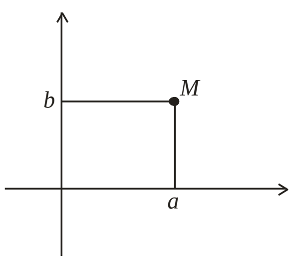
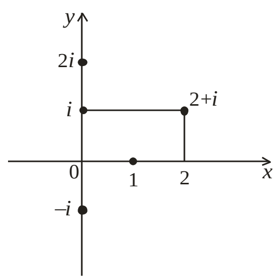
**Лекция 1-2**

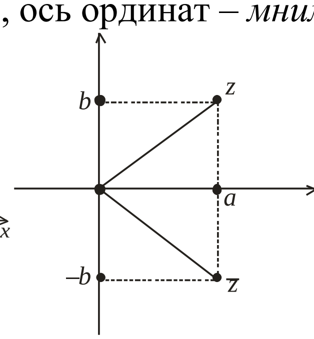
# Тригонометрическая форма комплексного числа.

## 1. Комплексная плоскость

Каждому комплексному числу соответствует точка на плоскости, и каждой точке соответствует комплексное число. Вещественные точки имеют ординату, равную нулю и лежат на оси абсцисс. на оси ординат расположены точки, у которых вещественная компонента равна нулю. Эти числа называют *чисто мнимыми*. Это числа $z = yi$. Началу координат отвечает точка $z = 0$.
Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *плоскостью комплексной переменной*, или *комплексной плоскостью.* Ось абсцисс называется *вещественной осью*, ось ординат – *мнимой*.



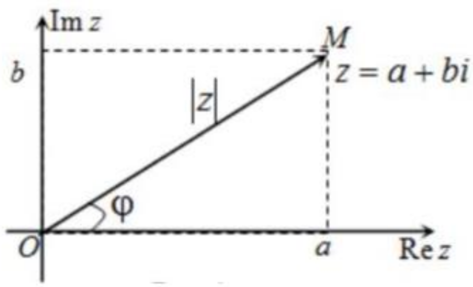




Точка М изображает комплексное число $a+bi$. На среднем рисунке изображена точка $2+i$, на правом рисунке изображены сопряженные числа.

## 2. Модуль комплексного числа.

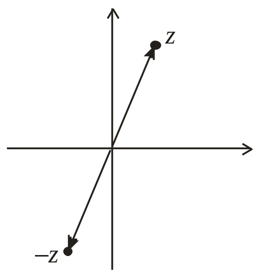
С комплексным числом связывают также вектор, исходящий из начала координат в точку, изображающую это число.




Введем в рассмотрение полярные координаты точки $z$. Длина радиуса - вектора точки, изображающей комплексное число, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$. Очевидно, что $|z| \geq 0$. Если $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Пусть $z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ или, что то же самое, $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$

На следующем рисунке изображены противоположные комплексные числа. Их радиус – векторы направлены в противоположные стороны, а модули равны.




**Свойства модуля**

$$1. |z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0,$$

$$2. |z| = |\overline{z}|,$$

$$3. |\overline{z_1 z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$4. |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Свойства 1 и 2 очевидны.

Докажем свойство 3.

Положим $z_1 = x_1 + y_1 i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, z_2 = x_2 + y_2 i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ ;

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \Rightarrow |z_1 z_2|^2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 =$$

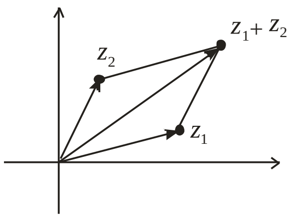
$$x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2 =$$

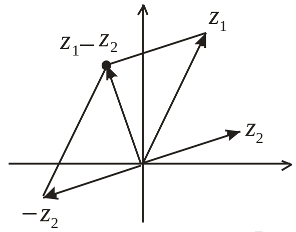
$$x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

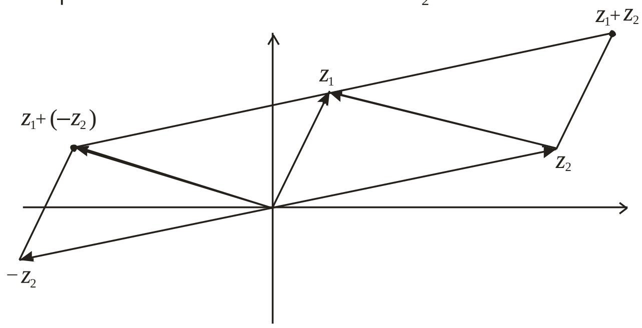
Свойство 4 будет доказано чуть позже.

**Сложение комплексных чисел, представленных радиус- векторами.**

Комплексные числа, представленные радиус-векторами, складываются по правилу сложения векторов. На первой картинке изображена сумма комплексных чисел, на второй - разность, на третьей показано, как эта разность получается: построили радиус- вектор точки $(-z_2)$ и сложили $-z_2$ и $z_1$.



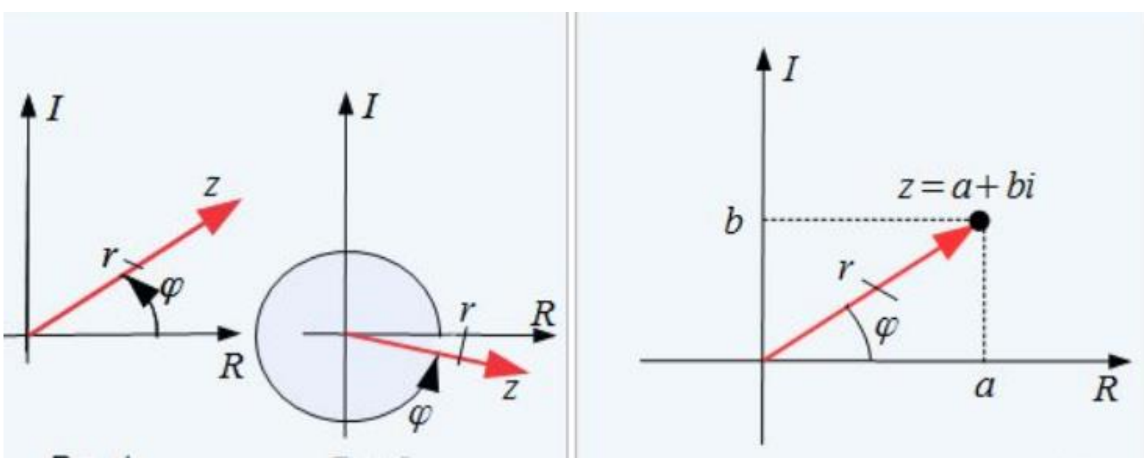




Известно, что при сложении векторов их проекции складываются. Проекции радиус-векторов соответствуют вещественным и мнимым частям изображаемых ими чисел, следовательно, как и следовало ожидать, складываются вещественные и мнимые части этих чисел.

**Обратите внимание, что $|z_2 - z_1|$ — это расстояние между точками $z_1$ и $z_2$**

## 3. Аргумент комплексного числа




Величина $\varphi$ полярного угла точки, изображающей комплексное число, называется аргументом этого числа и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Если брать угол только в пределах от 0 до $2\pi$ или от $-\pi$ до $\pi$, то его обозначают $\arg z$. Аргумент $z$ имеет смысл только при $z \neq 0$. Положительное направление – против часовой стрелки, отрицательное – по часовой стрелке.

Argz = $\arg z + 2\pi k,\ k \in Z$ .

**Тригонометрическая форма комплексного числа.**

Пусть $r = |z|,\ \varphi = \arg z.$ $z = a + bi \Rightarrow a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi \Rightarrow z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ .

Далее, $r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\varphi = \dfrac{a}{r},\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r},\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a},\ a \neq 0$ .

Чтобы понять, в какой четверти находится число, нужно либо его изобразить, либо вычислить $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$ .

Запись $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

**Обратите внимание: в тригонометрической форме обязательно стоит знак «+», и у $\cos\varphi$ и у $\sin\varphi$ один и тот же аргумент.**

Примеры:

1) $z = i \Rightarrow r = 1,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow z = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ ;

2) $z = 1 \Rightarrow r = 1,\ \varphi = 0 \Rightarrow z = \cos 0 + i\sin 0;$

3) $z = -1 \Rightarrow r = 1,\ \varphi = \pi \Rightarrow z = \cos\pi + i\sin\pi;$

4) $z = -i \Rightarrow r = 1,\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right);$

5) $z = 1 - i \Rightarrow z = \sqrt{2},\ \varphi = -\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right);$

$z = -3 + 5i \Rightarrow r = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34},\ \varphi = arctg\left(-\dfrac{5}{3}\right) + \pi$ .

Обратите внимание, что число находится во второй четверти, а $arctg\left(-\dfrac{5}{3}\right)$ - в четвертой, поэтому прибавляем $\pi$ . Получаем:

$$z = \sqrt{34}\left(\cos\left(arctg\left(-\frac{5}{3}\right) + \pi\right) + i\sin\left(arctg\left(-\frac{5}{3}\right) + \pi\right)\right).$$

**Правило**:

Если число *z=a+bi* находится в I или IV четвертях, то $\varphi = arctg\dfrac{b}{a}$.

Если число *z=a+bi* находится в II или III четвертях, то $\varphi = arctg\dfrac{b}{a} + \pi$ .

**Неравенства для модуля суммы и разности двух комплексных чисел**

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$
$$|z_1 + z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$$

Доказательство.

Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Rightarrow |z_1 \pm z_2|^2 =$$
$$|r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \pm r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)|^2 = |(r_1\cos\varphi_1 \pm r_2\cos\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \pm \sin\varphi_2)|^2 =$$
$$(r_1\cos\varphi_1 \pm r_2\cos\varphi_2)^2 + (r_1\sin\varphi_1 \pm r_2\sin\varphi_2)^2 = r_1^2 \pm 2r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + r_2^2 =$$
$$r_1^2 \pm 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + r_2^2 \le r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow |z_1 \pm z_2| \le r_1 + r_2 \Leftrightarrow$$
$$|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Тем самым мы доказали четвертое свойство модулей.

Для доказательства второго неравенства применим первое неравенство к выражению $z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$. Тогда

$$|z_1| \le |z_1 - z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|. \qquad (1)$$

Аналогично, заменив $z_1$ на $z_2$, получим

$$|z_2| \le |z_2 - z_1| + |z_1| \Rightarrow |z_2 - z_1| \ge |z_1| - |z_2|. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует неравенство

$$|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

Доказанные неравенства имеют геометрический смысл:

Сумма длин сторон треугольника больше длины третьей стороны, длина стороны треугольника меньше модуля разности длин двух других сторон. Заметим также, что равенство в обоих неравенствах будет только в случае $\varphi_1 = \varphi_2$ или $\varphi_1 = \pi + \varphi_2$, т.е. векторы, изображающие комплексные числа $z_1$ и $z_2$, коллинеарны.

**Действия над комплексными числами в тригонометрической форме**

1. Умножение комплексных чисел.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ .

Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)) =$$
$$r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

**При умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.**
Это же утверждение верно для нескольких сомножителей.

2. Возведение комплексного числа в степень с целым показателем. Формула Муавра.

**При возведении комплексного числа в степень с целым показателем его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.**

Доказательство.
Пусть $n \in N$, тогда из правила умножения комплексных чисел следует, что
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *то* $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Если $n = 0$, то формула остается верной: полагая, по определению, $z^0 = 1$, получим: $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$.

Если $m < 0$ и целое, т. е. $m = -n,\ n \in N$, то, по определению,

$$z^m = z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} = \frac{r^{-n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)}{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} =$$

$$r^{-n}(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)).$$

Таким образом, для любого $m \in Z$

$$z^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).$$

Эта формула называется формулой Муавра.

Пример:

$$z = -1 - i\sqrt{3},\ r = \sqrt{1+3} = 2,\ \varphi = arctg\frac{-\sqrt{3}}{-1} + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow$$

$$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Вопрос: почему прибавили $\pi$ ?

Вычислим $z^{24}$:

$$z^{24} = 2^{24}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\cdot 24 + i\sin\frac{4\pi}{3}\cdot 24\right) = 2^{24}\left(\cos 32\pi + i\sin 32\pi\right) = 2^{24}.$$

**Деление комплексных чисел в тригонометрической форме.**

Деление $\frac{z_1}{z_2}$ –это умножение $z_1$ на $z_2^{-1}$, т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\cdot z_2^{-1} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2^{-1}(\cos\left(-\varphi_2\right) + i\sin\left(-\varphi_2\right)) =$$

$$r_1 r_2^{-1}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

**При делении модули делятся, а аргументы вычитаются.**

Тригонометрические формулы позволяют с легкостью получать различные формулы, известные нам из тригонометрии.

Пример:

Получим формулы $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,\ \ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ .

Возведем $\cos\varphi + i\sin\varphi$ в квадрат двумя способами: непосредственно и по формуле Муавра:

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^2 = \cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

Левые выражения равны, значит, и правые равны, но тогда равны их вещественные и мнимые части:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,\ \ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

## Вопросы к лекции

1. Что такое полярная система координат?
2. Как определяется модуль и аргумент комплексного числа?
3. Где расположены комплексные числа с одинаковым модулем?
4. Где расположены комплексные числа с одинаковым аргументом?
5. Как записывается число в тригонометрической форме?
6. Каково условие равенства чисел в тригонометрической форме?
7. Как перемножаются числа в тригонометрической форме?
8. В чем состоит формула Муавра?
9. Что происходит с модулем и аргументом комплексного числа при комплексном сопряжении?

10. Как делятся комплексные числа в тригонометрической форме?

11. Разложите на линейные множители:

1) $z^4 - 4$; 2) $z^3 + 8$; 3) $z^2 - 2z + 2$.

12. Примеры и задачи:

1*. Вычислите: $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{24}$

2, 2в)*. Докажите, что:

а) если $|z| < 1$, то $|z^2 - z + i| < 3$;

б) если $|z| \leqslant 2$, то $1 \leqslant |z^2 - 5| \leqslant 9$;

в) если $|z| < 1/2$, то $|(1+i)z^3 + iz| < 3/4$.

3. Докажите, что

$$\left|z_1 - z_2\right| + \left|z_2 - z_3\right| + \left|z_3 - z_1\right| \le 2\left(\left|z - z_1\right| + \left|z - z_2\right| + \left|z - z_3\right|\right)$$

4*. Докажите, что если:

а) $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, то $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$;

b) $z - \frac{1}{z} = 2i\sin\alpha$, то $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\alpha$ для нечетных $n$

5. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{\frac{1-5i}{1+i} - 5\,\frac{1+2i}{2-i} + 2}$; б)* $\sqrt[4]{\frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{2+i\sqrt{5}} - 5\,\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{5}+5i}}$

6*. Выразите $\sin^5 x$ через $\sin ax$ и $\cos bx$ в первой степени.