Nombre y apellido:

Comision en la cual esta inscripto:

Ejercicio 1. a) Calcular, si existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x^{\frac{1}{3}}y)(e^{x^2+y^2}-1)}{(x^2+y^2)^2}$$

b) Calcular por definicion,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+5xy^2+3y^2}{x^2+y^2}$$

Ejercicio 2. Sea f un campo escalar diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ y sea $\pi : 2x+3y+4z=1$ el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,2,f(1,2))$. Hallar todos los vectores unitarios v tales que $f_v(1,2)=0$.

Ejercicio 3. Analizar la diferenciabilidad de f en (0,0) siendo

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Ejercicio 4. Sean $g(x,y)=(xy^2,x^2-2y)$ y $h(x,y)=f\circ g(x,y)$ con f de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Sabiendo que $h(1,-1)=2$ y que $\nabla h(1,-1)=(2,-4)$. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x,y)-2x+(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2}}$$

Solución 1. Para resolver el item a, se busca utilizar los notables conocidos de funciones del tipo $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ para resolver el limite pedido, en primer lugar se multiplica arriba y abajo por $(x^{\frac{2}{3}}y^2)$ sabiendo que $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x^{\frac{1}{3}}y)}{(x^{\frac{2}{3}}y^2)} \frac{(e^{x^2+y^2}-1)}{(x^2+y^2)} \frac{(x^{\frac{2}{3}}y^2)}{(x^2+y^2)}$$

Primero se utiliza el límite notable conocido:

$$\lim_{t\to 0} (\frac{e^t - 1}{t}) = 1$$

Llamamos $t_1(x, y) = x^2 + y^2$ y sabemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} t_1(x, y) = 0$$

Definimos $g_1(z) = \frac{e^z-1}{z}$ y realizando la composición $f(x, y) = g_1 \circ t_1(x, y) \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_1 \circ t_1(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g_1(t_1(x, y)) = \lim_{t_1(x,y)\to 0} \frac{e^{t_1(x,y)} - 1}{t_1(x, y)} = 1$$

En segundo lugar, se utiliza el notable conocido:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin^2(t)}{t^2} = 1$$

Llamamos $t_2(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y$ y sabemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} t_2(x, y) = 0$$

Definimos $g_2(z) = \frac{\sin^2(z)}{z^2}$ y realizando la composición $f(x, y) = g_2 \circ t_2(x, y) \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_2 \circ t_2(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g_2(t_2(x, y)) = \lim_{t_2(x,y)\to 0} \frac{\sin^2(t_2(x, y))}{t_2(x, y)^2} = 1$$

De esta manera, se resuelve en un calculo auxiliar el tercer termino del limite solicitado

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^{\frac{2}{3}}y^2)}{(x^2+y^2)} = 0$$

Ya que podemos utilizar la propiedad de acotada por cero:

$$0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

Por lo cual, finalmente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x^{\frac{1}{3}}y)(e^{x^2+y^2}-1)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Para el item b, se nos pide calcular el siguiente limite por defincion

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+5xy^2+3y^2}{x^2+y^2}$$

Sabemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$$

si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ / $0 < |(x,y)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$. Partimos de

$$|\frac{3x^2+5xy^2+3y^2}{x^2+y^2} - L| = |3 + \frac{5xy^2}{x^2+y^2} - L|$$

Propongo $L = 3$, entonces

$$|f(x,y) - L| = |\frac{5xy^2}{x^2+y^2}| = \frac{5|x|y^2}{x^2+y^2}$$

Sabemos que

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$
$$0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2$$

Por lo cual

$$\frac{5|x|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{5(\sqrt{x^2+y^2})(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 5(\sqrt{x^2+y^2}) < 5\delta$$

Basta con tomar $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ de manera que resulta

$$5(\sqrt{x^2+y^2}) < 5\delta < \epsilon$$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+5xy^2+3y^2}{x^2+y^2} = 3$

Solución 2. Sabemos que el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,2,f(1,2))$ se escribe como:

$$z = f(1,2) + \nabla f(1,2)(x-1, y-2)$$

Ademas, se nos da de dato que el plano tangente de f en el punto $(1,2,f(1,2))$ es $\pi : 2x+3y+4z = 1$, por lo cual lo vamos a reescribir de la siguiente forma:

$$z = -\frac{7}{4} + (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})(x-1, y-2)$$

Por lo cual sabemos que,

$$f(1,2) = -\frac{7}{4}$$

$$\nabla f(1,2) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$$

Como f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, entonces f admite todas sus derivadas direccionales en (1,2) y además, $f_v(1,2) = \nabla f(1,2).v \ / \ \|\mathbf{v}\| = 1$, de esta manera definimos un $v = (v_1, v_2)$ y armamos un sistema de ecuaciones. y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})(v_1, v_2) = 0 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$$

De esta manera, obtenemos dos vectores resultantes:

$$v = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$$

$$v = (\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$$

Solución 3. En primer lugar analizamos la continuidad, como f es una función partida, queremos demostrar que f es continua en (0,0) si: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

Este limite se analiza tomando curvas distintas:

1) Curva 1: $\alpha_1(t) = (0,t)/\lim_{t\to0} \alpha_1(t) = (0,0)$

$$\lim_{t\to0} f\circ\alpha_1(t) = \lim_{t\to0} \frac{0^2t^2}{0^2t^2+(0-t)^2} \lim_{t\to0} 0 = 0$$

2) Curva 2: $\alpha_2(t) = (t,t)/\lim_{t\to0} \alpha_2(t) = (0,0)$

$$\lim_{t\to0} f\circ\alpha_2(t) = \lim_{t\to0} \frac{t^2t^2}{t^2t^2+(t-t)^2} = \lim_{t\to0} \frac{2t^2}{2t^2} = \lim_{t\to0} 1 = 1$$

Sabemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \iff \lim_{t\to0} f\circ\alpha(t) = L\ \forall\alpha : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

De esta manera, encontramos dos curvas cuyos limites no son iguales, por lo tanto $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Para responder a la consigna, utilizamos la siguiente proposicion:

Si f es diferenciable $\Rightarrow$ f es continua

Entonces, utlizando el contrareciproco:

Si f no es continua $\Rightarrow$ f no es diferenciable

$\therefore f$ no es diferenciable en (0,0)

Solución 4. Sean $g(x,y) = (xy^2, x^2-2y)$ y $h(x,y) = f\circ g(x,y)$ con f de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Sabiendo que $h(1,-1) = 2$ y que $\nabla h(1,-1) = (2,-4)$. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x,y)-2x+(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2}}$$

Por un lado, $h(1,-1) = f\circ g(1,-1) = f(1,3) = 2$ y por otro lado, como f y g son ambas diferenciables, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\nabla h(1,-1) = \nabla(f\circ g)(1,-1) = \nabla f(g(1,-1))\, \boldsymbol{D}_g(1,-1) = \nabla f(1,3)\, \boldsymbol{D}_g(1,-1), \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{D}_g$ es la matriz diferencial o jacobiana de g.

Hallemos $\boldsymbol{D}_g$

$$\boldsymbol{D}_g(1,-1) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(xy^2) & \dfrac{\partial}{\partial y}(xy^2) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2-2y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2-2y) \end{pmatrix}\right|_{(1,-1)}$$
$$= \left.\begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x & -2 \end{pmatrix}\right|_{(1,-1)}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego, reemplazando en a (1)

$$\nabla h(1,-1) = \nabla f(1,3)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (f_x(1,3)+2f_y(1,3),\ -2f_x(1,3)-2f_y(1,3))$$

y con la información de la consigna, se despejan

$$\begin{cases} f_x(1,3)+2f_y(1,3)=2 \\ -2f_x(1,3)-2f_y(1,3)=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} f_x(1,3)=2 \\ f_y(1,3)=0 \end{cases}$$

$\therefore \quad \nabla f(1,3) = (2,0).$

Entonces la ecuación del plano tangente al grafico de f en el punto $(1,3,f(1,3))$ es $z=2x$, ahora se analiza el limite solicitado separandolo en dos partes

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x,y)-2x+(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2}}$$
$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x,y)-2x}{\sqrt{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2}} + \frac{(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2}}$$

En primer lugar, buscamos acotar la funcion

$$0 \le (x-1)^2+(y-3)^2 \le (x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2$$
$$0 \le \frac{1}{\sqrt{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2}} \le \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}}$$
$$0 \le \frac{|f(x,y)-2x|}{\sqrt{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2}} \le \frac{|f(x,y)-2x|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}}$$

Ademas sabemos que f es C1, que el plano tangente de f en el punto (1,3) es: z=2x y que $\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = |(x-1,y-3)|$

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x,y)-2x}{\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}} = 0$$

Utilizando la regla del sandwich

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{|f(x,y)-2x|}{\sqrt{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2}} = 0$$

Y por ultimo tenemos que $\lim_{(x,y)\to(1,3)} g(x,y) = 0 \iff \lim_{(x,y)\to(1,3)} |g(x,y)| = 0$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x,y)-2x}{\sqrt{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2}} = 0$$

En segundo lugar, se analiza el segundo termino del limite

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2}}$$

Donde repetimos la misma cota que antes

$$0 \leq \frac{1}{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2} \leq \frac{1}{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

$$0 \leq \frac{|(x-1)^3|}{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2} \leq \frac{|(x-1)^3|}{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

donde

$$(x-1)^2 \leq (x-1)^2+(y-3)^2$$
$$|(x-1)| \leq \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$
$$|(x-1)^3| \leq (\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2})^3$$

de manera que

$$0 \leq \frac{|(x-1)^3|}{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

Utilizando el teorema del sandwich y la propiedad donde $\lim_{(x,y)\to(1,3)} g(x,y) = 0 \iff \lim_{(x,y)\to(1,3)} |g(x,y)| = 0$, entonces resulta que

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2}} = 0$$

Por lo cual, finalmente se analiza en completo el limite solicitado

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x,y)-2x+(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^4+(x-1)^2+(y-3)^2}} = 0$$