Лекция 3-3

Свойства определителей.

1. $\det A = \det A^T$.

Доказательство.

Определитель представляет алгебраическую сумму слагаемых.

Рассмотрим отдельное слагаемое: $(-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$.

Возьмем два множителя $a_{i\alpha_i} \ldots a_{j\alpha_j}$. Обозначим $\alpha_i=k$, $\alpha_j=l$. Пусть, например, $k<l$, значит, инверсии нет: $i<j$ и $k<l$. Если бы мы упорядочивали не по строкам, а по столбцам, то множитель $a_{i\alpha_i} = a_{ik}$ стоял бы перед множителем $a_{j\alpha_j} = a_{jl}$: $a_{ik} \ldots a_{jl}$, и, так как $k<l$ и $i<j$, то инверсии не будет. Если же инверсия была, то есть было $i<j$, а $k>l$, то теперь множитель $a_{j\alpha_j} = a_{jl}$ будет стоять перед множителем $a_{i\alpha_i} = a_{ik}$: $a_{jl} \ldots a_{ik}$, и инверсия сохранится. Отсюда следует, что, рассматривая транспонированную матрицу, мы просто в определении определителя меняем упорядочивание со строк на столбцы или, наоборот, со столбцов на строки.

2. Из определения определителя следует, что если строка или столбец матрицы состоит из нулей, то определитель равен нулю.

3. При перестановке двух строк или столбцов определитель меняет знак.

Доказательство.

Если мы переставляем соседние строки, то перестановка меняет четность:

Была последовательность: $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{i\alpha_i} a_{i+1,\alpha_{i+1}} \ldots a_{n\alpha_n}$.

Предположим, что было $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, тогда, так как $i<i+1$, то инверсии в $a_{i\alpha_i} a_{i+1,\alpha_{i+1}}$ нет.

Теперь мы переставили строки i и $i+1$, т.е. $i \to i+1,\ i+1 \to i$, тогда в строке с номером i будет стоять элемент с номером $a_{i,\alpha_{i+1}}$, а в строке с номером $i+1$ будет стоять элемент a_{i+1,α_i} , и появится инверсия. И, наоборот, если была инверсия, то теперь ее не будет.

Таким образом, четная перестановка перейдет в нечетную, а нечетная – в четную, следовательно, каждое слагаемое поменяет знак, а тогда и определитель меняет знак

Если мы переставляем столбцы с номерами i и j , причем $i - j = m$, то это равносильно тому, что мы переставляем строки (столбцы) $2m-1$ раз.

Следствие. Если определитель имеет две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то он равен нулю.
Действительно, с одной стороны, определитель меняет знак, а с другой стороны, определитель не меняется, следовательно, он равен нулю.
4. Общий множитель у элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя.
Докажите самостоятельно.
5. Если все элементы какой-нибудь строки *i* (или какого-нибудь столбца *j*) представлены в виде $a_{ij} = \lambda b_{ij} + \mu c_{ij}$, где номер строки (или номер столбца) фиксирован, то $\det A = \lambda \det B + \mu \det C$. У матриц A, B, C все строки, кроме i–й, совпадают. У B i-ая строка $(b_{i1} b_{i2} \dots b_{in})$, у $C - (c_{i1} c_{i2} \dots c_{in})$.

Доказательство.

$$\sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{i\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} =$$
$$\sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda b_{i\alpha_i} + \mu c_{i\alpha_i}) \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} =$$
$$\lambda \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot b_{i\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} + \qquad =$$
$$+ \mu \sum_{n!} (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot c_{i\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} \Rightarrow \det A = \lambda \det B + \mu \det C$$

Замечание. Если $a_{ij} = \lambda b_{ij} + \mu c_{ij} + \ldots + \tau f_{ij} \Rightarrow \det A = \lambda \det B + \mu \det C + \ldots + \tau \det F$.

Следствие. Определитель не изменится, если к элементам строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на некоторое число.

Доказательство. $a_{ij}' = a_{ij} + \lambda a_{ik} \Rightarrow \det A' = \det A + \lambda \det B$. Но у определителя B i–й и j–й столбцы будут совпадать, следовательно, он будет равен нулю.

Алгебраические дополнения и миноры

Рассмотрим i-ую строку определителя и в нем какой-нибудь элемент a_{ij}.

$\det A = \sum (-1)^N a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$. Соберем все слагаемые, в которые входит множитель a_{i1}, заключим их в скобки и вынесем за эти скобки a_{i1}. Сумма, оставшаяся в скобках, обозначается A_{i1} и называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{i1} в определителе матрицы A. Затем соберем все слагаемые, в которые входит элемент a_{i2}, также вынесем его за скобки, а оставшуюся в скобках сумму обозначим A_{i2}.

Продолжим этот процесс, пока не переберем все элементы строки.

Обратите внимание, что скобки не содержат одинаковых слагаемых (почему?)

Таким образом, получим разложение определителя по элементам *i*-й строки.

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Итак, доказана **теорема**.

Определитель матрицы A *равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца или строки на их алгебраические дополнения.*

Пример. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},\ A_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}),\ A_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Если внимательно посмотреть, что собой представляют эти алгебраические дополнения, то увидим, что это определители второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Числовой пример:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 3\big(1 \cdot 5 - 0 \cdot (-3)\big) - 4 \cdot \big(4 \cdot 5 - 6 \cdot (-3)\big) +$$

$$\big(-2\big)(4 \cdot 0 - 6 \cdot 1) = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 38 + 2 \cdot 6 = 27 - 152 = -125$$

Два важных следствия

1. Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n$ на алгебраические дополнения какой-нибудь строки (столбца) равна определителю, у которого эта строка (столбец) заменена числами $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n$. (Почему?)

2. Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна **нулю**.

Доказательство следует из предыдущего следствия.

Определение. *Минором* $(n-1)$- порядка называется определитель, который получается из данного определителя порядка *n* в результате вычеркивания какой-нибудь строки и какого-нибудь столбца. Если вычеркнули строку с номером *i* и столбец с номером *j* , то получившийся минор обозначим M_{ij}.

Теорема. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Доказательство.

а) Пусть $i = j = 1$.

Рассмотрим все слагаемые определителя, которые содержат a_{11}:

$$a_{11} \sum (-1)^{N(1,\alpha_2,\ldots\alpha_n)} a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} \Rightarrow A_{11} = \sum_{\alpha_k \neq 1} (-1)^{N(1,\alpha_2,\ldots\alpha_n)} a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} =$$

$$\sum_{\alpha_k \neq 1} (-1)^{N(\alpha_2,\ldots\alpha_n)} a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} = M_{11} \Rightarrow A_{11} = M_{11}$$

б) Пусть теперь i, j – произвольны. Положим $a_{ij} = a$. Рассмотрим алгебраическое дополнение этого элемента. При перестановке строк или столбцов алгебраические дополнения всех элементов меняют знак. Переставим строки и столбцы так, чтобы матрица A перешла в матрицу A', у которой элемент $a_{11}' = a$:

Сначала переставим столбцы так, чтобы *j*-й столбец стал первым.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a & \cdots & a_{i,n-1} & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{n,n-11} & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i-1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Алгебраическое дополнение элемента $a_{ij} = a$ поменяет знак *j*-1 раз и будет равно $(-1)^{j-1} A_{ij}$.

Теперь мы поставим *i*-ю строку на первое место:

$$\begin{pmatrix} a & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Алгебраическое дополнение элемента *a* поменяет знак еще *i*-1 раз и будет равно $(-1)^{i+j-2} A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$.

Так как теперь в матрице A' элемент *a* стоит в первом столбце и первой строке, то его алгебраическое дополнение равно его минору, т.е. $A'_{11} = M'_{11} = M_{ij}$. С другой стороны, $A'_{11} = (-1)^{i+j} A_{ij}$. Таким образом, $(-1)^{i+j} A_{ij} = M_{ij} \Leftrightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Примеры. 1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$

$$2.\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

В частности, **определитель диагональной матрицы** также **равен произведению ее диагональных элементов.**

Пример:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0\cdot M_{13} + (-1)^{2+3}\cdot 3\cdot M_{23} + (-1)^{3+3} 0\cdot M_{33} + (-1)^{4+3}(-4)\cdot M_{43} + (-1)^{4+4}(-1)\cdot M_{44} =$$

$$-3\cdot M_{23} + 4\cdot M_{43} - \cdot M_{44}.$$

Воспользуемся свойствами определителя так, чтобы, с одной стороны, определитель не изменился, а, с другой стороны, в какой-нибудь строке или каком-нибудь столбце появилось как можно больше нулей (лучше всего, если останется только один ненулевой элемент). В третьем столбце 2 нуля уже есть. Умножим последнюю строку на (- 4) и прибавим к предпоследней, затем последнюю строку умножим на 3 и прибавим ко второй строке. Получим:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \text{(раскладываем по третьему столбцу)} =$$

$$(-1)^{3+5}(-1)\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Теперь получим нули в первом столбце: прибавим вторую строку к первой, умножив на 2, затем к третьей, умножив на (-3), и к четвертой, умножив на (-2):

$$= -\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Разложим по первому столбцу:

$-(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}$. Уменьшим числа во второй и третьей строках (прибавим первую строку ко второй, а из второй строки вычтем третью):

$= \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 13 & -9 & -9 \\ 10 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Получим теперь нули во втором столбце (прибавим третью строку ко второй, умножив ее на 9, и к первой, умножив ее на (-25)):

$= \left\|\begin{matrix} -263 & 0 & -33 \\ 103 & 0 & 9 \\ 10 & 1 & 2 \end{matrix}\right\|$. Теперь разложим по третьему столбцу и вычислим:

$$= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -263 & -33 \\ 103 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -57 & -15 \\ 103 & 9 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -57 & -5 \\ 103 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-3\left(-57\cdot 3 - 103\cdot(-5)\right) = -3\cdot 344 = -1032.$$

Замечание. Существует много программ, которые мгновенно вычислят любой определитель. Пример приведен для того, чтобы проиллюстрировать свойства определителя.

Вопросы к лекции:
1. Перечислите основные свойства определителя.
2. Что такое алгебраическое дополнение элемента a_{ij} ?
3. Как меняется алгебраическое дополнение при перестановке строк и столбцов?
4. Как раскладывается определитель по элементам строки или столбца?
5. Чему равна сумма произведений произвольных n чисел на алгебраические дополнения элементов какой-нибудь строки или столбца?
6. Чему равна сумма произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (или столбца)?
7. Что такое минор n-1 порядка?
8. Как связаны алгебраические дополнения и миноры?
9. Разложите определитель по минорам какой-нибудь строки или столбца?

Задачи

1*. Вычислите:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}$$

2*. Какие из следующих произведений входят в выражение определителя и, если входят, то с какими знаками?

1) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$;

2) $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}a_{66}$;

3) $a_{34}a_{21}a_{17}a_{46}a_{73}a_{55}a_{62}$;

4) $a_{34}a_{21}a_{17}a_{46}a_{73}a_{54}a_{65}$.

3*. Выберите значения *i*,*j*,*k* так, чтобы произведение $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ входило в выражение определителя со знаком минус.

4.* Из определителя D размерности $n > 1$получили определитель D_1, заменив все элементы на их алгебраические дополнения, затем получили определитель D_2, заменив все элементы на их миноры. Докажите, что
$D_1 = D_2$.

5*. Докажите, что если у определителя порядка n на пересечении k строк и l столбцов стоят числа, равные 0, причем $k + l > n$, то определитель равен нулю.