Лекция 3-1

Матрицы и действия над ними

Матрица – это прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов, в которых записаны элементы, принадлежащие некоторому множеству. Мы будем рассматривать матрицы, элементами которой будут числа.

Если в матрице имеется m строк и n столбцов, то такую матрицу обозначим $A_{m\ \mathrm{x}\ n}$. Естественно, вместо этих букв могут быть использованы любые другие буквы. Элементы матрицы A будем обозначать a_{ij} (опять-таки буквы могут быть любыми). Здесь i- номер строки, j – номер столбца.

В общем виде матрица выглядит так: $A_{m\,x\,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. У этой матрицы m строк и n столбцов.

Примеры**.**

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0,2 & -3 \\ 0,5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Эта матрица размера 4 х 3, a_{23}=2, a_{41}=0,5 и т.д.

2) Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + 11z + u = 2, \\ 3x - 2y - 8z = 0, \\ -2x - 6y + 4z - 7u = 2 \end{cases}$$

Матрица коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 & 1 \\ 3 & -2 & -8 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Расширенная матрица (присоединяются свободные члены):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -8 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если у матрицы число столбцов равно числу строк, то такая матрица называется *квадратной.*

Если у квадратной матрицы все элементы, кроме элементов, стоящих на диагонали, равны нулю, то такая матрица называется *диагональной*.

Если у матрицы **все** элементы равны нулю, то такая матрица называется нулевой матрицей. Нулевая матрица обозначается **0.**

Наконец, если у квадратной матрицы все элементы на диагонали равны 1, а остальные элементы равны нулю, то такая матрица называется единичной. Единичная матрица обозначается **E.**

Пусть дана матрица:

$$A_{m\,x\,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Выберем номера строк $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ..., \alpha_k$ и номера столбцов $\beta_1, \beta_2, \beta_3 ..., \beta_s$ и составим матрицу, состоящую только из элементов, стоящих в выбранных строках и столбцах, получим новую матрицу меньшего размера:

$$A_{k\times s} = \begin{pmatrix} a_{\alpha_1\beta_1} & a_{\alpha_1\beta_2} & \dots & a_{\alpha_1\beta_s} \\ a_{\alpha_2\beta_1} & a_{\alpha_2\beta_2} & \dots & a_{\alpha_2\beta_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\alpha_k\beta_1} & a_{\alpha_k\beta_2} & \dots & a_{\alpha_k\beta_s} \end{pmatrix}, k \le m, s \le n.$$

Эта матрица называется субматрицей исходной матрицы.

Строка – матрица, состоящая из одной строки, столбец – матрица, состоящая из одного столбца.

Действия над матрицами.

Пусть элементы матрицы принадлежат некоторому полю $\boldsymbol{K}$.

Рассмотрим матрицу A и число $c \in \boldsymbol{K}$

1) Определим умножение матрицы на число $c \in \boldsymbol{K}$:

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то матрица, $cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$, например, если

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 & 1 \\ 3 & -2 & -8 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & -7 \end{pmatrix}$, то $5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 55 & 5 \\ 15 & -10 & -40 & 0 \\ -10 & -30 & 20 & -35 \end{pmatrix}$.

2) Определим сложение матриц одинаковых размеров

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ называется матрица

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для матриц **одного** размера мы определили два действия: умножение на число и сложение.

Свойства действий над матрицами

1) $A + B = B + A$ - коммутативность по отношению к сложению;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ -ассоциативность по отношению к сложению;

3) существование нейтрального элемента $\mathbf{0}$ **:** $A+\mathbf{0}=A$**;**

4) существование противоположной матрицы, такой что $A + (-A) = \mathbf{0}$, $(-A)$ - это матрица с элементами противоположных знаков.

Свойства 1) - 4) показывают, что *множество матриц одного размера образует коммутативную группу по сложению.*

Добавим к перечисленным свойствам следующие свойства:

5) $c(A_1 + A_2) = cA_1 + cA_2$;

6) $(c_1 + c_2)A = c_1 A + c_2 A$;

7) $c_1(c_2 A) = (c_1 c_2)A$;

8) $1 \cdot A = A$.

Все перечисленные действия следуют из определения и действий в поле, из которого берутся элементы матрицы.

Определение. Система математических объектов, в которой определено действие сложения и умножения на элементы поля ***K***, причем эти действия обладают свойствами 1–8, называется **векторным пространством над полем *K***.

Таким образом, множество матриц размера $m \times n$ с элементами из поля ***K*** образует векторное пространство над полем ***K***. В частности, строки и столбцы образуют векторное пространство.

Линейная комбинация матриц: $c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots + c_n A_n$.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Выпишем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$ - столбцы матрицы

коэффициентов,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов. Теперь систему уравнений можно записать как линейную комбинацию столбцов:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n = B$$

Решить систему – это значит представить столбец B в виде линейной комбинации $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Умножение матриц

Пусть *A*- матрица-строка $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, состоящая из n элементов, *B*- матрица – столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$, также состоящий из n элементов, тогда

произведение *AB*= $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$, т.е. произведение строки на столбец равно **сумме произведений элементов с одинаковыми номерами.**

Обратите внимание, что мы умножаем строку на столбец, а не наоборот.

Пусть теперь имеются две матрицы:

$$A_{m\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}, B_{k\times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{m2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix},$$

Количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы (или количество элементов в строке первой матрицы равно количеству элементов в столбце второй матрицы). Умножим строку с номером p $A_p = \begin{pmatrix} a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pk} \end{pmatrix}$ на столбец с номером *s*:

$$B_s = \begin{pmatrix} b_{1s} \\ b_{2s} \\ \dots \\ b_{ms} \end{pmatrix}:$$

$c_{ps} = A_p B_s = a_{p1}b_{1s} + a_{p2}b_{2s} + \dots + a_{pm}b_{ms}$, Эту сумму можно записать так:

$$c_{ps} = \sum_{k=1}^{m} a_{pk}b_{ks}$$

Получили элемент c_{ps} произведения *C*=*AB*. Таким образом:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & b_{1s} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{ns} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ps} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$c_{ps} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}b_{ks},\ p = 1,\dots,m;\ s = 1,\dots,n$$

Если можно умножить матрицу *A* на матрицу *B*, то в общем случае умножить матрицу *B* на матрицу *A* будет невозможно из-за несовпадения размеров. Например, если матрица *A* имеет размер 5 х 4, а матрица *B* имеет размер 4 х 3, то вычислить произведение *AB* можно, а произведение *BA* нельзя. Но даже если можно вычислить *AB* и *BA*, то в общем случае $AB \neq BA$.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -2 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 20 & 24 \\ -9 & 30 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -2 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 30 & 14 & -1 \\ 2 & 12 & 6 & -2 \\ 2 & 36 & 20 & -14 \\ 13 & 30 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

Если $AB = BA$, то такие матрицы называются коммутирующими.

Важный пример

Пусть переменные y зависят от переменных x:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1s}x_s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{ms}x_s \end{cases},$$

а переменные x зависят от переменных t:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 + \dots + b_{1n}t_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_s = b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \dots + b_{sn}t_n \end{cases}.$$

Требуется определить зависимость переменных y от переменных t.

Первую зависимость можно переписать так: $Y = AX$, где

$$A_{m\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_s \end{pmatrix}.$$

Вторую зависимость можно записать так:

$$X = BT,\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Подставим вторую в первую, тогда получим :

$$Y = AX,\ X = BT \Rightarrow Y = A(BT) = (AB)T..$$

Или $Y= CT$, где $C=AB$. Свойство ассоциативности $A(BT) = (AB)T$ ниже предлагается доказать самостоятельно (см. свойство 4 умножения матриц).

Свойства умножения матриц.

1) $c(A_1A_2) = A_1(cA_2) = (cA_1)A_2$;

2) $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$;

3) $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

Доказательство проводится непосредственным вычислением.

Например, докажем свойство 3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix}; \; B_1 = \begin{pmatrix} b^1_{11} & \dots & b^1_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b^1_{r1} & \dots & b^1_{rn} \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} b^2_{11} & \dots & b^2_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b^2_{r1} & \dots & b^2_{rn} \end{pmatrix}.$$

$$C = A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot \begin{pmatrix} b^1_{11} + b^2_{11} & \dots & b^1_{1n} + b^2_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b^1_{r1} + b^2_{r1} & \dots & b^1_{rn} + b^2_{rn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$c_{ij} = (a_{i1} a_{i2} \dots a_{ir}) \cdot \begin{pmatrix} b^1_{1j} + b^2_{1j} \\ \dots \\ b^1_{rj} + b^2_{rj} \end{pmatrix} = a_{i1}(b^1_{1j} + b^2_{1j}) + \dots + a_{ir}(b^1_{rj} + b^2_{rj}) =$$

$$(a_{i1} b^1_{1j} + \dots + a_{ir} b^1_{rj}) + (a_{i1} b^2_{1j} + \dots + a_{ir} b^2_{rj}) = c^1_{ij} + c^2_{ij} \Rightarrow C = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$$

4) $A(BC) = (AB)C$ – ассоциативность умножения.

$A \sim [m \times r],\ B \sim [r \times l],\ C \sim [l \times n] \Rightarrow AB \sim [m \times l];\ (AB)C \sim [m \times n].$

Далее, $BC \sim [r \times n];\ A(BC) \sim [m \times n]$. С размерностью все в порядке. Затем вычисляем ij -й элемент у $(AB)C$ и у $A(BC)$ и убеждаемся, что они совпадают.

Проделайте эти вычисления самостоятельно.

Единичная матрица.

Единичная матрица при умножении на матрицу A слева и справа имеет разные размеры. Например, если матрица A имеет размер m x n, то при умножении слева единичная матрица – это квадратная матрица размера m x m, а при умножении справа – это единичная матрица размера n x n, при этом $EA = AE = A$ **.**

.

Если рассматривать субматрицу матрицы AB, то она равна произведению субматрицы, составленной из соответствующих строк матрицы A, на субматрицу, составленную из соответствующих столбцов матрицы B.

Транспонированные матрицы

Определение. Матрица A^T называется транспонированной по отношению к матрице A, если столбцы и строки матрицы A поменяли местами, т.е. $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Справедливы следующие утверждения:

1. $\left(A^T\right)^T = A.$

2. $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$

3. $\left(AB\right)^T = B^T A^T.$

Первые два утверждения очевидны. Докажем третье.

Доказательство непосредственным подсчетом.

Обозначим $AB = C$, $\left(AB\right)^T = D$, $B^T A^T = F$.

Пусть размер матрицы A равен m x s, размер матрицы B равен s x n. Тогда размер матрицы $C = m$ x n, размер матрицы A^T равен s x m, размер матрицы B^T равен n x s.

Мы видим, что умножить B^T на A^T можно. Далее,

$$AB = C \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}; \quad \left(AB\right)^T = D \Rightarrow d_{ij} = c_{ji} = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} b_{ki};$$

$$B^T A^T = F \Rightarrow f_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}^T a_{kj}^T = \sum_{k=1}^{m} b_{ki} a_{jk} \Rightarrow f_{ij} = d_{ij} \Rightarrow D = F.$$

Но это и означает, что $\left(AB\right)^T = B^T A^T$.

Сведем все вместе все, что известно о действиях над матрицами.

1. $(A+B)+C=A+(B+C)$;

2. $A+B=B+A$;

3. $\exists\,\mathbf{0}: A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$;

4. $\forall A\ \ (-A): A+(-A)=\mathbf{0}$.

Свойства 1-4 говорят о том, что матрицы одного размера образуют **коммутативную (абелеву) группу по сложению**. Добавим к ним свойства

5. $(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A$;

6. $c_1(c_2A)=(c_1c_2)A$;

7. $1\cdot A=A\cdot 1=A$.

c_i – числа из поля $\boldsymbol{K}$**.**

Мы перечислили свойства векторных пространств, то есть матрицы одного размера образуют **векторное пространство**.

Добавим еще свойства:

8. $(AB)C=A(BC)$;

9. $A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$;

10. $(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B$;

11. $(cA)B=A(cB)=c(AB)$;

12. $E_mA=AE_n=A$;

13. $(A^T)^T=A$;

14. $(A+B)^T=A^T+B^T$;

15. $(cA)^T=cA^T$;

16. $(AB)^T=B^TA^T$.

Если считать матрицы квадратными, то свойства 1-4 вместе со свойствами 8-10 говорят о том, что квадратные матрицы одного размера **образуют кольцо**.

Среди квадратных матриц есть единичная матрица E: $AE=EA=A$, то есть квадратные матрицы одного размера **образуют кольцо с единицей.**

Перечислим уже известные нам алгебраические структуры.

Коммутативная (абелева) группа:

1. $a \circ b = c$;
2. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
3. $\exists\, e : a \circ e = e \circ a = a$;
4. $\forall a\ \exists\, a^{-1} : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Здесь $a \circ b$ -некоторое бинарное действие (например сложение или умножение, но не обязательно), a^{-1} - в случае сложения обозначается как (- а).

Кольцо:

Имеются два действия, которые считаются сложением и умножением.

По отношению к сложению множество является абелевой группой.

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2. $a + b = b + a$;
3. $\exists\, 0 : a + 0 = 0 + a = a$;
4. $\forall a\ \exists (-a) : a + (-a) = 0$.
5. $(a + b)c = ac + bc$;
6. $c(a + b) = ca + cb$.

Поле:

Это кольцо, в котором отличные от нуля элементы образуют коммутативную группу по умножению., т.е. дополнительно к описанным свойствам добавляются свойства:

7. $\exists\, \mathbf{1} : a \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot a = a$;
8. $\forall a \neq \mathbf{0}\ \exists\, a^{-1} : a a^{-1} = \mathbf{1}$.

Вопросы к лекции:

1. Какие матрицы и как можно складывать?
2. Как умножить матрицу на число?
3. При каком условии матрицы можно умножать друг на друга?
4. Почему матрицы образуют коммутативную группу?
5. Какими свойствами обладает действие умножения матриц?
6. Какие матрицы и почему образуют кольцо?

7. Что такое транспонированная матрица?

8. Какими свойствами обладает действие транспонирования?

9. Что такое векторное пространство и почему матрицы образуют векторное пространство?

10. Перечислите известные вам алгебраические структуры? Какие множества принадлежат этим структурам?

Задачи

1*. Найдите: а) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^m$.

2*. Докажите, что $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix} 3n+1 & -n \\ 9n & -3n+1 \end{pmatrix}$.

3*. Найдите все матрицы A порядка n такие, что для любой матрицы X

$$sp(AX) = 0, \quad spA = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

4*. Определение: $[A;B] = AB - BA$ - коммутатор матриц A и B.

При каких λ $[A;B] = \lambda E$, E – единичная матрица?

5*. Докажите: Квадратная матрица A порядка 2 является решением уравнения;

$$X^2 - (spA)X + \det A \cdot E = 0$$