Лекция 2-1

Тема II. Многочлены.

Определение многочлена. Каноническое представление многочлена. Равенство многочленов.

Любой многочлен от одной буквы x (ее часто называют переменной) после приведения подобных членов может быть записан по убывающим степеням этой буквы в виде суммы одночленов $a_k x^k$, a_k – коэффициент одночлена:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

или по возрастающим степеням

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

Такая запись многочлена называется *канонической*.

Многочлен можно коротко записать так: $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Мы будем, как правило, пользоваться первой записью.

Если коэффициент при x^n не равен нулю, то число n называют степенью многочлена, а коэффициент при нем – старшим коэффициентом. Коэффициент a_0 называют свободным членом. Константу $a_0 \neq 0$ считают многочленом степени 0, нулевому многочлену приписывается степень $-\infty$. Степень многочлена P будем обозначать так: $\deg P$.

При **сложении** многочленов степень суммы многочленов не может быть больше степени каждого из слагаемых.

При **умножении** многочленов

– старший коэффициент произведения равен произведению старших коэффициентов сомножителей;

– свободный член равен произведению свободных членов;

– степень произведения равна сумме степеней сомножителей.

Если на многочлен смотреть как на символическое выражение, то возникает естественный вопрос, что означает, что *два многочлена равны между собой*? Слово «равенство» используется в двух разных смыслах.

Алгебраический смысл равенства многочленов: два многочлена равны, если в каноническом виде они состоят из одних и тех же одночленов.

Для проверки равенства многочленов надо сравнить коэффициенты при подобных одночленах, т.е. при одинаковых степенях этой буквы.

Например, алгебраическое равенство многочленов от x $ax^3 + bx^2 + cx + d$ и $mx^3 + nx^2 + px + q$ означает равенство коэффициентов: $a = m$, $b = n$, $c = p$, $d = q$.

Тождественный смысл равенства многочленов: многочлены равны, если равны их значения при всех значениях входящих в этот многочлен букв.

Проверить тождественное равенство многочленов по такому определению невозможно, так как невозможно подставить бесконечное число значений букв, и на это не хватило бы целой жизни.

Какова же связь между понятиями алгебраического и тождественного равенства многочленов?

В одну сторону связь очевидна: если многочлены равны алгебраически, то они равны и тождественно, так как оба многочлена состоят из одних и тех же одночленов, и, подставляя в них любые значения букв, мы будем иметь совпадающие числовые выражения.

Доказать обратное утверждение, т. е. что из тождественного равенства многочленов следует их алгебраическое равенство, нелегко. В основе этого факта лежит замечательное утверждение о многочленах от одной буквы.

Теорема о тождестве. *Для алгебраического равенства двух многочленов от одной буквы достаточно проверить равенство значений двух многочленов, подставляя вместо букв числа в количестве, большем, чем степень этих многочленов.*

Без доказательства.

Например, два многочлена первой степени совпадают, если равны их значения при двух значениях буквы; для многочленов второй степени достаточно проверить совпадение значений при трех значениях буквы; для кубических – при четырех и т. д.

Кольцо многочленов

Определение группы. Пусть на множестве элементов A введена некоторая бинарная операция (действие) * такая, что если $a \in A, b \in A \Rightarrow a * b \in A$, т.е. множество A замкнуто по отношению к действию *.

Будем говорить, что множество A образует коммутативную группу по действию *, если выполняются следующие условия:

1. $a * b = b * a$ для любых $a \in A, b \in A$ (коммутативность)

2. $(a * b) * c = (a * b) * c$ (ассоциативность)

3. Существует нейтральный элемент **0**: $\forall a \in A \quad a * \mathbf{0} = a$

4. Для любого элемента $a \in A \quad \exists (-a)$, такой что $a + (-a) = \mathbf{0}$.

Какие из известных вам множеств *N*, *Q*, *Z*, *R*, *C*, корни *n*-ой степени из 1 образуют группу?

Множество многочленов образует коммутативную группу по сложению.

Действительно, пусть $F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $G(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$.

1) $F(x) + G(x) = G(x) + F(x)$,

2) $(F(x) + G(x)) + Q(x) = G(x) + (F(x) + Q(x))$,

3) Существует нейтральный элемент $O(x) = \mathbf{0} : P(x) + \mathbf{0} = P(x)$,

4) Для каждого многочлена $F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ существует противоположный многочлен $-F(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \ldots - a_1 x - a_0$.

Добавим к этим свойствам еще четыре очевидных свойства:

5) $F(x)G(x) -$ многочлен, т.е. множество многочленов замкнуто по отношению к действию умножения,

6) умножение ассоциативно, т.е. $(F(x)G(x))Q(x) = G(x)(F(x)Q(x))$,

7) выполняется дистрибутивный закон:

$$(F(x) + G(x))Q(x) = F(x)Q(x) + G(x)Q(x),$$
$$F(x)(G(x) + Q(x)) = F(x)G(x) + F(x)Q(x).$$

8) Существует нейтральный элемент по умножению: $E(x) = \mathbf{1} : \ P(x) \cdot \mathbf{1} = P(x)$,

Докажем, например, свойство 6).

Пусть $F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $G(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$,

$Q(x) = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Запишем их, используя знаки суммы: $F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $G(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, $Q(x) = \sum_{k=0}^{p} c_k x^k$.

$$F(x)G(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_{n-1} b_m + a_n b_{n-1}) x^{n+m-1} + (a_n b_{m-2} + a_{n-2} b_m + a_{n-1} b_{n-1}) x^{n+m-2} + \ldots$$
$$\ldots + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0.$$

Коротко это произведение можно записать так:

$$F(x)G(x) = \sum_{i+j=0}^{n+m} a_i b_j x^{i+j}.$$

Произведение трех многочленов теперь можно записать так:

$$\left(F(x)G(x)\right)Q(x) = \sum_{i+j+l=0}^{n+m+s} a_i b_j c_l x^{i+j+l}.$$

Аналогично вычислим сначала произведение $G(x)Q(x) = \sum_{i+j=0}^{n+m} b_j c_l x^{j+l}$, а затем

произведение трех многочленов

$$F(x)\left(G(x)Q(x)\right) = \sum_{i+j+l=0}^{n+m+s} a_i b_j c_l x^{i+j+l}.$$

Мы видим, что эти произведения совпали.

Аналогично можно доказать свойство 7).

Определение. Множество элементов, для которого:

1) определены действия сложения и умножения,

2) множество образует коммутативную группу (она называется абелевой группой),

3) замкнуто по отношению к умножению,

4) справедливы ассоциативный и дистрибутивный законы,

называется **кольцом.**

Если еще существует единица по умножению, то такое множество называется **кольцом с единицей.**

Таким образом, многочлены образуют кольцо с единицей.

Математическая индукция

Различные утверждения (теоремы) о последовательностях часто доказывают рассуждением, которое называется *математической индукцией*.

Пусть нам надо доказать утверждение вида: для каждого натурального числа n верно утверждение $P(n)$.

Метод математической индукции, применяемый для его доказательства, состоит в следующем.

1. Утверждение проверяется для начального значения n, то есть доказывается утверждение $P(1)$.

2. Доказывается условное утверждение: если верно $P(n)$, то верно $P(n + 1)$, т.е. $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$.

Первый шаг в этом доказательстве называется *базой индукции*, второй шаг называется *индукционным переходом.*

Пример. Применим метод математической индукции в простом случае для доказательства формулы для суммы квадратов первых n натуральных чисел: $s_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Прежде всего, проверяем справедливость этой формулы для первых значений n.

$n = 1$ $\quad s_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

$n = 2$ $\quad s_2 = 1 + 4 = 5 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6}$

Затем предполагаем формулу справедливой для суммы $n - 1$ члена и доказываем, что она будет справедлива и для суммы n членов. Тогда от начальных значений $n = 1, 2$ мы сможем последовательно переходить дальше: $2 \Rightarrow 2 + 1 = 3$, $3 \Rightarrow 3 + 1 = 4$ и т. д., т. е. установим справедливость формулы для любого натурального n. Осталось провести выкладки.

Дано: $s_{n-1} = \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$.

Доказать: $s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Доказательство: $s_n = s_{n-1} + a_n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + n^2 = \frac{n}{6}((n-1)(2n-1) + 6n) = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, что и требовалось доказать.

Важность каждого из двух пунктов при доказательстве теорем методом математической индукции поясним шуточным примером.

Допустим, что вы должны доехать на автобусе до некоторого места, находящегося от вас за несколько остановок. Вам нужно:

1) сесть в автобус;

2) знать, что если автобус приехал на какую-то остановку, то он приедет и на следующую.

Второе условие гарантирует, что если вы начали движение, то оно вас обязательно приведет к цели. Если же оно соблюдается, но вы не сели в автобус, то, разумеется, вы никуда не приедете.

Чаще всего метод математической индукции применяется для доказательства формул, содержащих переменное натуральное число, скажем, n. Мы начали с доказательства формулы для суммы квадратов натуральных чисел.

Докажите аналогичным рассуждением формулу суммы кубов первых n натуральных чисел.

$$s_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Переход основан на знании содержательной связи между s_n и s_{n+1}: $s_{n+1} = s_n + (n+1)^3$.

Индуктивные рассуждения используют не только в алгебре.

Приведем пример.

Доказать, что n прямых на плоскости в общем положении (т. е. никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке) делят плоскость на $a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$ частей.

Доказательство. Начнем с базы индукции. Пусть $n = 1$. Одна прямая делит плоскость на 2 части. Проверяем формулу: $a_1 = \frac{1+1+2}{2} = 2$. Аналогично две (не параллельные) прямые делят плоскость на 4 части, и действительно, $a_2 = \frac{2^2+2+2}{2} = 4$. Аналогично $a_3 = \frac{3^2+3+2}{2} = 7$, что легко проверяется построением.

Выполняем индукционный переход. *Предположим*, что n прямых в общем положении делят плоскость на $\frac{n^2+n+2}{2}$ частей. *Докажем*, что $n + 1$ прямая делят плоскость на $\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$ частей. Посмотрим геометрически, сколько новых областей добавляется при проведении ($n + 1$)-ой прямой. Начнем проводить ($n + 1$)-ю прямую «издалека, из бесконечности». Когда она «встретит» первую из проведенных ранее n прямых, добавится одна новая область. Затем при подходе к каждой новой прямой добавится одна новая область. Таких «подходов» будет n, так как по условию мы пересечем *каждую* из n прямых (параллельных прямых не может быть) и каждую из них отдельно от другой (общих точек пересечения не может быть). После пересечения последней из n прямых, мы добавим в конце еще одну, ($n + 1$)- ю новую область.

Итак, число областей при проведении ($n + 1$)-ой прямой увеличилось на $n + 1$.
Осталось сделать соответствующие преобразования. Зная, что n прямых разделили плоскость на $\frac{n^2+n+2}{2}$ области, мы получаем, что $n + 1$ прямая разделит плоскость на $\frac{n^2+n+2}{2} + (n+1)$ область. Но $\frac{n^2+n+2}{2} + (n+1) = \frac{(n^2+2n+1)+(n+1)+2}{2} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$, что и требовалось доказать.

Деление многочленов с остатком.

Теорема. *Многочлен* $F(x)$ *можно разделить на многочлен* $G(x) \neq 0$ *с остатком. Под этим понимают, что* $F(x)$ *можно представить в таком виде:* $F(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x)$, *где степень остатка* $R(x)$ *строго меньше степени делителя* $G(x)$*:* $deg\, R < deg\, G$ *(или остаток равен нулю).*

Доказательство.

Пусть $F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_0$, $G(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_0$, причем $b_0 \neq 0$. Применим метод математической индукции по степени многочлена $F(x)$, считая $G(x)$ фиксированным.

1) Пусть $n < m$. Тогда $F(x) = 0 \cdot G(x) + F(x)$.

2) Допустим теперь, что теорема доказана для всех $k < n$. Покажем, что оно верно и для $m \le k = n$. Построим многочлен $F_1(x) = F(x) - \dfrac{a_0}{b_0} x^{n-m} G(x)$. Многочлен $F_1(x)$ имеет степень, меньшую, чем n, следовательно, $F_1(x) = Q_1(x) G(x) + R_1, \quad \deg R_1 < \deg G(x)$. Далее,

$$F(x) = F_1(x) + \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} G(x) = Q_1(x) G(x) + R(x) + \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} G(x) =$$

$$(Q_1(x) + \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}) G(x) + R(x).$$

Обозначим $Q(x) = (Q_1(x) + x^{n-m})$ и получим нужное представление.

Докажем, что оно единственно.

Пусть $F(x) = QG(x) + R(x)$ и $F(x) = Q_1 G(x) + R_1(x)$, причем степени многочленов $R(x)$ и $R_1(x)$ меньше степени многочлена $G(x)$. Тогда

$0 = (Q(x) - Q_1(x)) G(x) + (R(x) - R_1(x)) \Rightarrow (Q(x) - Q_1(x)) G(x) = R_1(x) - R(x)$. Но степень многочлена $R_1(x) - R(x)$ меньше степени $G(x)$. Это возможно лишь при $Q(x) - Q_1(x) = 0$, и, следовательно, $R_1(x) - R(x) = 0$, но это и означает, что $R_1(x) = R(x)$ и $Q(x) = Q_1(x)$.

Замечание. Многочлен $Q(x)$ называется **неполным частным**, а $R(x)$ – **остатком**.

Такое представление можно получить из алгоритма «деления углом», который аналогичен делению целых чисел «столбиком». Покажем этот алгоритм на примере

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 5x + 1 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^4 + x^3 - 2x^2} \qquad\qquad & x^2 + 3x - 3 \\ 3x^3 \qquad + 5x + 1 & \\ \underline{3x^3 + 3x^2 - 6x} \quad & \\ -3x^2 + 11x + 1 & \\ \underline{-3x^2 - 3x + 6} & \\ 14x - 5 & \end{array}$$

$F(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 5x + 1$,

$G(x) = x^2 + x - 2$,

$Q(x) = x^2 + 3x - 3$,

$R(x) = 14x - 5$,

$F(x) = G(x)Q(x) + R(x)$;

$\deg R = 1$; $\deg G = 2$, т.е. $\deg R < \deg G$

Особенно часто приходится делить на двучлен первой степени $G(x) = x - a$. Остаток при делении на двучлен должен иметь степень, меньшую 1, т. е. быть константой.

Выделение целой части рациональной дроби

Деление многочленов с остатком полезно для выделения целой части рациональной дроби, т. е. представления дроби $\frac{F(x)}{G(x)}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби, у которой степень числителя меньше степени знаменателя:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{G(x) \cdot Q(x) + R(x)}{G(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{G(x)}, \ \deg R < \deg G.$$

Примеры

1) $\frac{3x + 2}{x + 1} = \frac{3x + 3 - 1}{x + 1} = 3 - \frac{1}{x + 1}$,

2) $\frac{x^3}{x^2 + x + 1}$. Делим x^3 на $x^2 + x + 1$ с остатком:

$x^3 = (x-1)(x^2+x+1)+1.$

$$\frac{x^3}{x^2+x+1} = x-1+\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Схема Горнера

Разделим многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ на двучлен $(x-x_0)$.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (x-x_0)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + R$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях:

При x^n : $b_0 = a_0$, при x^{n-1}: $a_1 = b_1 - b_0x_0 \Rightarrow b_1 = a_1 + b_0x_0$, при x^{n-k}: $a_k = b_k - b_{k-1}x_0 \Rightarrow b_k = a_k + b_{k-1}x_0$

x_0	a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + b_0x_0$	$b_2 = a_2 + b_1x_0$	…	$b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2}x_0$	$R = a_n + b_{n-1}x_0$

Пример:

Разделим $x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ на $(x+2)$:

-2	1	4	-2	5	1
	1	2	-6	17	-33

$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = (x+2)(x^3+2x^2-6x+17)-33$.

Вопросы к лекции

1. Как определяется равенство многочленов?
2. Как проверить, что многочлены равны, если они не приведены к каноническому виду?
3. Почему многочлены образуют кольцо?
4. В чем состоит метод математической индукции?
5. Что значит разделить многочлен на многочлен?

Примеры и задачи

1. Чему равен показатель кратности корня $x = -2$ для многочлена $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$?

2. Постройте многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами, имеющий корень $z_{1,2} = i,\ z_3 = -1 - i$.

3*. Определите A и B так, чтобы многочлен $Ax^4 + Bx^3 + 1$ делился бы на $(x-1)^2$.

4*. Найдите условие (связь между коэффициентами a и b), при котором многочлен $x^5 + ax^3 + b$ имеет ненулевой корень 2 степени?

5*. Разложите многочлен $x^6 + 27$ на линейные множители.

6*. Разложите многочлен $x^4 - x^2 + 1$ на вещественные неприводимые множители.

7* а). Докажите, что многочлен $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на $x^2 + x + 1$.

б) При каких m, n, p многочлен $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на $x^2 - x + 1$?

8*. Найдите сумму чисел, обратных комплексным корням многочлена: а) $3x^3 + 2x^2 - 1$; б) $x^4 - x^2 - x - 1$.

9**. Докажите, что все комплексные корни уравнения $x^{n+1} - ax^n + ax - 1$ по модулю равны 1 при любом вещественном a.

10**. Найдите многочлен четвертой степени, корнями которого являются квадраты комплексных корней многочлена $x^4 + 2x^3 - x + 3$

11**. Сколько корней многочлена $x^6 + 6x + 10$ лежит в каждом квадранте комплексной плоскости?