

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

А.Р. Нартов

## **Обработка результатов измерений в 2х частях**

Братская помощь первокурсникам технических факультетов ЛЭТИ, с  
наилучшими пожеланиями в дальнейшей учёбе и в надежде быть хоть  
сколько-нибудь полезным

Часть 2. Косвенные измерения

Санкт-Петербург

2022 год

## Оглавление

Введение .....	3
Маленький математический ликбез .....	5
Обработка данных косвенных измерений методом переноса погрешностей...	8
Обработка данных прямых измерений методом выборки.....	14
Список используемой литературы .....	19
Приложение .....	20

«Преимущество нашего физического образования в том, что мы всегда видим за этими формулами и физику. Более того, уже после аспирантуры я понял колоссальное преимущество выпускника кафедры математики с физического факультета перед мехматами - у нас никогда не было проблемы с поиском задачи.»

Бутузов Валентин Фёдорович

## Введение

Как я уже упоминал, вы будете работать с двумя типами измерений: прямыми и косвенными.

Напомню, что прямые измерения, это когда вы хотите получить результаты измерений данной конкретной величины: скорости, расстояния, силы, напряжения и так далее.

Косвенные же измерения имеют место, когда вам необходимо узнать энергию тела, мощность или другую величину, для которой или у вас нет прибора под рукой по разным причинам (потеряли, забыли, или, вообще, такого не существует). Обычно, все эти величины можно выразить через более простые, которые уже можно измерить приборами с меньшими сложностями. Так и делают, и расчёт величин через вычисление результатов прямых измерений, по известным законам и формулам, называют косвенными.

Рассмотрим ситуацию с известным каждому пионеру законом Ома. Формулу знают все:

$$R = \frac{U}{I},$$

где  $R$  – сопротивление резистора,  $U$  – напряжение на его клеммах,  $I$  – ток через резистор. В данной формуле могут меняться напряжения и тока, и для их измерения нам не нужно придумывать хитрые способы. С нашим бедным Омом мы можем сделать две интересные штуки: во-первых, мы можем проверить его выполнимость при разных напряжениях и токах, во-вторых, использовать для расчёта сопротивления резистора. Главный прикол в том, что эти две задачи обрабатываются двумя разными способами: методом переноса погрешностей и методом выборки.

Если говорить кратко, области их применения можно поделить так: если мы хотим, как можно точнее измерить какой-то параметр, не меняя условий измерений (по сути, получаем несколько независимых выборок, для каждой величины, входящей в уравнение), берём перенос погрешностей; если же рассматриваем меняющиеся условия и итоговую выборку итоговой функции, нужен уже выборочный метод.

Сложно, да? Не удивлён, если да. Ну ничо, сейчас посмотрим поближе и разберёмся на примере.

Но для начала, немного математики, уж извините. В физико-технических университетах нередко ситуация, когда у физики и математики происходит небольшой конфликт: вся ВУЗовская физика написана на языке производных и интегралов, а математика к этим темам подбирается, дай Бог, к концу первого или даже второго семестра. Отсюда происходит ситуация сюр: на физике надо производить операции, о которых первокурсники в душе не чают. И при обработке косвенных измерений такая тема тоже есть. Чтобы вы поняли, что от вас хотят, написан небольшой математический ликбез. Короче, приступим.

Примечание:

*Кроме того, скажу сразу, существует ещё один способ: метод наименьших квадратов. Я не буду разбирать его, так как он используется в лабораторных работах достаточно редко и встретился мне только единожды, и то, как работать с ним в данном конкретном случае, было подробно разобрано в самой лабораторной работе.*

*И, кроме того, положая руку на сердце, я хоть и понимаю сферу его применения, сам метод я понимаю не очень хорошо, на этом, как говорится, мои полномочия всё.*

## Маленький математический ликбез

Разумеется, при различных значениях простых величин, итоговое значение интересующей нас более сложной величины будет меняться. При том, в уравнения в физике и высшей математике часто входят несколько таких величин, которые могут меняться в условии задачи. Такие величины называют переменными. На умном языке, уравнения, в которых есть несколько оных, называют функциями нескольких (или многих) переменных.

Обозначают её так:

$$f = f(x, y),$$

важно отметить, что в скобках переменных может быть и больше. Если функция зависит от  $x, y, z$ , записывается она идентично:

$$f = f(x, y, z).$$

Однако для простоты изложения я заткну внутреннего душнилу, забью на самый общий вид функций и буду использовать только функции вида  $f(x, y)$ , то есть зависящих только от двух переменных. Просто знайте, если вам попадётся функция, зависящая от трёх или большего количества переменных, вам нужно будет сделать ровно те же манипуляции, только ещё парочку раз.

Так, вернулись к матеше. Мы имеем дело с законом Ома. Функция сопротивления тога может быть записана как

$$R = f(U, I).$$

Разумеется, с точки зрения физики это тот ещё бред, ибо не сопротивление током определяется, а наоборот, ток сопротивлением, но чисто математически, оно вот так вот получается. Догадайтесь теперь, почему матфаки и физфаки грызутся.

Как работать с функциями двух переменных, это вопрос большого раздела высшей математики. Вам об этом расскажут на математическом анализе и алгебре и геометрии. Наша же сейчас задача осмыслить только одну вещь из всего этого пласта материала.

Нам пригодится операция взятия частной производной. Я исхожу из того, что, вы уже умеете брать простую производную. Ежели нет, то не бойтесь, как брать делать это своими лапками вам скоро расскажут, а пока пользуйтесь калькуляторами, к счастью, мы не на матанализе, чтоб всё считать своей мозгой, если рядом есть мозга электронная. Моя задача сейчас описать суть.

Собственно, если функция задаётся несколькими меняющимися величинами, а нам надо понять, как на изменение функции влияет одна из них, есть простая

идея: а давайте скажем, что остальные переменные временно постоянны. То есть, они как числа, только буквы. Тоже не меняются. Меняется только одна из них, о которой мы договорились заранее, и по ней мы берём уже стандартную производную.

Соответственно, различается запись. Как вы, наверное, знаете, у записи производной есть два основных варианта:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Но если мы переходим к функции нескольких переменных, то тут уже действует несколько изощрённая форма записи:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Если мы смотрим на это нечто, то понимаем, что что надо взять частную производную по «х». Переменная «х» меняется, а «у» принимается за постоянную величину.

Временами можно встретить иную форму записи:

$$\frac{df(x, y)}{dx}.$$

Такая запись частной производной очень опасна, потому что в различном контексте может значить очень разные вещи. С одной стороны, многие калькуляторы, в числе которых Photomath и WolframAlpha, интерпретируют такую запись просто как частную производную по переменной  $x$ , но, строго говоря, такая запись означает полную производную, которая высчитывается своим особым образом. Поэтому прошу учитывать, что это может быть, как частная производная, так и что-то иное.

Возьмём частные производные, на примере нашей функции сопротивления.

$$R = f(U, I) = \frac{U}{I}.$$

Сосчитаем производную по напряжению:

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U} \frac{U}{I}.$$

Примем ток  $I$  за константу. Тогда, по правилам вычисления производных, получим:

$$\left( \frac{\partial}{\partial U} \frac{U}{I} \right) = \frac{1}{I} \left( \frac{\partial U}{\partial U} \right) = \frac{1}{I}.$$

Сделаем то же самое, но уже с током:

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \left( \frac{\partial U}{\partial I} \frac{1}{I} \right) = U \left( \frac{\partial}{\partial I} \frac{1}{I} \right) = U \cdot \left( -\frac{1}{I^2} \right) = -\frac{U}{I^2}.$$

Запишем и запомним:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial U} &= \frac{1}{I}; \\ \frac{\partial R}{\partial I} &= -\frac{U}{I^2}. \end{aligned}$$

Запомнили? Молодцы, ликбез окончен, пошли разбираться с обработкой.

## Обработка данных косвенных измерений методом переноса погрешностей

Задача: рассчитать сопротивление резистора.

Нам даны результаты измерений:

Величина	Измерения					$\theta$
Напряжение ( $U$ ), В	1001	1000	1005	999	1002	1
Сила тока, ( $I$ ), А	4	4	5	5	3	1

Как я уже сказал выше, данный метод используется, когда у нас есть несколько выборок с измерением разных величин. Проще говоря, есть список измеренных токов, напряжений, ещё каких-то величин, каждое из измерений, которых не имеет жёсткой связи с единичным измерением другой. То есть, к примеру, если вы посмотрите в табличку и поменяете ток в третьей ячейке с током во второй, ничего ровным счётом не произойдёт. Среднее значение останется тем же самым. Более того, в выборке измерений одной величины может быть больше элементов, чем в выборке другой. На итог это очень мало повлияет. Главное правило, должно быть не менее (!!!) трёх измерений каждой переменной. Три – это минимальное число измерений для того, чтобы можно было бы провести хоть сколько-нибудь точную оценку. По-хорошему, в условиях лабораторной работы, как автор уже говорил, хорошо бы иметь минимум пять измерений.

Ввиду того, что у нас на руках сейчас две выборки (выборка измерений напряжения и выборка измерений тока), мы с чистой совестью приступаем к измерениям методом переноса погрешностей.

1. Шаг первый. Берём результаты измерений:

Величина	Измерения					$\theta$
Напряжение ( $U$ ), мВ	1001	1000	1005	999	1002	1
Сила тока, ( $I$ ), мА	4	4	5	5	3	1

Кроме того, ещё раз запишем формулу для сопротивления, чтобы не забыть и потерять:

$$R(U, I) = \frac{U}{I}.$$

И на этом же моменте, сразу скажу: мы переходим к работе со сложными формулами и единицами измерения, в которых порой поменять значения на



раз-два не выйдет и мучиться чтобы всё это поправить, стараясь получить джоули, ватты или что-нибудь ещё, будет так неприятно, что ни в сказке сказать, ни матом сформулировать.

Короче, лучше заранее перевести единицы измерения, которые у нас есть, в единицы измерения СИ, ибо именно через них выражены более сложные единицы.

Здесь есть два варианта: можно перевести сразу, а можно перевести потом, после обработки прямых измерений. Большой разницы тут нет.

Лично я, так как тут всё и так всё лишнее красиво сократится, так как функция очень простая, ничего трогать не буду.

2. На втором шаге мы должны рассчитать средние значения и погрешности для всех интересующих нас величин.

Записываем их в виде

$$f = \bar{f} + \Delta\bar{f},$$

где  $\bar{f}$  – среднее значение переменной, а  $\Delta\bar{f}$  – её полная погрешность.

Для выполнения данной операции используем уже разобранный ранее алгоритм обработки результатов прямых измерений. Тут ничего особо нового нету, посему запишем уже сосчитанные за кадром значения для нашей задачи:

$$U = 1001 \pm 3 \text{ мВ};$$

$$I = 4,2 \pm 1,0 \text{ мА}.$$

То бишь, мы имеем:

$$\bar{U} = 1001 \text{ мВ};$$

$$\bar{I} = 4,2 \text{ мА};$$

$$\Delta\bar{U} = 3 \text{ мВ};$$

$$\Delta\bar{I} = 1 \text{ мА}.$$

и можем с этими значениями что-то изобразить дальше.

3. Шаг третий. Теперь у нас есть средние значения переменных, давайте подставим их в искомую функцию и назовём полученное значение средним значением функции.

Математически это выглядит так:

$$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

В нашем примере это будет выглядеть так:

$$\bar{R} = R(\bar{U}, \bar{I}) = \frac{\bar{U}}{\bar{I}},$$

подставляя цифры, получим

$$\bar{R} = \frac{1001}{4,2} \approx 238,33 \text{ Ом.}$$

4. Прекрасно, идём дальше, на очереди четвёртый шаг. Должен сказать, неожиданно сложный для описания, хотя в целом, ничего сложного в нём нет. Для простоты я его тоже поделю на подшаги.

Теперь надо каким-то образом как-то перенести погрешности с переменных на итоговое значение функции. Как это сделать?

- а. Для начала, нам необходимо взять частные производные по всем переменным, которые мы измеряли. Как это сделать, я описал в математическом ликбезе. В результате выполнения этого шага, у нас получатся несколько частных производных, которые обозначают как

$$\frac{\partial f(x, \dots, t)}{\partial x}; \dots; \frac{\partial f(x, \dots, t)}{\partial t}.$$

В нашем, случае, надо взять производную от функции  $R$  по переменным  $U$  и  $I$ :

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I};$$
$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}.$$

- б. Далее нам необходимо подставить в производные, вместо переменных, их средние значения, которые мы рассчитывали ранее. То есть, вместо  $x$ , во всех частных производных будет стоять переменная  $\bar{x}$ , вместо  $y$ ,  $\bar{y}$  и так далее. При этом, для, опять, же, великой простоты, мы обзовём всё это большущее выражение какой-то буквой. Допустим, это будет буква  $a$  с индексом величины, по которой берём данную производную:

$$a_x = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}.$$

Сразу поясню, данная вертикальная линия в математике означает, что мы подставляем значения, указанные за ней, в выражение, указанные перед линией. В примере с автомобилем, и его энергией на максимальной скорости,

$$a_U = \left. \frac{\partial R(U, I)}{\partial U} \right|_{\bar{U}, \bar{I}} = \left. \frac{1}{I} \right|_{\bar{U}, \bar{I}} = \frac{1}{\bar{I}};$$

$$a_I = \left. \frac{\partial R(U, I)}{\partial I} \right|_{\bar{U}, \bar{I}} = \left. -\frac{U}{I^2} \right|_{\bar{U}, \bar{I}} = -\frac{\bar{U}}{\bar{I}^2}.$$

- с. Теперь нам необходимо умножить каждую из производных на полную погрешность той величины, по которой мы брали производную (то есть ту, которая базируется в индекса у буквы "a" и у нижнего  $\partial$  в частной производной). В этот раз будет без общего вида, будет сразу наша остановочка:

$$a_U \Delta \bar{U} = \frac{1}{\bar{I}} \cdot \Delta \bar{U};$$

$$a_I \Delta \bar{I} = -\frac{\bar{U}}{\bar{I}^2} \cdot \Delta \bar{I}.$$

- d. Теперь, наконец, финишная прямая, надо все наши предыдущие мысли и выводы объединить в формулу одну общую. И такая формула есть:

$$\Delta \bar{f}(x, y) = \sqrt{(a_x \Delta \bar{x})^2 + (a_y \Delta \bar{y})^2}.$$

Разумеется, писать в скобках у  $f$  переменные, от которых она зависит, нет необходимости, я просто уточняю и напоминаю, что это выражение в общем виде.

Радостно крича и прыгая от радости, мы подставляем наши значения в формулу и лицезреем:

$$\Delta \bar{R} = \sqrt{(a_U \Delta \bar{U})^2 + (a_I \Delta \bar{I})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{I}} \cdot \Delta \bar{U}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{U}}{\bar{I}^2} \cdot \Delta \bar{I}\right)^2}$$

или если в числах,

$$\Delta \bar{R} = \sqrt{\left(\frac{1}{4,2 \text{ мА}} \cdot 3 \text{ мВ}\right)^2 + \left(-\frac{1001 \text{ мА}}{(4,2 \text{ мА})^2} \cdot 1 \text{ мА}\right)^2} = 56,751 \text{ Ом}$$

Нихрена себе погрешность... Тут даже я в шоках. Хотя, среднее значение у нас тоже не особо то и маленькое, так что не важно.

4\*. Увы, всё, что описано в 4 пункте, работает не всегда. Бывает, что производная по одной переменной получается простой и красивой, а вот по второй, уже нет. Тогда, зачастую, чтобы лишний раз не потеть, делают финт ушами и берут производную не от самой функции, а от её натурального логарифма (того, у которого внизу стоит экспонента). Сейчас объясню, что это значит.

Например, есть функция

$$f(x, y) = C \left( \frac{x}{y} \right),$$

где  $C$  – некая константа. По сути, это та же функция, что и закон Ома, с которым мы работаем. Производная по  $x$  получается красивой, как вы уже успели заметить:

$$\frac{\partial}{\partial x} C \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{C}{x},$$

но вот уже с производной по игреку есть проблемки:

$$\frac{\partial}{\partial y} C \left( \frac{x}{y} \right) = -\frac{Cx}{y^2}.$$

И это всего лишь простенькая дробь, с ней работать не очень сложно, но когда время поджимает, мучиться даже с такими квадратами в знаменателе не хочется. А если функция ещё какая-то хитровывернутая? Мы что, мазохисты, чтобы в это потом цифры подставлять? Нет, конечно. Мы сделаем так: возьмём логарифм, а потом уже от него возьмём производную. Выглядит это так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \ln C \left( \frac{x}{y} \right) &= \frac{1}{x}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \ln C \left( \frac{x}{y} \right) &= -\frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Ну таки вот, красота же! Зачем было лишний раз мучиться?

Дальнейший алгоритм тот же самый, кроме двух моментов. Во-первых, повелось обозначать другим коэффициентом такие выражения в итоговой формуле, то есть,

$$\left. \frac{\partial \ln f(x, y)}{\partial x} \right|_{\bar{x}, y} = b_x.$$

Ну и сама итоговая формула немного отличается:

$$\Delta \bar{f}(x, y) = \bar{f} \sqrt{(b_x \Delta \bar{x})^2 + (b_y \Delta \bar{y})^2},$$

где  $\bar{f}$  – то самое значение, рассчитанное в третьем пункте.

Больше отличий нет.

Да, конечно, пользоваться этим вариантом никто вас не заставляет, считайте так, как вам угодно, ответ получится всё равно тот же.

5. На пятом шаге нам необходимо всё то, что мы получили, красиво записать в ответ.

Мы имеем:

$$\bar{R} = 238,33 \text{ Ом};$$

$$\Delta\bar{R} = 56,751 \text{ Ом}.$$

Записывается это, как мы знаем, в виде

$$R = \bar{R} \pm \Delta\bar{R},$$

так значит давайте же так и запишем:

$$R = 238,33 \pm 56,751 \text{ Ом}.$$

Записываем ответ, округляя:

$$R = 238 \pm 57 \text{ Ом}.$$

6. Далее есть вероятность, вам понадобится таблица, куда можно красиво внести всё расчёты. Она необязательна, особенно в самих лабораторных работах. Иногда нужна в ИДЗ по погрешностям. Нужна ли она, или нет, уточняйте у преподавателей. Форму таблицы, без данных, можете найти в файле Pogreshnosti.pdf на сайте кафедры физики.

## Обработка данных прямых измерений методом выборки

Для начала скажу пару слов про ситуации, когда этот метод, вообще, можно использовать.

Существуют эксперименты, где мы проводим не десяток измерений одной величины, затем потом десяток измерений другой, а несколько раз измеряем некий набор разных величин. То есть раньше мы проводили некий эксперимент много раз, чтобы узнать много значений одной величины, при этом, не меняя условия, здесь же, в ходе десятка экспериментов, мы исследуем набор величин, при, возможно, изменившихся условиях. Нам не так важно, что будет с ними по отдельности, нас начинает интересовать то, что будет с итоговой функцией, переменными которой эти величины являются. Между ними мы, проводя эксперимент, по сути, устанавливаем связь, говоря:

- *Переменные  $x_1, y_1, z_1$ , вы переходите в подчинение функции  $F_1$ !*
- *Есть перейти в подчинение функции  $F_1$  – говорят переменные.*
- *Переменные  $x_2, y_2, z_2$ , переходят в подчинение функции  $F_2$ !*
- *Есть.*

И так далее.

От того, как каждая переменная будет себя вести и какие значения примет, будет зависеть результат проверки начальством успешности работы каждого набора и значение функции  $F_1$ . Значения разных переменных, снятых с одного эксперимента, связаны друг с другом этим фактом.

Возвращаясь к нашему примеру, мы не пять раз измеряем напряжение, а потом пять раз измеряем ток, а пять раз проводим эксперимент с последовательностью действий: измерили напряжение, измерили силу тока, изменили настройки генератора, подающего напряжение на цепь. То есть нам тут становится важно какое напряжение было на контактах резистора при той данной конкретном токе и наоборот. Мы тут начинаем работать уже не с напряжением и силой тока по отдельности, а со значениями сопротивления, которые имели место в каждом из экспериментов.

Исходя из этого, условие нашего примера надо малость поменять.

Предположим, что мы хотим не просто измерить сопротивление, а проверить выполнение закона Ома, попутно установив сопротивление резистора.

Величина	Номер эксперимента (i)					$\theta$
	1	2	3	4	5	
Напряжение ( $U$ ), мВ	250	503	749	1001	1250	1
Сила тока, ( $I$ ), мА	1	2	3	4	5	0,5

Функция:

$$R(U, I) = \frac{U}{I}.$$

1. Первый шаг, на самом деле, элементарен: возьмём и просто подставим значения, соответствующие одному эксперименту, в функцию. И получим:

$$f_1 = f(x_1, y_1);$$

$$f_2 = f(x_2, y_2);$$

...

$$f_N = f(x_N, y_N),$$

где  $N$  – объём выборки (количество экспериментов).

Говоря о нашем эксперименте,

$$R_1 = R(U_1, I_1) = \frac{U_1}{I_1};$$

$$R_2 = R(U_2, I_2) = \frac{U_2}{I_2};$$

$$R_3 = R(U_3, I_3) = \frac{U_3}{I_3};$$

$$R_4 = R(U_4, I_4) = \frac{U_4}{I_4};$$

$$R_5 = R(U_5, I_5) = \frac{U_5}{I_5}.$$

Подставляя числа, получим:

$$R_1 = \frac{250 \text{ мВ}}{1 \text{ мА}} = 250 \text{ Ом};$$

$$R_2 = \frac{503 \text{ мВ}}{2 \text{ мА}} = 251,5 \text{ Ом};$$

$$R_3 = \frac{749 \text{ мВ}}{3 \text{ мА}} = 249,67 \text{ Ом};$$

$$R_4 = \frac{1001 \text{ мВ}}{4 \text{ мА}} = 250,25 \text{ Ом};$$

$$R_5 = \frac{1250 \text{ мВ}}{5 \text{ мА}} = 250 \text{ Ом}.$$

Очень напоминает что-то... Только что? Правильно, это же прям как выборка прямых измерений. Будто бы мы использовали какой-то прибор, который измеряет сопротивление резистора. Во-первых, мы заключаем, что закон Ома выполняется, ибо значения сопротивления все примерно равны. Теперь нужно найти значение сопротивления по выборке. Соответственно, переходим к следующему шагу самым простым способом.

2. Обработаем эту выборочку при помощи алгоритма обработки прямых измерений, который я описывал ранее. Сам же я, пожалуй, сделаю это на листочке, а сюда напишу сам ответ.

Среднее значение энергии:

$$\bar{R} = 250,284 \text{ Ом.}$$

Премахов нет.

Случайная погрешность:

$$\Delta \bar{R} = 0,933 \text{ Ом.}$$

Однако сейчас настает момент, отличающийся от метода прямых измерений. Так как прибор, всё же, условный, приборной погрешности у него как таковой в чистом виде нет. Поэтому её необходимо вывести.

3. В третьем шаге этим и займёмся. Здесь мы уже отчасти перекликаемся с методом переноса погрешностей.

- а. Первым делом надо взять частные производные по всем переменным. Детали я прописывать с вашего позволения не буду, поэтому сразу запишу итог:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial U} &= \frac{1}{I}; \\ \frac{\partial R}{\partial I} &= -\frac{U}{I^2}. \end{aligned}$$

- б. Теперь для каждого из значений функции  $f_i$  нужно определить значения частных производных. Для этого, обозначим

$$a_{xi} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x_i, y_i}, a_{yi} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x_i, y_i}$$

аналогично методу переноса погрешностей.



Так как обычно вы все эксперименты проводите на одной и той же установке, с одним и тем же прибором-измерителем, то и приборная погрешность в ходе измерений одной величины не меняется. В таком случае, Значение приборной погрешности получается по формуле:

$$\theta_f = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |a_{xi}| \right) \theta_x + \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |a_{yi}| \right) \theta_y.$$

То есть, нужно найти средние значения для частных производных, а затем умножить на приборные погрешности переменных, которые мы измеряли.

Как вы также помните, есть функции, беря производную от логарифма которых можно получить гораздо более простые выражения. Так вот, тут такое правило тоже работает. Формула будет почти полностью эквивалентна (как и обозначения «переменных» для частных производных с подставленными значениями:

$$b_{xi} = \left. \frac{\partial \ln f(x, y)}{\partial x} \right|_{x_i, y_i};$$

$$\theta_f = \bar{f} \left( \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |b_{xi}| \right] \theta_x + \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |b_{yi}| \right] \theta_y \right).$$

Автору снова лень трогать логарифмы, поэтому возьмём обычную производную и получим:

$$\begin{aligned} a_{U1} &= \frac{1}{I_1} = \frac{1}{1 \text{ A}} = 1 \frac{1}{\text{A}}; & a_{I1} &= -\frac{U_1}{I_1^2} = -\frac{250}{1} = -250 \frac{\text{В}}{\text{A}^2}; \\ a_{U2} &= \frac{1}{I_2} = \frac{1}{2 \text{ A}} = 0,5 \frac{1}{\text{A}}; & a_{I2} &= -\frac{U_1}{I_2^2} = -\frac{503}{4} = -125,75 \frac{\text{В}}{\text{A}^2}; \\ a_{U3} &= \frac{1}{I_3} = \frac{1}{3 \text{ A}} = 0,3333 \frac{1}{\text{A}}; & a_{I3} &= -\frac{U_1}{I_3^2} = -\frac{749}{9} = -83,22 \frac{\text{В}}{\text{A}^2}; \\ a_{U4} &= \frac{1}{I_4} = \frac{1}{4 \text{ A}} = 0,25 \frac{1}{\text{A}}; & a_{I4} &= -\frac{U_1}{I_4^2} = -\frac{1001}{16} = -62,56 \frac{\text{В}}{\text{A}^2}; \\ a_{U5} &= \frac{1}{I_5} = \frac{1}{5 \text{ A}} = 0,2 \frac{1}{\text{A}}; & a_{I5} &= -\frac{U_1}{I_5^2} = -\frac{1250}{25} = -50 \frac{\text{В}}{\text{A}^2}; \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^5 |a_{Ui}| &= 0,4567 \frac{1}{\text{A}}; & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^5 |a_{Ii}| &= 114,3 \frac{\text{В}}{\text{A}^2}. \end{aligned}$$

$$\theta_R = 0,4567 \frac{1}{\text{A}} \cdot 1 \text{ В} + 114,3 \frac{\text{В}}{\text{A}^2} \cdot 0,5 \text{ А} = 57,6067 \text{ Ом}$$

Perfecto, теперь осталось совсем немножко.

4. Последний. Расчётный. Шаг. Пятый.

Полная погрешность в выборочном методе, опять же, считается без квадратов:

$$\Delta f = \sqrt{\Delta \bar{f}^2 + \bar{\theta}_f^2}.$$

Просто корень... И всё.

$$\Delta R = \sqrt{\Delta \bar{R}^2 + \bar{\theta}_R^2};$$

$$\Delta R = \sqrt{(0,933 \text{ Ом})^2 + (57,6067 \text{ Ом})^2} = 57,614 \text{ Ом}$$

5. Записываем ответ в форме

$$f = \bar{f} \pm \Delta f.$$

Для сопротивления из примера,

$$R = \bar{R} \pm \Delta R,$$

$$R = 250 \pm 58 \text{ Ом}.$$

Ликуем.

Ситуация с таблицей полностью идентична: образец на сайте. Но нужна она, скорее всего, не будет, но этот вопрос уточните.

## **Список используемой литературы**

1. Морозов В. В., Сobotковский Б. Е., Шейнман И. Л. Методы обработки результатов физического эксперимента. 2004 г.
2. Файл Pogreshnosti.pdf с сайта кафедры физики ЛЭТИ

## Приложение

Значения статистических коэффициентов для проверок на промахи и расчётов случайных погрешностей.

Значения коэффициентов Стьюдента  $t_{P,N}$  в зависимости от числа наблюдений  $N$  при доверительной вероятности  $P = 95\%$ :

$N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
$t_{P,N}$	12.7	4.3	3.2	2.8	2.6	2.5	2.4	2.3	2.3	2.0

Коэффициенты  $\beta_{P,N}$  для расчета доверительной погрешности по размаху выборки  $\Delta x = \beta_{P,N} R$  для числа наблюдений  $N$  доверительной вероятности  $P = 95\%$ :

$N$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\beta_{P,N}$	1.30	0.72	0.51	0.40	0.33	0.29	0.25	0.23	0.21	0.19

Коэффициенты  $u_{P,N}$  для проверки результатов наблюдений на наличие грубых погрешностей в зависимости от объёма выборки  $N$  для доверительной вероятности  $P = 95\%$ :

$N$	3	4	5	7	10	15	20	30	100
$u_{P,N}$	0.94	0.76	0.64	0.51	0.41	0.34	0.30	0.26	0.20

Коэффициенты  $v_{P,N}$  для проверки элементов выборки на наличие грубых погрешностей в зависимости от объёма выборки  $N$  при доверительной вероятности  $P = 95\%$ :

$N$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$v_{P,N}$	1.15	1.46	1.67	1.82	1.94	2.03	2.11	2.18	2.23	2.29