Лекция 3-2

Элементарные преобразования над матрицами.

Определение. Элементарными преобразованиями над матрицами будем называть:

а) умножение строки или столбца на элемент поля ***К***,

б) перестановку строк или столбцов,

в) прибавление к элементам одной строки (или столбца) элементов другой строки (или столбца), умноженные на заданный элемент из поля ***К*.**

Каждое элементарное преобразование эквивалентно умножению на квадратную матрицу специального вида:

Умножение **справа** – это преобразование **над столбцами**, преобразование **слева** – **над строками**.

Рассмотрим эти матрицы.

а) Умножение столбца на число:

Пусть требуется умножить i –й столбец матрицы $A_{m \times n}$ на число c:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,i} & \dots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{m,n-11} & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & ca_{1i} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & ca_{2i} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & ca_{m-1,i} & \dots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & ca_{mi} & \dots & a_{m,n-11} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

б) Перестановка строк (столбцов):

Умножение слева (справа) на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

в) Прибавление к строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженного на элемент поля c:

для строк –умножение слева на матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & c & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

для столбцов – умножение справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,i} & \dots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{m,m-11} & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & c & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + ca_{1j} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + ca_{2j} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,i} + ca_{m-1j} & \dots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} + ca_{1m} & \dots & a_{m,m-11} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Примеры:

Умножим третью строку на -3

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \\ -12 & -12 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

2. Переставим 2 и 4 столбцы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Прибавим ко второй строке третью, умноженную на 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 17 & 22 & -9 & -3 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножение на треугольную матрицу

Квадратная матрица называется треугольной, если ниже или выше диагонали все элементы равны нулю.

Например, треугольная матрица четвертого порядка:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножение на треугольную матрицу равносильно тому, что мы проделали несколько элементарных преобразований.

В нашем примере при умножении слева:

1) Добавили к первой строке, умноженной на 2, вторую, умноженную на 3, третью, умноженную на -1 и четвертую, умноженную на 5.

2) Добавили ко второй строке, умноженной на -1, третью, умноженную на 4 и четвертую.

3) Добавили к третьей строке, умноженной на 3, четвертую, умноженную на 2.

4) Умножили четвертую строку на 4.

Если на такую матрицу умножать справа, то:

1) Первый столбец умножится на 2.

2) К первому столбцу, умноженному на 3, прибавится второй, умноженный на -1.

3) К первому столбцу, умноженному на -1, прибавится второй, умноженный на 4, и третий, умноженный на 3.

4) К первому столбцу, умноженному на 5, прибавятся второй столбец, умноженный на 1, третий, умноженный на 2, и четвертый, умноженный на 4.

Проверим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 19 & -10 \\ 8 & 7 & 4 & 41 \\ 4 & 5 & 11 & 37 \end{pmatrix}$$

Определители

Дана квадратная матрица. Рассмотрим любое произведение элементов, расположенных в различных строках и столбцах, т.е. взятых по одному в каждой строке и по одному в каждом столбце.

Такое произведение можно записать так: $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}$, т.е. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – номера столбцов, в которых находятся элементы. По условию, $\alpha_i \neq \alpha_j$, если $i \neq j$.

Последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ представляет перестановку чисел 1, 2,…,n

Таких перестановок $n!$. Выберем из этой последовательности индексов два индекса α_i и α_j , $i < j$. Если $\alpha_i > \alpha_j$, то будем говорить, что пара чисел (α_i, α_j) образует инверсию.

Пример. $a_{14}a_{22}$ -есть инверсия, $a_{34}a_{55}$ - нет инверсии

$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{56}a_{65}$ - 6 инверсий.

Если таких инверсий четное число, то будем называть последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ четной перестановкой. Если нечетное число – нечетной.

Пусть имеется квадратная матрица. Сопоставим каждой матрице число, вычисленное по определенному правилу.

Определение. *Определителем квадратной матрицы* n *– го порядка* называется алгебраическая сумма, состоящая из $n!$ всевозможных произведений

$a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}$, взятых со знаком «+», если перестановка $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ четная, и со знаком «–», если перестановка нечетная.

Обозначается определитель матрицы *A* по-разному, например:

det*A*, $|A|$, Δ и просто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,i} & \ldots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{n,n-11} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det A = \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n},$$

где $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ - число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Примеры.

1. Определитель второго порядка:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Возможные произведения $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$. В первом произведении нет инверсий (перестановка четная) – знак «+», во втором произведении есть одна инверсия (перестановка нечетная) – знак «-» .

Таким образом, $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Например, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 2$, $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot 5 - 6 \cdot (-2) = -3$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Возможные произведения:

$a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$

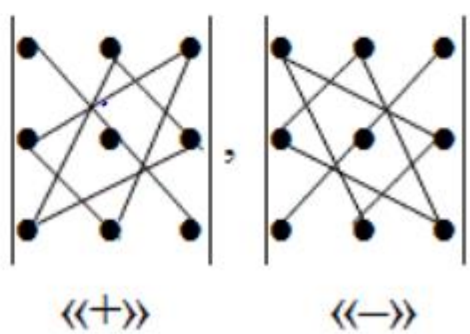
Выписываем произведения с четным числом инверсий: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$.

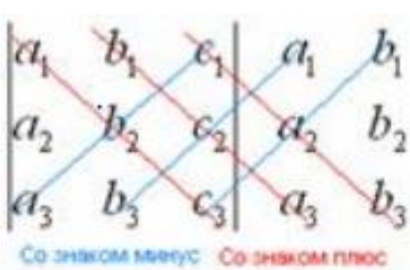
Выписываем произведения с нечетным числом инверсий:

$a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} .$$

Простой способ запоминания, какие элементы брать со знаком «+», какие – со знаком «-»





Пример вычисления определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 5 + (-2)\cdot 4\cdot 0 + 6\cdot 4\cdot(-3) - (-2)\cdot 1\cdot 6 - 5\cdot 4\cdot 4 - 3\cdot(-3)\cdot 0 =$$

$15 - 72 + 12 - 80 = -125.$

Вопросы к лекции:

1. Что понимается под элементарными преобразованиями матриц?
2. С умножением на какую матрицу связано каждое элементарное преобразование?
3. В каком случае мы получаем преобразования строк, а в каком случае преобразования столбцов?
4. Матрицу умножили слева на нижнетреугольную матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Опишите, какие элементарные действия над матрицей при этом произведены?

5. Что такое инверсия в перестановке?
6. Что такое четная перестановка? Что такое нечетная перестановка?
7. Как определяется определитель?
8. Как вычисляется определитель второго порядка?
9. Как вычисляется определитель третьего порядка?

Задачи

1.* Вычислите:

а) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$.

2.* Докажите, что след произведения двух матриц не зависит от порядка

3.** Из определителя D размерности $n > 1$получили определитель D_1, заменив все элементы на их алгебраические дополнения, затем получили определитель D_2, заменив все элементы на их миноры. Докажите, что
$D_1 = D_2$.

4*. Докажите, что если у определителя порядка n на пересечении k строк и l столбцов стоят числа, равные 0, причем $k + l > n$, то определитель равен нулю.