Funciones | MRC

Víctor Peinado (v.peinado@filol.ucm.es)

29-30 de octubre de 2015

Referencias

- (Partee, *et al.*, 1990, chap. 2) [1]
- Wikipedia: Producto cartesiano [2]
- Wikipedia: Relación matemática [3]
- Wikipedia: Función matemática [4]

[1] Partee, B.; ter Meulen, A.; Wall, R. *Mathematical Methods in Linguistics* Studies in Linguistics and Philosophy. Springer. 1990. `http://books.google.es/books?id=qV7TUuaYcUIC`

[2] Producto cartesiano `http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_cartesiano`

[3] Relación matemática `http://es.wikipedia.org/wiki/Relaci/%C3/%B3n_matem/%C3/%A1tica`

[4] Función matemática `http://es.wikipedia.org/wiki/Funci/%C3/%B3n_matem/%C3/%A1tica`

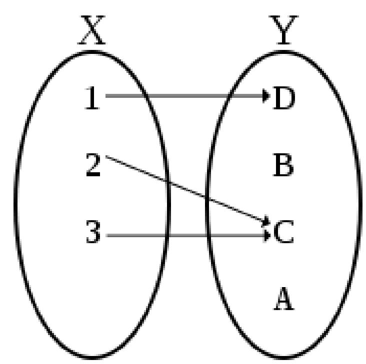
Funciones

Una **función** es un tipo especial de relación que cumple las siguientes dos condiciones:

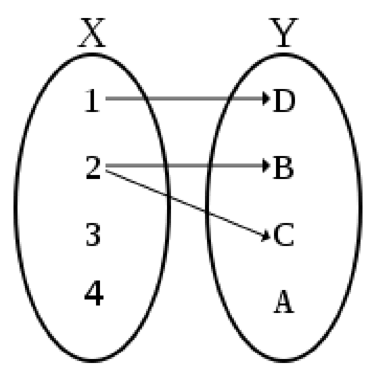
1. todos y cada uno de los elementos del dominio tienen correspondencia en el rango.
2. cada elemento del dominio se corresponde con uno solo de los elemento del rango.

Una **función** es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ si en la que todos y cada uno de los miembros de X aparecen una sola vez como primer coordenada del conjunto de pares ordenados.

La siguiente relación es una función.



Ésta, en cambio, no lo es.



Ejemplos de funciones

Sean los conjuntos $A = \{a, c, b\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Las siguientes relaciones sí son funciones:

$$P = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$$

$$Q = \{(a, 4), (b, 4), (c, 4)\}$$

$$R = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2)\}$$

Por el contrario, las siguientes relaciones no son funciones. ¿Sabrías decir por qué?

$$S = \{(a, 1), (b, 2)\}$$

$$T = \{(a, 2), (b, 1), (c, 3), (c, 4)\}$$

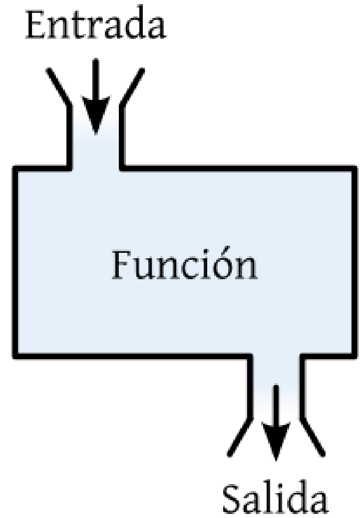
$$V = \{(a, 1), (a, 2), (b, 3)\}$$

Terminología

Como las funciones son un tipo especial de relaciones, mucha de la terminología es común. Una función que es un subconjunto de $A \times B$ es una función *desde A hasta B*. Una función que sea subconjunto de $A \times A$ es una *función en A*.

Utilizamos la notación $F : A \to B$ para indicar *F es una función de A a B*.

Fuera de las matemáticas, es habitual también utilizar las palabras *transformación*, *mapeo* y *correspondencia* como sinónimos de **función**. De hecho, en programación se suelen simbolizar las funciones con la metáfora de una máquina o *caja negra* que transforma argumentos de entrada en valores de salida.



Cuando hablamos de funciones fuera del campo de las matemáticas, los elementos del dominio se suelen denominar **argumentos** y su correspondencia en el rango **valores**.

De los ejemplos de la página anterior, podemos decir que la función P asigna el valor 3 al argumento c. Denotamos este hecho con la expresión $P(c) = 3$.

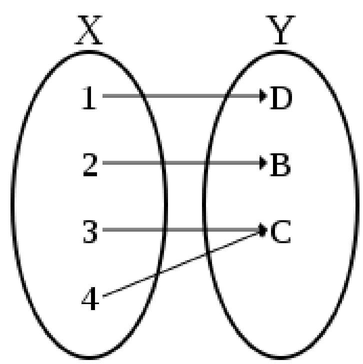
Tipos de funciones

*Funciones suprayectivas (*onto*) y no suprayectivas (*into*)*

A veces resulta interesante distinguir si el rango de una función F de X a Y es igual a Y o no. Decimos que una función es **suprayectiva** (o sobreyectiva, epiyectiva, exhaustiva. . .) cuando todos los elementos del rango (el conjunto Y) están asignados a algún miembro del dominio (el conjunto X).

Por el contrario, decimos que una función es **no suprayectiva** cuando existe algún elementos del rango (el conjunto Y) que no está asignado a alguno de los miembros del dominio (el conjunto X).

suprayectiva (*onto*)



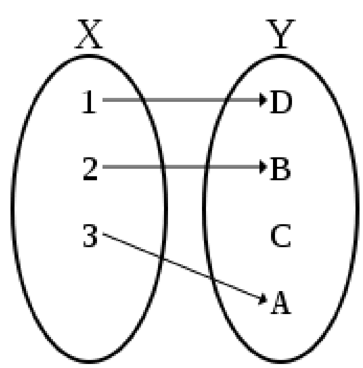
*Funciones inyectivas (*one-to-one*)*

Una función $F : X \to Y$ es una **inyectiva** (*one-to-one*) cuando no hay ningún miembro de Y asignado a más de un miembro de X.

Por ejemplo, la función $F(x) = x + 1$ es inyectiva ya que no existe ningún valor que pueda asignarse a más de una x.

Sin embargo, $G(x) = x^2$ no lo es, ya que p. ej., el valor 4 puede asignarse a $G(2)$ y a $G(-2)$.

inyectiva (*one-to-one*)

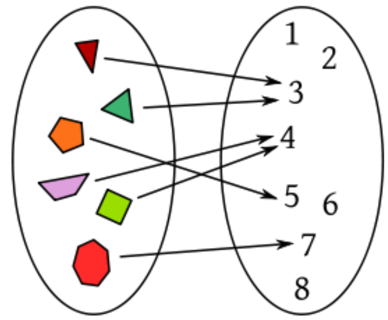


Funciones no inyectivas (many-to-one)

Por el contrario, decimos que una función $F : X \to Y$ es **no inyectiva** cuando existe algún miembro de Y que está asignado a más de un miembro de X.

El diagrama muestra una función entre un conjunto de polígonos y números enteros, de manera que a cada polígono le corresponde el número de lados que tiene. Alguno de los enteros está emparejado con más de un polígono distinto.

no inyectiva (*many-to-one*

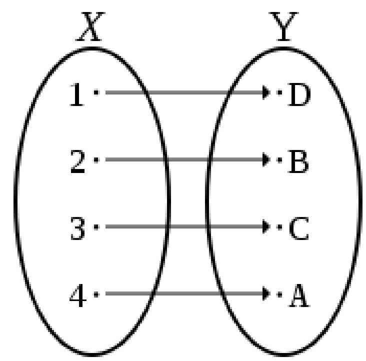


Funciones biyectivas (suprayectivas + inyectivas)

Una función $F : X \to Y$ que sea a la vez suprayectiva e inyectiva se denomina **función biyectiva**.

Este tipo de funciones son de especial interés, ya que sus inversas son también funciones. En este caso, $F : Y \to X$ es también una función biyectiva.

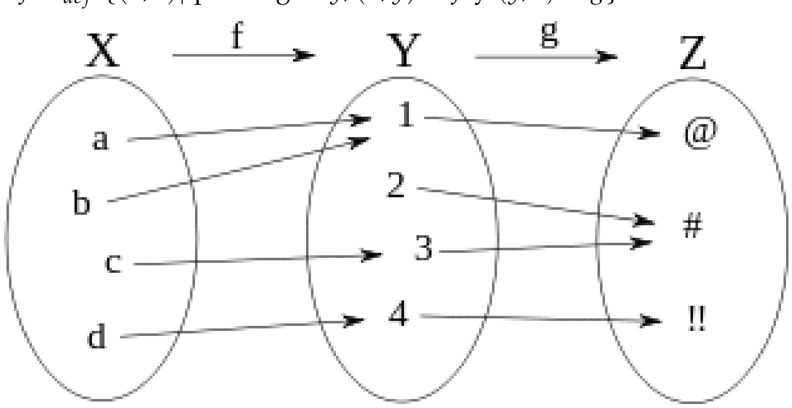
biyectiva



Función compuesta

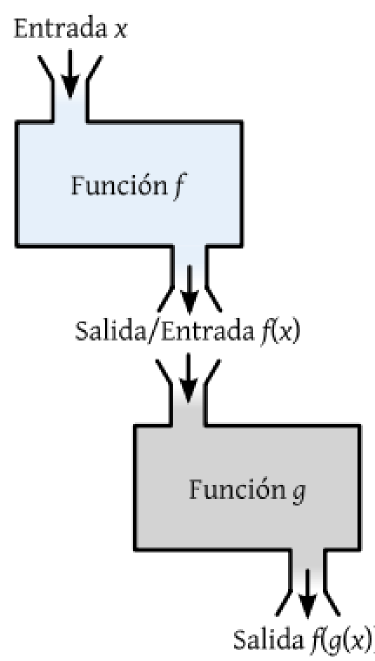
Dadas dos funciones, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, podemos formar una nueva función de X a Z, llamada **función compuesta** o **composición** de f y g y escrita $g \circ f$.

La función compuesta se puede definir como:
$g \circ f =_{def} \{(x,z)|$ para algún $y, (x,y) \in f$ y $(y,z) \in g\}$



En el ejemplo del diagrama, $(g \circ f)(c) = g(f(c)) = \#$.

Volviendo a la metáfora de la máquina o la caja negra, podemos representar la función tal y como se muestra a la derecha.



Función identidad

Una función del tipo $F : A \to A$ definida como $F = \{(x,x)|x \in A\}$ se denomina **función identidad**, escrita como id_A. Esta función simplemente mapea todo elemento de A consigo mismo. La función composición entre cualquier función y la función identidad da como resultado la propia función identidad:

$$id_A \circ F = F \circ id_A = F$$

Para cualquier función $F : A \to B$ que sea biyectiva, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. La función compuesta de F con su inversa es igual a la función identidad de A: $(F^{-1} \circ F) = id_A$
2. La función compuesta de la inversa de F con F es igual a la función identidad de B: $(F \circ F^{-1}) = id_B$

Composición de relaciones

La definición de composición no se limita únicamente a funciones, sino que se puede generalizar y extender a las relaciones. Dadas las relaciones $R \subseteq AxB$ y $S \subseteq BxC$, la relación compuesta de R y S, escrita $S \circ R$ se puede definir como:

$S \circ R =_{def} \{(x,z)|$ para algún $y, (x,y) \in R$ y $(y,z) \in S\}$

Para cualquier relacion $R \subseteq AxB$

- La relación compuesta de R con la función/relación identidad de B es igual a R: $id_B \circ R = R$
- La relación compuesta de la función/relación identidad de A con R es igual a R: $R \circ id_A = R$

Para cualquier relacion de tipo *uno-a-uno* $R : A \to B$

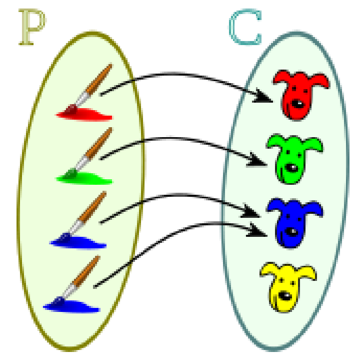
- La relación compuesta de R con su inversa es un subconjunto de la relación identidad de A: $R^{-1} \circ R \subseteq id_A$
- La relación compuesta de la inversa de R con R es un subconjunto de la relación identidad de B: $R \circ R^{-1} \subseteq id_B$

Propiedades de las relaciones

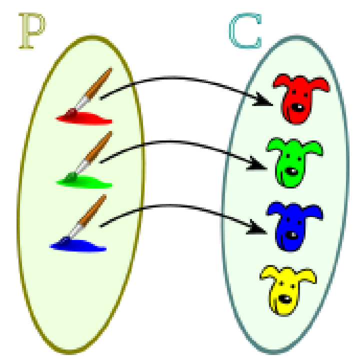
Si analizando más detenidamente las relaciones binarias —pares ordenados que relacionan un elemento de un primer conjunto con otro elemento de un segundo conjunto— que hemos visto hasta ahora, podemos identificar distintas propiedades, según los pares ordenados que formen parte de dicha relación, a saber:

- reflexividad
- simetría
- transitividad

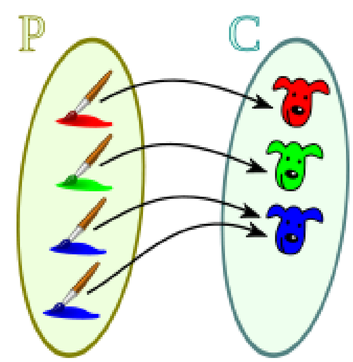
función no inyectiva y no suprayectiva



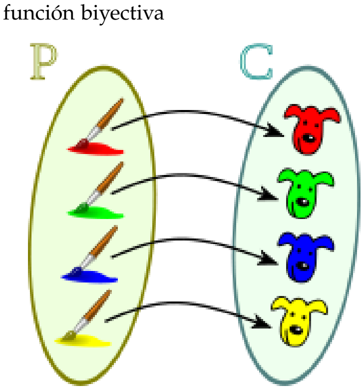
función inyectiva y no suprayectiva



función no inyectiva y suprayectiva



función biyectiva



- conexión

Todas estas propiedades se aplican a relaciones en un conjunto, como en AxA, nunca en relaciones desde A hasta B donde $B \neq A$.

Reflexividad

Sea A un conjunto y R una relacion en A, decimos que R es **reflexiva** si y solo si R contiene pares ordenados de la forma (x, x) para todos los x elementos de A.

P. ej., sea $A = \{1, 2, 3\}$:

La relación $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 1)\}$ en A es reflexiva porque contiene los pares ordenados $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ para todos los miembros de A

Es irrelevante que tenga otros pares con la forma (x, y).

Otra forma de definir reflexividad es diciendo que R es reflexiva en A si y solo la relación identidad de A es un subconjunto de R: $id_A \subseteq R$.

La relación *celebra el cumpleaños el mismo día* es reflexiva para el conjunto H de los seres humanos.

Por otro lado, una relación que no cumpla la condición para ser reflexiva se llama **no reflexiva**. Por ejemplo, la relación $R_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$ en A es **no reflexiva** porque no contiene el par ordenado de la forma (x, x) para uno de los elementos de A, concretamente 3.

Cuando una relación no contienen ningún par de la forma (x, x) se denomina **relación irreflexiva**. La relación $R_3 = \{(2, 1), (2, 3)\}$ es irreflexiva en A.

Nótese que la irreflexividad es una condición más fuerte que la no reflexividad: irreflexiva implica no reflexiva, pero al revés no existe tal implicación. Dicho de otro modo, una relación R en A es no reflexiva si y solo si $id_A \nsubseteq R$, pero es irreflexiva si y solo si $R \cap id_A = \varnothing$

La relación *es más alto que* es irreflexiva (y, por lo tanto, no reflexiva) en el conjunto H de los seres humanos. La relación *mantiene económicamente a* es no reflexiva, pero no irreflexiva.

Hay gente que mantiene económicamente a sí misma y a otras personas. Hay gente que no es económicamente independiente.

Simetría

Sea A un conjunto y R una relacion binaria en A, decimos que R es **simétrica** si y solo si para cada par ordenado de la forma (x, y) en R existe también otro par de la forma (y, x) que también es elemento de R.

Esta definición no requiere que R contenga todos los pares ordenados incluidos en $A \times A$. Una relación puede ser simétrica aunque no contenga pares de la forma (x, y) para algunas x y algunas y: $R \subset A \times A$

P. ej., sea $A = \{1, 2, 3\}$, las siguientes relaciones son simétricas:

$\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

$\{(1, 3), (3, 1)\}$

$\{(1, 1)\}$

La relación *es primo de* es una relación simétrica en el conjunto H de los seres humanos.

Cuando no se cumple la condición de simetría, es decir, si existe en R algún par ordenado del tipo (x, y) y no existe el par (y, x) la relación se denomina **no simétrica**

P. ej., sea $A = \{1, 2, 3\}$, las siguientes relaciones son no simétricas:

$\{(1, 2), (2, 3)\}$

$\{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3)\}$

La relación *es hermana de* es no simétrica en el conjunto H de los seres humanos, aunque sí es simétrica en el subconjunto de las mujeres.

Por último, si se da el caso en que la relación R no contiene ningún par (y, x) para ningún par de la forma (x, y), entonces R se denomina **relación asimétrica**.

P. ej., las siguientes relaciones son asimétricas: $\{(1, 2), (2, 3)\}, \{(2, 3)\}$

Una relación R se denomina **antisimétrica** cuando se da que, si dos elementos x e y se relacionan entre sí, entonces estos elementos son iguales: si existen pares con la forma (x, y) e (y, x) esto implica que $x = y$.

No es necesario que $(x, x) \in R$ para todo $x \in A$. O dicho de otro modo: la relación no necesita ser reflexiva para ser antisimétrica.

La relación *ser más alto que* es antisimétrica dado que el hecho de que x sea más alto que y y que y sea al mismo tiempo más alto que x es imposible.

Antisimétrica no es opuesto a simétrica. De hecho, existen relaciones que son simétricas y antisimétricas al mismo tiempo, como la igualdad matemática.

Transitividad

Una relación R se denomina **transitiva** si y solo si para todos los pares ordenados con la forma (x, y) e (y, z) en R, existe un tercer par en R con la forma (x, z). P. ej., la relación $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ es transitiva.

No es necesario que x, y y z sean elementos distintos. La siguiente relación también es transitiva: $\{(2, 2)\}$, donde $x = y = z = 2$.

La relación *es ancestro de* es transitiva en el conjunto H de los seres humanos.

Cuando una relación no cumple la definición de transitividad se denomina **no transitiva**. P. ej., la relación $\{(2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ es no transitiva.

Por el contrario, la relación $\{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ sí lo es.

Si para ningún par de pares con la forma (x, y) y (y, z) que sean elementos de R existe el par ordenado (x, z) entonces la relación se denomina **intransitiva**. Si una relación es intransitiva es también no transitiva, pero no al revés. P. ej., las siguientes relaciones son

intransitivas:
$\{(1,2),(2,3)\}$
$\{(3,1),(1,2),(2,3)\}$
$\{(3,2),(1,3)\}$
La relación *es madre de* es intransitiva en el conjunto de H los seres humanos.

Conexión

Una relación R se denomina **conexa** si y solo si para cada dos elementos distintos x e y que son elementos de A, o bien existe un par (x,y) en R, o bien existe un par (y,x) en R, o bien existen ambos.

La definición de relación conexa —igual que la de relación reflexiva— se refiere a todos los miembros del conjunto A. Es más, los pares (x,y) tienen que ser necesariamente elementos distintos. El hecho de que existan pares con la forma (x,x) es irrelevante para que la relación sea considerada conexa o no.

Sea $A = \{1,2,3\}$, las siguientes relaciones son conexas:
$\{(1,2),(3,1),(3,2)\}$
$\{(1,1),(2,3),(1,2),(3,1),(2,2)\}$
Sin embargo, las siguientes relaciones en A no son conexas:
$\{(1,2),(2,3)\}$
$\{(1,3),(3,1),(2,2),(3,2)\}$

En la primera, falta alguno de los pares $(1,3)$ o $(3,1)$. En la segunda, $(1,2)$ o $(2,1)$.

Ejemplos de relaciones y sus propiedades

La relación *es padre de* en el conjunto H formado por todos los seres humanos es:

- irreflexiva: nadie es su propio padre.
- asimétrica: si x es el padre de y, y no puede ser el padre de x.
- intransitiva: si x es el padre de y, e y es el padre de z, x es el abuelo de z, pero no puede ser su padre.
- no conexa: existen en H individuos x e y que no están relacionados porque ninguno es padre del otro.

La relación *mayor que* en el conjunto Z formado por los enteros positivos $\{1,2,3,4,\ldots\}$ es:

- irreflexiva: ningún número es mayor que sí mismo.
- asimétrica: si $x > y$, entonces $y \not> x$.
- transitiva: si $x > y$ e $y > z$, entonces $x)z$.
- conexa: para cualquier par de enteros distintos, o bien $x > y$ o bien $y > x$.

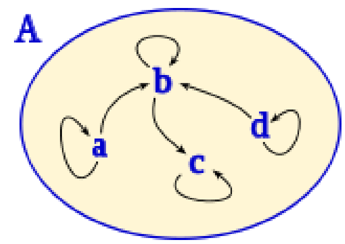
La relación *tiene la misma edad que* en el conjunto H formado por todos los seres humanos es:

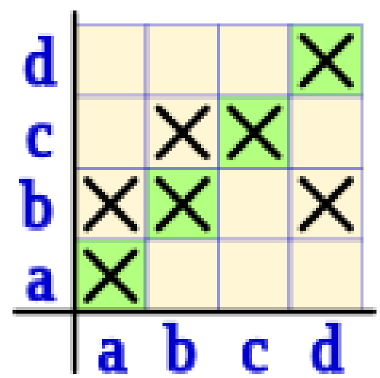
- reflexiva: todo el mundo tiene la misma edad que sí mismo.
- simétrica: si x tiene la misma edad que y, entonces y tiene la misma edad que x.
- transitiva: si x e y tienen la misma edad, e y tiene la misma edad que z, entonces x tiene la misma edad que z.
- no conexa: para en H individuos x e y que no están relacionados porque no tienen la misma edad.

Diagramas de relaciones

A menudo es más sencillo asimilar las nociones de reflexividad, simetría y transitividad cuando las representamos como diagramas.

$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c),(d,b)\}$





Como en los diagramas de Venn, los miembros del conjunto se representan como puntos etiquetados. Si el elemento a está relacionado con el elemento b, dibujamos una flecha que conecta los puntos correspondientes.

Queda claro en este diagrama que R es una relación reflexiva en A, dado que todo elemento del conjunto A se relaciona consigo mismo.

Este diagrama también puede representarse en coordenadas cartesianas, como se muestra a la derecha:

- En el eje horizontal (ordenadas) representamos el conjunto inicial, de izquiera a derecha.
- En el eje vertical (abscisas) representamos el conjunto final, de abajo a arriba.
- Si un determinado par pertenece a la relación se coloca una cruz en la casilla correspondiente; si no, se deja en blanco.

La diagonal principal del cuadro, marcada en verde, corresponde a los pares ordenados en los que sus dos elementos son iguales. Si todas las casillas de esta diagonal tienen aspas, como en el ejemplo, la relación es reflexiva.

Ejercicios

Ejercicios 1-4 de (Partee, *et al.*, 1990, chap. 2) y ejercicios 1, 3, 5 de (Partee, *et al.*, 1990, chap. 3). .