INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

Departamento de Ciencias Exactas y Naturales

Área Matemática

Parciales Resueltos.

Material de lectura para alumnos........

Parciales Resueltos

(Pequena explicacion). Este documento presentaremos distintos ejercicios de parcial....

Índice general

algun tipo de nota explicando detalles de notacion, por ej. Los sı́mbolos para los vectores serán marcados en negrita minúscula, $\mathbf{v}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\sigma}$ etc., y mayúscula los campos vectoriales, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{\Sigma}$, etc. Las matrices estarán en negritas e italicas, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, etc. El final de una definición, teorema, corolario, propiedad, etc. estará indicado con un $\diamond$.

Contenido teórico. Primera parte

Contenido Teórico. Segunda parte

2.1 Operadores

Definicón 2.1.1. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U abierto, es diferenciable el **gradiente** de f en $\mathbf{x}$ es el vector en el espacio $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\text{grad}\, f = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}),$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. $\diamond$

Definicón 2.1.2. Sea $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, U abierto, de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces la **divergencia** de $\mathbf{F}$ se define como

$$\text{div}\, \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

donde $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, con cada $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$. $\diamond$

Definicón 2.1.3. Sea $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$, U abierto, de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$. Entonces el **rotor** de $\mathbf{F}$ se define como

$$\text{rot}\, \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right),$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z),\ F_2(x, y, z),\ F_3(x, y, z))$. Y para el caso en el que $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, con las mismas condiciones, el **rotor** es

$$\text{rot}\, \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$ $\diamond$

Estas fórmulas son más faciles de recordar si pensamos a "nabla" ∇ como el operador tal que

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}).$$

Por lo que, pensando a ∇ como un vector, la divergencia es el producto escalar de ∇ con un campo vectorial y para el caso en $\mathbb{R}^3$ es el producto vectorial. Esto último es

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\
&= \text{rot}\, \mathbf{F}.
\end{aligned}$$

Definicón 2.1.4. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $C^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces se define el **laplaciano** de f como

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \text{div grad}\, \mathbf{F}.$$

Y para el caso de un campo vectorial $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^2(\mathbb{R}^n)$, el **laplaciano** escalar

$$\Delta \mathbf{F} = (\Delta F_1, \Delta F_2, \ldots, \Delta F_n).$$ $\diamond$

Definicón 2.1.5. Para un campo vectorial $\mathbf{F}$, si $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, lo llamamos **irrotacional**. Y si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, lo llamamos **solenoidal**. $\diamond$

Definicón 2.1.6. Tanto como para un campo escalar como vectorial, decimos que la función es **armónica** si $\Delta f = 0$ o $\Delta \mathbf{F} = 0$. $\diamond$

Propiedad 2.1.1. Los operadores vectoriales son aplicaciones lineales, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$
2. $\nabla \cdot (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{F} + \beta \nabla \cdot \mathbf{G}$
3. $\nabla \times (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \nabla \times \mathbf{F} + \beta \nabla \times \mathbf{G}$ $\diamond$

Propiedad 2.1.2. Regla de Leibniz para el producto. Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar tal que $h \in C^1$.

1. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, entonces $\nabla \cdot (h\mathbf{F}) = h \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla h \cdot \mathbf{F}$
2. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1, entonces $\nabla \times (h\mathbf{F}) = h \nabla \times \mathbf{F} + \nabla h \times \mathbf{F}$ $\diamond$

Propiedad 2.1.3. Productos:

1. $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$
2. $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$ $\diamond$

2.2 Curvas

Definicón 2.2.1. Definimos una curva $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ como la imagen de una trayectoria $\boldsymbol{\sigma} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua y de clase C^1 a trozos. Si $I = [a, b]$ a los puntos $\boldsymbol{\sigma}(a)$ y $\boldsymbol{\sigma}(b)$ se los llama extremos de la curva. $\diamond$

Ejemplos

Si $\boldsymbol{\sigma}(a) = \boldsymbol{\sigma}(b)$ entonces Γ se llama curva cerrada.

Ejemplos

Además, si $\boldsymbol{\sigma}$ es inyectiva en I salvo tal vez en sus bordes entonces se llama a Γ curva simple.

poner el ejemplo de la circunsferencia con dominio [0, 2pi] y [0, 4pi]

Definicón 2.2.2. Continuidad a trozos. [...] No está en el Tromba y no sé como definirlo formalmente. ◇

Cada curva simple Γ tiene asociadas dos orientaciones o sentidos posibles. Si los puntos P y Q son los extremos de la curva entonces podemos considerar a Γ con orientación desde P hacia Q o bien desde Q hacia P.

Definicón 2.2.3. Parametrización de una curva. Una parametrización de una curva simple $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ es una trayectoria $\boldsymbol{\sigma} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua, de clase C^1 a trozos, inyectiva en $\operatorname{int}(I)$ y $\operatorname{Im}(\boldsymbol{\sigma}) = \Gamma$. ◇

Definicón 2.2.4. Una paremetrización $\boldsymbol{\sigma} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se llama regular si $\boldsymbol{\sigma}'(t) \neq 0$. ◇

2.3 Integrales Dobles

Definicón 2.3.1. Conjuntos elementales en $\mathbb{R}^2$. region o conjunto? Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

i. Decimos que la región D es de *tipo 1* si existen funciones continuas $\phi_1,\ \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que D es el conjunto de puntos (x,y) que satisfacen
$$x \in [a,b], \qquad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x),$$
donde $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)\ \forall\ x \in [a,b]$.

ii. Decimos que la región D es de *tipo 2* si existen funciones continuas $\psi_1,\ \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ tales que D es el conjunto de puntos (x,y) que satisfacen
$$y \in [c,d], \qquad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),$$
donde $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)\ \forall\ y \in [c,d]$.

iii. D se llama conjunto de *tipo 3* si es *tipo 1* y *tipo 2* a la vez.

A éstos conjuntos (*tipo 1, 2, 3*) se los llama elementales. ◇

Corolario 2.3.1. corolario de que teorema es?

1. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto de tipo 1. Supongamos que $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y las ϕ_i son continuas. Entonces
$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

2. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto de tipo 2. Supongamos que $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y las ψ_i son continuas. Entonces
$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

3. Si D es de tipo 3 y $f,\ \phi_i, \psi_i$ son continuas, entonces
$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$ ◇

Ejemplo 2.3.1. Se quiere calcular la integral $\iint_D f$, donde $f(x,y) = x^2y$, mientras que D es la región del plano encerrado entre $y = x^3$, $y = x^2$, con $x \in [0,1]$. agregar figura

En este caso

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1;\ x^3 \leq y \leq x^2\}.$$

Luego D es de tipo 1. Notar que la única manera de demostrar que un conjunto es elemental es dando su descrición implícita. Por el Corolario 2.3.1

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2y\, dA &= \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^3}^{x^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \left((x^2)^2 - (x^3)^2 \right) = \int_0^1 \frac{1}{2} x^6 - \frac{1}{2} x^8\, dx \\
&= \frac{1}{14} x^7 - \frac{1}{18} x^9 \Big|_0^1 = \frac{1}{14} - \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

◇

Definicón 2.3.2. Se define el área de un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ como la integral, si existe, de la función 1. Es decir,

$$\mathrm{A}(D) = \iint_D 1\, dA.$$

◇

Teorema 2.3.1. Teorema del valor medio para integrales dobles. Suponer que $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y D es un conjunto elemental. Entonces para algún punto (x_0, y_0) en D, tenemos

$$\int_D f(x,y)\, dA = f(x_0, y_0)\mathrm{A}(D).$$

◇

Teorema 2.3.2. Teorema del cambio de variables para integrales dobles. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo escalar integrable. Sea $\mathbf{T} : D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to D$ continua de clase C^1 en $\mathrm{int}(D^*)$, inyectiva en $\mathrm{int}(D^*)$ y $\mathbf{T}(D^*) = D$. Entonces

$$\iint_D f\, dA = \iint_{D^*} f \circ \mathbf{T}\, |\det(\boldsymbol{D}_{\mathbf{T}})|.$$

Se suele notar a

$$|\det(\boldsymbol{D}_{\mathbf{T}})| = \boldsymbol{J}(\mathbf{T})$$

y se lo llama **jacobiano** de la matriz diferencial $\boldsymbol{D}_{\mathbf{T}}$. ◇

2.4 Integrales Triples

Dada una función continua $f : B \to \mathbb{R}$, donde B es un paralelepípedo rectangular (una caja) en $\mathbb{R}^3$, se puede definir la integral de f sobre B como un límite de sumas, o sea una integral de Reimann. Partiendo los tres lados de B en n partes iguales y formando la suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk})\Delta V,$$

donde $c_{ijk} \in B_{ijk}$, el ijk-ésimo paralelepípedo rectangular en la partición de B, y ΔV es el volumen de B_{ijk} agregar dibujo caja en r3

Definicón 2.4.1. Sean $B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ y $f : B \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si existe el $\lim_{n\to\infty} S_n$, para cualquier c_{ijk}, llamamos **integral triple** de f sobre B a

$$\iiint_B f\, dV = \iiint_B f(x,y,z)\, dxdydz. \qquad \diamond$$

Para tener la extender esta noción de integral a un conjunto acotado más general $W \subset \mathbb{R}^3$, esto es conjuntos que puedan ser encerrados por una caja. Dada $f : U \to \mathbb{R}$, extender f a una función f^* tal que

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{si } (x,y,z) \in U \\ 0 & \text{si } (x,y,z) \notin U. \end{cases}$$

Entonces si B es una caja que contiene a U y ∂U está formada por las gráficas de un número finito de funciones continuas, f^* será integrable y definimos

$$\iiint_U f\, dV = \iiint_B f^*\, dV.$$

Notar que ésta integral es independiente de la selección de B.

Propiedad 2.4.1. Sean $f,\ g$ dos funciones acotadas e integrables en una región $U \subset \mathbb{R}^3$, entonces:

i. $\alpha f + \beta g$ es integrable en U, $\forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ y además

$$\iiint_U \alpha f + \beta g\, dV = \alpha \iiint_U f\, dV + \beta \iiint_U g\, dV.$$

ii. El producto fg es integrable en U.

iii. Si $|g(x,y,z)| \geq k > 0\ \forall (x,y,z) \in U$, el conciente f/g es integrable en U.

iv. Si $f \geq$ en U, $\iiint_U f\, dV \geq 0$.

v. Si $f \leq g$ en U, $\iiint_U f\, dV \leq \iiint_U g\, dV$.

vi. Si $|f|$ es integrable en U, entonces

$$\left| \iiint_U f\, dv \right| \leq \iiint_U |f|\, dV.$$

vii. Si $U = D_1 \cup D_2$ es una partición de U, f es integrable en $U \iff f$ es integrable en D_1 y D_2. En este caso

$$\iiint_U f\, dV = \iiint_{D_1} f\, dV + \iiint_{D_2} f\, dV. \qquad \diamond$$

Teorema 2.4.1. Teorema del valor medio. Si f es continua en U, $\exists (x_0, y_0, z_0) \in U$ tal que

$$\iiint_U f\, dV = f(x_0,y_0,z_0)\mathrm{Vol}\,(U),$$

donde $\mathrm{Vol}\,(U)$ es el volumen de U. $\diamond$

Definicón 2.4.2. Región elemental en $\mathbb{R}^3$. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

i. Decimos que la región U es de *tipo* I si existen funciones continuas $\phi_1,\ \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que U es el conjunto de puntos (x,y,z) que satisfacen

$$x \in [a,b], \qquad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \qquad \gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y) \tag{2.1}$$

donde $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)\ \forall\, x \in [a,b]$ y $\gamma_1,\ \gamma_2 : D \to \mathbb{R}$, son funciones continuas, $D \subset \mathbb{R}^2$ de tipo 1. También se llamará de *tipo* I si puede expresarse como el conjunto de los (x,y,z) tales que

$$y \in [c,d], \qquad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \qquad \gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y), \tag{2.2}$$

donde $\gamma_1,\ \gamma_2$ son como antes y D es de tipo 2.

ii. Decimos que la región U es de *tipo* II si puede expresarse de la forma de (2.1) o (2.2), intercambiados los papeles de x y z.

iii. Decimos que la región U es de *tipo* III si se puede expresar en la forma de (2.1) o (2.2), intercambiados los papeles de y y z. $\diamond$

Definicón 2.4.3. Se define el volumen de un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ como la integral, si existe, de la función 1. Es decir,

$$\mathrm{Vol}(U) = \mathrm{volumen}(U) = \iiint_U 1\, dV. \qquad \diamond$$

Teorema 2.4.2. lo escribi como lo tenia en mis apuntes **Teorema del cambio de variables para integrales triples**. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo escalar integrable. Sea $\mathbf{T} : U^* \subseteq \mathbb{R}^3 \to U$ continua de clase C^1 en $\mathrm{int}(U^*)$, inyectiva en $\mathrm{int}(U^*)$ y $\mathbf{T}(U^*) = U$. Entonces

$$\iiint_U f\, dV = \iiint_{U^*} f \circ \mathbf{T}\, |\det(\boldsymbol{D}_{\mathbf{T}})|. \qquad \diamond$$

es la misma definicion que para integrales dobles, quizas conviene ponerlas juntas?

2.5 Integrales de Línea

No hace falta la parte de recuerdo de mate 1 con el teorema de valor medio?

Falta definicion integral de linea sobre trayectorias

Definicón 2.5.1. Sea Γ una curva simple en $\mathbb{R}^n$ y sea $\boldsymbol{\sigma} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ. Entonces

$$\mathrm{long}\,\Gamma = \mathrm{L}(\Gamma) = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| dt,$$

donde $\boldsymbol{\sigma}|_{I_i}$ es de clase C^1. $\diamond$

Definicón 2.5.2. Sea Γ una cirva simple en $\mathbb{R}^n$ y sea $\boldsymbol{\sigma} : [a, b \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n]$ una parametrización regular de Γ. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua sobre Γ. Se define la integral de línea del campo f

sobre la curva Γ, y se nota por $\int_\Gamma f\, ds$ a

$$\int_\Gamma f\, ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} f \circ \boldsymbol{\sigma}(t) \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt,$$

donde $\boldsymbol{\sigma}|_{I_i}$ es de clase C^1. ⋄

Una aplicación de esto es cuando $f(x, y) > 0$, entonces esta integral tiene una interpretación geométrica como el "área de una valla". Podemos construir una "vallaçuya base sea la imagen de $\boldsymbol{\sigma}$ y altura $f(x, y)$ en (x, y). Si $\boldsymbol{\sigma}$ recorre sólo una vez la imagen de $\boldsymbol{\sigma}$, la integral $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x, y)\, ds$ representa el área de una lado de la valla.

ilustracion de la aplicacion

Definicón 2.5.3. Integral de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria. Sean $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial y $\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ una trayectorial C^1 a trozos tales que $\mathbf{F} \circ \boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función continua. Se define la **integral de F a lo largo de $\boldsymbol{\sigma}$** como

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F} \circ \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt. \quad ⋄$$

Se usa la notación $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, ds$, donde $\hat{\mathbf{t}}$ es versor tangencial al campo $\mathbf{F}$ en todo punto.

Definicón 2.5.4. Integral de un campo vecrorial a lo largo de una curva simple. Sea $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo sobre una curva simple oriantada $\Gamma \subset A$. Sea $\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ una parametrización de Γ que preserva su oriantación. Se define la **integral de F sobre la curva simple $\boldsymbol{\Gamma}$** como

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad ⋄$$

Si Γ es cerrada, se suele notar a la integral como

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

y se la llama integral de circulación de $\mathbf{F}$ sobre Γ.

2.6 Integrales de Superficie

2.7 Campos Conservativos

Definicón 2.7.1. Definicion conjunto conexo... ⋄

Teorema 2.7.1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sea $\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ una trayectoria C^1 a trozos. Entonces

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\boldsymbol{\sigma}(b)) - f(\boldsymbol{\sigma}(a)). \quad ⋄$$

Corolario 2.7.1. En las condiciones del Teorema 2.7.1, $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f \cdot d\mathbf{s}$ no depende de $\boldsymbol{\sigma}$, sólo depende de los puntos inicla y final de la trayectoria. Si $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$ son trayectorias C^1 a trozos tales que

$\boldsymbol{\sigma}_1 : [a,b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\sigma}_2 : [a,b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}_1} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_{\boldsymbol{\sigma}_2} \nabla f \cdot d\mathbf{s}. \qquad \diamond$$

Corolario 2.7.2. En las condiciones del Teorema 2.7.1, si $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial para el cual $\exists f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ clase C^1 tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in A,$$

entonces para todo par de puntos $\mathbf{p}_0,\ \mathbf{p}_1 \in A$

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

para cualquier par de curvas $C_1,\ C_2 \subset A$ que vayan de $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{p}_1$ $\diamond$

Corolario 2.7.3. En las condiciones del Teorema 2.7.1, si $\mathbf{F} = \nabla f$; entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

para toda curva C simple cerrada contenida en A. $\diamond$

Teorema 2.7.2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuo tal que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es independiente del camino en A. Entonces $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

con $\mathbf{x}_0 \in A$, cumple que:

1. f es C^1.
2. $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in A.$ $\diamond$

Teorema 2.7.3. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, $\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuo. Las siguientes condiciones sobre $\mathbf{F}$ son equivalentes:

1. $\exists f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
2. La integral de $\mathbf{F}$ es independiente del camino en A.
3. $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ para toda curva cerrada simple C en A. $\diamond$

2.8 Teoremas Integrales

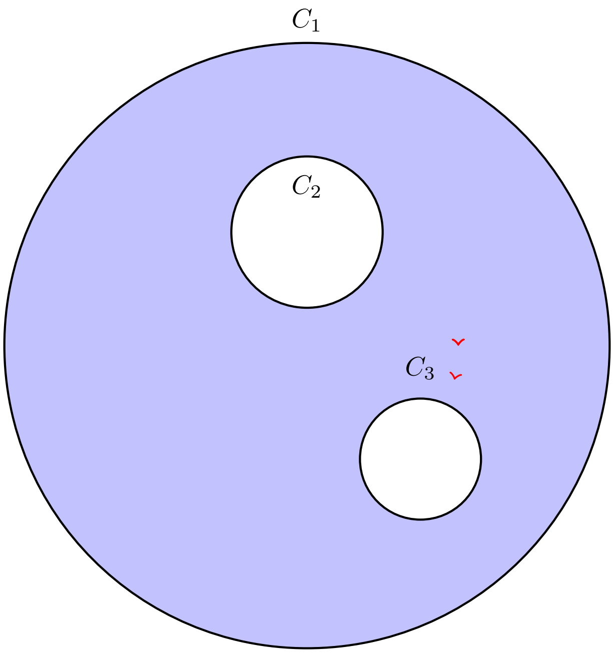
Teorema 2.8.1. Teorema de Green. Sea $D \in \mathbb{R}^2$ una región simplemente conexa (o tipo 3) y sea ∂D la frontera de D, con orientación tal que se cumple la regla de la mano derecha. Sea $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1. Entonces

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \qquad \diamond$$

Otra manera de enunciar el teorema de Green es usando un cambio en la notación vectorial. Pensando el producto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ como $P\,dx + Q\,dy$, donde $\mathbf{F} = (P, Q)$ y sabiendo que el rotor en $\mathbb{R}^2$ es la componente z del rotor en $\mathbb{R}^3$; reescribimos el teorema de Green como

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

El teorema de Green es aplicable a regiones aún más generales que simplemente conexas. De hecho, a cualquier región en $\mathbb{R}^2$ cuya frontera se pueda descomponer en un número finito de curvas cerradas simples orientadas se le puede aplicar el teorema de Green. La idea es “recorrer”dicha frontera pasando por todas las curvas que la confroman.



falta poner las flechas que indican la orientacion

Teorema 2.8.2. Teorema de la divergencia en el plano. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región de tipo 3 y sea ∂D su frontera. Denotaremos por $\mathbf{n}$ el versor unitario normal a ∂D en todo punto. Si $\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización orientada de manera positiva de ∂D, $\mathbf{n}$ está dado por

$$\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}.$$

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial C^1 en D. Entonces

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,ds = \iint \nabla \cdot \mathbf{F}\,dA. \qquad \diamond$$

Teorema 2.8.3. Teorema de Stokes. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\boldsymbol{\Sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$. Si $\mathbf{F}$: es un campo vectorial C^1 en S. Entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \qquad \diamond$$

Teorema 2.8.4. Teorema de la divergencia o de Gauss. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie que encierra un volumen Ω orientada de manera exterior, esto es $S = \partial\Omega$. Sea $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial clase C^1. Entonces

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV. \qquad \diamond$$

Primeros parciales resueltos

3.1 Fecha 29 de septiembre de 2023

Ejercicio 1. Calcule, si existe, el siguiente límite.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(x^2-y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cos\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

Ejercicio 2. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable y sea $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por:

$$g(x,y) = \left(e^{xy}-1,\ \operatorname{sen}(\pi x+\pi y)\right).$$

Sabiendo que el gráfico $h = f\circ g$ en el punto $(1,0,h(1,0))$ tiene plano tangente de ecuación

$$z-1 = \pi x + (\pi+1)y,$$

hallar $f_{\mathbf{v}}(0,0)$ para la dirección $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ejercicio 3. Considere el campo escalar $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dado por:

$$f(x,y) = e^{\operatorname{sen}(x)+y^2}$$

Se pide aproximar $f(-0.1,\ 0.2)$ mediante un polinomio de grado dos adecuado.

Ejercicio 4. Dado el campo escalar $f(x,y) = \cos(y)+\operatorname{sen}(x)$. Encuentre los puntos críticos de dicho campo en el dominio Ω y clasifíquelos como extremos locales, donde:

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\pi<x<\pi,\ \ -\pi<y<\pi\right\}$$

Solución 1. Notemos que la estructura del límite pedido está dada por el producto de dos funciones acotadas, por lo tanto, con mostrar que una de las dos tiende a cero bastará para decir que el límite de dicho producto es cero.

Utilizando la siguiente desigualdad para el argumento del seno

$$0 \leq \left| \frac{\pi(x^2-y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\sqrt{x^2+y^2},$$

junto al teorema de intercalación tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\pi(x^2-y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right| = 0.$$

Recordando que $|\operatorname{sen}(x)| \leq |x| \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ podemos concluir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(x^2-y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right) = 0.$$

Por último, recordando que $|\cos(x)| \leq 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(x^2-y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right) \cos\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) = 0.$$

Solución 2. Como $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en todo su dominio por ser composición de funciones diferenciables, la ecuación de su plano tangente en el punto $(1,0)$ está dada por

$$z = h(1,0) + \nabla h(1,0)(x-1, y), \tag{3.1}$$

luego será suficente con encontar $h(1,0)$ y $\nabla h(1,0)$.

Por un lado, $h(1,0) = f \circ g(1,0) = f(0,0)$ y por otro lado, como f y g son ambas diferenciables, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\nabla h(1,0) = \nabla(f \circ g)(1,0) = \nabla f(g(1,0))\, \boldsymbol{D}_g(1,0) = \nabla f(0,0)\, \boldsymbol{D}_g(1,0), \tag{3.2}$$

donde $\boldsymbol{D}_g$ es la matriz diferencial o jacobiana de g.

Hallemos $\boldsymbol{D}_g$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_g(1,0) &= \left. \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} e^{xy} - 1 & \dfrac{\partial}{\partial y} e^{xy} - 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen}(\pi x + \pi y) & \dfrac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen}(\pi x + \pi y) \end{pmatrix} \right|_{(1,0)} \\
&= \left. \begin{pmatrix} y e^{xy} & x e^{xy} \\ \pi \cos(\pi x + \pi y) & \pi \cos(\pi x + \pi y) \end{pmatrix} \right|_{(1,0)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & -\pi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, reemplazando en a (3.2)

$$\nabla h(1,0) = \nabla f(0,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & -\pi \end{pmatrix} = (-\pi f_y(0,0),\ f_x(0,0) - \pi f_y(0,0))$$

Reemplazando en (3.1)

$$\begin{aligned} z &= f(0,0) + (-\pi f_y(0,0),\ f_x(0,0) - \pi f_y(0,0))\,(x-1,y) \\ z &= f(0,0) + \pi f_y(0,0) - \pi f_y(0,0)x + (f_x(0,0) - \pi f_y(0,0))y, \end{aligned}$$

y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} f_y(0,0) = -1 \\ f_x(0,0) - \pi f_y(0,0) = \pi + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f_y(0,0) = -1 \\ f_x(0,0) = 1 \end{cases}$$

$\therefore \quad \nabla f(0,0) = (1,-1).$

Como f es diferenciable en todo su dominio, en particular lo es en $(0,0)$, vale que

$$f_{\mathbf{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{v} \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ con } \|\mathbf{v}\| = 1.$$

Luego, tomando $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$, obtenemos lo pedido, es decir,

$$f_{\mathbf{v}}(0,0) = (1,-1) \cdot \mathbf{v} = \sqrt{2}.$$

Solución 3. Dado que f es de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$, se definine el polinomio de Taylor de segundo orden centrado en $(0,0)$ de f, que noateremos por $P_2[f,(0,0)]$ como,

$$P_2[f,(0,0)](x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y)\boldsymbol{H}_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

donde $\boldsymbol{H}_f$ es la matriz hessiana de f.

Hallemos los términos del polinomio.

1. $f(0,0) = 1.$

2. $\nabla f(0,0) = \left(e^{\operatorname{sen}(x)+y^2} \cos(x),\ e^{\operatorname{sen}(x)+y^2} 2y\right)\Big|_{(0,0)} = (1,0).$

3.

$$\boldsymbol{H}_f(0,0) = \left.\begin{pmatrix} e^{\operatorname{sen}(x)+y^2}[\cos^2(x) - \operatorname{sen}(x)] & 2y\cos(x)e^{\operatorname{sen}(x)+y^2} \\ 2y\cos(x)e^{\operatorname{sen}(x)+y^2} & 4y^2 e^{\operatorname{sen}(x)+y^2} + 2e^{\operatorname{sen}(x)+y^2} \end{pmatrix}\right|_{(0,0)}$$

$$\boldsymbol{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora sustituimos en la expresión (3.3).

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= 1 + (1,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ P_2(x,y) &= 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2) \\ P_2(x,y) &= \frac{1}{2}x^2 + y^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Entonces queda evaluar en $P_2\,(-0.1,\ 0.2) = \frac{189}{200} = 0.945$.

$$\therefore\ f\,(-0.1,\ 0.2) \approx 0.945.$$

Solución 4. En este ejercicio debemos hallar y clasificar los extremos de la función f sobre Ω, un conjunto acotado y abierto. Para ello, primero buscamos los puntos críticos de f en Ω. Como f es diferenciable en Ω, basta con hallar todos los $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

$$\nabla f(x, y) = (\cos(x),\ -\operatorname{sen}(y))$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \iff \begin{cases} \cos(x_0) = 0 \\ \operatorname{sen}(y_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y_0 = k'\pi \end{cases} \quad ; k, k' \in \mathbb{Z}$$

Ahora sumamos la condición de que pertenezcan a Ω.

$$(x_0, y_0) \in \Omega \iff x_0 = -\frac{\pi}{2}\ \vee\ x_0 = \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad y_0 = 0$$

Por lo tanto, el conjunto de puntos críticos es

$$P.C. = \{(-\pi/2, 0),\ (\pi/2, 0)\}.$$

Ahora, para clasificarlos, debemos aplicar el criterio de la segunda derivada. Para ésto calculamos la matriz hessiana de f.

$$\boldsymbol{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{pmatrix} \implies \det(\boldsymbol{H}_f)(x, y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y)$$

1. $\det(\boldsymbol{H}_f)(-\pi/2, 0) = -1 < 0 \implies f$ tiene un punto silla en $(-\pi/2, 0)$.

2. $\det(\boldsymbol{H}_f)(\pi/2, 0) = 1 > 0\ \wedge\ f_{xx}(\pi/2, 0) = 1 > 0 \implies f$ tiene un mínimo local en $(\pi/2, 0)$.

3.2 Fecha 25 de abril de 2023

Ejercicio 1. Analizar la existencia de los siguientes límites

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)\cos(\frac{1}{y-1})}{x^2+3(y-1)^2} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^3)y}{x^2-y+x^5}$$

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{(x^2-y)^2+x^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Analizar la continuidad de f en el origen

2. Analizar la diferenciabilidad de f en el origen.

3. Hallar, si existen, las derivadas paricales en el origen.

Ejercicio 3. Sea $g(x,y) = yx^2 + \operatorname{sen}(f(x,y))$ con f un campo escalar $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(0,0) = 0$. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y) - xf_x(0,0) - yf_y(0,0) + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ejercicio 4. Analizar la existencia de máximos y mínimos, absolutos o relativos, en todo $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = e^{xy-1} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

Solución 1. (a) Podemos observar que el límite es indeterminado, aún más, el argumento del coseno tiende a infinito. Para resolver, reescribimos el límite de la siguiente manera

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2+3(y-1)^2}\cos\left(\frac{1}{y-1}\right).$$

Dado que el coseno es una función acotada, bastaría con probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2+3(y-1)^2} = 0.$$

Para esto, usaremos las siguientes desigualdades,

$$0 \leq \left|\frac{x^2(y-1)}{x^2+3(y-1)^2}\right| \leq \frac{\|(x,y-1)\|^2(y-1)}{x^2+3(y-1)^2} \leq$$

$$\leq \frac{\|(x,y-1)\|^2(y-1)}{x^2+(y-1)^2} = \frac{\|(x,y-1)\|^2(y-1)}{\|(x,y-1)\|^2} = y-1.$$

Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} 0 = 0 \qquad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(0,1)} (y-1) = 0,$$

tenemos, usando el teorema de intercalación, que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \left|\frac{x^2(y-1)}{x^2+3(y-1)^2}\right| = 0.$$

Luego

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2+3(y-1)^2} = 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2+3(y-1)^2}\cos\left(\frac{1}{y-1}\right) = 0.$$

(b) Tomemos las curvas, $\boldsymbol{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{\alpha}(t) = (t, t^5)$ y $\boldsymbol{\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{\beta}(t) = (t, t^2)$. Notar que

$$\lim_{t\to 0} \boldsymbol{\alpha}(t) = (0,0) \ \text{ y } \ \lim_{t\to 0} \boldsymbol{\beta}(t) = (0,0).$$

Llamando

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^3)y}{x^2-y+x^5}$$

tenemos que

$$\lim_{t\to 0} f\circ\boldsymbol{\alpha}(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t^3)t^5}{t^2-t^5+t^5} = \lim_{t\to 0}\operatorname{sen}(t^3)t^3 = 0 \tag{3.4}$$

$$\lim_{t\to 0} f\circ\boldsymbol{\beta}(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t^3)t^2}{t^2-t^2+t^5} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t^3)}{t^3} = 1. \tag{3.5}$$

Como (3.4) $\neq$ (3.5) concluimos que

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Solución 2. 1. Para que la función sea continua en el origen debe cumplir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Analicemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{(x^2-y)^2+x^4}$$

Tomemos la curva, $\boldsymbol{\alpha}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2:\boldsymbol{\alpha}(t)=(t,t^2)$, notemos que

$$\lim_{t\to 0}\boldsymbol{\alpha}(t)=(0,0).$$

Podemos observar que

$$\lim_{t\to 0} f\circ\boldsymbol{\alpha}(t)=1$$

de aquí concluimos que f no es continua en el origen (aunque nada estamos diciendo de la existencia o no del límite).

2. f no es diferenciable en el origen pues no es continua en dicho punto.

3. Recordemos la definición de derivada direccional de dirección $\mathbf{v}$ evaluada en el origen de un campo escalar f.

$$f_{\mathbf{v}}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h\mathbf{v})-f(0,0)}{h},$$

con $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ unitario.

Entonces calculamos

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{v}}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h\mathbf{v})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{(hv_1)^4}{((hv_1)^2-hv_2)^2+(hv_1)^4}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(hv_1)^4}{(hv_1)^4-2(hv_1)^2hv_2+(hv_2)^2+(hv_1)^4}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^4v_1^4}{h^4v_1^4-2h^3v_1^2v_2+h^2v_2^2+h^4v_1^4}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2h^2v_1^4}{h^2(h^2v_1^4-2hv_1^2v_2+v_2^2+h^2v_1^4)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2v_1^4}{h^2v_1^4-2hv_1^2v_2+v_2^2+h^2v_1^4} = \frac{0}{v_2^2}=0,
\end{aligned}$$

si $v_2^2\neq 0 \iff v_1^2\neq 1 \iff |v_1|\neq 1$. Veamos el caso $v_1=1$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{h^4}{(h^2)^2+h^4}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{1}{2}=\infty.$$

Es decir, no existe $f_x(0,0)$. El caso $v_1=-1$ es análogo.

O sea, las derividas direccionales existen en todas direcciones, menos en la dirección del eje de abscisas, y son iguales a cero. Es decir,

$$\therefore \quad f_{\mathbf{v}}(0,0)=0 \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbb{R}^2:|v_1|\neq 1,$$

$$\nexists\, f_{\mathbf{v}}(0,0) \text{ si } \mathbf{v}\in\mathbb{R}^2:|v_1|=1.$$

Solución 3. Para resolver este límite debemos intuir que en el numerador se encuentra la función g menos su plano tangente en el $(0,0)$. Entonces buscamos el gradiente de g en el origen.

Dado que f es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ luego g resulta de la misma clase. Usando la regla de la cadena y el hecho de que $f(0,0) = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla g(x,y)\Big|_{(0,0)} &= \left(\, 2xy + \cos\left(f(x,y)\right) f_x(x,y), \quad x^2 + \cos\left(f(x,y)\right) f_y(x,y) \,\right)\Big|_{(0,0)} \\ &= \left(f_x(0,0), \quad f_y(0,0)\right).\end{aligned}$$

Como $g(0,0) = 0$ podemos reescribir el límite como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{g(x,y) - \nabla g(0,0)\cdot(x,y) - g(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

El primer término tiende a cero dado que g es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ entonces es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ y, en particular, lo es en el origen. Para el segundo término hacemos un cálculo auxiliar.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$$

Estamos en condiciones de usar álgebra de límites,

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{g(x,y) - \nabla g(0,0)\cdot(x,y) - g(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = 0.$$

Solución 4. Dado que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ para hallar los puntos críticos basta con buscar cuando su gradiente se anula.

$$\nabla f(x,y) = \left(ye^{xy-1} - x, \ xe^{xy-1} - y\right)$$

Igualando el gradiente a cero, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} ye^{xy-1} = x \\ xe^{xy-1} = y \end{cases}$$

Si $x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0$, entonces

$$e^{xy-1} = \frac{x}{y} = \frac{y}{x}. \tag{3.6}$$

De la última igualdad hallamos la siguiente relación

$$x^2 = y^2 \iff x = y \quad \vee \quad x = -y.$$

Si $x = y$ reemplazado en (3.6) queda

$$e^{x^2-1} = 1 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = 1 \quad \vee \quad x = -1.$$

Es fácil ver que el caso $x = -y$ conlleva a un absurdo. Por último, observar que el $(0,0)$ también es solución del sistema. Por lo tanto, los puntos críticos son $(0,0)$, $(1,1)$ y el $(-1,-1)$.

Para clasificarlos, como $f \in C(\mathbb{R}^2)$ utilizamos el criterio de la segunda derivada.

$$\boldsymbol{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy-1} - 1 & e^{xy-1}(xy+1) \\ e^{xy-1}(xy+1) & x^2e^{xy-1} - 1 \end{pmatrix}$$

Ahora evaluamos el determinante de la matriz hessiana para los puntos críticos

$$\boldsymbol{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1/e \\ 1/e & -1 \end{pmatrix} \implies \det\left(\boldsymbol{H}_f(0,0)\right) = 1 - \frac{1}{e^2} > 0$$

y como $f_{xx}(0,0) = -1 < 0 \implies f$ tiene un máximo local en 0.

$$\boldsymbol{H}_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \det\left(\boldsymbol{H}_f(1,1)\right) = -4 < 0$$

$\implies f$ tiene un punto silla en (1,1).

$$\boldsymbol{H}_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \det\left(\boldsymbol{H}_f(1,1)\right) = -4 < 0$$

$\implies f$ tiene un punto silla en $(-1,-1)$.

Por último, para analizar si el máximo en $(0,0)$ es local o absoluto basta calcular, por ejemplo, $f(2,2)$ para ver que es mayor que $f(0,0)$.

$\therefore$ f tiene dos puntos silla, uno en $(1,1)$ y otro en $(-1,-1)$, y un máximo local en $(0,0)$.

3.3 Fecha Recuperatorio 2cuatri 2022

Ejercicio 1. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{yx^3 - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

probar que no existe $\delta > 0$ tal que f sea clase C^2 en $B_\delta(0,0)$.

Ejercicio 2. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2x}e^{3y} - 1 - 2x - 3y - 3x^2 - 6yx - \frac{11}{2}y^2}{x^2+y^2}$$

Ejercicio 3. Sea S el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que forman la esfera de centro $(3,4,5)$ tal que el $(0,0,0) \in S$.

a. Hallar el plano tangente a S en $(0,0,0)$.

b. Hallar otro plano que sea tangente a S y paralelo al del ítem a.

Ejercicio 4. Hallar los puntos de $A : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ que realicen la distancia mínima y máxima al origen.

Solución 1. Por el teorema de Schwartz sabemos que si $f \in C^2$ en $B_\delta(0,0)$ entonces

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \quad \forall (x,y) \in B_\delta(0,0).$$

En particular, debería pasar que $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$. Veamos que esto último no sucede.

$$f_x(x,y) = \frac{(3yx^2 - y^3)(x^2+y^2) - (yx^3 - xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2} \tag{3.7}$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - (yx^3 - xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2} \tag{3.8}$$

Para $(x,y) = (0,0)$, calculamos las derivadas por definición.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Ya tenemos definidas las derivadas parciales de f en todo $\mathbb{R}^2$.

$$f_x(x,y) = \begin{cases} (3.7) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} (3.8) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Ahora podemos calcular las derivadas parciales cruzadas de segundo orden por definición.

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} \tag{3.9}$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} \tag{3.10}$$

Por (3.7) y (3.8), se puede observar que

$$f_x(0,h) = -h \text{ y } f_y(h,0) = h.$$

Entonces por (3.9) Y (3.10)

$$f_{xy}(0,0) = -1 \neq f_{yx}(0,0) = 1.$$

$\therefore$ no existe $\delta > 0$ tal que f sea clase C^2 en $B_\delta(0,0)$.

Solución 2. Para resolverlo debemos intuir que está conformado por el límite de buena aproximación de un polinomio de Taylor de segundo orden centrado en el origen de una función. Buscamos una expresión para dicho polinomio y para la función.

Llamemos $f(x,y) = e^{2x}e^{3y}$, notemos que f es de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$. Entonces, podemos definir su polinomio de Taylor de segundo orden centrado en el origen, $P_2(x,y)$, y además vale el teorema de resto de Taylor

$$P_2(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y)\boldsymbol{H}_f(0,0)(x,y)^{\mathrm{T}},$$

siendo $\boldsymbol{H}_f(0,0)$ la matriz hessiana de f evaluada en el origen.

Tenemos que

$$f(0,0) = 1,$$

$$\nabla f(x,y) = \left(2e^{2x}e^{3y}, 3e^{2x}e^{3y}\right) \implies \nabla f(0,0) = (2,3),$$

$$\boldsymbol{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4e^{2x}e^{3y} & 6e^{2x}e^{3y} \\ 6e^{2x}e^{3y} & 9e^{2x}e^{3y} \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Entonces queda

$$P_2(x,y) = 1 + (2,3) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y) \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\iff P_2(x,y) = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}y^2.$$

Expresamos el error como

$$R_2(x,y) = f(x,y) - P_2(x,y).$$

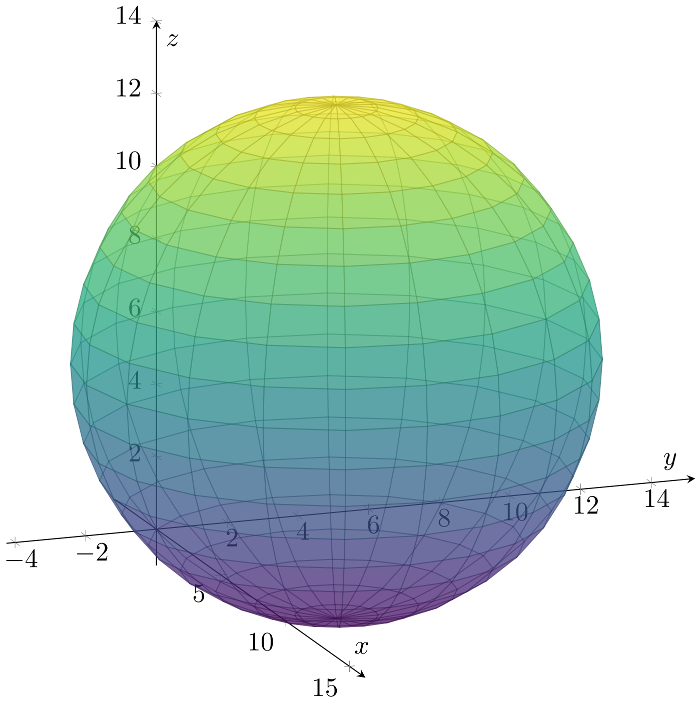
Por tanto, podemos reescribir el límite original como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_2(x,y) - x^2 - y^2}{\|(x,y)\|^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{R_2(x,y)}{\|(x,y)\|^2} - \frac{x^2+y^2}{\|(x,y)\|^2} \right) = -1,$$

pues el primer término tiende a 0 por el teorema de Taylor y el segundo tiende claramente a 1.

Solución 3. a. Dado que el origen pertenece a S y conocemos su centro, podemos hallar la ecuación de la esfera.

$$S : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 50$$



Llamando

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 - 50$$

tenemos que

$$S = C(f, 0).$$

Buscamos el plano Π, tangente a $C(f, 0)$ y que pase por $(0, 0, 0)$. Sabemos que la ecuación de Π es de la forma

$$\Pi : \nabla f(0, 0, 0) \cdot (x - 0, y - 0, z - 0) = 0.$$

Es fácil ver que $\nabla f(0, 0, 0) = (-6, -8, -10)$. Luego, una posible ecuación es

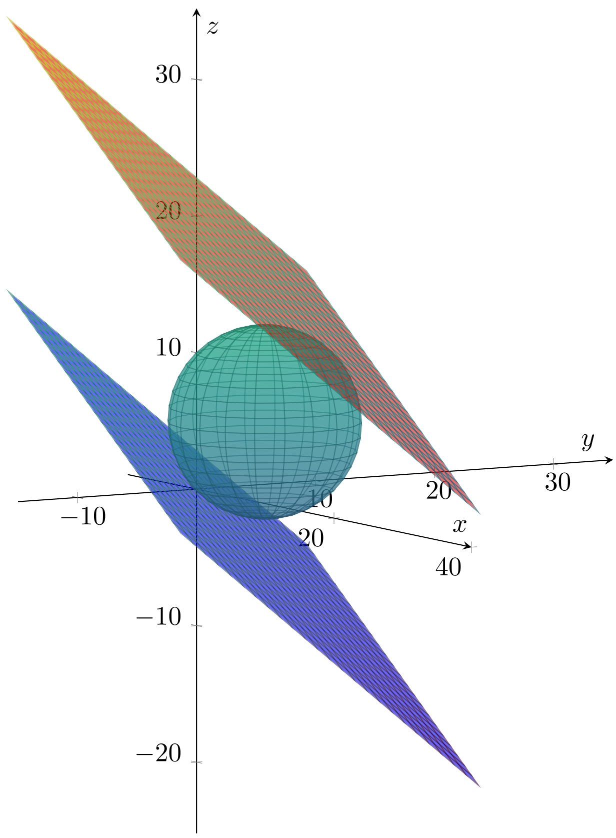
$$\Pi : 3x + 4y + 5y = 0.$$

b. Dado que el único plano paralelo a otro tangente a un punto en una esfera es el que se encuentra en el polo opuesto de ésta, buscamos el plano tangente Π' a ese otro punto $\mathbf{w}$. Llamando $\mathbf{v} = (-3, -4, -5)$ al vector que sale del centro de la esfera y termina en el origen, queda que

$$\mathbf{w} = (3, 4, 5) - \mathbf{v} = (6, 8, 10).$$

Como Π y Π' son paralelos, su vector normal $\mathbf{n}$ es el mismo.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \Pi' : \mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - \mathbf{w}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \Pi' : 3(x-6) + 4(y-8) + 5(z-10) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \Pi' : 3x + 4y + 5y = 100
\end{aligned}$$



Solución 4. Sean

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \text{dist}^2\Big((x,y);(0,0)\Big) = x^2 + y^2$$

y

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 4,$$

luego $A = C(g,0)$.

Como $f, g \in C^1(\mathbb{R}^1)$, el teorema de los multiplicadores de Lagrange nos dice que si $f\big|_A$ tiene un extremo local en un punto $\mathbf{x}$ entonces necesariamente los vectores $\nabla f(\mathbf{x})$ y $\nabla g(\mathbf{x})$ son paralelos si $\nabla g(\mathbf{x}) \neq 0$. Además como f es continua sobre el conjunto A que es cerrado y acotado, por el teorema de Weierstrass, sabemos que f alcanza máximo y mínimo en A. Luego planteamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y),\ \lambda \in \mathbb{R},\ (x,y) \in A \iff \begin{cases} 2x = 2\lambda(x-1) \\ 2y = 2\lambda(y-1) \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema queda $x = y$ y

$$\begin{cases} x = x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x = x_2 = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

$\implies$ (x_1, x_1) y (x_2, x_2) son ambos extremos absulutos de la función f en A. Como $f(x_1, x_1) > f(x_2, x_2) \implies (x_1, x_1)$ es máximo absoluto y (x_2, x_2) es mínimo absoluto.

Luego la distancia mínima del circulo al origen es $\sqrt{f(x_2, x_2)} = 2 - \sqrt{2}$ y la distancia máxima $\sqrt{f(x_1, x_1)} = 2 + \sqrt{2}$.

Segundos parciales resueltos

4.1 Fecha 25 de junio de 2023

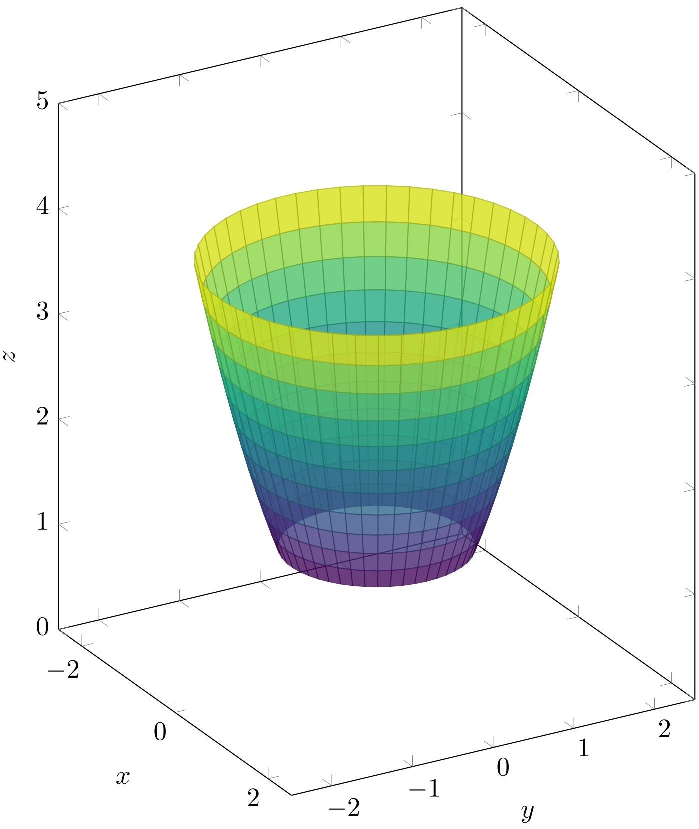
Ejercicio 1. Sea S la superficie dada por $x^2 + y^2 = z$ con $z \geq 1$ y $x^2 + y^2 \leq 4$ y sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 con tercer componente nula y $\nabla \cdot \mathbf{F}$ constante 3. Calcular el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S indicando la orientación elegida.

Ejercicio 2. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - 2xz,\ 2xy + z^3,\ 3yz^2 - x^2)$ y sea C una curva simple parametrizada por $\boldsymbol{\sigma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{\sigma}(0) = (0, 0, 0)$ y $\boldsymbol{\sigma}(1) = (1, 2, 0)$. Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ indicando la orientación elegida.

Ejercicio 3. Calcular la masa del cuerpo limitado por las ecuaciones $y - x = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$ en el primer octante con función de densidad ρ constante.

Ejercicio 4. Sean $k \in \mathbb{R}$, un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que $\nabla \times \mathbf{F} = k$ y $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\ ;\ x \leq y \leq 1\}$. Hallar k tal que $\int_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 8$.

Solución 1. Es útil primero entender con qué superficies y regiones se trabajará.



La idea es aplicar el teorema de Gauss pero S no es una superficie cerrada. Para ello pensemos en una superficie S' cerrada tal que $S \subseteq S'$. Definamos $S' = S \, \cup \, S_1 \, \cup \, S_2$, donde S_1 y S_2, son las "tapas" del paraboloide "cortado". Algebraicamente $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1 \, \wedge z = 1\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4 \, \wedge z = 4\}$.

Llamando Ω al cuerpo encerrado por S' y orientando a S' de manera exterior estamos en condiciones de usar el teorema de Gauss.

$$\oiint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

$$\iff \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} - \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\iff \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = I_1 - I_2 - I_3$$

Resolvemos el primer término.

$$I_1 = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_\Omega 3 \, dV = 3 \operatorname{Vol}(\Omega)$$

Pasando a Ω en coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \\ z = z \end{cases}$$

donde,

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{z} \, \wedge \, 0 \leq \phi \leq 2\pi \wedge 1 \leq z \leq 4.$$

Entonces nos queda

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_1^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz = 2\pi \int_1^4 \left(\frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{z}} \right) dz = \pi \int_1^4 z \, dz = \frac{15\pi}{2}.$$

Luego, $I_1 = \frac{45}{2}\pi$.

Para clacular I_2 debemos parametrizar S_1. Sea $D_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$ y sea

$$\mathbf{\Sigma} : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \mathbf{\Sigma}(u,v) = (u,v,1).$$

Entonces podemos reescribir

$$I_2 = \iint_{D_1} (\mathbf{F} \circ \mathbf{\Sigma}) \cdot (\mathbf{\Sigma}_u \times \mathbf{\Sigma}_v) \, d\mathbf{A}.$$

Primero calculamos las derivadas parciales de la parametrización.

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}_u &= (1,0,0) \\ \mathbf{\Sigma}_v &= (0,1,0) \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{\Sigma}_u \times \mathbf{\Sigma}_v = (0,0,1) = \boldsymbol{\eta}.$$

Podemos observar que $\boldsymbol{\eta}$ no preserva la orientación para S_1 heredada por la orientación exterior de S' elegida anteriormente para poder aplicar el teorema de Gauss. En otras palabras, $\boldsymbol{\eta}$ "apunta" hacia el interior de Ω. Por lo que,

$$I_2 = -\iint_{D_1} (\mathbf{F} \circ \mathbf{\Sigma}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{A}.$$

Calculamos el integrando aparte. Acordémonos que la tercer coordenada de $\mathbf{F}$ es nula. Podemos llamar

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{\Sigma} = (P, Q, 0),$$

entonces nos queda que

$$(\mathbf{F} \circ \mathbf{\Sigma}) \cdot \boldsymbol{\eta} = (P, Q, 0) \cdot (0,0,1) = 0.$$

Por lo tanto $I_2 = 0$.

Procediendo de la misma manera nos daremos cuenta que también $I_3 = 0$.

$$\therefore \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = I_1 = \frac{45}{2}\pi$$

Solución 2. Busquemos, si existe, una función potencial para $\mathbf{F}$, es decir, buscamos f tal que $\nabla f = F$. Para ello, planteamos el sistema de tres ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{cases} y^2 - 2xz = f_x \\ 2xy + z^3 = f_y \\ 3yz^2 - x^2 = f_z \end{cases}$$

Entonces

$$\int f_x(x,y,z)\,dx = y^2x - zx^2 + g(y,z) = f(x,y,z), \tag{4.1}$$

donde g es la constante con respecto a x producto de la integración. Derivando (4.1) con respecto a y obtenemos

$$f_y(x,y,z) = 2yx + g_y(y,z)$$

$$2yx + g_y(y,z) = 2xy + z^3 \implies g_y(y,z) = z^3$$

$$g(y,z) = \int g_y(y,z)\,dy = z^3y + h(z).$$

Reemplazando en la ecuación (4.1),

$$y^2x - zx^2 + z^3 + h(z) = f(x,y,z). \tag{4.2}$$

Derivando (4.2) con respecto a z obtenemos

$$f_z(x,y,z) = -x^2 + 3yz^2 + h_z(z)$$
$$-x^2 + 3yz^2 + h_z(z) = 3yz^2 - x^2 \implies h_z(z) = 0$$

$$h(z) = C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto llegamos a una familia de soluciones.

$$f(x,y,z) = y^2x - zx^2 + z^3 + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Demostramos que $\mathbf{F}$ es un campo conservativo pues $\mathbf{F} = \nabla f$. Luego, podemos calcular

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\boldsymbol{\sigma}(1)) - f(\boldsymbol{\sigma}(0)) = f(1,2,0) - f(0,0,0) = 4.$$

Solución 3. La masa de un cuerpo de volumen Ω es

$$M = \iiint_\Omega \rho\, dV.$$

En este caso

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \le 1 \ \wedge\ y \le 1 + x \ \wedge\ x,y,z \ge 0\}.$$

Conviene trabajar en coordenadas cilíndricas. Sea

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\phi \\ y = y \\ z = r\cos\phi. \end{cases}$$

Entonces en el nuevo sistema de coordenadas

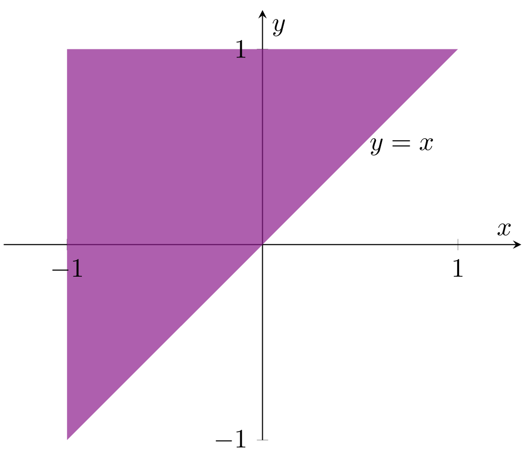
$$\Omega^* = \{(r,\phi,y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le 1 \ \wedge\ 0 \le y \le 1 + r\operatorname{sen}\phi \ \wedge\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}\}.$$

Ahora podemos reescribir, dado que ρ es constante,

$$\begin{aligned}
\frac{M}{\rho} &= \iiint_{\Omega^*} r\, dy\, d\phi\, dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1+r\operatorname{sen}\phi} r\, dy\, d\phi\, dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(1 + r\operatorname{sen}\phi)\, d\phi\, dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r + r^2 \operatorname{sen}\phi)\, d\phi\, dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\, d\phi\, dr + \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, dr \\
&= \int_0^1 r\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi + \int_0^1 r^2\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\therefore\ M = \rho\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

Solución 4. La región D se grafica de la siguiente manera.



Podemos observar que D es simplemente conexo y que ∂D es una curva simple cerrada, por lo tanto vale el teorema de Green.

$$\oint_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = k \iint_D dA = 8$$

Nos quedaría calcular el $A(D)$, área de D, que, por ser un triángulo, se puede calcular simplemente.

$$A(D) = \iint_D dA = \frac{4}{2} = 2$$

Entonces nos queda

$$2k = 8 \iff k = 4.$$

4.2 Fecha recuperatorio 29 de junio de 2023

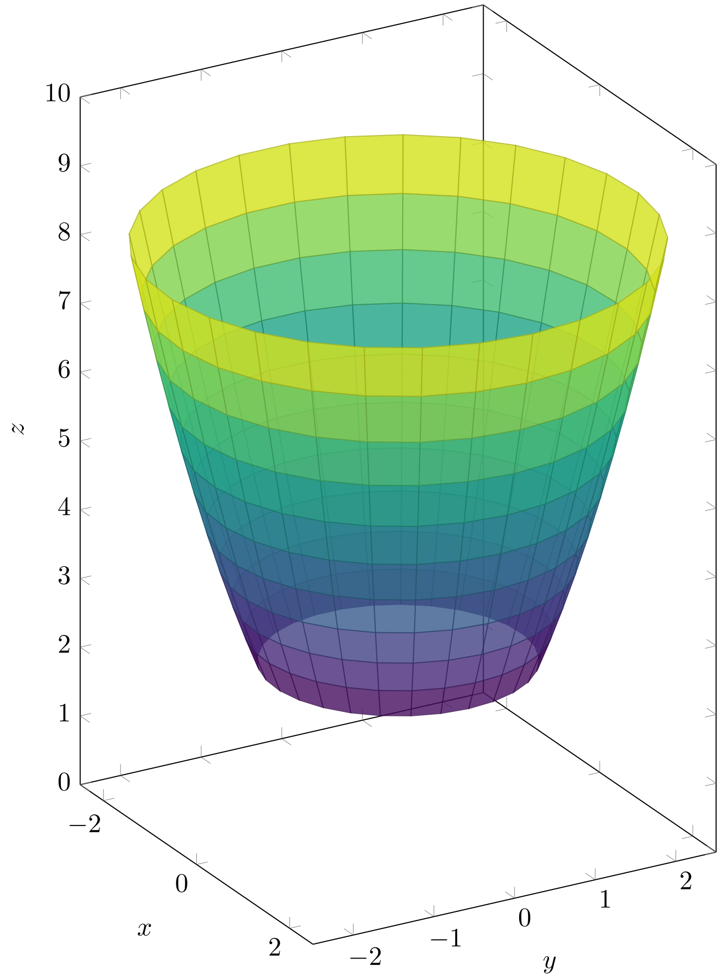
Ejercicio 1. Sea S la superficie dada por $x^2 + y^2 = z$ con $z \geq 2$ y $x^2 + y^2 \leq 9$. Calcular el área de S.

Ejercicio 2. Sea C la curva simple definida por la intersección de las superficies $x^2 + z^2 = 16$, $y + z = 4$ con $y \leq 4$ y sea g una función escalar $C^1(\mathbb{R})$. Calcular la integral sobre C del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x,\ g(y),\ g(z))$. Indicar la orientación elegida.

Ejercicio 3. Sean $\mathbf{F}(x, y, z) = (-xy + yz,\ -y^2 + xz,\ xz)$, $a \in \mathbb{R}$ positivo y S la superficie de seis caras que encierra el cuerpo dado por $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ y $0 \leq z \leq a$ orientada con normales exteriores. Hallar a de manera que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S sin su cara superior sea -24.

Ejercicio 4. Calcule la masa del cuerpo definido por $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 32$, en el primer octante, si su densidad es proporcional a la distancia de un punto al plano $z = 0$.

Solución 1. S es una sección de paraboloide, como se puede observar en el siguiente gráfico.



Escribimos el conjunto S como

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z;\ 2 \leq z \leq 9\}.$$

Queremos calcular

$$A(S) = \iint_S dA.$$

Para ello necesitaremos una parametrización de S. Sea

$$D = \{(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2} \leq \rho \leq 3;\ 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

y sea

$$\mathbf{\Sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \mathbf{\Sigma}(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \operatorname{sen} \phi, \rho^2).$$

Primero calculamos las derivadas parciales de la parametrización.

$$\mathbf{\Sigma}_\rho = (\cos \phi,\ \operatorname{sen} \phi,\ 2\rho)$$
$$\mathbf{\Sigma}_\phi = (-\rho \operatorname{sen} \phi,\ \rho \cos \phi,\ 0)$$

Entonces

$$\mathbf{\Sigma}_\rho \times \mathbf{\Sigma}_\phi = (-2\rho^2 \cos \phi,\ -2\rho^2 \operatorname{sen} \phi,\ \rho),$$

$$\|\mathbf{\Sigma}_\rho \times \mathbf{\Sigma}_\phi\| = \rho\sqrt{4\rho^2+1}.$$

Quedando

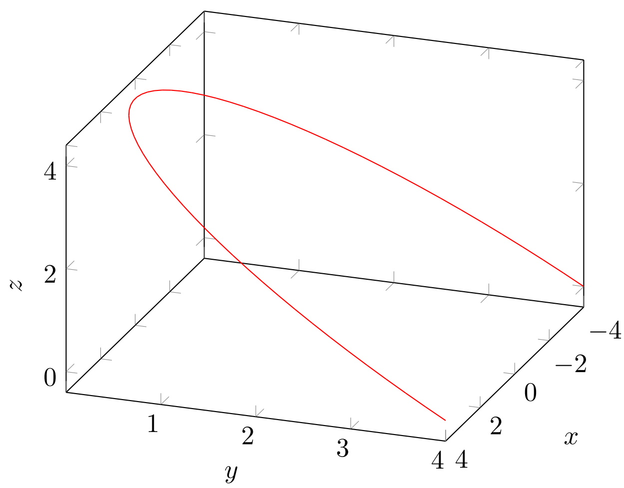
$$\iint_S dA = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{3} \|\mathbf{\Sigma}_\rho \times \mathbf{\Sigma}_\phi\|\, d\rho d\phi = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{3} \rho\sqrt{4\rho^2+1}\, d\rho d\phi, \tag{4.3}$$

$$u = 4\rho^2 + 1 \to du = 8\rho\, d\rho,$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_9^{37} \sqrt{u}\, dud\phi = \frac{2\pi}{8}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_9^3 7 = \frac{\pi}{4\frac{3}{2}}(9^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}})$$

$$= \frac{\pi}{6}(\sqrt{9^3} - \sqrt{8}).$$

Solución 2. La curva de la intersección se muestra en el siguiente gráfico.



Notemos que C es una curva no cerrada. Para cerrarla, llamemos $C = C_1$, $C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \ \wedge \ y = 4 \ \wedge \ |x| \leq 4\}$, en palabras, C_2 es la recta que une la curva; y $C_0 = C_1 + C_2$. Y sea $\text{int}(C_0) = D$. Ahora C_0 es una curva simple cerrada. Entonces podemos aplicar el teorema de Stokes, eligiendo la orientación de C_0 tal que se cumpla la regla de la mano derecha.

$$\oint_{C_0} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_D \nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A},$$

ya que $\mathbf{F}$ es $C^1(\mathbb{R})$, pues sus componentes son $C^1(\mathbb{R})$, y $D \in \text{dom}(\mathbf{F})$. Notemos que $\nabla\times\mathbf{F} \equiv 0 \implies$

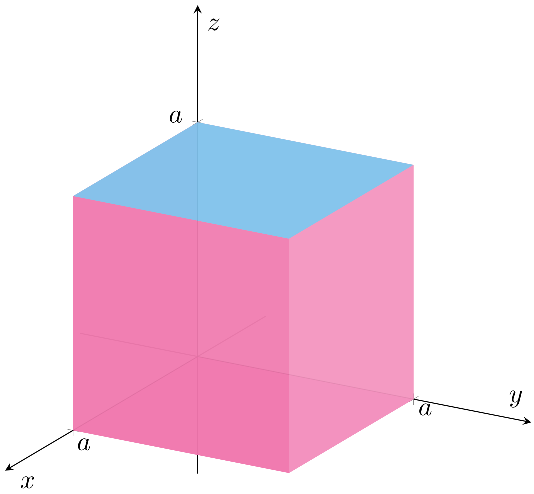
$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

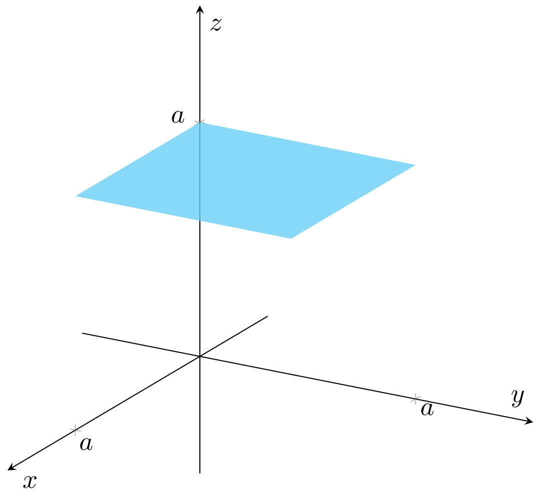
Ahora busquemos una trayectoria de C_2 que respete su orientación. Sea $\boldsymbol{\sigma} : [-4,4] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t,4,0)$. Entonces $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (1,0,0)$. Luego la integral de curva de C_2 es

$$\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{-4}^{4} (\mathbf{F}\circ\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{\sigma}'\, dt = \int_{-4}^{4} t\, dt = 0.$$

$\therefore$ la integral sobre la curva original $C = C_1$ es también 0.

Solución 3. Llamemos Ω al volumen que encierra S y sea S' la superficie de la cara superior de S, por lo que S' tiene orientación igual que la tapa de S. En los siguientes gráficos se puede ver la representación de S y S' respectivamente.





Por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV.$$

Entonces la integral de flujo que buscamos es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = -24.$$

Primero calculamos el término con la divergencia de $\mathbf{F}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -y - 2y + x = x - 3y$$

$$\implies \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \int_0^a \int_0^a \int_0^a x - 3y \, dxdydz$$

$$\iff a \int_0^a \left(\frac{x^2}{2} - 3yx \right) \Bigg|_0^a dy = a \int_0^a \frac{a^2}{2} - 3ya \, dy$$

$$\iff a \left(\frac{a^2}{2} y - 3a \frac{y^2}{2} \right) = \frac{a^4}{2} - 3\frac{a^4}{2} = -a^4$$

Segundo, el flujo sobre la tapa. Sea $\mathbf{\Sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \to S' \subset \mathbb{R}^3$, una paremetrización de S' tal que $\mathbf{\Sigma}(u, v) = (u, v, a)$. Donde $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq a;\ 0 \leq v \leq a\}$. Entonces

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iint_D \mathbf{F} \circ \mathbf{\Sigma} \cdot (\mathbf{\Sigma}_u \times \mathbf{\Sigma}_v) \, dA.$$

$\mathbf{\Sigma}_u = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{\Sigma}_v = (0, 1, 0) \implies \mathbf{\Sigma}_u \times \mathbf{\Sigma}_v = (0, 0, 1) = \boldsymbol{\eta}$. Por lo que $\mathbf{\Sigma}$ respeta la orientación de S'. Y $\mathbf{F} \circ \mathbf{\Sigma} = (-uv + va,\ -v^2 + ua,\ ua) \implies \mathbf{F} \circ \mathbf{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} = ua$. Por lo tanto

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_0^a \int_0^a au \, dudv = a^2 \frac{a^2}{2} = \frac{a^4}{2}.$$

$$\therefore -a^4 - \frac{a^4}{2} = -24 \iff \frac{3}{2} a^4 = 24 \iff a^4 = 16 \iff a = 2.$$

Solución 4. La distancia d de un punto (x_0, y_0, z_0) en el primer octante a el plano $z = 0$ está dada por

$$d\Big((x_0, y_0, z_0); (x_0, y_0, 0)\Big) = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2 + z_0^2} = z_0.$$

Luego la función de densidad del sólido es $\delta(z) = kz$, con $k \in \mathbb{R}$. Además sea

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \ \wedge \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 32 \ \wedge \ x, y, z \geq 0\}.$$

Trabajaremos en coordenadas esféricas. En este sentido, recordemos lo siguiente.

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

Por las condiciones de Ω tenemos que

$$z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \iff \rho \cos \phi \leq \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi} = \rho |\operatorname{sen} \phi|.$$

Además, como estamos en el primer octante, nos queda que $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Por otro lado,

$$\rho^2 \leq 32 \ \wedge \ \rho \geq 0 \iff 0 \leq \rho \leq \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Escribimos nuestro nuevo volumen Ω^* y usamos el teorema de cambio de variables.

$$\Omega^* = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 4\sqrt{2} \ \wedge \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \ \wedge \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Y la masa del sólido Ω queda

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega^*} k\delta(z)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, dV = \iiint_{\Omega^*} k\rho \cos \phi \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{4\sqrt{2}} \rho^3 \cos \phi \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= k2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \phi \operatorname{sen} \phi \, d\phi \int_0^{4\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \\ &= k2\pi \frac{1}{4} 256 = 128k\pi. \end{aligned}$$

4.3 Fecha recuperatorio extra

Ejercicio 1. Sean $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0,\ y \leq 0,\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0,\ z = 1 - x^2 - y^2\}$. Calcluar el volumen de V y el área de S.

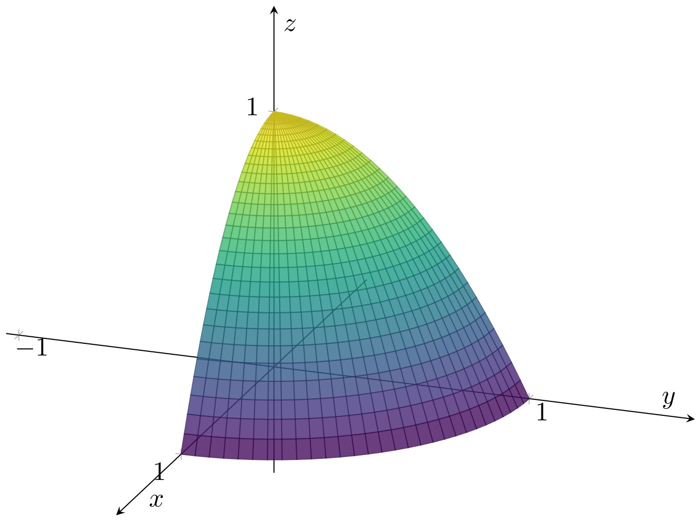
Ejercicio 2. Sean S una superficie esférica de radio R con centro en el primer octante y $\mathbf{F}$ un campo de clase C^1 con $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = x + y + z$. Probar que el flujo saliente de $\mathbf{F}$ a través de S es no negativo.

Ejercicio 3. Sean C el borde del triángulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y el campo $\mathbf{F}(x, y) = \Big(e^{\cos(x)+x^2} + xy^2 + 2y, \ln(1 + e^{y^2}) + yx^2 + 3x\Big)$. Calcular, indicando la orientación elegida:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds$$

Ejercicio 4. Probar que el campo $\mathbf{F}(x, y) = \Big(ye^{xy} + y\cos(xy), xe^{xy} + \cos(xy)x\Big)$ es conservativo. Dada C la curva parametrizada por $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t^2, t)$ con $t \in [0, 1]$ calcular el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ sobre C.

Solución 1. Nos piden calcular $\iiint_V dV$ y $\iint_S dA$. Para la integral de volumen conviene trabajar en coordenadas cilíndricas y para la de superficie habrá que parametrizar.



Aplicando la transformación $V \to V^*$ queda

$$V^* = \{(\rho,\phi,z) \in \mathbb{R}^3 : \rho\cos\phi \leq 0,\ \rho \operatorname{sen}\phi \leq 0,\ 0 \leq z \leq 1-\rho^2\}$$
$$\iff V^* = \{(\rho,\phi,z) \in \mathbb{R}^3 : \pi \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi,\ 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{1-z}\}.$$

Y por el teorema de cambio de variable tenemos que

$$\iiint_V dV = \iiint_{V^*} \rho\, dV = \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \rho\, d\rho dz d\phi$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{2}(1-z)\, dz = \frac{\pi}{8}.$$

Para parametrizar S, llamamos

$$D = \{(\rho,\phi) \in \mathbb{R}^2 : \pi \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi,\ 0 \leq \rho \leq 1\}.$$

y

$$\mathbf{\Sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \mathbf{\Sigma}(\rho,\phi) = (\rho\cos\phi,\ \rho\operatorname{sen}\phi,\ \rho^2).$$

Calculamos las derivadas paraciales de $\mathbf{\Sigma}$.

$$\mathbf{\Sigma}_\rho = (\cos\phi,\ \operatorname{sen}\phi,\ 2\rho)$$
$$\mathbf{\Sigma}_\phi = (-\rho\operatorname{sen}\phi,\ \rho\cos\phi,\ 0)$$

Luego

$$\mathbf{\Sigma}_\rho \times \mathbf{\Sigma}_\phi = (-2\rho^2\cos\phi,\ -2\rho^2\operatorname{sen}\phi,\ \rho),$$
$$\|\mathbf{\Sigma}_\rho \times \mathbf{\Sigma}_\phi\| = \rho\sqrt{4\rho^2+1}.$$

Entonces escribimos, por definición, el área de S como

$$\iint_S dA = \iint_D \|\mathbf{\Sigma}_\rho \times \mathbf{\Sigma}_\phi\|\, d\rho d\phi = \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^1 \rho\sqrt{4\rho^2+1}\, d\rho d\phi.$$

Nos queda la misma integral que (4.3), sólo que con distintos límites de integración. Por lo que, procediendo de la misma manera, sustituyendo $u = 4\rho^2 + 1$, obtenemos

$$\iint_S dA = \frac{1}{8}\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\int_1^5 \sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{16}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^5 = \frac{\pi}{24}(\sqrt{125} - 1).$$

Solución 2. Tenemos que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2\}$, con $R > 0$ y (x_0, y_0, z_0) en el primer octante. Por el teorema de la divergencia

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{A} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_\Omega (x + y + z)\, dxdydz, \tag{4.4}$$

tomando la orientación de S como exterior.

Aplicando una tranformación a coordenadas esféricas, tal que

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta + x_0 \\ y &= \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta + y_0 \\ z &= \rho \cos\phi + z_0, \end{aligned}$$

nos queda el conjunto S^*

$$S^* = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi\}.$$

De la ecuación (4.4) y usando el teorema de cambio de variable,

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega (x + y + z)\, dV &= \iiint_{\Omega^*} (\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta + \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\phi + x_0 + y_0 + z_0)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho d\theta d\phi = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R (\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta + \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\phi + x_0 + y_0 + z_0)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Al distribuir el $\rho^2 \operatorname{sen}\phi$ entre los primeros dos términos, queda para estos $\rho^3 \operatorname{sen}\phi^2 \cos\theta$ y $\rho^3 \operatorname{sen}\phi^2 \operatorname{sen}\theta$; que al integrarlos entre 0 y 2π, con respecto a θ, se anulan. Entonces queda, distribuyendo la suma del integrando,

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 \cos\phi \operatorname{sen}\phi\, d\rho d\theta d\phi + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R (x_0 + y_0 + z_0)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho d\theta d\phi.$$

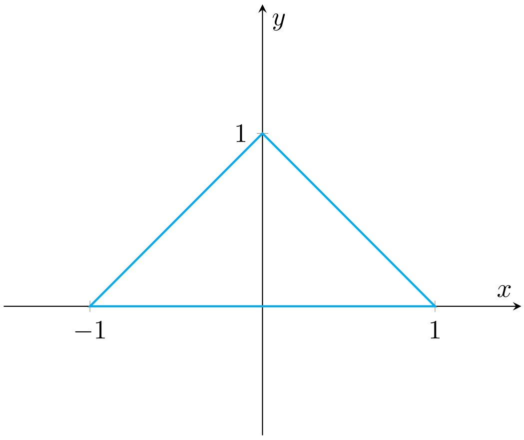
A su vez, la primer integral es 0 porque al integrar una función periódica impar, $\cos\phi \operatorname{sen}\phi$, en un semi período ésta se anula. Por último queda

$$(x_0 + y_0 + z_0)\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho d\theta d\phi = (x_0 + y_0 + z_0)\frac{4}{3}\pi R^3 > 0,$$

pues (x_0, y_0, z_0) pertenece al primer octante. Por lo que queda demostrado que el flujo es positivo.

por qué sería -no negativo-? por ej. cuando R = 0 o cuando el centro de la esfera es el origen es = 0

Solución 3. Nos piden integrar sobre la siguiente curva C.



Tomamos la orientación de C como antihoraria. Dado que el triángulo T es simplemente conexo, $T \in \text{dom}(\mathbf{F})$ y $\mathbf{F} \in C^1$, entonces por el teorema de Green

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_T \nabla \times \mathbf{F}\, dA.$$

Como $\nabla \times \mathbf{F} = 1$, queda que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_T dA = \textcolor{red}{Area}(T) = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Solución 4. Ya que nos piden demostrar que $\mathbf{F}$ es conservativo y calcular una integral de línea sobre una curva no cerrada nos conviene buscar, si es que existe, la función potencial de $\mathbf{F}$. Nos encontramos con la ecuación $\nabla f = \mathbf{F}$, la cual describe el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = ye^{xy} + y\cos(xy) \\ f_y(x,y) = xe^{xy} + x\cos(xy) \end{cases}$$

Mirando cada término detenidamente se puede llegar a la conclusión de que

$$f(x,y) = e^{xy} + \operatorname{sen}(xy) + C, \text{ con } C \in \mathbb{R}$$

es solución del sistema. Lo que significa que $\mathbf{F}$ es un campo conservativo.

Luego para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ utilizamos el siguiente teorema.

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\boldsymbol{\alpha}(1)) - f(\boldsymbol{\alpha}(0)) = f((1,1)) - f((0,0)) = e + \operatorname{sen} 1 - 1.$$