

Теорема Безу

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $F(x)$ на линейный двучлен $x - a$ равен значению многочлена в точке a , т. е. числу $F(a)$.

Доказательство. Разделим $F(x)$ на $x - a$ с остатком, т. е. представим его в виде

$F(x) = (x - a) Q(x) + R$. Как было сказано выше, остаток R (его степень меньше степени двучлена $x - a$, т.е. меньше 1, следовательно, является константой. Подставим $x = a$:

$$F(a) = (a - a) Q(a) + R \Rightarrow R = F(a), \text{ что и требовалось доказать.}$$

Следствие. Для того чтобы многочлен $F(x)$ делился на двучлен $x - a$, необходимо и достаточно, чтобы $F(a) = 0$, т. е. чтобы число a было корнем многочлена x .

Разложение многочлена на множители

При разложении на множители многочлена не учитываются постоянные множители, отличные от нуля (многочлены нулевой степени). Например, многочлен $3x^2 + 6 = 3(x^2 + 2)$ не является разложением многочлена на множители. Роль простых чисел играют так называемые *неприводимые многочлены*, т. е. многочлены, не имеющие делителей, кроме 1 и самого себя (постоянные множители не учитываются). Однако появляется трудность, отсутствующая при разложении целых чисел – разложение многочлена на множители зависит от того, какие коэффициенты мы используем.

Разложение одного и того же многочлена на неприводимые множители может оказаться различным, если в качестве коэффициентов берутся разные числовые множества.

Пример. Рассмотрим многочлен $F(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$ с целыми коэффициентами. Его можно разложить на два множителя с целыми коэффициентами:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 = (x^2 + x)^2 - 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1).$$

Каждый из получившихся квадратных множителей неприводим, если мы ограничимся целыми (или даже рациональными коэффициентами), потому что делителем квадратного трехчлена может быть только линейный множитель, но получившиеся трехчлены не

имеют рациональных корней и не могут иметь линейных множителей с рациональными коэффициентами (следствие из теоремы Безу).

Однако если мы позволим брать вещественные коэффициенты, то разложение можно продолжить, так как $x^2 + x - 1 = \left(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$. Многочлен $x^2 + x + 1$ остается неприводимым, так как у него нет вещественных корней. Допустив комплексные числа, мы разложим на два линейных множителя и этот многочлен:

$$x^2 + x + 1 = \left(x - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Наибольший общий делитель двух многочленов

Для многочленов

так же, как и для целых чисел, можно определить понятия наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного. Будем и далее предполагать, что коэффициенты при старших степенях равны 1.

Многочлен $Q(x)$ называется общим делителем многочленов $F(x)$ и $G(x)$, если $F(x)$ делится на $Q(x)$ и $G(x)$ делится на $Q(x)$. Среди всех общих делителей найдется делитель наибольшей степени. Он называется наибольшим общим делителем (НОД) многочленов $F(x)$ и $G(x)$. Для нахождения НОД применяется алгоритм Евклида. Покажем, как он действует, на примере:

Пример. Пусть $F(x) = x^4 - x^2$; $G(x) = x^4 - 1$. Тогда

Шаг 1. Делим $F(x)$ на $G(x)$ с остатком, т. е. представляем $F(x)$ в виде

$$F(x) = G(x) + 1 - x^2 \Rightarrow R(x) = 1 - x^2$$

Шаг 2. Делим $G(x)$ на $R(x)$: $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(1 - x^2) + 0 = -(x^2 + 1)(x^2 - 1) + 0$.

Многочлен $G(x)$ разделился на $R(x)$ без остатка. Последний ненулевой остаток $x^2 - 1$ и является НОД многочленов $F(x)$ и $G(x)$

Покажем теперь в общем виде, что алгоритм Евклида дает нам НОД двух многочленов.

Пусть даны многочлены $F(x)$ и $G(x)$. Будем считать, что $\deg F(x) \geq \deg G(x)$.

Разделим $F(x)$ на $G(x)$: $F(x) = G(x)Q_1(x) + R_1(x)$, $\deg R_1(x) < \deg G(x)$.

Если $\deg R_1(x) > 0$, т.е. $R_1(x) \neq \text{const}$, то разделим $G(x)$ на $R_1(x)$:

$$G(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x).$$

Если $R_2(x) \neq \text{const}$, то разделим $R_1(x)$ на $R_2(x)$ и т.д.

Итак, $F(x) = G(x)Q_1(x) + R_1(x)$

$$G(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x)$$

$$R_1(x) = R_2(x)Q_3(x) + R_3(x)$$

$$R_2(x) = R_3(x)Q_4(x) + R_4(x)$$

.....

$$R_{k-3}(x) = R_{k-2}(x)Q_{k-2}(x) + R_{k-1}(x)$$

$$R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x)Q_{k-1}(x) + R_k(x)$$

1) $R_k(x) = 0$. Тогда НОД $= R_{k-1}(x)$.

Действительно, из последней строчки следует, что $R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x)Q_{k-1}(x)$, что

$R_{k-2}(x)$ делится на $R_{k-1}(x)$. Из предпоследней строчки следует, что $R_{k-3}(x)$ делится на

$R_{k-1}(x)$. Поднимаясь вверх, видим, что $G(x)$ делится на $R_{k-1}(x)$ и $F(x)$ делится на

$R_{k-1}(x)$, т.е. $R_{k-1}(x)$ - делитель $F(x)$ и $G(x)$.

Покажем теперь, что это НОД. Предположим, что есть делитель более высокой степени $D(x)$.

Тогда из первой строки следует, что $R_1(x)$ делится на $D(x)$, из второй строки следует,

что $R_2(x)$ делится на $D(x)$ и т.д. Наконец, получим, что $R_{k-1}(x)$ делится на $D(x)$, что

невозможно, т.к. $\deg R_{k-1}(x) < \deg D(x)$, следовательно, делителя большей степени,

чем $R_{k-1}(x)$, не существует, и $R_{k-1}(x)$ является НОД.

2) $R_{k-1}(x) = \text{const}$. Тогда НОД равен const (можно считать 1), и многочлены являются взаимно простыми, т.е. не имеющими общих делителей.

Линейное представление наибольшего общего делителя

Теорема (о линейном представлении НОД). Для любых двух ненулевых многочленов $F(x)$ и $G(x)$ с коэффициентами из поля K их наибольший общий делитель $D(x)$ (т. е. общий делитель наибольшей степени) может быть представлен в виде $D(x) = A(x)F(x) + B(x)G(x)$, где $A(x)$ и $B(x)$ – некоторые многочлены.

Доказательство теоремы может быть проведено с помощью алгоритма Евклида, но мы приведем другое доказательство.

Рассмотрим множество многочленов $W = \{M(x)F(x) + N(x)G(x)\}$, где $M(x)$ и $N(x)$ независимо пробегают **все** многочлены с коэффициентами из поля K . В этом бесконечном множестве многочленов выберем многочлен $D(x)$ наименьшей степени, отличный от нуля. Покажем, что он и есть наибольший общий делитель многочленов $F(x)$ и $G(x)$.

Прежде всего, докажем, что если два многочлена принадлежат множеству W , то и остаток от деления их друг на друга принадлежит этому множеству.

Действительно, пусть

$$P(x) = M_1(x)F(x) + N_1(x)G(x); \quad Q(x) = M_2(x)F(x) + N_2(x)G(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(x) &= T(x)Q(x) + R(x) \Rightarrow R(x) = P(x) - T(x)Q(x) = \\ &= M_1(x)F(x) + N_1(x)G(x) - M_2(x)T(x)F(x) - N_2(x)T(x)G(x) = \\ &= (M_1(x) - T(x)M_2(x))F(x) + (N_1(x) - T(x)N_2(x))G(x). \end{aligned}$$

Пусть теперь $D(x) \in W$ – многочлен наименьшей степени, отличный от нуля. Так как $F(x)$ из W , то при делении его на $D(x)$ получим остаток также из W , причем степень его будет меньше степени $D(x)$, а это невозможно, следовательно, остаток равен

нулю. Таким образом, $F(x)$ делится на $D(x)$. Аналогично $G(x)$ делится на $D(x)$, значит, $D(x)$ – общий делитель $F(x)$ и $G(x)$, и он представим в виде

$$A(x)F(x) + B(x)G(x).$$

Предположим теперь, что есть многочлен, который является делителем $F(x)$ и $G(x)$, тогда $D(x) = A(x)F(x) + B(x)G(x)$ тоже на него делится, следовательно, $D(x)$ – НОД.

Мы предположили, что старшие коэффициенты равны 1. Такой НОД может быть только один.

Взаимно простые многочлены

Два многочлена называются *взаимно простыми*, если их НОД равен 1.

(Напомним, что старшие коэффициенты мы предполагаем равными 1).

Теоремы о взаимно простых многочленах.

1. Для того чтобы многочлены $F(x)$ и $G(x)$ были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы существовали многочлены $A(x)$ и $B(x)$, такие что

$$A(x)F(x) + B(x)G(x) = 1.$$

2. Если многочлены $F(x)$ и $G(x)$ взаимно просты с многочленом $Q(x)$, то и их произведение $F(x) \cdot G(x)$ взаимно просто с $Q(x)$.

Доказательство этих теорем основывается на линейном представлении НОД.

Попробуйте доказать утверждение 2 самостоятельно.

Теорема, которую мы примем без доказательства.

Теорема Гаусса. Каждый многочлен с комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один корень.

Следствие 1. Каждый многочлен $F(x)$ степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней, среди которых могут быть кратные.

Доказательство. По теореме Гаусса многочлен $F(x)$ имеет корень x_1 . Тогда его можно представить в виде $F(x) = (x - x_1)F_1(x)$. По той же теореме Гаусса многочлен $F_1(x) = (x - x_2)F_2(x)$ и т.д. Окончательно получим:

$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$. Естественно, корни могут быть вещественными и комплексными.

Следствие 2. Каждый многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами раскладывается на n линейных множителей над полем комплексных чисел.

Доказательство очевидно.

Следствие 3. Если число $a + bi$ является корнем многочлена с вещественными коэффициентами, то число $a - bi$ также является корнем этого многочлена.

Доказательство следует из свойств комплексного сопряжения.

$$F(x) = a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n = 0 \Rightarrow \overline{F(x)} = \overline{a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n} = 0 \Rightarrow$$

$$F(x) = a_0 \overline{x_0}^n + a_1 \overline{x_0}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \overline{x_0} + a_n = 0$$

Следствие 4. Каждый многочлен степени $n \geq 1$ с вещественными коэффициентами раскладывается на множители с вещественными коэффициентами не выше второй степени.

Доказательство. Пусть многочлен имеет корень x_0 , тогда он имеет корень \tilde{x}_0 .

Пусть $x_0 = a + bi \Rightarrow \overline{x_0} = a - bi$. Перемножим множители $(x - (a + bi))$ и $(x - (a - bi))$:

$$(x - (a + bi)) \cdot (x - (a - bi)) = ((x - a) - bi)((x - a) + bi)$$

$$= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Получили квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами.

Аналогично тому, как это делается для целых чисел, определяется наименьшее общее кратное (НОК) для многочленов $F(x)$ и $G(x)$. Это многочлен наименьшей степени, который делится и на $F(x)$ и на $G(x)$.

Теорема. НОК многочленов $F(x)$ и $G(x)$ равно их произведению, деленному на НОД этих многочленов

Попробуйте доказать эту теорему самостоятельно.

Разложение дроби на простейших

Пусть дана дробь $\frac{F(x)}{G(x)}$. Будем считать, что дробь правильная. В противном случае

выделим целую часть. Простейшими дробями будем называть дроби вида:

$$\frac{A}{x - x_0}, \quad \frac{A}{(x - x_0)^n}, \quad \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}, \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Разложим $G(x)$ на множители:

$$G(x) = a_0 (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_k)^{m_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{p_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{p_s}.$$

Каждому множителю в знаменателе вида $(x - x_0)^m$ отвечает сумма m дробей:

$$\frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x - x_0)^m}.$$

Каждому множителю в знаменателе вида $(x^2 + px + q)^s$ отвечает сумма s дробей:

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_sx + B_s}{(x^2 + px + q)^s}.$$

Представив исходную дробь в виде суммы таких дробей с неизвестными коэффициентами в числителе, приведем правую часть к общему знаменателю. Теперь у левой и правой частей знаменатели равны, следовательно, будут равны числители. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему уравнений. Решив ее, получим неизвестные коэффициенты.

Пример:

$$\frac{7x^3 - 29x^2 + 9x - 19}{(x^2 + 3x + 4)(x-1)(x-5)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 3x + 4} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-5}$$

$$7x^3 - 29x^2 + 9x - 19 = (Ax + B)(x-1)(x-5) + C(x^2 + 3x + 4)(x-5) + D(x^2 + 3x + 4)(x-1)$$

$$x = 1 \Rightarrow -32 = -32C \Rightarrow C = 1$$

$$x = 5 \Rightarrow 176 = 176D \Rightarrow D = 1$$

$$x^3 \Big| 7 = A + C + D \Rightarrow A = 5$$

$$x^0 \Big| -19 = 5B - 20C - 4D \Rightarrow -19 = 5B - 24 \Rightarrow B = 1$$

Получаем:

$$\frac{7x^3 - 29x^2 + 9x - 19}{(x^2 + 3x + 4)(x-1)(x-5)} = \frac{5x + 1}{x^2 + 3x + 4} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-5}$$

Вопросы к лекции

1. В чем заключается теорема Безу?
2. Что такое приводимые и неприводимые многочлены?
3. Что такое линейное представление НОД двух многочленов?
4. В чем состоит метод Евклида для нахождения НОД?
5. Сформулируйте теорему Гаусса и следствия из нее?
6. На какие множители с вещественными коэффициентами можно всегда разложить многочлены с вещественными коэффициентами?
7. Что такое простейшая дробь и как разложить дробь на простейшие?

8*. а) Пользуясь алгоритмом Евклида, подберите многочлены $M(x)$ и $N(x)$, чтобы $D(x)$ можно было представить в виде $D(x) = M(x)F(x) + N(x)G(x)$, где

$$F(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4,$$

$$G(x) = 3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2.$$

б) Докажите, что многочлены

$$F(x) = x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 5x + 3 \text{ и } G(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$$

являются взаимно простыми и, пользуясь алгоритмом Евклида, подберите многочлены $M(x)$ и $N(x)$ так, чтобы $1 = M(x)F(x) + N(x)G(x)$.

9**. Докажите теорему о взаимно простых многочленах:

Если произведение многочленов $F(x) \cdot G(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, при этом $F(x)$ и $Q(x)$ взаимно просты и $F(x)$ не делится на $Q(x)$, то $G(x)$ делится на $Q(x)$.