Lógica de Predicados | MRC

Víctor Peinado

3-4 de diciembre de 2015

Referencias

- (Partee, *et al.*, 1990, chap. 7) [1]
- Wikipedia: Lógica de Predicados [2]

[1] Partee, B.; ter Meulen, A.; Wall, R. *Mathematical Methods in Linguistics* Studies in Linguistics and Philosophy. Springer. 1990. `http://books.google.es/books?id=qV7TUuaYcUIC`

[2] Wikipedia: Lógica de Predicados `http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%B3gica_de_primer_orden`

La **lógica de predicados** o **lógica de primer orden** es un sistema formal diseñado para estudiar la inferencia en los lenguajes de primer orden. Estos lenguajes de primer orden son lenguajes formales que combinan el uso de cuantificadores, predicados y funciones cuyos argumentos pueden ser constantes o variables de individuo.

La lógica de primer orden es más potente que la lógica proposicional y tiene capacidad expresiva suficiente para definir prácticamente todas las matemáticas.

Si entendemos la lógica de predicados como un sistema lógico que permite la cuantificación de individuos, entonces su origen se remonta a la antigua Grecia y a Aristóteles. Sin embargo, es más habitual situar el origen de la lógica de primer orden tal y como la conocemos en el s. XIX y en los trabajos de Gottlob Frege, con aportaciones y demostraciones posteriores por parte de otros autores, ya en el s. XX: desde Bertrand Russel y Alfred North Witehead, hasta Kurt Gödel, Alonzo Church y Alan Turing.

Sintaxis

En lógica de predicados, la proposición mínima está formada por un **predicado** y un número determinado de **términos**.

Es habitual representar los predicados con letras mayúsculas y los términos con letras minúsculas. En estos ejemplos nosotros estamos representándolos con palabras completas, para que sea más sencillo de leer.

Veamos de manera informal cuáles son las reglas sintácticas de la lógica de predicados.

- La proposición $Humano(socrates)$ contiene un predicado *humano* y un término *socrates* y podemos interpretarla como la traducción de la oración *Sócrates es humano*. El predicado *Humano* decimos que es unario o tiene aridad 1 porque solo tiene un término.

- La proposición $Ama(juan, maria)$ está formada por el predicado *Ama* y dos términos: *juan* y *maria*. Trata de formalizar la oración *Juan ama a María* y, en este caso, el predicado es binario o tiene aridad 2, dado que necesita dos términos.

Es importante respetar la aridad de los predicados. Cuando utilizamos un predicado con un número de argumentos incorrecto, la proposición no es válida.

Por último, es importante notar que los predicados lógicos no tienen por qué representar predicados gramaticales. En la proposición $Humano(socrates)$, $Humano$ sí coincide con lo que podríamos entender como predicado de la oración *Sócrates es humano*. Pero en $Ama(juan, maria)$ estamos representando la relación que se establece entre un verbo transitivo, el sujeto y el objeto de la acción. Llevado al extremo, podríamos representar la oración *Juan ama a María* como $G(maria)$, donde G sería un predicado de aridad 1 representando la expresión *Juan ama*.

Tipos de términos

Hay dos tipos de **términos**:

- Por un lado, están las **constantes de invididuo** individuales que aparecen en los ejemplos anteriores: *socrates*, *juan* y *maria*. En la semántica de la lógica de predicados estas constantes denotan individuos específicos que se traducen, en nuestros ejemplos en lenguaje natural, como Sócrates, Juan y María.

- Por otro lado tenemos **variables de invididuo**. Cuando un predicado contiene una o varias variables, como en $Humano(x)$ o $Ama(x, y)$, decimos que estamos ante una **proposición abierta** o una **función proposicional**.

Para representar variables utilizamos letras minúsculas del final del alfabeto, típicamente v, w, x, y, z.

Cuantificadores

Estas proposiciones abiertas pueden convertirse en proposiciones *ordinarias* cuando utilizamos cuantificadores para delimitar su alcance. Cuando una variable aparece sin cuantificar, se denomina **variable libre**. Cuando aparece cuantificada, decimos que esa variable está **ligada**.

Tenemos dos tipos de cuantificadores:

- el **cuantificador universal** se denota como $\forall$ y se traduce en lenguaje natural como *para todo*, *todos*, *cada uno*

- el **cuantificador existencial** se denota como $\exists$ y se traduce en lenguaje natural como *existe algún*, *alguno*, *hay al menos uno, posiblemente otros*.

Escribimos estos cuantificadores junto a una o varias variables y antes de un predicado concreto para indicar a qué variables y expresiones se aplican:

- una expresión como $(\forall x)Humano(x)$ se traduce como *Todo individuo es humano*, *para todo x, x es humano*.
- $(\exists x)Ama(juan, x)$ se traduce como *Juan ama a alguien*, *existe un x tal que Juan ama a x*.

En estos ejemplos, la variable x está cuantificada y se denomina variable ligada.

Es perfectamente posible encontrar expresiones con varios cuantificadores donde cada uno se aplica a una variable diferente. La expresión $(\forall x)(\exists y)Ama(x, y)$ puede traducirse como *Todo el mundo ama a alguien*.

En este ejemplo, ambas variables son ligadas.

Conectivas

Tanto las proposiciones ordinarias como las abiertas pueden contener las mismas conectivas que vimos en lógica proposicional:

- $\neg Humano(socrates)$ se traduce como *No es verdad que Sócrates es humano* o, informalmente, *Sócrates no es humano*.
- $\neg Humano(x)$ es una proposición abierta, porque la variable x no está cuantificada.
- $((\forall x)Humano(x) \wedge Ama(juan, maria))$ se traduce como *Todo el mundo es humano y Juan ama a María*.
- $(\neg Humano(socrates) \rightarrow \neg(\forall x)Humano(x))$ se traduce como *Si Sócrates no es humano, entonces no es verdad que todo el mundo es humano*.

Vocabulario y reglas sintácticas

De los ejemplos anteriores podemos deducir las reglas sintácticas de la lógica de predicados.

El **vocabulario** está formado por:

- términos, que pueden ser de dos tipos:
  - constantes, representadas como *socrates*, *juan*, *maria* y, en general, cualquier letra minúscula $j, k, l, m \ldots$
  - variables, representadas como cualquier letra minúscula del final del alfabeto v, w, x, y, z
- predicados, cada uno con una aridad determinada (número de argumentos que acepta) y representados como *Humano*, *Ama* y, en general, cualquier letra mayúscula.
- las cinco conectivas que ya conocemos: negación $\neg$, conjunción $\wedge$, disyunción $\vee$, condicional $\rightarrow$ y bicondicional $\leftrightarrow$.

- dos cuantificadores: el universal $\forall$ y el existencial $\exists$
- otros símbolos auxiliares como los paréntesis () y corchetes [], que se utilizan para agrupar fórmulas.

  Las **reglas sintácticas** son las siguientes:

- Si P es un predicado con aridad n, entonces $P(t_1, t_2 \ldots t_n)$ es una oración o fórmula bien formada.
- Si φ y ψ son dos fórmulas, entonces $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y , $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son también fórmulas.
- Si φ es una fórmula y x es una variable, entonces Si $(\forall x)\varphi$ y $(\exists x)\varphi$ son también fórmulas. En este caso, llamamo a φ el alcance de la variable x.

Este tipo de fórmulas, que no contienen conectivas ni cuantificadores se denominan *fórmula atómica*.

Es posible encontrar fórmulas con cuantificadores que se aplican sobre variables que no aparecen en el predicado: $(\forall x P(y))$ es una fórmula bien formada.

Para que una fórmula de lógica de predicados sea considerada una proposición es imprescindible que no contenga variables libres, es decir: que tenga todas sus variables cuantificadas.

Semántica

Al igual que ocurre en la lógica proposicional, a una proposición de lógica de predicados podemos asignarle uno de los dos posibles valores de verdad: verdadero (V) o falso (F).

Si una proposición contiene predicados y términos, e incluso cuantificadores, entonces el valor de verdad vendrá determinado por los *valores semánticos* (no necesariamente, valores de verdad) de sus componentes.

Por ejemplo, la proposición $Humano(socrates)$ está compuesta por un predicado con aridad 1 *Humano* y un término: la constante *socrates*. Esta constante *socrates* tiene como valor semántico el de algún individuo elegido a partir de un conjunto D predefinido con anterioridad, que contiene el dominio. Supongamos que D es el conjunto formado por todos los seres humanos, vivos o muertos, y que el individuo asignado a la constante *socrates* es el filósofo Sócrates.

El predicado *Humano* recibe su valor semántico de un conjunto de individuos contenidos en D, por ejemplo, {Sócrates, Aristóteles, Platón, Mozart, Beethoven}. La proposición $Humano(socrates)$ tiene un valor de verdad V en virtud de que el individuo al que se refiere *socrates* es miembro del conjunto al que se corresponde el predicado *Humano*. Si *Humano* se correspondiera con otro conjunto diferente, por ejemplo {Pelé, Maradona, Di Stefano, Messi}, el valor de verdad de la proposición $Humano(socrates)$ sería F.

Utilizamos los dobles corchetes en $[[\alpha]]$ para denotar el valor semántico de la expresión α. De manera que $[[socrates]] =$ Sócrates, $[[Humano]] =$ {Sócrates, Aristótles, Platón, Mozart, Beethoven} y $[[Humano(socrates)]] = V$

Un predicado como *Ama* que tenga aridad 2 tiene como valor semántico un conjunto de pares ordenados de individuos que sean elementos de D, o dicho de otro modo, un subconjunto de $D \times D$. Una proposición como $Ama(juan, maria)$ es verdadera en caso de que exista un par (x, y) donde X es el valor semántico de *juan* y y es el valor semántico de *maria*. En general, para todo predicado P que tenga aridad 2 y todo par de términos a, b, decimos que $[[P(a, b)]] = V$ si y solo si $([[a]], [[b]]) \in [[P]]$

El valor de verdad de cualquier proposición de lógica de predicados dependerá del dominio del discurso y de la elección de los valores semánticos de las constantes y los predicados. Cuando todos estos elementos están especificados, decimos que tenemos definido un *modelo* de lógica de predicados.

Un modelo consiste en un conjunto D y una función F que asigna:

1. a cada constante de individuo, un elemento de D.
2. a cada predicado de aridad 1, un subconjunto de D.
3. a cada predicado de aridad 2, un subconjunto de $D \times D$; y, en general,
4. a cada predicado de aridad n, un subconjunto de $D \times D \times D \ldots$ (un subconjunto de n-tuplas de elementos de D).

Una proposición de lógica de predicados como $Humano(socrates)$ o $Ama(juan, maria)$ no es simplemente verdadera o falsa, sino que será verdadera o falsa teniendo en cuenta determinado modelo M.

Deducción natural

La lógica de predicados tiene dos reglas de inferencia fundamentales:

1. ***Modus ponens***, heredada de la lógica proposicional.

$(((\forall x)Humano(x) \rightarrow Mortal(x)) \wedge Humano(socrates)) \rightarrow Mortal(socrates)$.

A partir de la oración cuantificada universalmente *Todos los seres humano son mortales* podemos inferir *Si Sócrates es un ser humano, entonces Sócrates es mortal*.

2. **Generalización universal**

A partir de la fórmula $Mortal(socrates)$ podemos generalizar $(\forall x)Mortal(x)$. O dicho de otro modo, a partir de la oración *Sócrates es mortal* podemos generalizar *Todos los seres humanos son mortales*.