Linear algebra for videogames

MATHEMATICS IMPLEMENTATION IN C++

Vito Domenico Tagliente

Linear Algebra for videogames

Vito Domenico Tagliente

Prefazione

L'algebra lineare è la branca della matematica che si occupa dello studio dei vettori, spazi vettoriali, trasformazioni lineari e sistemi di equazioni lineari. Questo libro funge da raccoglitore di appunti. Di capitolo in capitolo, verranno affrontati i diversi argomenti dell'algebra lineare che rivestono un ruolo importante nell'applicazione della computer grafica. Scopriremo dapprima come rappresentare le informazioni sugli oggetti che compongono una scena, quali posizione, orientamento, dimensione, ed in seguito ci occuperemo di manipolare tali informazioni rappresentandole in un formato di facile trattazione per un calcolatore.

Note sull'autore

Mi chiamo Vito Domenico Tagliente e sono un ingegnere informatico laureato con lode al politecnico di Bari. Quello dei videogiochi è un campo di applicazione delle scienze informatiche che mi ha sempre affascinato. Parliamo di un contesto in cui diverse discipline, quali la matematica, l'ingegneria del software, la fisica collaborano al fine di riprodurre su schermo l'effetto della modellazione digitale della realtà che ci circonda. È sorprendente. Premetto che non ho seguito un percorso accademico specifico sulla computer grafica, al contrario la curiosità è bastata sola a condurmi su questo cammino di studio e applicazione.

Perché ho deciso di scrivere questo libro? In verità, ho da sempre adoperato un metodo di studio basato sull'applicazione. Scrivere appunti o implementare concetti in codice è quell'operazione, che da sempre mi permette, sin dall'università, di imprimere gli argomenti nella mia mente. L'applicazione pratica consente di rendersi conto di quanto si è padroni di un determinato argomento, a volte una singola lettura non è sufficiente, ma è l'atto di applicazione che permette di rafforzare i concetti. Pertanto, ho deciso di utilizzare questo documento digitale per la trascrizione dei miei appunti. Si tratta di una prova individuale, basata su un metodo di studio che mi porta a riassumere quanto appreso e ad implementare in codice. Chissà, da una esigenza personale, magari questo manoscritto digitale potrebbe divenire davvero un libro per la comunità.

Sommario

1. Introduzione

La realtà può essere descritta in base a tre dimensioni. Tale affermazione risulta vera soltanto se consideriamo il sistema sensoriale umano come riferimento. Se, al contrario, consideriamo il prodotto dell'elaborazione cerebrale, a livello visivo, la realtà viene catturata e rappresentata attraverso delle immagini. Quello che implicitamente il nostro corpo compie è una operazione di trasformazione dell'input tridimensionale percepito dai sensi verso una rappresentazione bidimensionale prodotta dall'elaborazione del cervello. La computer grafica è quella scienza che si occupa di riprodurre in maniera fedele o realistica l'ambiente che ci circonda. Con tale approccio si intende un processo capace di riprodurre mondi dinamici, caratterizzati dall'interazione di oggetti di natura fisica differente, e di simulare il processo di osservazione umano permettendone la visione. A tale scopo, occorre definire un formalismo in grado di descrivere dapprima la posizione degli oggetti nello spazio, parleremo di sistemi di riferimento e coordinate, ed in seguito capire come è possibile simulare, con quali modelli matematici, il processo di visione umana su calcolatori elettronici.

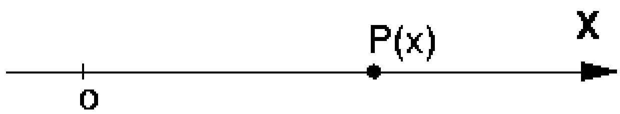
1.1 Sistemi di riferimento

L'esigenza fin dai tempi antichi di descrivere le caratteristiche morfologiche e topografiche della Terra ha determinato la nascita della Cartografia. Le rappresentazioni cartografiche sono proiezioni, sul piano, di oggetti giacenti sulla superficie terrestre. Se vogliamo conoscere la localizzazione di un oggetto sulla carta, che rappresenta la superficie della terra, occorre definire dei parametri che collochino in maniera univoca gli oggetti sulla superficie a due dimensioni della carta. Gli oggetti, quali piazze, fiumi, case e palazzi, sono puntualmente individuati nello spazio attraverso le coordinate. I sistemi di coordinate sono molti e sono tra loro equivalenti, nel senso che è possibile passare da uno all'altro attraverso l'applicazione di formule opportune.

I sistemi di riferimento permettono di individuare univocamente punti nello spazio. Ogni sistema di riferimento è caratterizzato da una origine, formalmente identificata dal punto O. Tale punto, permette, nel sistema di riferimento esaminato, di misurare e quantificare la distanza di un qualsiasi oggetto nel mondo a partire dall'origine. Ciò permette di quantificare le coordinate del sistema, consentendo di trattare tali informazioni attraverso l'ausilio di numeri.

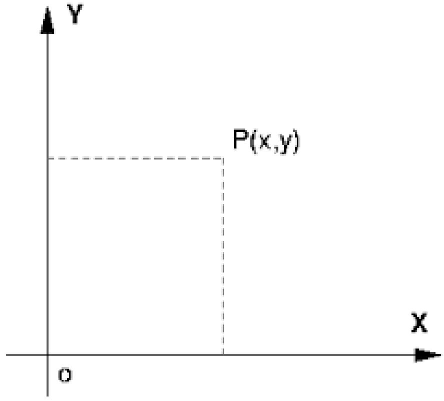
Esistono sistemi di coordinate di svariate dimensioni, ipoteticamente di dimensione n, in realtà quello che a noi interessa, nel campo della computer grafica, è l'esistenza di un sistema di riferimento a due dimensioni e quello a tre dimensioni.

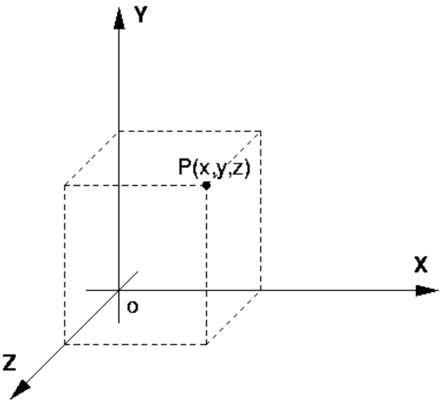
Per capire meglio i concetti appena descritti, consideriamo il caso più semplice, il sistema unidimensionale. Il sistema di riferimento unidimensionale, ideato da Cartesio, è costituito da una retta sulla quale un oggetto, in generale un punto, è vincolato a muoversi. Su questa retta è fisso un punto speciale, detto origine del sistema di riferimento. Di consueto l'origine si indica con la lettera O. Oltre all'origine, il sistema di riferimento è anche descritto in termini di verso di percorrenza e un'unità di misura attraverso cui quantificare le lunghezze.



Consideriamo di volere rappresentare i punti sulla retta secondo l'insieme dei numeri naturali, è possibile individuare un punto sulla retta in base ad un numero intero positivo se concorde con il verso di percorrenza scelto (verso destra dall'origine), rispettivamente negativo nel verso opposto. Tale numero è denominato coordinata e per indicare tale coordinata, in generale, si utilizza la lettera x.

Quanto considerato per il sistema di riferimento monodimensionale, può essere facilmente esteso per la definizione di sistemi di riferimento di dimensioni maggiori. L'idea alla base di questa estensione è molto semplice. Un sistema di riferimento a due dimensione è costituito da una coppia di rette incidenti. Tali rette sono indicate come X e Y, dove il punto di intersezione è definito come l'origine per entrambe. Su ciascuna retta si fissa un verso di percorrenza ed un'unità di misura che in genere è uguale per entrambe le rette. In questo caso, la posizione di un punto vincolato a muoversi su un piano può essere individuata da una coppia di valori, formalmente espressa con (x, y). Con x andremo a individuare la distanza del punto rispetto all'origine sull'asse X, rispettivamente y sull'asse Y. Tale sistema di riferimento sarà utilissimo per individuare gli elementi della UI da disegnare a schermo, per esempio.





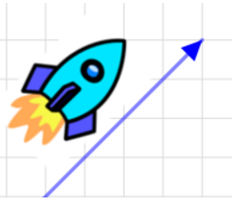
Con lo stesso procedimento si definisce il sistema di riferimento tridimensionale, costituito da tre rette X, Y e Z, che si intersecano in un punto comune detto origine. Le coordinate generiche di un punto nello spazio sono indicate con il formalismo (x, y, z). È da tenere presente che se gli assi sono tra loro ortogonali, allora si dice che il sistema di riferimento è ortogonale o rettangolare.

Ai fini della computer grafica, l'asse z è utilizzato per descrivere l'informazione di profondità degli oggetti che compongono la scena.

Le nozioni riportate finora sono indispensabili in quanto ci permettono, con un formalismo molto semplice e compatto, di descrivere il posizionamento di diversi oggetti all'interno di una scena.

2. Vettori e Punti

In natura esistono grandezze determinate dal numero che le misura rispetto a una prefissata unità, come per esempio la lunghezza, l'area, il volume, il tempo. Queste grandezze sono dette <u>scalari</u>. Altre grandezze, come per esempio lo spostamento e la velocità, sono rappresentate da un numero, una direzione e un verso. Tali grandezze vengono chiamate grandezze <u>vettoriali</u> e vengono descritte mediante <u>vettori</u>.



Ad esempio, se vogliamo descrivere il movimento di una navicella spaziale, dire che questa si muove ad una certa velocità non è sufficiente. Affinché la descrizione sia completa, occorre specificare anche dove questa si sta muovendo, in particolare in quale direzione e con quale verso questa si sta spostando.

Nell'ambito dei videogiochi, i vettori sono ampiamente utilizzati per esprimere, nella considerazione più semplice possibile, gli spostamenti dei diversi oggetti che compongono la scena. Non solo, i vettori possono essere utilizzati per esprimere una direzione di osservazione applicata alle camere di gioco o semplicemente agli attori della scena che devono spostarsi e quindi ruotarsi e osservare lungo la direzione di spostamento. Gli scenari di applicazioni sono numerosi, l'importante è capire che i vettori devono essere utilizzati lì dove sono necessarie delle informazioni in più rispetto alla semplice grandezza numerica.

2.1 Notazione vettoriale

La notazione matriciale venne introdotta principalmente per esprimere le relazioni dell'algebra lineare in forma compatta, allo scopo di incrementarne la leggibilità. A prova di ciò, consideriamo un insieme di relazioni lineari definite tra un insieme $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ di n elementi e un insieme $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ di m elementi.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m$$

Il contenuto informativo della relazione può essere formalmente rappresentato dalla seguente notazione:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Se consideriamo di associare un nome ai diversi elementi che appaiono nell'equazione $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$ e $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{y}$, due oggetti matematici possono essere individuati:

- La matrice **A**
- I vettori **x** e **y**.

Applicando la nuova notazione, si ricava che la relazione può essere espressa in forma matriciale $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$.

Definiamo vettore, un insieme di n elementi che può essere espresso come:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Questo oggetto è chiamato vettore colonna. In seguito, sarà chiaro il perché un vettore possa essere considerato come un caso speciale di matrice. Una matrice avente n righe ed una sola colonna.

Un vettore può anche essere espresso secondo la notazione $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2 \dots x_n]$, tale rappresentazione prende il nome di vettore riga. In generale si parla semplicemente di vettori. Se non viene specificato alcun qualificatore, si sottintende si tratti, per convenzione, di un vettore colonna.

I vettori sono rappresentati nei testi di algebra con la notazione $\vec{v}$, in realtà per questioni di comodità relative alla videoscrittura, i vettori vengono anche spesso identificati con una lettera minuscola in grassetto **x**.

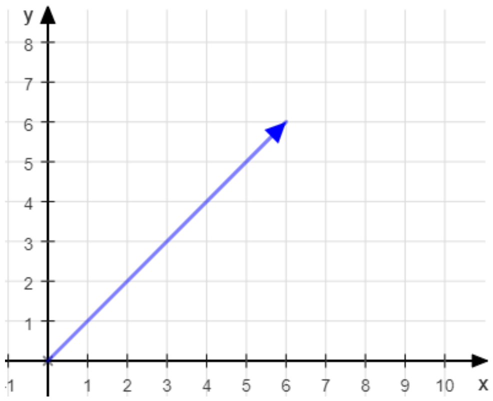
Gli elementi che costituiscono un vettore sono chiamati componenti, dove il simbolo n viene adoperato per indicare la quantità di componenti, l'ordine del vettore. Per esempio, definito il vettore $\boldsymbol{v} = [2 \quad 0]$, la prima componente è 2, la seconda è 0. L'ordine di **v** è 2, in quanto $n = 2$.

Molto importante è il concetto di modulo di un vettore, ovvero la lunghezza del vettore in relazione allo spazio euclideo in cui questo viene rappresentato. Formalmente, il modulo di un vettore, detto anche norma euclidea, si esprime con $||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$. Nel caso in due dimensioni, si ricava $||v|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2.2 Definizione geometrica di un vettore

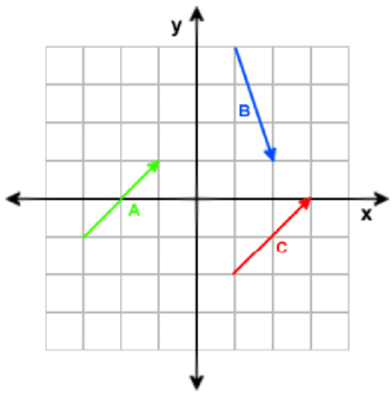
Abbiamo discusso riguardo alla rappresentazione analitica di un vettore, esaminiamo la rappresentazione geometrica. Geometricamente, un vettore può essere rappresentato con un segmento orientato. Un segmento AB può essere percorso in due modi: da A verso B, oppure da B verso A. Nel primo caso, il segmento orientato verrà indicato con la notazione $\overrightarrow{AB}$; nel secondo caso con $\overrightarrow{BA}$. Tale segmento è caratterizzato da una lunghezza, da una direzione e da un verso. Ciò significa che i segmenti $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, che sono lo stesso insieme di punti, devono essere considerati diversi come segmenti orientati, perché differisce l'ordine con cui si considerano gli estremi.

In figura è possibile notare la rappresentazione grafica di un vettore in uno spazio a due dimensioni, pertanto poggiato su un sistema cartesiano.



I vettori sono utilizzati per descrivere grandezze in base alla loro direzione e verso. La posizione non è specificata nella definizione del vettore stesso, piuttosto è relativa al punto in cui questo è applicato.

A livello di sistema cartesiano, ogni vettore è descritto dalle due coordinate del sistema, x e y. È da tenere a mente che tali coordinate sono necessarie al fine di identificare la pendenza della retta su cui giace il vettore, ma il punto di applicazione è irrilevante. Vettori aventi componenti identiche, possono essere rappresentati (paralleli tra loro) posti in posizioni differenti.



In figura, infatti, i vettori **a** e **c**, presentano stessa direzione, il che vuol dire che sono descritti dalle medesime componenti. La posizione è differente, questo perché tale informazione prescinde dalla notazione di vettore.

Pertanto, è bene distinguere il concetto di punto, inteso come concetto in grado di descrivere la posizione di un oggetto in un sistema di riferimento, rispetto al concetto di vettore, adatto a descrivere uno spostamento.

I vettori descrivono uno spostamento, sono quindi riferiti a posizioni relative. I punti, invece, descrivono la posizione assoluta di un oggetto. In realtà i due elementi, anche se concettualmente distinti, sono molto simili dal punto di vista matematico. Infatti, se consideriamo di applicare un vettore all'origine di un piano cartesiano. Dire che il vettore $\boldsymbol{v} = [x, y]$ si muove dall'origine alla posizione definita dal punto (x, y), non fa altro che mettere in relazione i due concetti espressi da un formalismo matematico simile.

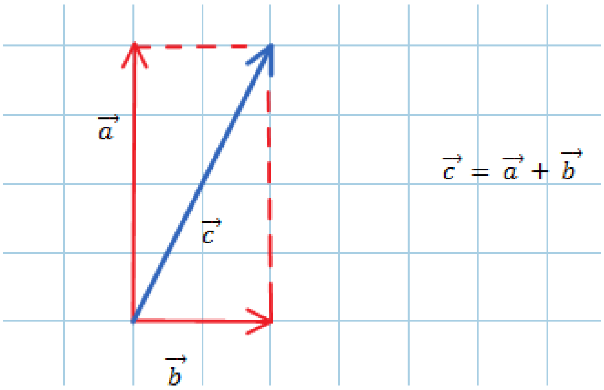
2.3 Operazioni sui vettori

Di seguito vengono presentate le operazioni tra vettori di comune applicazione nella computer grafica.

2.3.1 Somma di vettori

La somma di due o più vettori si può ottenere, geometricamente, attraverso due regole equivalenti tra loro.

- Regola del parallelogramma: la somma di due vettori applicati ad uno stesso punto corrisponde alla diagonale del parallelogramma che essi definiscono con le rispettive proiezioni.
- Metodo punta coda: la somma di due o più vettori applicati in sequenza corrisponde al vettore che congiunge il punto di applicazione del primo all'estremità dell'ultimo.



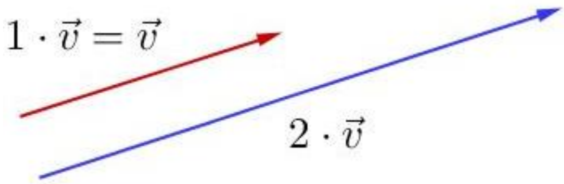
Formalmente si ricava, definiti i due vettori $\boldsymbol{a} = [a_1\ a_2 \dots a_n]$ e $\boldsymbol{b} = [b_1\ b_2 \dots b_n]$, che la loro somma corrisponde

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2 \quad \dots \quad a_n + b_n]$$

2.3.2 Prodotto di un vettore per uno scalare

Il prodotto di un vettore per uno scalare consiste semplicemente nella seguente relazione:

$$\propto \boldsymbol{v} = \propto [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] = [\propto v_1 \quad \propto v_2 \quad \dots \quad \propto v_n]$$



2.3.3 Norma di un vettore

In algebra lineare una norma è una funzione che assegna ad ogni vettore di uno spazio vettoriale, tranne lo zero, una lunghezza positiva. In pratica, trattasi di una funzione che determina la lunghezza del vettore.

La sua determinazione deriva dal teorema di Pitagora. Infatti, se consideriamo un sistema di riferimento a due dimensioni, le proiezioni del vettore sugli assi x e y, determineranno la lunghezza del vettore, in questo caso coincidente con l'ipotenusa del triangolo formatosi a seguito di tale proiezione. Definito $\boldsymbol{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt[2]{{v_1}^2 + {v_2}^2 + \cdots {v_n}^2}$$

2.3.4 Prodotto scalare

Il prodotto scalare, in algebra lineare, si esprime quanto segue

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

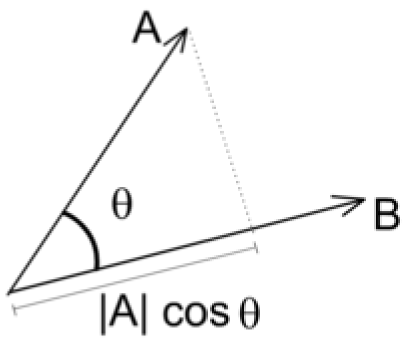
È possibile esplicitare l'operazione appena definita per i casi specifici nelle 2 e 3 dimensioni

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y$, in due dimensioni
- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, in tre dimensioni

Il prodotto scalare è commutativo, ciò vuol dire che vale la relazione $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

Esaminiamo l'interpretazione geometrica del prodotto scalare. Considerati due vettori ***a*** e ***b***, applicati nello stesso punto. Il prodotto scalare si definisce come

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

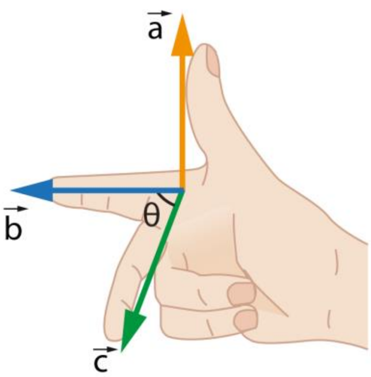


A livello geometrico, dato che il prodotto cartesiano dipende dal coseno di theta (l'angolo compreso tra i due vettori), si ricava che se il prodotto scalare di due vettori è pari a zero, allora tali vettori sono ortogonali. Se theta è acuto, il prodotto scalare sarà una quantità positiva. Se theta è ottuso, il prodotto scalare risulterà negativo.

È da notare che il risultato di un prodotto scalare è una quantità, non un vettore. In base al risultato del prodotto scalare, è possibile individuare informazioni di notevole utilità, in diversi contesti di applicazione, sull'orientazione reciproca di due vettori. Infatti, se il prodotto scalare è pari a zero, si ricava che i due vettori sono <u>ortogonali</u> tra loro, informazione di notevole importanza.

2.3.5 Prodotto vettoriale

Per prodotto vettoriale si intende un'operazione tra due vettori che avviene nello spazio tridimensionale, il cui risultato è un vettore.



Dati due vettori ***a*** e ***b***, il loro prodotto vettoriale, indicato con $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, è un vettore che ha:

- Direzione perpendicolare al piano che contiene i due vettori ***a*** e ***b***
- Verso dato dalla regola della mano destra, secondo cui se si pone il pollice nel verso del vettore ***a*** e l'indice nel verso di ***b***, il vettore $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ è uscente dal palmo della mano.
- Modulo pari all'area del parallelogramma generato dai due vettori ***a*** e ***b***

Formalmente il prodotto vettoriale si descrive come

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$$

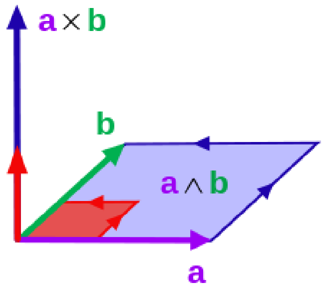
Dove $0 < \theta < \pi$ è l'angolo compreso tra ***a*** e **b**, ***n*** è un versore normale al piano formato dai due vettori, che fornisce la direzione del prodotto vettoriale. Si nota che $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$ rappresenta l'area del parallelogramma individuati dai due vettori.

Esplicitamente, definiti ***i,j*** e ***k*** i versori di una base ortonormale di R^3, il prodotto di $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ può essere scritto come il determinante di una matrice (le matrici verranno esaminate nel dettaglio nel capitolo 2):

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = det \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_x b_z - a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

A livello implementativo, poiché in ambito delle applicazioni multimediali quali i videogiochi le prestazioni sono una caratteristica chiave da tenere sempre ben in considerazione, è opportuno esplicitare la formula risultante, permettendo al calcolatore di trascurare calcoli e operazioni non necessarie.

Dal punto di vista geometrico, ricaviamo che il prodotto vettoriale permette di conoscere la natura dei vettori partecipanti nel prodotto. Infatti, se i due sono paralleli tra loro, il prodotto vettoriale sarà nullo, in quanto dipendente dal $\sin\theta$.



Un'ultima considerazione. Il prodotto vettoriale è definito solo nello spazio tridimensionale, trattasi di un caso particolare di semplificazione del prodotto esterno che vale per vettori in spazi ad n dimensioni.

Il prodotto esterno di due vettori è un bivettore, cioè un elemento di piano orientato. Dati due vettori ***a*** e **b**, il bivettore $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ è il parallelogramma orientato formato dai due vettori.

Con questo piccolo accenno al prodotto esterno, sorvoliamo l'argomento in quanto non è indispensabile per la trattazione matematica di un contesto di applicazione ai videogiochi, strettamente legato al mondo tridimensionale. Per approfondire l'argomento, si consiglia di consultare un testo di algebra lineare adatto.

2.4 Punti

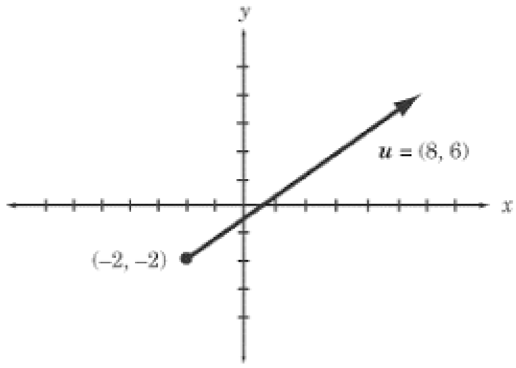
Affinché sia possibile parlare di vettori occorre definire il concetto di punto. I vettori, come specificato nel capitolo [1], rappresentano una direzione a partire da un punto di riferimento o di applicazione. Da ciò si ricava che privi di punto di applicazione, non si può parlare di vettore.

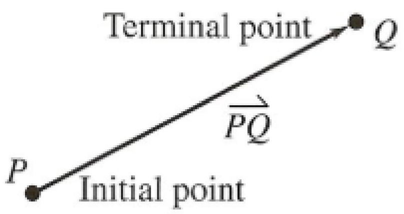
Punti e vettori rappresentano concetti differenti. Un punto definisce una posizione nello spazio. Un vettore determina una direzione a partire da un punto di riferimento, sia questo un oggetto posizionato in uno spazio o l'origine di un sistema di riferimento. I due concetti sono tra loro strettamente correlati.

2.4.1 Operazioni tra punti

Le operazioni tra punti sono strettamente legate al concetto di vettore.

- $Q = P + \boldsymbol{v}$, possiamo sommare un punto P ad un vettore **v** per ottenere un nuovo punto Q. Come specificato, il vettore **v** specifica la direzione entro quale muovere il punto P, indicando anche la quantità di spostamento.
- Allo stesso modo possiamo sottrarre due punti per ottenere un vettore, $\boldsymbol{v} = Q - P$. In base allo stesso ragionamento, sottraendo due punti, si individua la direzione di spostamento attraverso cui è possibile muoversi dal punto Q al punto P.





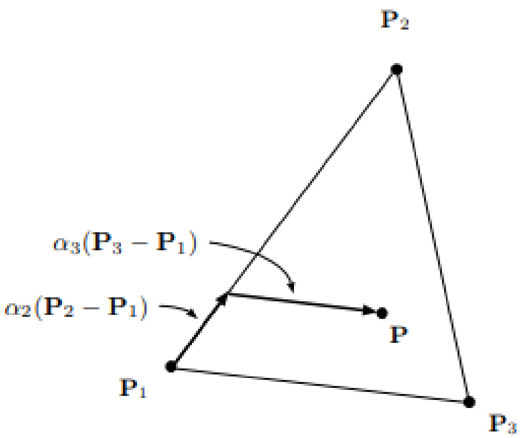
Si ricava che, definito il segmento PQ, l'espressione $P{+}\propto \boldsymbol{v}$ determina, al variare di $\propto$, un qualsiasi punto che poggia sul segmento PQ. Volendo essere più precisi, possiamo esplicitare la relazione

$P{+}\propto \boldsymbol{v} = P{+}\propto (Q - P)$. Appare evidente che per $\propto = 0$, si ricava il punto P, per $\propto = 1$, otteniamo il punto Q. Al contrario, per $0 < \propto < 1$, si ricava uno qualsiasi dei punti che giacciono sul segmento PQ.

Da quanto espresso, possiamo formalizzare il tutto con la seguente espressione.

$$\begin{cases} P = \propto_1 P_1 + \propto_2 P_2 + \cdots + \propto_n P_n \\ \propto_1 + \propto_2 + \cdots + \propto_n = 1 \end{cases}$$

Prendiamo in considerazione il triangolo in figura $\Delta P_1P_2P_3$, come possiamo descrivere un punto P interno al triangolo in relazione ai suoi vertici?



Cerchiamo di descrivere P in relazione ai vertici del triangolo.

Determiniamo i due vettori

$\boldsymbol{v_1} = P_2 - P_1$ e $\boldsymbol{v_2} = P_3 - P_1$

Notiamo che il punto P può essere definito in relazione a $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$.

$$P = P_1 + \propto_2 (P_2 - P_1) + \propto_3 (P_3 - P_1) = (1 - \propto_2 - \propto_3)P_1 + \propto_2 P_2 + \propto_3 P_3$$

Si ricava

$$\begin{cases} P = \propto_1 P_1 + \propto_2 P_2 + \propto_3 P_3 \\ \propto_1 + \propto_2 + \propto_3 = 1 \end{cases}$$

2.5 Implementazione

Nei paragrafi precedenti, è stata introdotta la notazione formale in grado di descrivere punti e vettori. Tali concetti sono gli elementi fondamentali per la trattazione di ambienti e oggetti in contesti virtuali, quali ambiti di simulazione digitale o videogiochi. La definizione di punto ci permette di descrivere e specificare la posizione di un oggetto nello spazio. Nell'ambito della grafica tridimensionale, tali punti consentiranno la definizione dei vertici delle superfici che combinate andranno a formare di modelli. In seguito, vedremo la coesistenza di diversi sistemi di riferimento nell'ambito dello stesso mondo, per il momento consideriamo tutti gli oggetti facciano riferimento ad un solo sistema di riferimento di origine nel punto zero. I punti, da quanto specificato dalle operazioni possibili, sono statici. Affinché sia possibile spostare un oggetto in una scena, occorre applicare una traslazione a tale oggetto in riferimento ad una direzione. È in questo contesto che si impiega il concetto di vettore, utili alla descrizione di una direzione, sia questa di movimento o di rotazione.

Come già menzionato, è scopo di questo libro quello di presentare un approccio implementativo degli argomenti trattati, allo scopo di tradurre i concetti matematici in rappresentazione in codice. Questo tipo di approccio ha il doppio vantaggio di rafforzare le informazioni apprese e di migliorare le tecniche di sviluppo e modellazione del lettore.

A livello implementativo, un concetto può essere implementato in svariati modi. Ogni metodologia ha propri pregi e difetti. Per esempio, esistono implementazioni orientate alle prestazioni, fondamentali in contesti multimediali come quello dei videogiochi. Nel nostro caso, ho pensato di adottare un approccio basato sulla modellazione e sull'astrazione dei concetti. Il codice prodotto non sarà performante al meglio, ma si presenta una tipologia di implementazione basata sul ragionamento e sull'astrazione delle interfacce. Si farà largo utilizzo di programmazione orientata ai template ed in particolare si implementeranno algoritmi funzionali e compatibili con casistiche ed elementi di n dimensioni possibili.

2.5.1 Implementazione di un punto

Abbiamo parlato di sistemi di riferimento a n dimensioni. Anche se il campo della computer grafica o dei videogame è generalmente orientato alle due, massimo tre dimensioni, ci occuperemo in questo paragrafo di modellare una classe generica per la definizione di punti di n dimensioni. Faremo largo utilizzo di template, in particolare andremo a definire, a compile time, l'implementazione specifica per il caso bidimensionale e tridimensionale.

```
template <std::size_t N, typename T>
struct base_point
{
	// vector size
	const std::size_t length = N;

	// store data into a managed array
	std::array<T, N> data;

	// default constructor
	base_point() {
		data.fill(T{});
	}

	// this constructor fill all components with the same value
	base_point(const T value) {
		data.fill(value);
	}

	// ....
```

```
}
```

Questo frammento di codice definisce la classe base per la definizione di punti. L'utilizzo della programmazione di classi basate su template, in questo caso ci permette di estendere la stessa definizione al fine di definire tipologie di punti specifiche per tipo di dato e dimensione.

```
// order 2 point
template<typename T>
struct base_point2 : public base_point<2, T>
{
	// ...
};

// order 3 point
template<typename T>
struct base_point3 : public base_point<3, T>
{
	// ...
};

// point types
typedef base_point2<float> point2;
typedef base_point3<float> point3;

typedef point2 fpoint2;
typedef point3 fpoint3;

typedef base_point2<double> dpoint2;
typedef base_point3<double> dpoint3;

typedef base_point2<int> ipoint2;
typedef base_point3<int> ipoint3;

typedef base_point2<unsigned int> upoint2;
typedef base_point3<unsigned int> upoint3;
```

2.5.2 Implementazione del concetto di vettore

3. Matrici

Al fine di presentare il concetto di vettore, sono già stati introdotti alcune notazioni ed informazioni sulle matrici, di seguito mi occuperò di completarne la spiegazione.

In algebra lineare, una matrice è una tabella ordinata di elementi. Sono largamente utilizzate per la loro capacità di rappresentare in maniera utile e coincisa diversi oggetti matematici, basti considerare che le matrici possono essere adoperati per rappresentare sistemi lineari.

Una matrice è caratterizzata da un numero di righe n e di colonne m. Quando $n = m$, la matrice si dice quadrata. Di seguito è presentata una matrice 2x3.

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Come per i vettori, anche le matrici vengono rappresentate con lettere in grassetto, prediligendo lettere in maiuscolo.

Gli elementi che compongono la matrice, vengono identificati utilizzando la notazione *ij*, dove i identifica l'indice di riga e j, rispettivamente, di colonna. In tal caso, una matrice di dimensione $n \times m$, si può descrivere formalmente come:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,m} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

Nel caso in cui si abbia una matrice quadrata, gli elementi di indice $i = j$, vengono detti elementi della diagonale principale della matrice. Una matrice avente elementi pari a zero, eccetto per quelli costituenti la diagonale principale, viene detta <u>matrice diagonale</u>.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sulla diagonale principale, in tal caso, possono presentarsi anche uno o più zeri, l'importante è che resti almeno un elemento diverso da zero.

Si definisce matrice identità, quella matrice avente tutti gli elementi pari a zero, eccetto per la diagonale principale, costituita da tutti uno.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1 Operazioni

3.2 Trasformazioni

Le applicazioni della computer grafica si occupano di ricreare ambientazioni reali su schermo. Significa che milioni di oggetti possono intervenire in tale processo, in quanto ogni scena è composta da diversi di questi. Ognuno di questi oggetti è descritto in termini di posizione, rotazione e dimensione. Inoltre, è da considerare che la scena può anche essere dinamica, il che implica che bisogna prevedere metodologie e meccanismi di grado di gestire lo spostamento, la rotazione, il ridimensionamento dei diversi oggetti.

Il metodo più veloce, per il calcolatore, per la trattazione di queste informazioni consiste nel rappresentare le informazioni spaziali sotto forma di matrici. Un oggetto posizionato sull'origine di un determinato sistema di riferimento, di conseguenza, presenterà una matrice identità.

In questo capitolo andremo ad utilizzare tutti gli argomenti presentati, punti, vettori, matrici e sistemi di riferimento verranno adoperati per la descrizione di una generica scena. In particolare, verrà descritto come le matrici vengono usate a tale scopo.

Prima di tutto, le matrici devono avere stesso ordine affinché possano essere moltiplicate tra loro. Il prodotto tra matrici è l'operazione che più ha importanza in questo contesto. Come già menzionato e come verrà spiegato in seguito, nella computer grafica si utilizzano matrici di dimensione 4x4. Anche i vettori possono essere espressi in forma matriciale, come spiegato nel capitolo sui vettori.

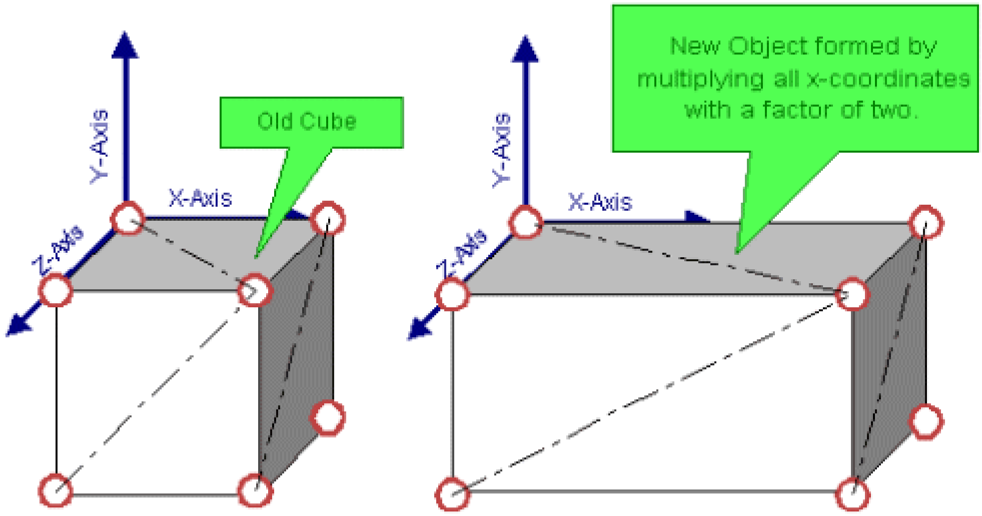
È possibile individuare diverse forme canoniche di matrici che descrivono un particolare stato nello spazio. Tali matrici possono essere utilizzate per descrivere e determinare lo stato fisico di un qualunque oggetto nella scena. In seguito, verranno presentati casi tridimensionali.

3.2.1 Matrice di dimensionamento

La matrice di dimensionamento viene utilizzata per scalare o ridurre le dimensioni di un oggetto. Se il dimensionamento è uguale in tutte le direzioni specificate dal sistema di riferimento scelto, allora si dirà che il ridimensionamento è uniforme. Altrimenti, si parla di dimensionamento non uniforme.

Si definisce matrice di ridimensionamento la seguente

$$\boldsymbol{M}_{scale}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}$$



Consideriamo di scalare un vettore

$$\boldsymbol{v}' = s * \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} * \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s * v_x \\ s * v_y \\ s * v_z \end{bmatrix}$$

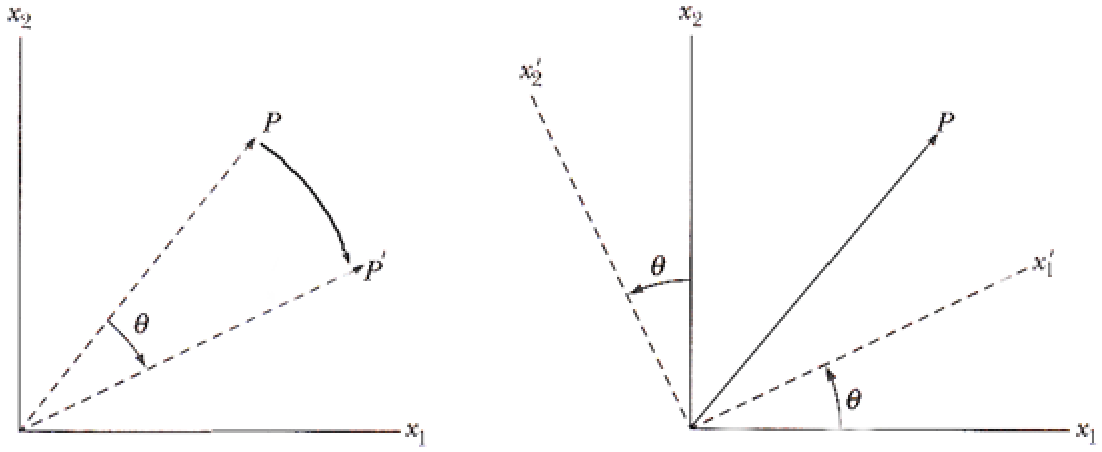
3.2.2 Matrice di rotazione

Le rotazioni sono una delle operazioni più comunemente utilizzate nella computer grafica. Se prendiamo in considerazione la camera, questa deve spostarsi e ruotare in direzione dell'oggetto puntato, altrimenti vedremmo oggetti d non interesse.

Il modo più semplice per applicare una rotazione consiste nello scomporre tale rotazione in proiezioni sugli assi del sistema di riferimento. In tal caso, la rotazione completa lungo una direzione scelta arbitrariamente sarà data dalla composizione dei contributi definiti dalle singole rotazioni lungo gli assi del sistema. In generale, per un sistema di riferimento tridimensionale si definiscono tre matrici di rotazione note, rispettivamente lungo gli assi x, y e z. Esaminiamo dapprima la rotazione, in forma analitica, lungo l'asse z.

Supponiamo di voler roteare un vettore ***v*** di un angolo θ, lungo l'asse z.

$$\begin{cases} v \cos \varphi = x \\ v \sin \varphi = y \end{cases}$$



Dato che ***k*** è parallelo all'asse di rotazione z, la sua componente non varierà durante la rotazione.

$$\begin{cases} x' = v * \cos(\theta + \varphi) = v\cos\theta\sin\varphi - v\sin\theta\cos\varphi \\ y' = v * \sin(\theta + \varphi) = v\sin\theta\cos\varphi + v\cos\theta\sin\varphi \end{cases}$$

Si ricava

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Da cui si ricava la matrice di rotazione lungo l'asse z

$$\boldsymbol{M}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le matrici di rotazione lungo gli assi x e y si ricavano di conseguenza

$$\boldsymbol{M}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Come menzionato precedentemente, affinché sia possibile eseguire una rotazione lungo un asse arbitrario occorre scomporre tale direzione di rotazione e proiettarla lungo gli assi noti del sistema di riferimento, definendo la rotazione come il risultato del prodotto delle singole rotazioni lungo tali assi noti. Quindi, moltiplicando tra loro le matrici di rotazione note appena viste, è possibile definire rotazioni arbitrarie. Ci rendiamo conto di trattare una operazione onerosa dal punto di vista computazionale, in quanto diversi prodotti tra matrici possono essere coinvolti. Vedremo che esistono metodologie di rotazioni più efficienti, per esempio nell'ambito tridimensionale vengono utilizzati i quaternioni.

3.2.3 Matrice di traslazione

Le traslazioni sono state lasciate per ultime in quanto necessitano l'introduzione di alcuni concetti fondamentali nel campo della computer grafica.

Di base una traslazione di un punto consiste nell'incrementare le coordinate di tale di una generica quantità. Formalmente parliamo di una operazione del tipo

$$p_x' = p_x + t_x$$
$$p_y' = p_y + t_y$$
$$p_z' = p_z + t_z$$

3.3 Coordinate Omogenee

4. Quaternioni

5. Proiezione perspettiva