

Relaciones | MRC

Víctor Peinado (v.peinado@filol.ucm.es)

30 de octubre - 5 de noviembre de 2015

Referencias

- (Partee, *et al.*, 1990, chap. 2) ¹
- Wikipedia: Producto cartesiano ²
- Wikipedia: Relación matemática ³

Pares ordenados

En los conjuntos que hemos visto hasta ahora no existe ningún tipo de orden entre sus miembros. Sin embargo, podemos utilizar conjuntos ordinarios para definir un **par ordenado**.

Los pares ordenados se escriben (a, b) y en ellos el elemento a se considera el primero y b se considera el segundo. Los pares ordenados se definen del siguiente modo:

$$(a, b) =_{\text{def}} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

El primer elemento del par (a, b) es el único elemento del conjunto unitario $\{a\}$, mientras que el segundo elemento del par es el elemento del conjunto $\{a, b\}$ que no es miembro de $\{a\}$.

Pares ordenados y n -tuplas

Estos pares son ordenados, lo que implica que, en general, $(a, b) \neq (b, a)$.

La definición de pares ordenados se puede extender para definir tripletas ordenadas o cualquier tupla de longitud n .

$$(a, b, c) =_{\text{def}} ((a, b), c)$$

De un modo similar, podemos generalizar y definir la tripla (a, b, c) como:

$$(a, b, c) =_{\text{def}} \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$$

Producto cartesiano

Si tenemos dos conjuntos A y B , podemos formar pares ordenados tomando un elemento de A como primer miembro del par y un elemento de B como segundo miembro. El **producto cartesiano** de

¹ Partee, B.; ter Meulen, A.; Wall, R. *Mathematical Methods in Linguistics*. Studies in Linguistics and Philosophy. Springer. 1990. <http://books.google.es/books?id=qV7TUuaYcUIC>

² Producto cartesiano http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_cartesiano

³ Relación matemática http://es.wikipedia.org/wiki/Relaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica

¿Por qué digo *en general*? Porque $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{b\}, \{b, a\}\}$ si y solo si $a = b$.

A y B , escrito $A \times B$ es el conjunto formado por todos estos pares. La definición de producto cartesiano es:

$$A \times B =_{\text{def}} \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Veamos algunos ejemplos. Sean $K = \{a, b, c\}$ y $L = \{1, 2\}$:

$$K \times L = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$L \times K = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$L \times L = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Por definición, el producto cartesiano de cualquier conjunto con el conjunto vacío es el conjunto vacío.

El número total de pares ordenados que tiene un producto cartesiano se calcula multiplicando las cardinalidades de los conjuntos. En este caso $|K| = 3$ y $|L| = 2$, $3 \times 2 = 6$ pares ordenados.

$$K \times \emptyset = \emptyset$$

Relaciones

Tenemos una idea intuitiva de la definición de **relación** como la clase de conexión que se establece (o que no se establece) entre objetos. Por ejemplo, la relación *progenitor* se establece entre una madre o un padre y cualquiera de sus hijos, pero no entre un hijo y otro.

Los verbos transitivos son un ejemplo claro que encontramos en las lenguas naturales de conexiones entre diferentes entidades que pueden equipararse a relaciones. Cuando usamos el verbo *comer* de manera transitiva, podemos entender un tipo de relación que se establece entre pares de objetos, la primera realiza la acción y la segunda es comida: *Juan come manzanas*.

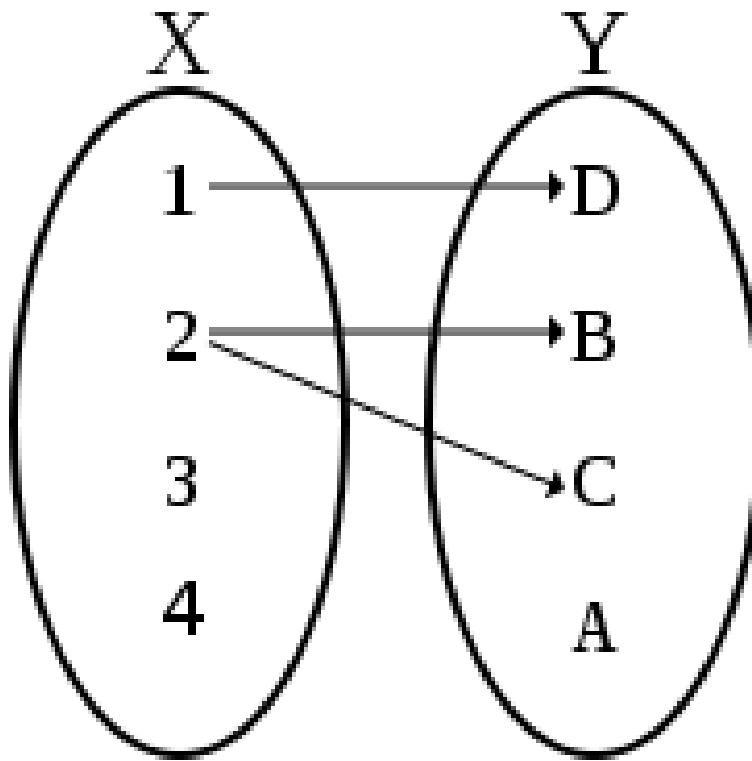
Desde el punto de vista matemático, vamos a definir relación como una operación realizada sobre conjuntos que nos permite vincular un elemento de un conjunto con otro elemento del mismo conjunto o de uno diferente. Y escribimos Rab o aRb para denotar la relación R que se establece entre los elementos a y b .

También podemos escribir $R \subseteq A \times B$ para denotar una relación que se establece entre los elementos del conjunto A y el conjunto B , o mejor, una relación desde A a B .

En toda relación $R : A \rightarrow B$, los conjuntos A y B involucrados reciben nombres especiales. Llamamos **dominio** a los elementos de A , y **rango** a los elementos de B .

La relación R entre los conjuntos X y Y se denota como $R : X \rightarrow Y$ y puede representarse gráficamente a través de diagramas de Venn y flechas.

¡Ojo! Una relación R desde A hasta B puede entenderse como un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.



El dominio se corresponde con el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y el rango como el conjunto $Y = \{A, B, C, D\}$. Las flechas representan la relación $R = \{(1, D), (2, B), (2, C)\}$.

A continuación, imaginemos una relación a la que podamos dar una semántica fácil de interpretar. Imaginemos un conjunto H que contiene a todos los habitantes del planeta. Pensemos en una relación cuya semántica podemos verbalizar en lenguaje natural como *es madre de*. Pues bien, podemos definir una relación sobre el conjunto de los seres humanos $R : H \rightarrow H$ como un conjunto de pares ordenados sobre los elementos de H , de manera que el primer elemento de cada par sea una madre, y el segundo elemento del par sea un padre.

Recuerda que esta relación es un subconjunto estricto del producto cartesiano $R \subset H \times H$. Todo el mundo tiene madre, por lo tanto todos los miembros del rango aparecerán representados como segundos miembros del par. Pero no todos los miembros de H son madres. Mi madre tiene una única madre pero tres hijos, por lo tanto:

- aparecerá como segundo elemento de un par: (mi abuela, mi madre); y
- aparecerá como primer elemento en tres pares distintos: (mi madre, mi hermana), (mi madre, mi hermano), (mi madre, yo)

En una relación, podemos encontrar un elemento del dominio con más de un elemento del rango.

Complemento de una relación

El **complemento de una relación** $R \subseteq A \times B$, escrito R' , está formado por todos los pares ordenados del producto cartesiano $A \times B$ que no están incluidos en la relación R . Formalmente, se define como:

$$R' =_{\text{def}} (A \times B) - R$$

Por lo tanto, el complemento de R contienen todos los pares ordenados del producto cartesiano que no son miembros de R .

Por cierto, como hemos visto con otros conjuntos, $(R')' = R$.

Inverso de una relación

El **inverso de una relación** $R \subseteq A \times B$, escrito R^{-1} , está formado por todos los pares ordenados que son elementos de R , pero con el orden de los elementos invertido.

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y sea R la relación *es mayor que* tal que $R \subseteq A \times A = \{(3, 2), (3, 1), (2, 1)\}$.

El inverso de R , $R^{-1} = \{(2, 3), (1, 3), (1, 2)\}$. Podemos expresar en lenguaje natural el significado de esta nueva relación como *es menor que*.

El complemento de R , $R' = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$, y podemos expresar en lenguaje natural el significado como *es menor o igual que*.

Si $R \subseteq A \times B$, entonces $R^{-1} \subseteq B \times A$, pero $R' \subseteq A \times B$.

Ejercicios

Ejercicio 1 de (Partee, *et al.*, 1990, chap. 2).