

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

А.Р. Нартов

Обработка результатов измерений в 2х частях

Братская помощь первокурсникам технических факультетов ЛЭТИ, с
наилучшими пожеланиями в дальнейшей учёбе и в надежде быть хоть
сколько-нибудь полезным

Часть 1. Прямые измерения

Санкт-Петербург

2022 год

Оглавление

Предисловие от автора и дисклеймер	3
Прямые? Косвенные? Что?	4
Алгоритм обработки результатов прямых измерений	5
Алгоритм с объяснениями и примером	6
Расчёт примера без лишних комментариев	14
Список используемой литературы	17
Приложение	18

Предисловие от автора и дисклеймер

Первые два индивидуальных домашних задания на лабораторных работах по физике, посвящённые обработке результатов экспериментов, уже обросли легендами. Если вы скажете людям, окончившим ФРТ, ФЭЛ, ФИБС, ФКТИ и ФЭА пять, десять, двадцать лет назад, что сидите и считаете погрешности для физики, будьте уверены, что вас поймут и, для красного словца, посочувствуют. Да, к концу 3 семестра расчёт их будет занимать у вас не так много времени: вы или сделаете себе считалку, чтобы она считала всё за вас, или наловчитесь их считать чуть ли ни в уме, но первые ИДЗ и лабы будут даваться со скрипучим скрипом. Это нормально, все должны через это пройти. Как говорится, кто не был – тот будет, кто был – не забудет.

Вкупе со стрессом, боязнь задать глупый вопрос, непривычные в принципе погрешности становятся для многих ещё более сложными. Я прекрасно помню себя в начале первого курса, поэтому, чтобы помочь вам в этом непростом деле, запарился немного и награфоманил этот перевод с методического языка, на язык человеческий.

Важный дисклеймер! Инструкции, приведённые тут, не являются ультимативными, потому что порой разные преподаватели требуют немного по-разному выполнять оные задания. Не нужно топтать ногами, говорить, мол, да вот там какой-то хрен с горы что-то написал нам. Я писал данные указания на основе того, что рассказали мне на 1 курсе и что эти полтора года от меня требовали, но отдельные преподаватели могут иметь несколько иные правила, не стоит с ними спорить. Имеет смысл смотреть указания, которые вам дал преподаватель и, если что-то непонятно, поглядеть, как те же шаги объясняются здесь.

Выражаю благодарность моему преподавателю, ведущему у меня лабораторные работы в одном из семестров за коррективы и советы, а также моим первашам, вопросы которых дали толчок написать первую версию данной «методички».

Санкт-Петербург, август 2022 г.

Нартов А.Р.

Прямые? Косвенные? Что?

Вообще, измерения, результаты которых мы будем обрабатывать, бывают двух основных видов:

1. прямые;
2. косвенные.

Прямое измерение, есть процесс сопоставления измеряемой величины с некой мерой (единицей измерения). То есть мы смотрим сколько единичных метров есть в длине дороги, килограммов в массе тела и так далее. Короче, прямое измерение, это когда величину, которая нас интересует, можно измерить каким-то прибором в неизменных (!!!) условиях: линейкой, весами, динамометром, спидометром.

Но не всегда исследуемую величину можно измерить прибором. Иногда их не существует в принципе, иногда они отсутствуют в конкретной лаборатории. Для таких случаев используются косвенные измерения. К примеру, их можно использовать для нахождения ускорения шарика, сопротивления резистора. Идея заключается в том, что мы не знаем, как эти величины измерить напрямую, но знаем, от каких величин зависит искомая (грубо говоря, мы знаем формулу), так почему бы ни использовать эти знания, измерив прямыми измерениями их, а потом подставив их в формулу? Всё гениальное просто.

Главная проблема заключается в том, что мы живём в неидеальном мире и случайные воздействия, которые оценить почти невозможно, всегда имеют место, постоянно создавая отклонения, из-за чего измерить какую-то величину точно, в принципе, нереально. Измерив пять раз, мы получим, вероятнее всего, пять близких, но разных, значений. Выходом может быть задание какой-то области значений, в которой находится истинное значение – такая область носит название *доверительного интервала*. По сути, мы говорим: в душе не гребу, какое истинное значение, но оно где-то в таких границах, инфа почти сотка. Задаётся такой интервал как среднее значение, плюс-минус какая-то погрешность её измерения. Тому, как найти оные для прямых и косвенных измерений и будет посвящена дальнейшее обилие текста.

¹ [англ.] – Единственный способ учить математику – заниматься математикой.

Алгоритм обработки результатов прямых измерений

Как уже говорилось, прямые измерения имеют место, когда мы взяли и при помощи какого-то прибора напрямую измерили интересующую нас величину. Для чистоты эксперимента, чтобы учесть фактор всякой случайной гадости, необходимо провести измерение несколько раз. Обязательно больше трех, для лаб, обычно, требуется раз пять, но в реальных исследованиях – чем больше, тем лучше.

После многократного измерения величины мы получаем некую выборку. Что это такое? Выборка, в нашем случае, это совокупность результатов измерений какой-то величины, произведённых в неизменных условиях. Разумеется, это совершенно не точное определение, но для нас сойдёт. Из-за того, что мы работаем с какой-то выборкой, данный алгоритм иногда называют алгоритмом обработки данных прямых измерений по выборке.

Теперь к алгоритму. Допустим, вот что вам дано:

- выборка измерений некоторой величины x ;
- мы знаем, что произвели N измерений;
- мы знаем, насколько точен прибор (об этом далее).

Надо найти среднее по выборке и полную погрешность.

Конкретный, сухой алгоритм вы можете найти на сайте кафедры физики в файле `Pogreshnosti.pdf`. Здесь же, я позволю себе немного поломать последовательность и деления на шаги в угоду упрощения повествования.

Посмотрели? На эльфийский похоже, да? Вот то-то и оно. Сейчас объясню, что там что.

В тему «сейчас объясню», есть смешная и ставшая легендой история. В Московском физико-техническом институте долгое время преподавал матанализ замечательный профессор Сергей Михайлович Никольский. На одной его лекции эта история и произошла. Сергею Михайловичу в тот момент было уже за девяносто лет, он всё ещё вёл занятия. В общем, ситуация: лекция, профессор по пишет из одного конца доски в другой огромную формулу. В аудитории гробовая тишина. И тут, один студент решил подиутить, пихнув на стул товарищу канцелярскую кнопку, видимо, от скуки. Второй немного откидывается, больно укалывается и в звенящей тишине огромной аудитории выдавливает:

*- Что ж ты, с*ка, делаешь?!*

Профессор Никольский, поворачиваясь, без нотки смущения заявляет:

- Я сейчас всё объясню!

Алгоритм с объяснениями и примером

Все дальнейшие рассуждения я, для наглядности, проведу с конкретным примером. Допустим, мы решили измерить максимальную скорость, которую может развить автомобиль, после тюнинга в гаражных условиях. Значит, нам нужно ввести скорость. Как скорость обозначается? Правильно, v . Все дальнейшие выкладки я, с вашего позволения, проведу, используя именно эту букву. Дело в том, что измерить можно абсолютно любую величину, поэтому хоть твёрдый знак туда воткните, суть не поменяется.

Отлично, мы разогнали пяток раз нашу ласточку до максимума и записали со спидометра значения максимальной скорости, которую мы развили. Для удобства, я записал значения в табличку:

Номер измерения	1	2	3	4	5
Скорость (v), км/ч	100	102	99	99	101

Сразу же введём немного душное понятие. *Объём выборки* (N) – это количество проведённых измерений. В нашем случае, мы произвели 5 измерений, то есть

$$N = 5.$$

С этим разобрались. Теперь сама обработка.

1. Шаг номер раз мы сделали повыше: записали данные всех измерений.
2. Шаг номер два. Необходимо записать значения, начиная с минимального и до максимального, занумеровав их от наименьшего, к наибольшему.

Я, опять же, позволю себе сделать табличку, для наглядности:

Номер измерения (i)	1	2	3	4	5
Имя элемента (v_i)	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
Скорость (v_i), км/ч	99	99	100	101	102

Кроме того, мы можем теперь сказать, что максимальное значение в выборке, это

$$v_5 = 102 \frac{\text{км}}{\text{ч}},$$

а минимальное, это

$$v_1 = 99 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

3. Собственно, тогда перейдем к шагу номер три и сосчитаем размах выборки. *Размах выборки* это, по определению, разница между максимальным и минимальным значением в выборке:

$$R = |v_{\max} - v_{\min}|.$$

У нас же,

$$R = |v_5 - v_1| = \left| 102 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - 99 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right| = 3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Маленькая ремарка! Прошу не забывать про единицы измерения. Одним преподавателям на это глубоко всё равно, но другие, за отсутствие их будут очень сильно ругать.

Здесь же сразу мы можем провести грубую проверку наших крайних значений (максимального и минимального!!!), на предмет промахов. Вдруг из-за ошибки мы получили слишком большое или слишком маленькое значение, которое может, по итогу, испортить нам картину.

Делается это очень просто. Должно соблюдаться два условия:

$$|v_{\min} - v_{\min+1}| < U_{P,N} R$$

для минимальных значений и

$$|v_{\max} - v_{\max-1}| < U_{P,N} R$$

для максимальных.

Здесь эти сложные буковки обозначают: v_{\min} – минимальное значение в выборке, $v_{\min+1}$ – следующее по величине за минимальным, v_{\max} – максимальное значение, $v_{\max-1}$ – предыдущее по величине перед максимальным, $U_{P,N}$ – какая-то константа².

Что эти неравенства означают? По сути, что разница между крайним значением с соседним с ним не должна превышать какую-то долю от размаха. Если указанные неравенства выполняются, то промахи отсутствуют. Если нет, то величину, на котором неравенство ломается обзываем промахом, убираем и возвращаемся к шагу номер три.

Важно! Мы таким образом проверяем исключительно крайние, то есть, максимальные и минимальные значения!

Автор использовал данную проверку прямо на паре, в момент снятия лабы. То есть сняли вы 10 значений, нашли самое большое и самое маленькое, на калькуляторе прикинули и сразу примерно поняли, нормально у вас всё, или лучше повторить измерения ещё разок.

² Значения константы $U_{P,N}$ зависят от двух параметров: P – требуемой величины точности (в процентах) и N – объёма выборки. Найти значения константы для основных значений N и $P = 95\%$ можно в конце сего файла. Кроме того, важно отметить, что U может быть записана и как u – маленькая в табличке.

Рассмотрим наш пример теперь. В условиях большинства лабораторных работ, принимаем, что $P = 95\%$. В нашем случае, $N = 5$, значит,

$$U_{P,N} = U_{95,5} = 0,64.$$

Подставляя в указанные выше неравенства, получаем

$$|v_1 - v_2| = \left| 99 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - 99 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right| = 0 < 0,64 \cdot 3 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 1,92 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$|v_5 - v_4| = \left| 102 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - 101 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right| = 1 \frac{\text{км}}{\text{ч}} < 1,92 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Все неравенства выполняются, промахов нет – экспериментатор молодец.

4. Теперь шаг четыре: расчёт среднего. Ну, это делается всегда очень просто, как в школе, когда оценки за четверть считали:

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N}{N},$$

выражение в числителе можно написать в короткой, но страшноватой форме

$$\sum_{i=1}^N v_i = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N,$$

что, по сути, означает сумму членов с коэффициентами от $i = 1$ до $i = N$.

Собственно, наш пример:

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5}{5} = \frac{99 \frac{\text{км}}{\text{ч}} + 99 \frac{\text{км}}{\text{ч}} + 100 \frac{\text{км}}{\text{ч}} + 101 \frac{\text{км}}{\text{ч}} + 102 \frac{\text{км}}{\text{ч}}}{5} = 100,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Также именно это значение иногда называют результатом измерения. Поняли? Прекрасно, дальше уже начинаются малость муторные вычисления.

5. На шаге номер пять мы сталкиваемся с такой хитрой штукой, как среднеквадратичное отклонение (СКО). Чуть подробнее об этой штуке вам расскажут позже, в курсе Теории вероятности и математической статистики, пока же примем её, как данность.

Высчитывается СКО по очень большой формуле:

$$S_v = \sqrt{\frac{(v_1 - \bar{v})^2 + (v_2 - \bar{v})^2 + (v_3 - \bar{v})^2 + \dots + (v_N - \bar{v})^2}{N - 1}}.$$

Здесь в индексе у S , как и везде, вместо буквы "v" вы будете писать то, что нужно по условию вашей задачи. Просто я коль считаю скорость, использую эту букву.

Попробую посчитать СКО для нашего случая, выписав вниз промежуточные действия:

$$(v_1 - \bar{v})^2 = \left(1,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2 = 1,44 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$(v_2 - \bar{v})^2 = \left(1,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2 = 1,44 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$(v_3 - \bar{v})^2 = \left(0,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2 = 0,04 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$(v_4 - \bar{v})^2 = \left(0,8 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2 = 0,64 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$(v_5 - \bar{v})^2 = \left(1,8 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2 = 3,24 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$(v_1 - \bar{v})^2 + (v_2 - \bar{v})^2 + (v_3 - \bar{v})^2 + (v_4 - \bar{v})^2 + (v_5 - \bar{v})^2 = 6,8 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Подставив это в формулу, получим:

$$S_v = \sqrt{\frac{6,8 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2}{5 - 1}} = \sqrt{\frac{6,8 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2}{4}} = 1,304 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

В промежуточных вычислениях, если появляется такая штука с десятичными дробями, советую оставлять 3-4 знака после запятой, чтобы не накопить к концу вычислений ошибку.

6. Шаг номер шесть: поиск промахов. Не опять, а снова!

Обычно, про размах рассказывают именно в этот момент, мол, есть два ~~студя~~ способа проверить систему на промахи: размах и СКО. Но это у нас такие числа вкусные и СКО так легко посчиталось, а если там по три знака после запятой в каждом значении? И это, даже если не лапками считать, а вбивать в эксель, то ещё приключение. Поэтому про более грубую проверку я рассказал чуть раньше, чтобы в реальной лабораторной работе вы несколько оптимизировали своё время и, возможно, непосредственно на лабе прикидывали, нормально ли снялись значения.

Кароооче, по-хорошему, есть два возможных варианта как проверку эту можно учинить:

- а) по размаху;
- б) по среднему квадратичному отклонению.

Про размах я рассказывал ранее, в шаге 3, но советую результаты оной записывать в этом шаге, чтобы исключить возмущения преподавателей, если они хотят увидеть всё по букве оригинальной инструкции.

При проверке с помощью СКО, формула идентична:

$$|v_{max/min} - \bar{v}| < V_{P,N} S_v.$$

Значение букв здесь аналогично проверки с помощью размаха: $v_{max/min}$ – минимальное или максимальное значение (проверяем оба, по очереди), \bar{v} – среднее значение, рассчитанное в шаге 4, S_v – СКО.

Здесь мы также проверяем только крайние значения. И константа здесь, если что, совершенно иная. Её значения приведены в конце сего сочинения, в приложении.

Рассмотрим наш пример:

$$V_{P,N} = V_{95,5} = 1,67;$$

$$|v_1 - \bar{v}| = \left| 99 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - 100,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right| = 1,2 < 1,67 \cdot 1,3 = 2,171;$$

$$|v_5 - \bar{v}| = \left| 102 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - 100,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right| = 1,8 < 2,171.$$

Премахов опять не обнаружено.

Идём усиленно к концу. Теперь мы хотим посчитать полную погрешность. Но для этого надо сделать ещё один шаг.

7. Шаг номер семь: СКО среднего. Делается это по простой (относительно) формуле:

$$S_{\bar{v}} = \frac{S_v}{\sqrt{N}}.$$

Зачем это надо, покажу дальше, но пока просто примите. Применительно к нашему примеру:

$$S_{\bar{v}} = \frac{1,3}{\sqrt{5}} = 0,5814 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

8. Шаг восемь: расчёт случайной погрешности. Случайная погрешность – это погрешность, появляющаяся как раз из-за тех случайных факторов, которые всегда нам портят малину и из-за которых значения при измерениях скачут вокруг да около истинного значения. Соответственно, её нужно учитывать. Считать её можно также двумя способами: по уже привычному размаху и неприятному СКО.

- а) По размаху:

$$\Delta v_p = \beta_{P,N} R.$$

б) По СКО:

$$\Delta v_{\text{СКО}} = t_{P;N} S_{\bar{v}},$$

опа, предыдущий пункт пригодился. Здорово. Коэффициенты $\beta_{P;N}$ и $t_{P;N}$ также приведены в приложении к сей графомании. Теперь можно их сравнить:

$$\Delta v_p ? \Delta v_{\text{СКО}}$$

по-хорошему, они должны быть равны. В нашем случае, это выглядит как:

$$\Delta v_p = 0,51 \cdot 3 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 1,53 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$\Delta v_{\text{СКО}} = 2,8 \cdot 0,5814 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 1,6279 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$1,53 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \approx 1,6279 \frac{\text{км}}{\text{ч}},$$

так что сойдёт. Можно было бы и лучше, конечно, но тем не менее.

Тут же замечу. Разные преподаватели просят считать по-разному. Меня просили считать двумя способами и сравнивать, кому-то из преподавателей достаточно одного способа. Автору, в конце концов, стало лень в каждой лабораторной много раз считать СКО и он стал всё считать по размаху. Но пока вы ещё не наловчились делать это без ошибок, и пока это требуют преподаватели, обязательно, проверяйте себя с помощью СКО.

9. Шаг девять, это нахождение ещё одной погрешности. В этот раз, приборной. Приборная погрешность (θ) – это та погрешность, которая вносится непосредственно представлением значения на приборе: риски на шкалах, цифорки на электронных приборах. Обычно, значение оной задаётся, но если нет, есть, как у России, три пути:

а) для приборов со шкалой, то есть линеек, динамометров и всяких штангенциркулей, приборная погрешность, есть половина цены деления. То есть, к примеру, у школьной линейки,

$$\theta = 0,5 \text{ мм};$$

б) для цифровых приборов, приборная погрешность, равна последнему разряду. То есть, если прибор показал 10,344,

$$\theta = 0,001;$$

с) иногда задаётся класс точности прибора (γ), с помощью которого можно рассчитать погрешность для данного показания прибора (k):

$$\theta = \frac{\gamma \cdot k}{100}.$$

В нашем примере со скоростью примем, что мы измеряли по спидометру электронному, для пущей точности, и точен он был, вплоть до единиц, то есть,

$$\theta_v = 1 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Обычно непосредственно расчёт приборной погрешности, мол, это половина цены деления, бла-бла-бла, в работу вписывать не нужно. Нужно просто записать, что вот она такая вот есть красивая.

10. Шаг десять это шаг расчёта полной погрешности. Уррра! Дождались, осталось чуть-чуть. Вычисляется она элементарно:

$$\Delta \bar{v} = \sqrt{\Delta v^2 + \theta_v^2}.$$

Инструкций, какое Δv выбирать я не припомню, поэтому, если не указано иное, выбирайте на своё усмотрение. Они, всё равно, почти равны. Я душнила и поэтому, для пущей строгости, выбираю большее.

Таким образом, с нашими данными,

$$\Delta \bar{v} = \sqrt{\left(1,6279 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2 + \left(1 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2} = 1,9105 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Не забываем, про парочку разрядов про запас.

Иногда, чтобы оценить, на сколько велика эта погрешность, высчитывают относительную погрешность:

$$\delta_v = \frac{\Delta \bar{v}}{\bar{v}} \cdot 100\%$$

$$\delta_v = \frac{1,9105 \frac{\text{км}}{\text{ч}}}{100,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} \cdot 100\% \cong 1,9\%.$$

Это очень хорошая погрешность, экспериментатор молодец.

11. Шаг одиннадцатый: запись ответа и округление.

Теперь, запишем наш ответ в виде:

$$v = \bar{v} \pm \Delta \bar{v}$$

$$v = 100,2 \pm 1,9105 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Что-то как-то малость некрасиво, не находите? Вот и мне не нравится. Давайте-ка округлим это всё безобразие. Более того, смысл о величине погрешности несут одна-две *значащие цифры* (цифры, не являющиеся нулём и единицей, за исключением случая, когда ноль стоит между ненулями – тут даже он является значащей цифрой).

Здесь нужно упомянуть о **правилах округления**. Мы вступаем на очень скользкую дорожку. Дело в том, что хоть большая часть преподавателей сходится в оных, некоторые из них могут иметь своего царя округлений в голове. Поэтому если преподаватель не высказал иного, можете следовать указанным ниже правилам, если же дал конкретные правила, следуйте им.

Собственно, небольшой свод правил:

- 1) выражение наше представляется в нормальном виде, то есть общий показатель степени выносят за скобку или заменяют соответствующей приставкой, короче, записывают в одной из форм:

$$v = 100,2 \pm 1,9105 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = (100200 \pm 1910,5) \cdot 10^{-3} \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 100200 \pm 1910,5 \frac{\text{м}}{\text{ч}},$$

как вы можете заметить, вторая и третьи формы, мягко говоря, не удобны, поэтому мы далее в работу возьмём первую, как раз с приставкой, в то время как в иных случаях, могут быть удобны иные формы;

- 2) первой округляется погрешность, до одной значащей цифры, если это цифра 2 и более, или до двух, если первая равна единице, то есть, в нашем случае,

$$\Delta \bar{v} = 1,9105 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cong 1,9 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

- 3) затем округляется результат измерения до разряда, до которого округляется погрешность (важно, чтобы единицы измерений и среднего значения и погрешности были одинаковыми!):

$$\bar{v} = 100,2 ,$$

ну, в нашем случае, его округлять не нужно, всё и так хорошо.

Теперь можно **окончательно представить результат** нашего эксперимента:

$$v = 100,2 \pm 1,9 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Поздравляю, вы обработали результаты прямых измерений.

Замечу, что иногда преподаватели просят оформлять результаты в виде таблиц. Их формат вы можете найти на сайте кафедры физики в файле Pogreshnosti.pdf.

Расчёт примера без лишних комментариев

Дано:

Скорость (v), км/ч	100	102	99	99	101
------------------------	-----	-----	----	----	-----

$$\theta_v = 1 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

1. Записал все измерения:

Номер измерения	1	2	3	4	5
Скорость (v), км/ч	100	102	99	99	101

2. Ранжировал выборку

Имя элемента (v_i)	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
Скорость (v_i), км/ч	99	99	100	101	102

3. Вычислил размах выборки:

$$R = |v_5 - v_1| = \left| 102 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - 99 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right| = 3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

4. Рассчитал среднее значение:

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5}{5} = \frac{99 \frac{\text{км}}{\text{ч}} + 99 \frac{\text{км}}{\text{ч}} + 100 \frac{\text{км}}{\text{ч}} + 101 \frac{\text{км}}{\text{ч}} + 102 \frac{\text{км}}{\text{ч}}}{5} = 100,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

5. Рассчитал СКО:

$$S_v = \sqrt{\frac{(v_1 - \bar{v})^2 + (v_2 - \bar{v})^2 + (v_3 - \bar{v})^2 + (v_4 - \bar{v})^2 + (v_5 - \bar{v})^2}{N - 1}}$$

$$(v_1 - \bar{v})^2 = \left(1,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2 = 1,44 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$(v_2 - \bar{v})^2 = \left(1,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2 = 1,44 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$(v_3 - \bar{v})^2 = \left(0,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2 = 0,04 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$(v_4 - \bar{v})^2 = \left(0,8 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2 = 0,64 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$(v_5 - \bar{v})^2 = \left(1,8 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2 = 3,24 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$(v_1 - \bar{v})^2 + (v_2 - \bar{v})^2 + (v_3 - \bar{v})^2 + (v_4 - \bar{v})^2 + (v_5 - \bar{v})^2 = 6,8 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$S_v = \sqrt{\frac{6,8 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2}{5-1}} = \sqrt{\frac{6,8 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2}{4}} = 1,304 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

6. Произвёл проверку на промахи:

а) по размаху:

$$|v_i - v_{i+1}| < U_{95,5} R$$

$$|v_1 - v_2| = \left| 99 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - 99 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right| = 0 < 0,64 \cdot 3 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 1,92 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$|v_5 - v_4| = \left| 102 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - 101 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right| = 1 \frac{\text{км}}{\text{ч}} < 1,92 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

б) по СКО:

$$|v_i - \bar{v}| < V_{95,5} S_v.$$

$$|v_1 - \bar{v}| = \left| 99 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - 100,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right| = 1,2 < 1,67 \cdot 1,3 = 2,171$$

$$|v_5 - \bar{v}| = \left| 102 \frac{\text{км}}{\text{ч}} - 100,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right| = 1,8 < 2,171$$

По обоим способам проверки, промахов не обнаружено.

7. Рассчитал СКО среднего:

$$S_{\bar{v}} = \frac{S_v}{\sqrt{N}} = \frac{1,304}{\sqrt{5}} = 0,5814 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

8. Рассчитал случайную погрешность:

а) по размаху:

$$\Delta v_p = \beta_{P;N} R$$

$$\Delta v_p = 0,51 \cdot 3 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 1,53 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

б) по СКО:

$$\Delta v_{\text{СКО}} = t_{P;N} S_{\bar{v}}$$

$$\Delta v_{\text{СКО}} = 2,8 \cdot 0,5814 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 1,6279 \frac{\text{км}}{\text{ч}};$$

$$1,53 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \approx 1,62 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

9. Вычислил полную погрешность:

$$\Delta \bar{v} = \sqrt{\Delta v^2 + \theta_v^2}$$
$$\Delta \bar{v} = \sqrt{\left(1,6279 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2 + \left(1 \frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2} = 1,9105 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

10. Ответ:

$$v = 100,2 \pm 1,9 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$
$$\delta_v = \frac{\Delta \bar{v}}{\bar{v}} \cdot 100\%$$
$$\delta_v = \frac{1,9105 \frac{\text{км}}{\text{ч}}}{100,2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} \cdot 100\% \cong 1,9\%.$$

Совсем полный ответ:

$$v = 100,2 \pm 1,9 \frac{\text{км}}{\text{ч}}, \delta_v = 1,9\%.$$

Список используемой литературы

1. Морозов В. В., Сobotковский Б. Е., Шейнман И. Л. Методы обработки результатов физического эксперимента. 2004 г.
2. Файл Pogreshnosti.pdf с сайта кафедры физики ЛЭТИ

Приложение

Значения статистических коэффициентов для проверок на промахи и расчётов случайных погрешностей.

Значения коэффициентов Стьюдента $t_{P,N}$ в зависимости от числа наблюдений N при доверительной вероятности $P = 95\%$:

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
$t_{P,N}$	12.7	4.3	3.2	2.8	2.6	2.5	2.4	2.3	2.3	2.0

Коэффициенты $\beta_{P,N}$ для расчета доверительной погрешности по размаху выборки $\Delta x = \beta_{P,N} R$ для числа наблюдений N доверительной вероятности $P = 95\%$:

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\beta_{P,N}$	1.30	0.72	0.51	0.40	0.33	0.29	0.25	0.23	0.21	0.19

Коэффициенты $u_{P,N}$ для проверки результатов наблюдений на наличие грубых погрешностей в зависимости от объема выборки N для доверительной вероятности $P = 95\%$:

N	3	4	5	7	10	15	20	30	100
$u_{P,N}$	0.94	0.76	0.64	0.51	0.41	0.34	0.30	0.26	0.20

Коэффициенты $v_{P,N}$ для проверки элементов выборки на наличие грубых погрешностей в зависимости от объема выборки N при доверительной вероятности $P = 95\%$:

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$v_{P,N}$	1.15	1.46	1.67	1.82	1.94	2.03	2.11	2.18	2.23	2.29