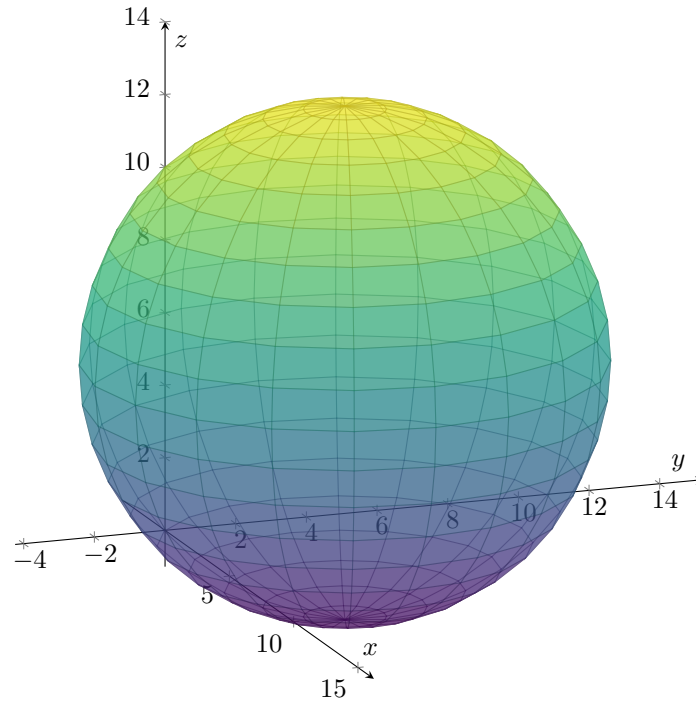
Por tanto, podemos reescribir el límite original como

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{R_2(x, y) - x^2 - y^2}{\|(x, y)\|^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left( \frac{R_2(x, y)}{\|(x, y)\|^2} - \frac{x^2 + y^2}{\|(x, y)\|^2} \right) = -1,$$

pues el primer término tiende a 0 por el teorema de Taylor y el segundo tiende claramente a 1.

**Solución 3.** a. Dado que el origen pertenece a  $S$  y conocemos su centro, podemos hallar la ecuación de la esfera.

$$S : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 50$$



Llamando

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 - 50$$

tenemos que

$$S = C(f, 0).$$

Buscamos el plano  $\Pi$ , tangente a  $C(f, 0)$  y que pase por  $(0, 0, 0)$ . Sabemos que la ecuación de  $\Pi$  es de la forma

$$\Pi : \nabla f(0, 0, 0) \cdot (x - 0, y - 0, z - 0) = 0.$$

Es fácil ver que  $\nabla f(0, 0, 0) = (-6, -8, -10)$ . Luego, una posible ecuación es

$$\Pi : 3x + 4y + 5z = 0.$$

b. Dado que el único plano paralelo a otro tangente a un punto en una esfera es el que se encuentra en el polo opuesto de ésta, buscamos el plano tangente  $\Pi'$  a ese otro punto  $\mathbf{w}$ . Llamando  $\mathbf{v} = (-3, -4, -5)$  al vector que sale del centro de la esfera y termina en el origen, queda que

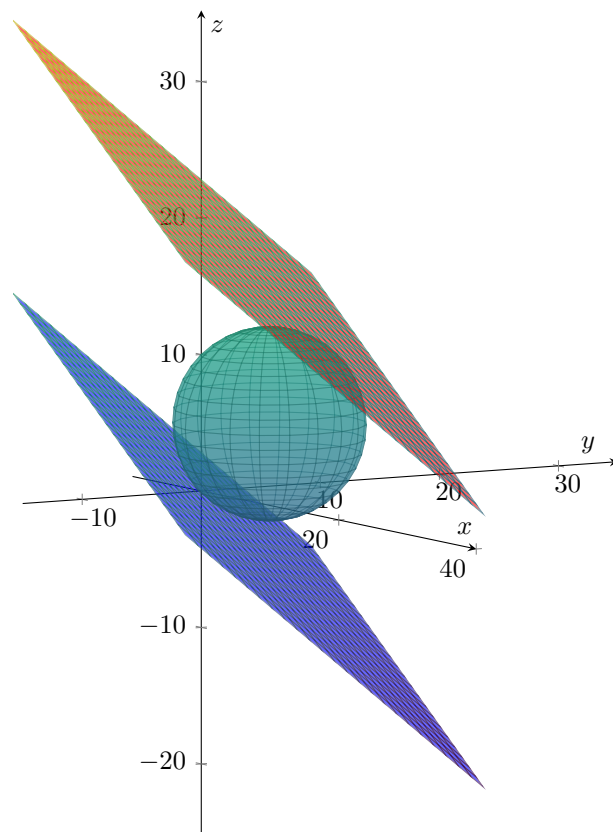
$$\mathbf{w} = (3, 4, 5) - \mathbf{v} = (6, 8, 10).$$

Como  $\Pi$  y  $\Pi'$  son paralelos, su vector normal  $\mathbf{n}$  es el mismo.

$$\implies \Pi' : \mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - \mathbf{w}) = 0$$

$$\iff \Pi' : 3(x - 6) + 4(y - 8) + 5(z - 10) = 0$$

$$\iff \Pi' : 3x + 4y + 5z = 100$$



**Solución 4.** Sean

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \text{dist}^2((x, y); (0, 0)) = x^2 + y^2$$

y

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 4,$$

luego  $A = C(g, 0)$ .

Como  $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^1)$ , el teorema de los multiplicadores de Lagrange nos dice que si  $f|_A$  tiene un extremo local en un punto  $\mathbf{x}$  entonces necesariamente los vectores  $\nabla f(\mathbf{x})$  y  $\nabla g(\mathbf{x})$  son paralelos si  $\nabla g(\mathbf{x}) \neq 0$ . Además como  $f$  es continua sobre el conjunto  $A$  que es cerrado y acotado, por el teorema de Weierstrass, sabemos que  $f$  alcanza máximo y mínimo en  $A$ . Luego planteamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in A \iff \begin{cases} 2x = 2\lambda(x - 1) \\ 2y = 2\lambda(y - 1) \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema queda  $x = y$  y

$$\begin{cases} x = x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x = x_2 = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

$\implies (x_1, x_1)$  y  $(x_2, x_2)$  son ambos extremos absolutos de la función  $f$  en  $A$ . Como  $f(x_1, x_1) > f(x_2, x_2) \implies (x_1, x_1)$  es máximo absoluto y  $(x_2, x_2)$  es mínimo absoluto.

Luego la distancia mínima del círculo al origen es  $\sqrt{f(x_2, x_2)} = 2 - \sqrt{2}$  y la distancia máxima  $\sqrt{f(x_1, x_1)} = 2 + \sqrt{2}$ .

## Segundos parciales resueltos

### 4.1 Fecha 25 de junio de 2023

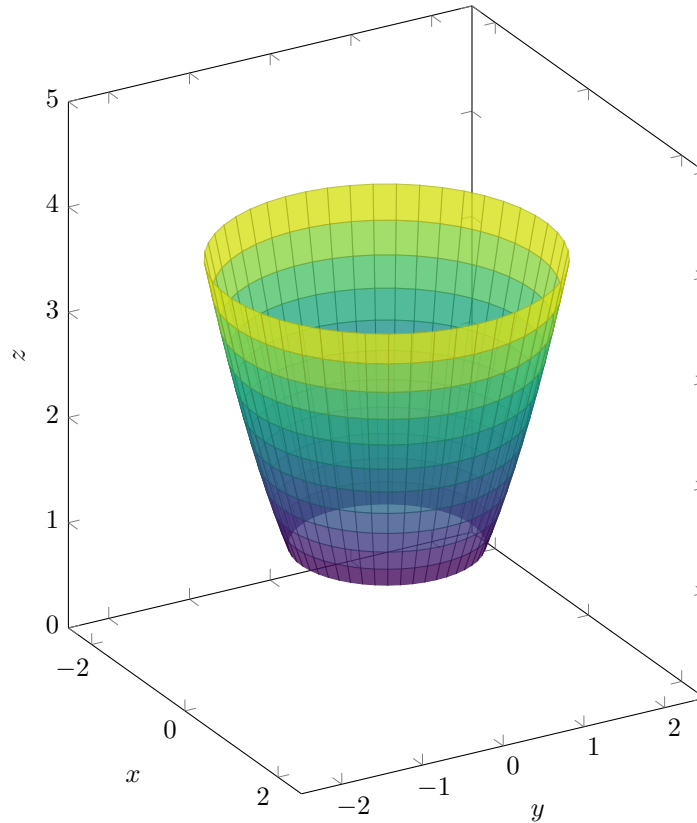
**Ejercicio 1.** Sea  $S$  la superficie dada por  $x^2 + y^2 = z$  con  $z \geq 1$  y  $x^2 + y^2 \leq 4$  y sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo de clase  $C^1$  con tercer componente nula y  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  constante 3. Calcular el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  indicando la orientación elegida.

**Ejercicio 2.** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - 2xz, 2xy + z^3, 3yz^2 - x^2)$  y sea  $C$  una curva simple parametrizada por  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\sigma(0) = (0, 0, 0)$  y  $\sigma(1) = (1, 2, 0)$ . Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  indicando la orientación elegida.

**Ejercicio 3.** Calcular la masa del cuerpo limitado por las ecuaciones  $y - x = 1$  y  $x^2 + z^2 = 1$  en el primer octante con función de densidad  $\rho$  constante.

**Ejercicio 4.** Sean  $k \in \mathbb{R}$ , un campo vectorial  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  tal que  $\nabla \times \mathbf{F} = k$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 ; x \leq y \leq 1\}$ . Hallar  $k$  tal que  $\int_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 8$ .

**Solución 1.** Es útil primero entender con qué superficies y regiones se trabajará.



La idea es aplicar el teorema de Gauss pero  $S$  no es una superficie cerrada. Para ello pensemos en una superficie  $S'$  cerrada tal que  $S \subseteq S'$ . Definamos  $S' = S \cup S_1 \cup S_2$ , donde  $S_1$  y  $S_2$ , son las “tapas” del paraboloid “cortado”. Algebraicamente  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = 1\}$  y  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = 4\}$ .

Llamando  $\Omega$  al cuerpo encerrado por  $S'$  y orientando a  $S'$  de manera exterior estamos en condiciones de usar el teorema de Gauss.

$$\begin{aligned} \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \\ \Leftrightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} - \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \\ \Leftrightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= I_1 - I_2 - I_3 \end{aligned}$$

Resolvemos el primer término.

$$I_1 = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_{\Omega} 3 \, dV = 3 \operatorname{Vol}(\Omega)$$

Pasando a  $\Omega$  en coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

donde,

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{z} \wedge 0 \leq \phi \leq 2\pi \wedge 1 \leq z \leq 4.$$

Entonces nos queda

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_1^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz = 2\pi \int_1^4 \left( \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{z}} \right) dz = \pi \int_1^4 z \, dz = \frac{15\pi}{2}.$$

Luego,  $I_1 = \frac{45}{2}\pi$ .

Para calcular  $I_2$  debemos parametrizar  $S_1$ . Sea  $D_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$  y sea

$$\Sigma : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \Sigma(u, v) = (u, v, 1).$$

Entonces podemos reescribir

$$I_2 = \iint_{D_1} (\mathbf{F} \circ \Sigma) \cdot (\Sigma_u \times \Sigma_v) \, d\mathbf{A}.$$

Primero calculamos las derivadas parciales de la parametrización.

$$\begin{aligned} \Sigma_u &= (1, 0, 0) \\ \Sigma_v &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

Entonces

$$\Sigma_u \times \Sigma_v = (0, 0, 1) = \boldsymbol{\eta}.$$

Podemos observar que  $\boldsymbol{\eta}$  no preserva la orientación para  $S_1$  heredada por la orientación exterior de  $S'$  elegida anteriormente para poder aplicar el teorema de Gauss. En otras palabras,  $\boldsymbol{\eta}$  “apunta” hacia el interior de  $\Omega$ . Por lo que,

$$I_2 = - \iint_{D_1} (\mathbf{F} \circ \Sigma) \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{A}.$$

Calculamos el integrando aparte. Acordémonos que la tercer coordenada de  $\mathbf{F}$  es nula. Podemos llamar

$$\mathbf{F} \circ \Sigma = (P, Q, 0),$$

entonces nos queda que

$$(\mathbf{F} \circ \Sigma) \cdot \boldsymbol{\eta} = (P, Q, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0.$$

Por lo tanto  $I_2 = 0$ .

Procediendo de la misma manera nos daremos cuenta que también  $I_3 = 0$ .

$$\therefore \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = I_1 = \frac{45}{2}\pi$$

**Solución 2.** Busquemos, si existe, una función potencial para  $\mathbf{F}$ , es decir, busquemos  $f$  tal que  $\nabla f = \mathbf{F}$ . Para ello, planteamos el sistema de tres ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{cases} y^2 - 2xz = f_x \\ 2xy + z^3 = f_y \\ 3yz^2 - x^2 = f_z \end{cases}$$

Entonces

$$\int f_x(x, y, z) dx = y^2x - zx^2 + g(y, z) = f(x, y, z), \quad (4.1)$$

donde  $g$  es la constante con respecto a  $x$  producto de la integración. Derivando (4.1) con respecto a  $y$  obtenemos

$$f_y(x, y, z) = 2yx + g_y(y, z)$$

$$2yx + g_y(y, z) = 2xy + z^3 \implies g_y(y, z) = z^3$$

$$g(y, z) = \int g_y(y, z) dy = z^3y + h(z).$$

Reemplazando en la ecuación (4.1),

$$y^2x - zx^2 + z^3 + h(z) = f(x, y, z). \quad (4.2)$$

Derivando (4.2) con respecto a  $z$  obtenemos

$$f_z(x, y, z) = -x^2 + 3yz^2 + h_z(z)$$

$$-x^2 + 3yz^2 + h_z(z) = 3yz^2 - x^2 \implies h_z(z) = 0$$

$$h(z) = C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto llegamos a una familia de soluciones.

$$f(x, y, z) = y^2x - zx^2 + z^3 + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Demostramos que  $\mathbf{F}$  es un campo conservativo pues  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Luego, podemos calcular

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f(1, 2, 0) - f(0, 0, 0) = 4.$$

**Solución 3.** La masa de un cuerpo de volumen  $\Omega$  es

$$M = \iiint_{\Omega} \rho dV.$$

En este caso

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1 \wedge y \leq 1 + x \wedge x, y, z \geq 0\}.$$

Conviene trabajar en coordenadas cilíndricas. Sea

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = y \\ z = r \sin \phi. \end{cases}$$

Entonces en el nuevo sistema de coordenadas

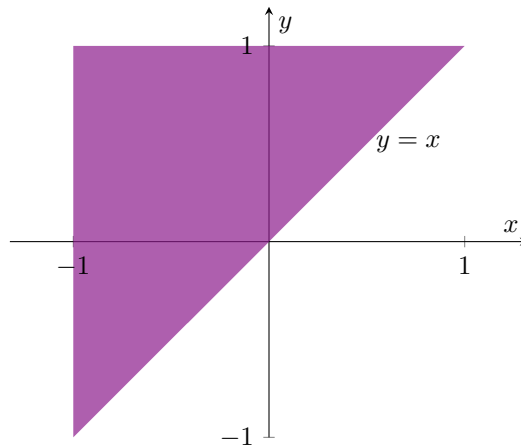
$$\Omega^* = \{(r, \phi, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 + r \cos \phi \wedge 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Ahora podemos reescribir, dado que  $\rho$  es constante,

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{\rho} &= \iiint_{\Omega^*} r \, dy \, d\phi \, dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1+r \sin \phi} r \, dy \, d\phi \, dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(1 + r \sin \phi) \, d\phi \, dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r + r^2 \sin \phi) \, d\phi \, dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \, d\phi \, dr + \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \phi \, d\phi \, dr \\
 &= \int_0^1 r \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi + \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \, d\phi \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\therefore M = \rho \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \right)$$

**Solución 4.** La región  $D$  se grafica de la siguiente manera.



Podemos observar que  $D$  es simplemente conexo y que  $\partial D$  es una curva simple cerrada, por lo tanto vale el teorema de Green.

$$\oint_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = k \iint_D dA = 8$$

Nos quedaría calcular el  $A(D)$ , área de  $D$ , que, por ser un triángulo, se puede calcular simplemente.

$$A(D) = \iint_D dA = \frac{4}{2} = 2$$

Entonces nos queda

$$2k = 8 \iff k = 4.$$



## 4.2 Fecha recuperatorio 29 de junio de 2023

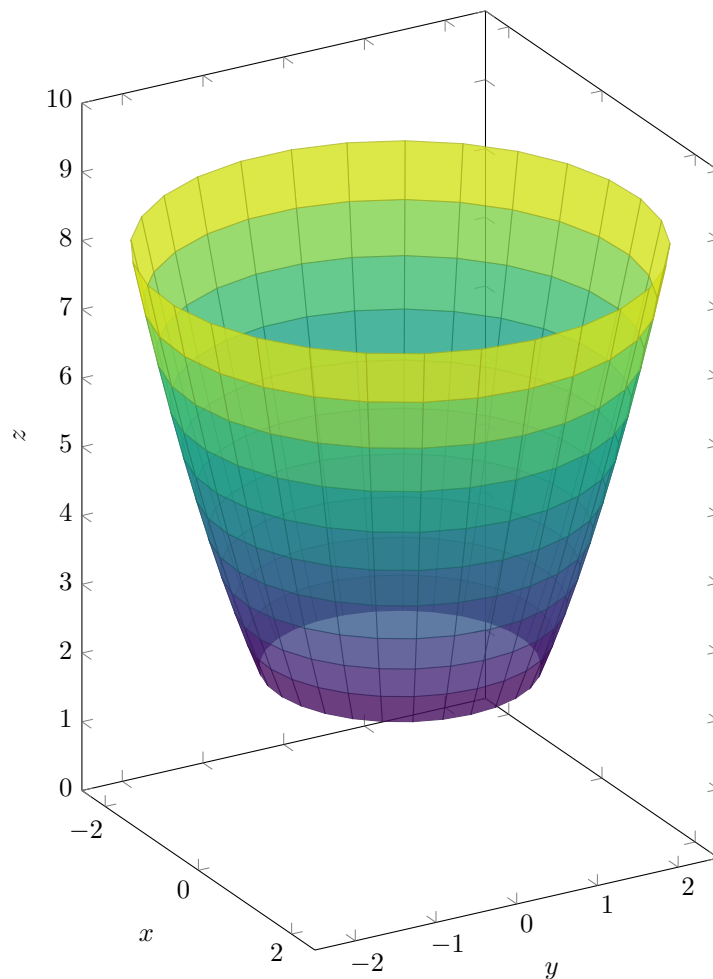
**Ejercicio 1.** Sea  $S$  la superficie dada por  $x^2 + y^2 = z$  con  $z \geq 2$  y  $x^2 + y^2 \leq 9$ . Calcular el área de  $S$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $C$  la curva simple definida por la intersección de las superficies  $x^2 + z^2 = 16$ ,  $y + z = 4$  con  $y \leq 4$  y sea  $g$  una función escalar  $C^1(\mathbb{R})$ . Calcular la integral sobre  $C$  del campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, g(y), g(z))$ . Indicar la orientación elegida.

**Ejercicio 3.** Sean  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-xy + yz, -y^2 + xz, xz)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  positivo y  $S$  la superficie de seis caras que encierra el cuerpo dado por  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$  y  $0 \leq z \leq a$  orientada con normales exteriores. Hallar  $a$  de manera que el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  sin su cara superior sea  $-24$ .

**Ejercicio 4.** Calcule la masa del cuerpo definido por  $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 32$ , en el primer octante, si su densidad es proporcional a la distancia de un punto al plano  $z = 0$ .

**Solución 1.**  $S$  es una sección de paraboloide, como se puede observar en el siguiente gráfico.



Escribimos el conjunto  $S$  como

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z; 2 \leq z \leq 9\}.$$

Queremos calcular

$$A(S) = \iint_S dA.$$

Para ello necesitaremos una parametrización de  $S$ . Sea

$$D = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2} \leq \rho \leq 3; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

y sea

$$\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \Sigma(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, \rho^2).$$

Primero calculamos las derivadas parciales de la parametrización.

$$\Sigma_\rho = (\cos \phi, \sin \phi, 2\rho)$$

$$\Sigma_\phi = (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, 0)$$

Entonces

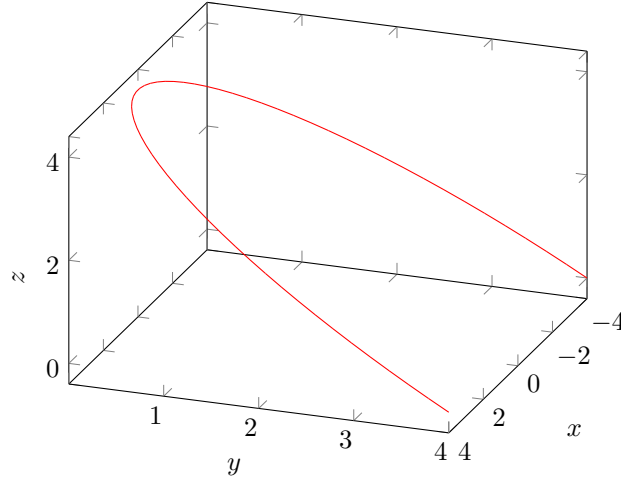
$$\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi = (-2\rho^2 \cos \phi, -2\rho^2 \sin \phi, \rho),$$

$$\|\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi\| = \rho\sqrt{4\rho^2 + 1}.$$

Quedando

$$\begin{aligned} \iint_S dA &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^3 \|\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi\| \, d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^3 \rho\sqrt{4\rho^2 + 1} \, d\rho d\phi, \\ u &= 4\rho^2 + 1 \rightarrow du = 8\rho \, d\rho, \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_9^{37} \sqrt{u} \, dud\phi = \frac{2\pi}{8} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_9^{37} = \frac{\pi}{4 \cdot \frac{3}{2}} (37^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{\pi}{6} (\sqrt{37^3} - \sqrt{9^3}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

**Solución 2.** La curva de la intersección se muestra en el siguiente gráfico.



Notemos que  $C$  es una curva no cerrada. Para cerrarla, llamemos  $C = C_1$ ,  $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \wedge y = 4 \wedge |x| \leq 4\}$ , en palabras,  $C_2$  es la recta que une la curva; y  $C_0 = C_1 + C_2$ . Y sea  $\text{int}(C_0) = D$ . Ahora  $C_0$  es una curva simple cerrada. Entonces podemos aplicar el teorema de Stokes, eligiendo la orientación de  $C_0$  tal que se cumpla la regla de la mano derecha.

$$\oint_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A},$$

ya que  $\mathbf{F}$  es  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , pues sus componentes son  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , y  $D \in \text{dom}(\mathbf{F})$ . Notemos que  $\nabla \times \mathbf{F} \equiv 0 \implies$

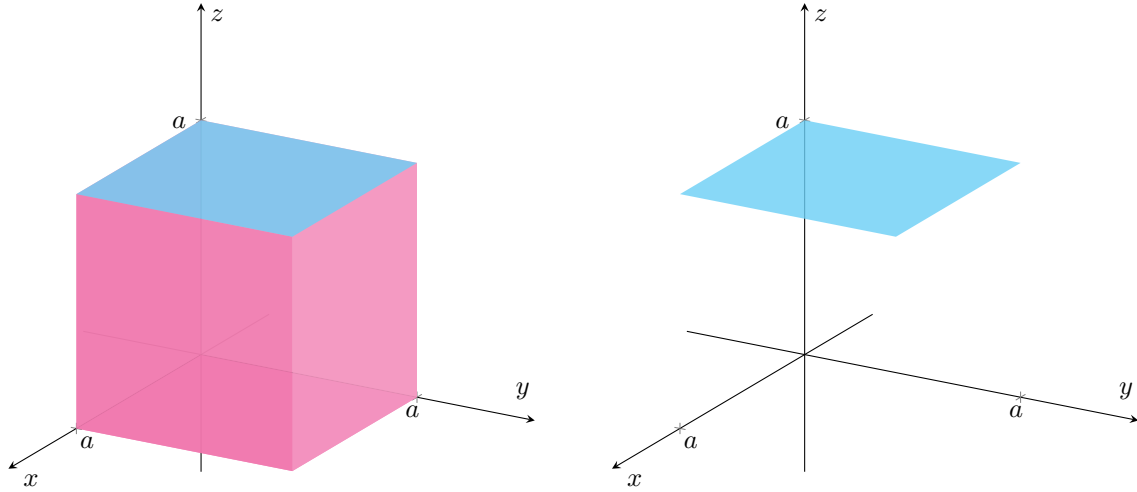
$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Ahora busquemos una trayectoria de  $C_2$  que respete su orientación. Sea  $\sigma : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\sigma(t) = (t, 4, 0)$ . Entonces  $\sigma'(t) = (1, 0, 0)$ . Luego la integral de curva de  $C_2$  es

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-4}^4 (\mathbf{F} \circ \sigma) \cdot \sigma' \, dt = \int_{-4}^4 t \, dt = 0.$$

$\therefore$  la integral sobre la curva original  $C = C_1$  es también 0.

**Solución 3.** Llamemos  $\Omega$  al volumen que encierra  $S$  y sea  $S'$  la superficie de la cara superior de  $S$ , por lo que  $S'$  tiene orientación igual que la tapa de  $S$ . En los siguientes gráficos se puede ver la representación de  $S$  y  $S'$  respectivamente.



Por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV.$$

Entonces la integral de flujo que buscamos es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = -24.$$

Primero calculamos el término con la divergencia de  $\mathbf{F}$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -y - 2y + x = x - 3y$$

$$\Rightarrow \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \int_0^a \int_0^a \int_0^a x - 3y \, dx dy dz$$

$$\Leftrightarrow a \int_0^a \left( \frac{x^2}{2} - 3yx \right) \Big|_0^a dy = a \int_0^a \frac{a^2}{2} - 3ya \, dy$$

$$\Leftrightarrow a \left( \frac{a^2}{2} y - 3a \frac{y^2}{2} \right) = \frac{a^4}{2} - 3 \frac{a^4}{2} = -a^4$$

Segundo, el flujo sobre la tapa. Sea  $\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S' \subset \mathbb{R}^3$ , una parametrización de  $S'$  tal que  $\Sigma(u, v) = (u, v, a)$ . Donde  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq a; 0 \leq v \leq a\}$ . Entonces

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iint_D \mathbf{F} \circ \Sigma \cdot (\Sigma_u \times \Sigma_v) \, dA.$$

$\Sigma_u = (1, 0, 0)$  y  $\Sigma_v = (0, 1, 0) \Rightarrow \Sigma_u \times \Sigma_v = (0, 0, 1) = \boldsymbol{\eta}$ . Por lo que  $\Sigma$  respeta la orientación de  $S'$ . Y  $\mathbf{F} \circ \Sigma = (-uv + va, -v^2 + ua, ua) \Rightarrow \mathbf{F} \circ \Sigma \cdot \boldsymbol{\eta} = ua$ . Por lo tanto

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_0^a \int_0^a au \, du dv = a^2 \frac{a^2}{2} = \frac{a^4}{2}.$$

$$\therefore -a^4 - \frac{a^4}{2} = -24 \Leftrightarrow \frac{3}{2}a^4 = 24 \Leftrightarrow a^4 = 16 \Leftrightarrow a = 2.$$

**Solución 4.** La distancia  $d$  de un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  en el primer octante a el plano  $z = 0$  está dada por

$$d((x_0, y_0, z_0); (x_0, y_0, 0)) = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2 + z_0^2} = z_0.$$

Luego la función de densidad del sólido es  $\delta(z) = kz$ , con  $k \in \mathbb{R}$ . Además sea

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 32 \wedge x, y, z \geq 0\}.$$

Trabajaremos en coordenadas esféricas. En este sentido, recordemos lo siguiente.

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

Por las condiciones de  $\Omega$  tenemos que

$$z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \iff \rho \cos \phi \leq \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi} = \rho |\sin \phi|.$$

Además, como estamos en el primer octante, nos queda que  $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  y  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Por otro lado,

$$\rho^2 \leq 32 \wedge \rho \geq 0 \iff 0 \leq \rho \leq \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Escribimos nuestro nuevo volumen  $\Omega^*$  y usamos el teorema de cambio de variables.

$$\Omega^* = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 4\sqrt{2} \wedge 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Y la masa del sólido  $\Omega$  queda

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega^*} k\delta(z)\rho^2 \sin \phi \, dV = \iiint_{\Omega^*} k\rho \cos \phi \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{4\sqrt{2}} \rho^3 \cos \phi \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= k2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \phi \sin \phi \, d\phi \int_0^{4\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \\ &= k2\pi \frac{1}{4} 256 = 128k\pi. \end{aligned}$$

### 4.3 Fecha 18 de noviembre de 2023

**Ejercicio 1.** Hallar  $a \in \mathbb{R}$  positivo tal que el volumen encerrado por las superficies  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $z = a(x^2 + y^2)$  sea igual a  $\frac{\pi}{6}$ .

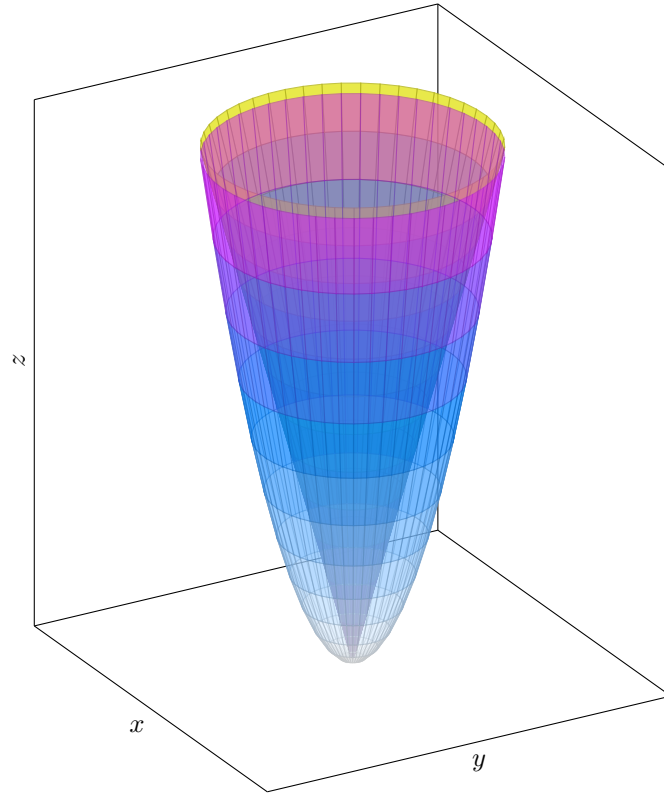
**Ejercicio 2.** Sea  $S$  la superficie parametrizada por  $\Sigma : [-2, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\Sigma(u, v) = (u + v, u - 2v, u^2 + v^2)$ . Hallar las ecuaciones de todos los planos tangentes a  $S$  que resulten paralelos al plano  $x + y + z = 0$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $C$  una curva simple parametrizada por  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\sigma(0) = \sigma(1)$  y sea el campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - 2xz + g(x), 2xy + z^3 - g(y), 3yz^2 - x^2)$  con  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$ . Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $C$  la curva simple formada por los segmentos  $y = 0$  si  $x \in [1, 2]$  y  $x = 0$  si  $y \in [1, 2]$ , y por las curvas  $y = \sqrt{4 - x^2}$  y  $y = \sqrt{1 - x^2}$  ambas en el primer cuadrante. Calcular, indicando la orientación elegida,

$$\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

**Solución 1.** Primero, es útil reconocer qué superficies son las que encierran el volumen.



El volumen encerrado  $\Omega$ , entonces, es aquel entre el semicono  $S_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y el paraboloide elíptico  $S_2 : z = a(x^2 + y^2)$ . La intersección de ambas superficies sucede, arbitrariamente, para  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , y, con  $z \neq 0$ , para los puntos:

$$\begin{aligned} a(x^2 + y^2) &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ a\sqrt{x^2 + y^2} &= 1 \\ x^2 + y^2 &= \frac{1}{a} \quad , \quad a \neq 0 \end{aligned}$$

Puesto que tales puntos pertenecen a ambas superficies, la curva intersección es

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{1}{a} \wedge z = \frac{1}{a} \right\}.$$

Así, se puede representar el volumen en coordenadas cartesianas como

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a(x^2 + y^2) \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{a} \right\}.$$

Sin embargo, la representación elemental del conjunto es más conveniente en coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

De tal forma que resulta

$$\Omega = \left\{ (\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \phi < 2\pi \wedge a\rho^2 \leq z \leq \rho \wedge 0 \leq \rho \leq \frac{1}{a} \right\}.$$

Ahora, queda encontrar cual es ese volumen encerrado, realizando la integral, en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dV \\
 &= \iiint_{\Omega} dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega} \rho d\phi dz d\rho \\
 &= \int_0^{\frac{1}{a}} \int_{a\rho^2}^{\rho} \int_0^{2\pi} \rho d\phi dz d\rho \\
 &= \int_0^{\frac{1}{a}} \int_{a\rho^2}^{\rho} \rho \phi|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dz d\rho \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} \int_{a\rho^2}^{\rho} \rho dz d\rho \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} \rho z|_{z=a\rho^2}^{z=\rho} d\rho \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{a}} (\rho^2 - a\rho^3) d\rho \\
 &= 2\pi \left( \frac{\rho^3}{3} - a\frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{a}} \\
 &= 2\pi \left( \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{4a^3} \right) \\
 \text{Vol}(\Omega) &= \frac{\pi}{6a^3} \quad , \quad a \in \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$

Luego, para encontrar  $a$ , la restricción es que el volumen encerrado, es decir, el valor de la integral anterior, sea  $\frac{\pi}{6}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(\Omega) &= \frac{\pi}{6} \\
 \frac{\pi}{6a^3} &= \frac{\pi}{6} \\
 a^3 &= 1 \\
 \therefore a &= 1
 \end{aligned}$$

**Solución 2.** Para este ejercicio, la visualización de la superficie es difícil sin usar una herramienta graficadora. Sin embargo, sabemos que el vector normal al plano tangente punto a punto de la superficie, se calcula, usando la parametrización, como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_S(u, v) &= \Sigma_{\mathbf{u}}(u, v) \times \Sigma_{\mathbf{v}}(u, v) \\
 \mathbf{n}_S(u, v) &= (1, 1, 2u) \times (1, -2, 2v) \\
 \mathbf{n}_S(u, v) &= (2v + 4u, 2u - 2v, -3)
 \end{aligned}$$

Para que un plano tangente sea paralelo al plano  $x + y + z = 0$ , sus vectores normales deben ser paralelos. El vector normal al plano anterior,  $\mathbf{n}_P$ , es:

$$\mathbf{n}_P \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

Con  $x_0$  un punto perteneciente al plano. En este caso, tomando  $x_0 = (0, 0, 0)$ :

$$\mathbf{n}_P \cdot (x, y, z) = 0 = x + y + z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_P = (1, 1, 1)$$



Ahora, para pedir que  $\mathbf{n}_P \parallel \mathbf{n}_S$ , es equivalente pedir, para un  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_S &= k \cdot \mathbf{n}_P \\ (2v + 4u, 2u - 2v, -3) &= k(1, 1, 1)\end{aligned}$$

Lo que resulta en un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\begin{cases} k = (4u + 2v) \\ k = (2u - 2v) \\ k = -3 \end{cases}$$

De la tercera ecuación se obtiene  $k = -3$ , y de sumar la primera y la segunda, reemplazando este valor anterior:

$$\begin{aligned}2(-3) &= 6u \\ -6 &= 6u \\ \Rightarrow u &= -1\end{aligned}$$

Reemplazando en cualquiera de las dos primeras ecuaciones, se obtiene la solución al sistema con  $\{u = -1 \wedge v = \frac{1}{2}\}$ . Entonces, existe un único punto cuyo plano tangente es paralelo al plano  $x + y + z = 0$ , que es

$$(x, y, z) = \Sigma \left( -1, \frac{1}{2} \right) = \left( -\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4} \right).$$

La ecuación del plano tangente de este punto sobre la curva  $S$  es:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_S \left( -1, \frac{1}{2} \right) \cdot \left( (x, y, z) - \left( -\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4} \right) \right) &= 0 \\ (-3)(1, 1, 1) \cdot \left( (x, y, z) - \left( -\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4} \right) \right) &= 0 \\ (1, 1, 1) \cdot \left( (x, y, z) - \left( -\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{4} \right) \right) &= 0 \\ \therefore \Pi : \left( x + \frac{1}{2} \right) + (y + 2) + \left( z - \frac{5}{4} \right) &= 0\end{aligned}\tag{4.4}$$

**Solución 3.** En principio, no sabemos la expresión de la parametrización de la curva. La única información que tenemos es que es una curva simple y cerrada, puesto que sus valores inicial y final son iguales. Sin embargo, tenemos la expresión del campo  $\mathbf{F}$ , cuya integral sobre la curva  $C$  hay que calcular. El ejercicio, por lo tanto, apunta a chequear si  $\mathbf{F}$  es un campo conservativo, para que:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

según el corolario para el teorema de la integral sobre una curva de un campo conservativo.

Ya que  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{F}$  queda definida de  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Así, con el campo definido en un conjunto simplemente conexo, se puede usar que:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ es un campo conservativo}$$

Así, se calcula el rotor del campo:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times (y^2 - 2xz + g(x), 2xy + z^3 - g(y), 3yz^2 - x^2) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - 2xz + g(x) & 2xy + z^3 - g(y) & 3yz^2 - x^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(3yz^2 - x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy + z^3 - g(y)) \\ \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - 2xz + g(x)) - \frac{\partial}{\partial x}(3yz^2 - x^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(2xy + z^3 - g(y)) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 2xz + g(x)) \end{pmatrix} \\
&= (3z^2 - 3z^2, -2x + 2x, 2y - 2y)
\end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow \mathbf{F} \text{ es un campo conservativo.}$$

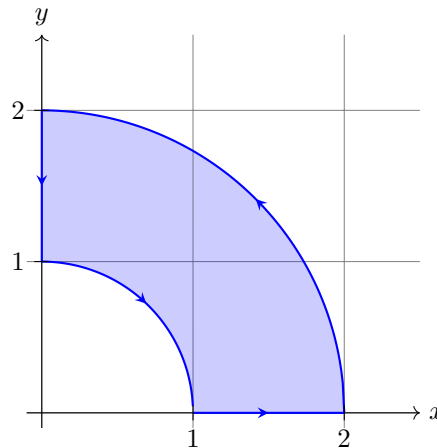
Por lo tanto, con  $\mathbf{F}$  un campo conservativo, podemos usar el corolario antes mencionado y calcular el valor de la integral sobre la curva  $C$ , cerrada, en cero.

$$\therefore \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

**Solución 4.** Cabe notar que la integral pedida es equivalente a escribir:

$$\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \int_C \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \cdot d\mathbf{s}$$

Donde la curva  $C$  es simple y cerrada, por lo que encierra un área  $A$ , tal que  $\partial A^+ = C^+$ , orientada arbitrariamente en sentido antihorario.



Puesto que  $C$  está orientada antihoraria y encierra una región  $A$ , simplemente conexa, se puede usar el teorema de Green.

$$\oint_{C^+} \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \nabla \times \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dA$$

Tal que el rotor del campo en cuestión se calcula:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\
 &= \frac{y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x \cdot (-2y)}{(x^2 + y^2)^2} \\
 &= \frac{4yx}{(x^2 + y^2)^2}
 \end{aligned}$$

Mientras que la región  $A$  puede ser expresada, convenientemente, en coordenadas polares.

$$A = \left\{ (\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \wedge 1 \leq \rho \leq 2 \right\}$$

Así, la integral se puede resolver en coordenadas polares como:

$$\begin{aligned}
 \iint_A \nabla \times \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dA &= \iint_A \frac{4yx}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\
 &= \iint_A \left( \frac{4\rho \sin(\phi) \rho \cos(\phi)}{\rho^4} \cdot \rho \right) d\rho d\phi \\
 &= \iint_A \left( \frac{2 \sin(2\phi)}{\rho} \right) d\rho d\phi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \left( \frac{2 \sin(2\phi)}{\rho} \right) d\rho d\phi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 2 \sin(2\phi) \ln(\rho) \Big|_{\rho=1}^{\rho=2} \right) d\phi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 2 \sin(2\phi) \ln\left(\frac{2}{1}\right) \right) d\phi \\
 &= \ln(2) \cdot 2 \left( \frac{-\cos(2\phi)}{2} \right) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} \\
 &= \ln(2) \cdot 2 \\
 \Rightarrow \iint_A \nabla \times \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dA &= 2 \ln(2)
 \end{aligned}$$

Que, volviendo a Green, determina el valor de la integral original.

$$\therefore \int_{C^+} \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy = 2 \ln(2)$$

#### 4.4 Fecha 11 de junio de 2024

**Ejercicio 1.** Sean los campos  $\psi(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$  y  $\mathbf{F}(x, y) = (\psi_y(x, y), -\psi_x(x, y))$  y sea  $C$  una curva regular, simple, y cerrada con orientación positiva contenida en el conjunto  $A = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 9\}$ . Hallar los posibles valores de la integral de  $\mathbf{F}$  sobre  $C$ .

**Ejercicio 2.** Calcular el volumen del cilindro  $x^2 + y^2 \leq 9$  limitado por el plano  $z = -1$  y el paraboloides  $z = x^2 + y^2$ .

**Ejercicio 3.** Calcule el flujo del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, -y^2, xz)$  a través de la superficie  $S_1 = \{x^2 + y^2 = 1 \wedge 0 \leq z \leq 3\}$  unión  $S_2 = \{x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = 0\}$ . Indique gráfica y analíticamente la orientación elegida.

**Ejercicio 4.** Sea  $S$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  que encierra un volumen  $\Omega$  y sea el campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (ax, 2y, z)$  con  $a \in \mathbb{R}$ . Hallar  $a$  tal que el flujo saliente de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  sea igual al volumen de  $\Omega$ .

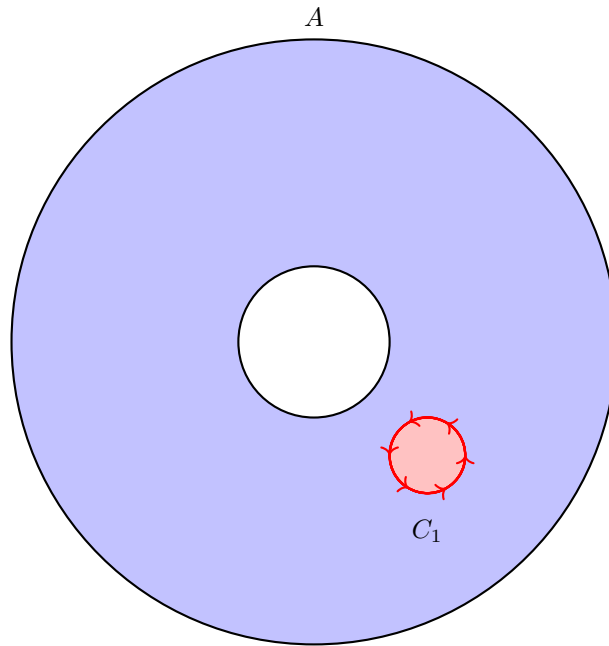
**Solución 1.** Antes que nada, se debe determinar cuál es la expresión del campo  $\mathbf{F}$ , en  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0)\}$ .

$$\begin{aligned}\psi_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x^2 \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y^2 \\ &= \frac{y}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Para comenzar a resolver el problema, se consideran todas las curvas  $C_1$  regulares, simples y cerradas, orientadas positivamente y contenidas en  $A$  tal que su región encerrada  $D_1$ , a su vez, también esté contenida en  $A$ .



En este caso, con *boldsymbolF* una función de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $A$ , valen las hipótesis del teorema de Green (tanto para la curva como para el campo). Entonces:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{D_1} (\nabla \times \mathbf{F}) dA$$

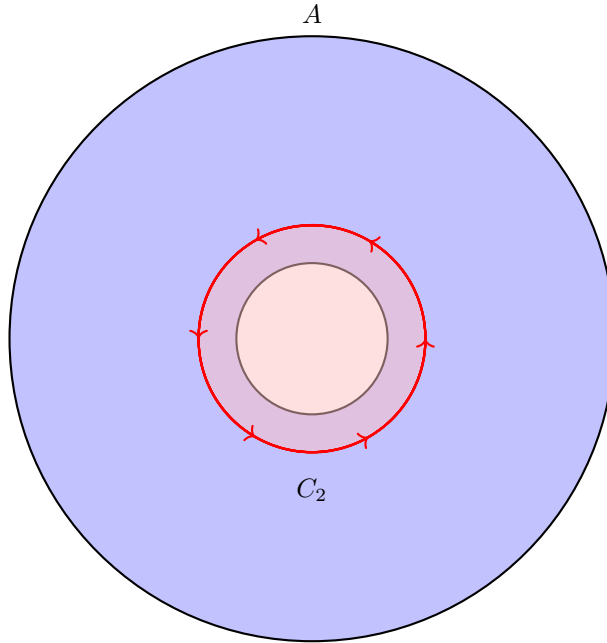
Acto siguiente, se calcula el rotor de  $\mathbf{F}$ , para resolver la integral.

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\
 &= \left( -\frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) - \left( \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\
 &= - \left( \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\
 &= - \left( \frac{-x^2 + y^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\
 \nabla \times \mathbf{F} &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral del campo sobre  $C_1$  resulta:

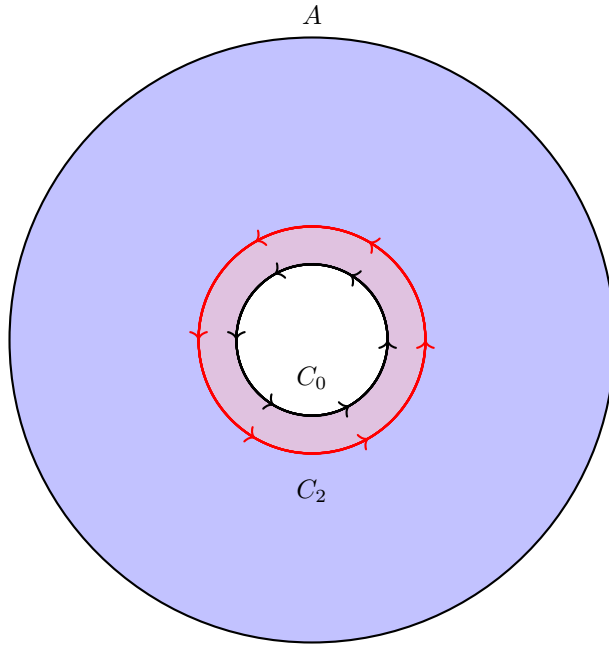
$$\begin{aligned}
 \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_{D_1} (0) dA \\
 \Rightarrow \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= 0
 \end{aligned}$$

Ahora queda considerar los casos de todas las curvas  $C_2$  regulares, simples y cerradas, orientadas positivamente y contenidas en  $A$  tal que su región encerrada  $D_2$  no esté totalmente contenida dentro de  $A$ .



En este caso, ya no se cumplen las condiciones del teorema de Green, puesto que  $\mathbf{F}$  no se encuentra definida en  $(0,0) \in D_2$ . Sin embargo, es posible utilizar el teorema de Green generalizado. Definiendo previamente, con orientación positiva:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \\
 C_0 &= \partial D_0
 \end{aligned}$$



Luego, se puede utilizar el teorema de Green generalizado:

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{(D_2 - D_0)} (\nabla \times \mathbf{F}) dA$$

Sobre el área entre ambas curvas, el rotor del campo vale cero, puesto que está definido en  $(D_2 - D_0) \subset A$ . Entonces, el término de la derecha, se vuelve cero.

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Para realizar la integral de la derecha, se propone la parametrización:

$$\begin{aligned} \sigma : B = [0; 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 / \sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \\ \sigma'(t) &= (-\sin(t), \cos(t)) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \circ \sigma(t) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin(t), -\cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) - \cos^2(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -(\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= -(t) \Big|_0^{2\pi} \\ \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= -2\pi \\ \Rightarrow \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= -2\pi \end{aligned}$$

**Solución 2.** Primero, se debe determinar el volumen a calcular como un conjunto elemental, para poder realizar la integral. La primera condición del volumen, es que  $x^2 + y^2 \leq 9$ . Luego, quedaría restringir en qué intervalo se encuentra el valor de  $z$ .

Uno de los límites, como lo dice la consigna es  $z = -1$ . El otro límite es, entonces, la superficie  $z = x^2 + y^2$ . Graficarlos nota claramente que la superficie descrita por el paraboloide se encuentra sobre el plano  $z = -1$ . Por lo tanto, la restricción para es  $-1 \leq z \leq x^2 + y^2$ . También se puede razonar que  $0 \leq x^2 + y^2$  por lo que la  $z = -1 < 0 \leq z = x^2 + y^2$ .

Para expresar el conjunto elemental conviene hacerlo, en coordenadas cilíndricas, con  $x^2 + y^2 = \rho^2$ :

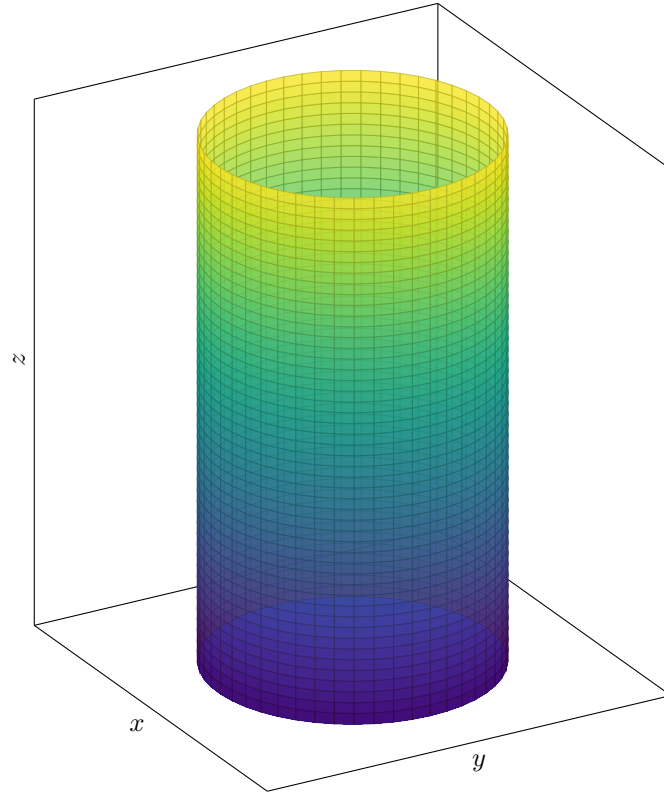
$$\Omega = \{(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 3 \wedge -1 \leq z \leq \rho \wedge 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

Ahora sí, se puede calcular el volumen en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dV \\ &= \iiint_{\Omega} dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \rho d\phi dz d\rho \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^{\rho^2} \int_0^{2\pi} \rho d\phi dz d\rho \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^{\rho^2} \rho \phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dz d\rho \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^{\rho^2} \rho \cdot 2\pi \cdot dz d\rho \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 \rho z \Big|_{z=-1}^{z=\rho^2} d\rho \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 \rho (\rho^2 + 1) d\rho \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 (\rho^3 + \rho) d\rho \\ &= 2\pi \cdot \left( \frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=3} \\ \therefore \text{Vol}(\Omega) &= \frac{99}{2} \pi \end{aligned}$$

**Solución 3.** Para entender el problema, primero grafiquemos las superficies.





Se trata de una superficie cilíndrica, con una tapa inferior en  $z = 0$ , pero no una tapa superior en  $z = 3$ . Para calcular entonces el flujo de  $\mathbf{F}$  habría, en principio, que parametrizar la superficie cilíndrica y la tapa por separadas, y luego calcular dos integrales, una por cada superficie.

Sin embargo, si se le agrega a estas dos superficies una tercera  $S_T$ , que sea la tapa superior del cilindro. Así  $S_C = S_1 \cup S_2 \cup S_T$  encierra el volumen del cilindro ( $\Omega$ ). Esta superficie  $S_C = \partial\Omega$ , si se orienta de saliente, cumple las condiciones del teorema de la divergencia. Con  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1$ :

$$\begin{aligned} \iint_{S_C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \\ \iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \\ \iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV - \iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Ahora, se deben calcular las dos integrales del miembro derecho. Para la primera, se debe representar el  $\Omega$  como un conjunto elemental, lo que resulta fácil en coordenadas cilíndricas:

$$\Omega = \{(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1 \wedge 0 \leq \phi \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq 3\}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iiint_{\Omega} (z - 2y + x) dx dy dz \\
&= \iiint_{\Omega} (z - 2\rho \sin \phi + \rho \cos \phi) \rho d\phi dz d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^3 \int_0^{2\pi} (z\rho - 2\rho^2 \sin \phi + \rho^2 \cos \phi) d\phi dz d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^3 (z\rho\phi + 2\rho^2 \cos \phi + \rho^2 \sin \phi) \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dz d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^3 (z\rho \cdot 2\pi) dz d\rho \\
&= \pi \int_0^1 (z^2 \rho) \Big|_{z=0}^{z=3} d\rho \\
&= \pi \int_0^1 (9\rho) d\rho \\
&= 9\pi \left( \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} \\
\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \frac{9}{2}\pi
\end{aligned}$$

Para la segunda integral a resolver, primero es necesaria la parametrización de  $S_T$ . Para ello, se propone  $D = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1 \wedge 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$  y la parametrización:

$$\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 / \Sigma(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 3)$$

tal que  $\Sigma_{\rho} \times \Sigma_{\phi} = (0, 0, \rho)$ , con  $\rho > 0$  orienta la superficie saliente, como se había definido previamente. Luego, ya es posible calcular la integral:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (3\rho \cos \phi, -\rho^2 \sin^2 \phi, 3\rho \cos \phi) \cdot (0, 0, \rho) dA \\
&= \iint_D 3\rho^2 \cos \phi dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^2 \cos \phi d\phi d\rho \\
&= \int_0^1 3\rho^2 \sin \phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\rho \\
&= \int_0^1 3\rho^2 \cdot 0 \cdot d\rho \\
\iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= 0
\end{aligned}$$

Con estos dos resultados, ya es posible calcular la integral que pide la consigna, recordando que la orientación de las superficies se definió saliente.

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV - \iint_{S_T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \frac{9}{2}\pi - 0 \\
\therefore \iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{9}{2}\pi
\end{aligned}$$

**Solución 4.** Primero, notemos que la el campo  $\mathbf{F}$  es un campo  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ , puesto que cada una de sus componentes lo es, independientemente del valor de  $a \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, con  $S = \partial\Omega$  orientada saliente, se cumplen las hipótesis del teorema de la divergencia, tal que:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

Por lo tanto, la condición que plantea la consigna:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \text{Vol}(\Omega)$$

se puede reescribir como:

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_{\Omega} dV$$

Para que se cumple lo anterior, es suficiente con pedir que la divergencia del campo resulte 1.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial x}(ax) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) &= 1 \\ a + 2 + 1 &= 1 \\ \therefore a &= -2 \end{aligned}$$

## 4.5 Fecha recuperatorio extra

**Ejercicio 1.** Sean  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, y \leq 0, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$  y  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z = 1 - x^2 - y^2\}$ . Calcular el volumen de  $V$  y el área de  $S$ .

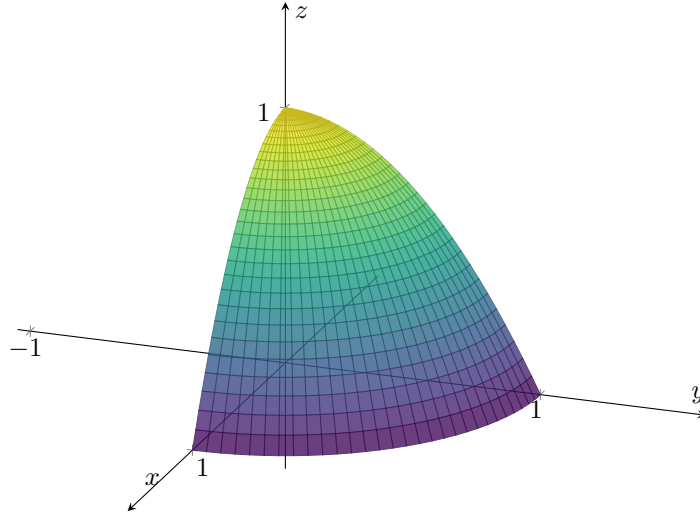
**Ejercicio 2.** Sean  $S$  una superficie esférica de radio  $R$  con centro en el primer octante y  $\mathbf{F}$  un campo de clase  $C^1$  con  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = x + y + z$ . Probar que el flujo saliente de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  es no negativo.

**Ejercicio 3.** Sean  $C$  el borde del triángulo de vértices  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  y el campo  $\mathbf{F}(x, y) = (e^{\cos(x)+x^2} + xy^2 + 2y, \ln(1 + e^{y^2}) + yx^2 + 3x)$ . Calcular, indicando la orientación elegida:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds$$

**Ejercicio 4.** Probar que el campo  $\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy} + y \cos(xy), xe^{xy} + \cos(xy)x)$  es conservativo. Dada  $C$  la curva parametrizada por  $\alpha(t) = (t^2, t)$  con  $t \in [0, 1]$  calcular el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  sobre  $C$ .

**Solución 1.** Nos piden calcular  $\iiint_V dV$  y  $\iint_S dA$ . Para la integral de volumen conviene trabajar en coordenadas cilíndricas y para la de superficie habrá que parametrizar.



Aplicando la transformación  $V \rightarrow V^*$  queda

$$\begin{aligned} V^* &= \{(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho \cos \phi \leq 0, \rho \sin \phi \leq 0, 0 \leq z \leq 1 - \rho^2\} \\ \iff V^* &= \{(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 : \pi \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq \rho \leq \sqrt{1-z}\}. \end{aligned}$$

Y por el teorema de cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_V dV &= \iiint_{V^*} \rho dV = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \rho d\rho dz d\phi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{2}(1-z) dz = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Para parametrizar  $S$ , llamamos

$$D = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : \pi \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi, 0 \leq \rho \leq 1\}.$$

y

$$\Sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \Sigma(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, \rho^2).$$

Calculamos las derivadas parciales de  $\Sigma$ .

$$\begin{aligned} \Sigma_\rho &= (\cos \phi, \sin \phi, 2\rho) \\ \Sigma_\phi &= (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, 0) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \Sigma_\rho \times \Sigma_\phi &= (-2\rho^2 \cos \phi, -2\rho^2 \sin \phi, \rho), \\ \|\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi\| &= \rho\sqrt{4\rho^2 + 1}. \end{aligned}$$

Entonces escribimos, por definición, el área de  $S$  como

$$\iint_S dA = \iint_D \|\Sigma_\rho \times \Sigma_\phi\| d\rho d\phi = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^1 \rho\sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho d\phi.$$

Nos queda la misma integral que (4.3), sólo que con distintos límites de integración. Por lo que, procediendo de la misma manera, sustituyendo  $u = 4\rho^2 + 1$ , obtenemos

$$\iint_S dA = \frac{1}{8} \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \int_1^5 \sqrt{u} du = \frac{\pi}{16} \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^5 = \frac{\pi}{24} (\sqrt{125} - 1).$$

**Solución 2.** Tenemos que  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2\}$ , con  $R > 0$  y  $(x_0, y_0, z_0)$  en el primer octante. Por el teorema de la divergencia

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz, \quad (4.5)$$

tomando la orientación de  $S$  como exterior.

Aplicando una transformación a coordenadas esféricas, tal que

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \cos \theta + x_0 \\ y &= \rho \cos \phi \sin \theta + y_0 \\ z &= \rho \sin \phi + z_0, \end{aligned}$$

nos queda el conjunto  $S^*$

$$S^* = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

De la ecuación (4.5) y usando el teorema de cambio de variable,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + y + z) dV &= \iiint_{\Omega^*} (\rho \cos \phi \cos \theta + \rho \cos \phi \sin \theta + \rho \sin \phi + x_0 + y_0 + z_0) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R (\rho \cos \phi \cos \theta + \rho \cos \phi \sin \theta + \rho \sin \phi + x_0 + y_0 + z_0) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Al distribuir el  $\rho^2 \sin \phi$  entre los primeros dos términos, queda para estos  $\rho^3 \sin \phi \cos \theta$  y  $\rho^3 \sin \phi \sin \theta$ ; que al integrarlos entre 0 y  $2\pi$ , con respecto a  $\theta$ , se anulan. Entonces queda, distribuyendo la suma del integrando,

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 \cos \phi \sin \phi d\rho d\theta d\phi + \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R (x_0 + y_0 + z_0) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi.$$

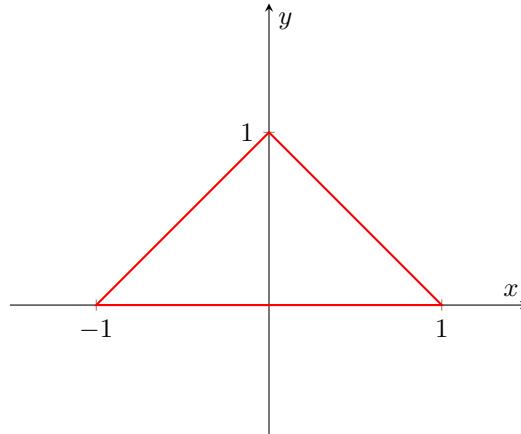
A su vez, la primer integral es 0 porque al integrar una función periódica impar,  $\cos \phi \sin \phi$ , en un semi período ésta se anula. Por último queda

$$(x_0 + y_0 + z_0) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = (x_0 + y_0 + z_0) \frac{4}{3} \pi R^3 > 0,$$

pues  $(x_0, y_0, z_0)$  pertenece al primer octante. Por lo que queda demostrado que el flujo es positivo.

por qué sería -no negativo-? por ej. cuando  $R = 0$  o cuando el centro de la esfera es el origen es = 0

**Solución 3.** Nos piden integrar sobre la siguiente curva  $C$ .



Tomamos la orientación de  $C$  como antihoraria. Dado que el triángulo  $T$  es simplemente conexo,  $T \in \text{dom}(\mathbf{F})$  y  $\mathbf{F} \in C^1$ , entonces por el teorema de Green

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_T \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}.$$

Como  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{1}$ , queda que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_T \mathbf{1} \cdot d\mathbf{A} = \iint_T dA = A(T) = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

**Solución 4.** Ya que nos piden demostrar que  $\mathbf{F}$  es conservativo y calcular una integral de línea sobre una curva no cerrada nos conviene buscar, si es que existe, la función potencial de  $\mathbf{F}$ . Nos encontramos con la ecuación  $\nabla f = \mathbf{F}$ , la cual describe el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} f_x(x, y) = ye^{xy} + y \cos(xy) \\ f_y(x, y) = xe^{xy} + x \cos(xy) \end{cases}$$

Mirando cada término detenidamente se puede llegar a la conclusión de que

$$f(x, y) = e^{xy} + \sin(xy) + C, \text{ con } C \in \mathbb{R},$$

es solución del sistema. Lo que significa que  $\mathbf{F}$  es un campo conservativo.

Luego para calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  utilizamos el siguiente teorema.

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)) = f((1, 1)) - f((0, 0)) = e + \sin 1 - 1.$$