Лекция 1-1

Комплексные числа

Введение

Понятие числа проделало громадный путь развития.

Целые числа – дроби и пропорции, нуль и отрицательные числа, открытие иррациональных чисел и далее – каждый шаг потребовал столетий (в ряде случаев и тысячелетий) и знаменовал рубежи развития человеческой мысли.

На развитие понятия числа можно посмотреть и с конструктивной точки зрения.

Необходимость новых конструкций:

$x + a = b$ – потребовались отрицательные числа, если $a > b$

$ax = b$ – потребовались рациональные числа, если b не делится на a

$x^n = b$ – потребовались иррациональные числа, чтобы решать такие уравнения.

Корни квадратного уравнения – иногда их невозможно найти, если говорить только о вещественных числах. В XVI в Италии математики Ферро, Тарталья, Кардано, Феррари, Бомбелли нашли общими усилиями формулы для решения любых уравнений третьей и четвертой степеней. Но их результаты и привели к конструкции новых чисел, которые теперь называются *комплексными числами.*

С конца XVIII века математика стала немыслима без комплексных чисел.

Определение комплексного числа.

В XVI– XVII веках числа стали отождествлять с точками на прямой, появилась координатная ось, начало отсчета, единичный отрезок, и было установлено взаимно однозначное соответствие между точками на прямой и вещественными числами.

Попробуем теперь каждой точке плоскости с координатами (x, y) сопоставлять число z, которое мы назовем *комплексным числом* (так у него две составляющие части), и пока будем также обозначать (x, y).

Множество вещественных чисел является частью множества комплексных чисел. Вещественные числа как часть комплексных чисел мы будем обозначать $(x, 0)$, а множество комплексных чисел будем обозначать буквой С: $R \subset C$.

Вводя комплексные числа, нужно определить арифметические действия над ними, причем так, чтобы не возникло противоречий с действиями над вещественными числами.

Определение.

Комплексными числами называются упорядоченные пары чисел, для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления с вещественными числами вводятся следующим образом:

Пусть $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$. По определению,

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$ Равенство двух чисел.

2. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Сложение двух чисел.

3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$. Умножение двух чисел.

4. Вещественное число $a = (a, 0)$. В частности, число 0 = $(0,0)$.

5. $-z = -1 \cdot z = (-x, -y)$

Все определения формулируются в терминах вещественных чисел и действиях над ними.

Проверим, что мы не получили противоречия с действиями над вещественными числами.

Если $a = b$, то $(a, 0) = (b, 0)$ – нет противоречия; $a + b = (a + b, 0)$ – нет противоречия.

$a \cdot b = (a \cdot b, 0)$, по определению; с другой стороны,

$a \cdot b = (a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0,\ a \cdot 0 + b \cdot 0) = (a \cdot b, 0)$ – нет противоречия.

Заметим также, что если комплексное число z умножить на вещественное число m , то получим: $m \cdot z = (m, 0) \cdot (x, y) = (mx - 0 \cdot y, my + x \cdot 0) = (mx, my)$, т.е. обе компоненты числа z нужно умножить на вещественное число m .

В частности, если m – натуральное число, то $m \cdot z = (mx, my) = (x, y) + (x, y) + (x, y) + \ldots + (x, y)$.

Справа стоит m слагаемых – опять нет противоречий с тем, что нам известно о вещественных числах.

Действия над комплексными числами.

Из определения следует, что:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения).
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность сложения).

Эти свойства следуют из коммутативности и ассоциативности сложения вещественных чисел.

3. $z + 0 = z$.

4. $z + (-z) = (x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$, т.е. для каждого числа z есть противоположное число ($-z$).

5. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (коммутативность умножения)

6. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (ассоциативность умножения)

7. $\begin{matrix} (z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3, \\ z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3 \end{matrix}$ – дистрибутивность.

Докажем первое равенство в 7:

Пусть $z_1 = (x_1, y_1);\ z_2 = (x_2, y_2);\ z_3 = (x_3, y_3)$. Тогда

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = ((x_1 + x_2)x_3 - (y_1 + y_2)y_3, (x_1 + x_2)y_3 + (y_1 + y_2)x_3) =$$
$$(x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 - y_2y_3, x_1y_3 + x_2y_3 + y_1x_3 + y_2x_3).$$

С другой стороны, $\begin{matrix} z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3 = (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) + (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) = \\ (x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 - y_2y_3, x_1y_3 + x_2y_3 + y_1x_3 + y_2x_3). \end{matrix}$

Получили одинаковые выражения.

8. $z \cdot 1 = z$.

9. У каждого комплексного числа, не равного 0, есть обратное (см. ниже).

Определение. Множества чисел, удовлетворяющих свойствам 1-9, образуют *поле***.**

Таким образом, вещественные числа образуют поле.

Комплексные числа образуют поле.

Обозначим число (0,1) = i. Тогда числа $(0, y) = y \cdot (0,1) = yi$.

Умножим теперь $i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = -1$, т.е. $i^2 = -1$, поэтому число i называется *мнимой единицей.*

Число $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + yi$.

В дальнейшем мы будем комплексные числа z обозначать $x + yi$.

Вещественные числа $(x,0)$ будем обозначать просто x.

Определение. Числа $z = (x, y)$ и $\overline{z} = (x, -y)$ называются *сопряженными числами*.

Или, что-то же, числа $z = x + yi$ и $\overline{z} = x - yi$ называются *сопряженными числами*.

Свойства комплексного сопряжения

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z = \overline{z} \Rightarrow z \in R$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Вычислим $z \cdot \overline{z} = (x + yi)\cdot(x - yi) = x \cdot x + y \cdot y + (x(-y) + y \cdot x)i) = x^2 + y^2$.

Итак,

$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$ – неотрицательное число, причем $z \cdot \overline{z} = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$.

Определение. Если $z = x + yi$, то x–вещественная часть числа z (обозначается $\mathrm{Re}\, z$), y-мнимая часть числа z (обозначается $\mathrm{Im}\, z$).

Замечание: $x = \mathrm{Re}\, z$ и $y = \mathrm{Im}\, z$ – **вещественные** числа.

Вычитание и деление комплексных чисел.

Теорема 1. Пусть α и β –два комплексных числа. Тогда существует единственное комплексное число z, такое что $\alpha + z = \beta : z = (-\alpha) + \beta$.

Доказательство:

1) Пусть $\alpha + z = \beta,\ z = (-\alpha) + \beta \Rightarrow \alpha + z = \alpha + (-\alpha) + \beta = \beta$;
2) Если $\alpha + z = \beta$, то $(-\alpha) + \alpha + z = (-\alpha) + \beta \Rightarrow z = -\alpha + \beta$.

Это число будем обозначать: $z = \beta - \alpha$ и называть разностью чисел α и β.

Теорема 2. α и β –два комплексных числа и $\alpha \neq 0$, то существует единственное число z .,

такое что $\alpha \cdot z = \beta$. Это число обозначается $\frac{\beta}{\alpha}$ или $\alpha^{-1}\beta$.

Доказательство. Пусть $\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$. Рассмотрим $z = \frac{\overline{\alpha}}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} \cdot \beta$. Тогда

1) $\alpha \cdot z = \alpha \cdot \frac{\overline{\alpha}}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} \cdot \beta = \frac{\alpha \cdot \overline{\alpha}}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} \cdot \beta = \frac{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} \cdot \beta = \beta$;

2) Если

$\alpha \cdot z = \beta$, то
$$\alpha \cdot z = \alpha \cdot z \cdot \frac{\alpha \overline{\alpha}}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} = \beta \cdot \frac{\alpha \overline{\alpha}}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} \Rightarrow z \cdot \frac{\alpha \cdot \overline{\alpha}}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} = \beta \cdot \frac{\overline{\alpha}}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} \Rightarrow$$
$$z \cdot \frac{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} = \beta \cdot \frac{\overline{\alpha}}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} \Rightarrow z = \frac{\overline{\alpha}}{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} \cdot \beta.$$

Извлечение квадратного корня

$$z = a + bi, \sqrt{z} = x + yi \Leftrightarrow a + bi = (x + yi)^2 \Leftrightarrow a = x^2 - y^2, b = 2xy$$

Пример.

$$\sqrt{3 + 4i} = x + yi \Rightarrow 1 + i = (x + yi)^2 \Leftrightarrow (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = 4 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{4}{2x} = \frac{2}{x}$$

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}.$$

Число x должно быть вещественным, следовательно,

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2, y = \pm \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \sqrt{3 + 4i} = \pm(2 + i)$$

$$x_1 = 2 + i, x_1 = -2 - i.$$

Проверка: $(2 + i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$

Вопросы

1. Как определяется комплексное число?

2. Покажите, что вещественные числа являются частью комплексных чисел.

3. Изобразите числа на комплексной плоскости: 5, -2, $\pm 1 + i\sqrt{3}$.

4. Какие числа находятся:

а) в вершинах квадрата со сторонами длиной 1, параллельными осям координат, центр которого находится в начале координат;

б) в вершинах правильного треугольника с центром в начале координат, одна из сторон которого параллельна оси ординат, а радиус описанной окружности, равен 1;

в) в вершинах правильного шестиугольника с центром в точке $2 + i\sqrt{3}$, две стороны которого параллельны оси абсцисс, а радиус описанной окружности равен 2.

5. Выберите два любых комплексных числа и произведите с ними 4 действия арифметики (сложение, вычитание, умножение, деление).

6. Что такое сопряженное комплексное число по отношению к данному числу? Как определяется операция комплексного сопряжения и каковы свойства комплексного сопряжения?

7. Что такое поле? Покажите, что комплексные числа образуют поле.

8. Как изобразить комплексное число на плоскости?

9. Как извлечь квадратный корень из комплексного числа. Извлеките квадратный корень из числа $z = 5 – 12i$?