Лекция 1-3

Извлечение корня из комплексного числа

$\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow z = w^n, n \in N$.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$. Тогда

$$\rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \begin{cases} r^n = \rho, \\ n\phi = \varphi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} = r^{\frac{1}{n}}, \\ \phi = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Исследование формулы извлечения корня.

Теорема. Существует ровно n значений корня n - ой степени из отличного от нуля комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (почему корней ровно n?). Они получаются по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,2,\dots,n-1$$

Обратите внимание, что все корни расположены на одной окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ на одинаковом расстоянии друг от друга, поэтому достаточно знать только один корень, из него получаются остальные движением по окружности.

Примеры.

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sqrt[5]{1-i} = \sqrt[5]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi}{5}\right),\ k = 0,1,2,\dots,4;$$

$$w_0 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{20}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{20}\right)\right),\ k = 0,$$

$$w_1 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right),\ k = 1,$$

$$w_2 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{20} + i\sin\frac{15\pi}{20}\right) = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\ k = 2$$

$$w_3 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right), k = 3$$

$$w_4 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right), k = 4.$$

Мы нашли первый корень w_0 и движемся по окружности радиуса $\sqrt[10]{2}$ против часовой стрелки. Расстояние между корнями $\frac{8\pi}{20} = \frac{2\pi}{5}$.

Упражнение.
Найдите ошибку в утверждении
$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

Замечания.
1. Понятие «арифметического корня» для комплексных чисел не вводится.
2. Формула $\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} = \sqrt{z_1 z_2}$ верна только при определенном выборе аргументов для левой и правой частей равенства, а в общем виде она **не верна**.

Формулы Эйлера.

По определению вводим комплексную степень:
$e^{bi} = \cos b + i\sin b \Rightarrow e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i\sin b)$. Здесь e^a – модуль числа, b –аргумент.

Корни из единицы

$$1 = \cos 0 + i\sin 0 \Rightarrow \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, k = 0,1,2\ldots n-1$$

Геометрическое изображение $\sqrt[n]{1}$

Все корни имеют модуль 1, поэтому их изображения находятся на единичной окружности.

$$\varepsilon_0 = 1 = \cos 0 + i\sin 0,\ \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},\ \varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n},$$

$$\varepsilon_3 = \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}, \ldots, \varepsilon_{n-1} = \cos\frac{2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{2\pi(n-1)}{n}.$$

Они делят окружность на n равных частей. Все корни являются решениями уравнения $x^n - 1 = 0$.

Свойства $\sqrt[n]{1}$

1. Произведение двух корней степени n из 1 есть корень степени n из 1.

Доказательство.

$$\varepsilon_\kappa \varepsilon_l = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi l}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2\pi l}{n} + i\sin\frac{2\pi l}{n}\right) =$$

$$\cos\frac{2\pi(k+l)}{n} + i\sin\frac{2\pi(k+l)}{n} = \cos\frac{2\pi m}{n} + i\sin\frac{2\pi m}{n},$$

где $\left[\begin{array}{l} m = k + l, \text{ если } m < n, \\ m = k + l - n, \text{ если } m \geq n \end{array}\right.$ (исключили часть, кратную 2π).

2. Число, обратное корню степени n из 1, есть корень степени n из 1.

Доказательство.

$$\varepsilon_\kappa^{-1} = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi l}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi l}{n}} = \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n} =$$

$$= \cos\left(-\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi k}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right),$$

где $\frac{2\pi m}{n} = -\frac{2\pi k}{n} + 2\pi l = \frac{2\pi(ln - k)}{n}$, причем $0 \leq m = ln - k \leq n - 1$, то есть мы прибавили целое число полных оборотов.

3. Все корни степени n из числа z, z≠0, получаются умножением одного из его корней на все корни степени n из 1.

Доказательство

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) =$$

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right) = w_0 \cdot \varepsilon_k$$

Дополнительные сведения

Зная геометрическую интерпретацию модуля разности двух комплексных чисел, можно записывать уравнения различных кривых не в координатах, а на языке комплексных чисел

1) Окружность радиуса R с центром в начале координат: $|z| = R$.

2) Окружность радиуса R с центром в точке z_0:

$$|z - z_0| = R.$$

3) Эллипс определяется как геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух точек плоскости постоянна:

$|z - z_1| + |z - z_2| = a$.

Примеры: 1) $|iz - 1| \le 1 \Rightarrow |i(z - i^{-1}| \le 1 \Rightarrow |i(z+i)| \le 1 \Rightarrow |i||z-(-i)| \le 1 \Rightarrow |z-(-i)| \le 1$, но это есть множество точек, удаленных от точки $z = -i$ на расстояние не более 1, т.е. круг радиуса 1 с центром в точке $z = -i$.

2) $|z - i| = |z - 1|$ - это множество точек, равноудаленных от двух точек $z_1 = i$ и $z_2 = 1$. Такое множество представляет собой прямую, проходящую через середину отрезка, соединяющего точки $z_1 = i$ и $z_2 = 1$.

Степени числа i

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i, i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1.$$

Дальше все будет повторяться, таким образом, если $n=4k+m$, то

$$i^n = i^{4k+m} = i^m, m = 0,1,2,3$$

Примеры: 1) $i^{241} = i^{240+1} = i^{4 \cdot 60+1} = i$.

2) $i^{1346} = i^{1344} \cdot i^2 = -\left(i^4\right)^{338} = -1$.

Вопросы к лекции

1. Верно или неверно?

1) Число $\sqrt{5}$ является комплексным числом с неравной нулю мнимой частью.

2) Число a, такое, что $a^2 = -4$, является вещественным.

3) Число a, такое, что $a^4 = 1$ является вещественным.

4) Многочлен $x^2 + 4$ можно разложить на линейные множители с комплексными коэффициентами.

5) Точки плоскости, удовлетворяющие условию $|z - 1| = 2$, лежат на окружности радиуса 1.

6) Если комплексное число равно своему сопряженному, то оно является вещественным.

7) Если $\bar{z} = -z$, то вещественная часть числа z равна нулю.

8) Число различных корней n-й степени из числа z может быть бесконечно.

9) Корни n-й степени из числа z расположены на луче, исходящем из начала координат.

10) Корни n-й степени из числа z расположены на окружности с центром в начале координат.

11) Количество корней n-й степени из числа z может быть меньше или больше числа n.

2. Какими свойствами обладают корни n-й степени из 1?

Примеры и задачи:

1. Какие множества комплексных чисел удовлетворяют следующему условию:
   1) $|2z - i| = 4$; 2) $|2z - 3 - i| \le 4$?

2. Вычислите $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1993}$.

3. Найдите все корни третьей степени из 1. Один из них-1, а два других ω и $\bar{\omega}$.

   1) Вычислите $\omega^5, \omega^{-10}, \omega^{36}$.

   2) Вычислите $\omega^{100} + \omega^{200} + \omega^{300}$.

   3) Пусть a, b, c-вещественные числа. Докажите, что

$$\left(a + b\omega + c\omega^2\right)^n + \left(a + b\omega^2 + c\omega\right)^n, n \in Z$$ -вещественное число.

   4)* Докажите тождество: $x^3 + y^3 = (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y)$.

4. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, задаваемых условиями: $|z - i| > |z + i|$ и $|z| < |z - 1 + i|$.

5. а) * Найдите min $|3 + 2i - z|$ при $|z| \le 1$;

   б) * Найдите max $|1 + 4i - z|$ при $|z - 10i + 2| \le 1$.

6. *Укажите геометрический смысл числа $\arg \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$, где z_1, z_2, z_3 – различные числа.

7. Как расположены на плоскости точки z_1, z_2, z_3, для которых

а) $z_1 + z_2 + z_3 = 0, |z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$,

б) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0, |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| \neq 0$?

8. Докажите:

а)* точки плоскости, соответствующие комплексным числам $z_1, z_2, z_3,$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$, не все равные нулю, такие что $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$;

б)* точки плоскости, соответствующие различным комплексным числам $z_1, z_2, z_3,$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ -вещественное;

в)* точки плоскости, соответствующие различным комплексным числам $z_1, z_2, z_3,$ z_4, не лежащие на одной прямой, лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда число $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ -вещественное.