

# Introducción al problema termoelástico aplicado al BEM

Victoriano León Ramírez

23 de febrero de 2016

## 1. Planteamiento del problema

El problema se centra en la termoelasticidad desacoplada, es decir, la incidencia del efecto térmico en el problema elástico y no viceversa.

$$\varepsilon = \varepsilon^T + \varepsilon^E \quad (1)$$

### 1.1. El problema térmico

La ecuación de conducción del calor en un medio tridimensional, isótropo, en estado transitorio y con fuentes de calor interno se define por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c} \quad (2)$$

donde  $T$  representa el incremento de temperatura respecto a un estado  $T_0$ ,  $\rho$  es la densidad del material,  $c$  es el calor específico,  $\lambda$  es la conductividad térmica y  $q_v$  el flujo de calor interno. Para el caso de no tener fuentes de calor internas eliminaremos el segundo término, y para el problema estacionario  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  por lo que nos quedará que la ecuación de transmisión de calor para el estado estacionario, sin fuentes de calor internas en un medio isótropo tridimensional homogéneo es:

$$\nabla^2 T = 0 = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \quad (3)$$

A su vez también podemos escribir la ecuación de expansión del material debido a la dilatación térmica como:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha T \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha T \end{pmatrix} \quad (4)$$

Donde  $\alpha$  representa el coeficiente de dilatación térmica.

## 1.2. El problema elástico

En cuanto al problema elástico sus ecuaciones de equilibrio  $\nabla \sigma + b = 0$  y su ecuación constitutiva  $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_{ij}$ .

## 1.3. El problema termoelástico

Para admitir la formulación del problema termoelástico desacoplado es necesario partir de unas hipótesis:

- Deformaciones pequeñas
- Incrementos de temperatura pequeños
- Ecuaciones constitutivas lineales

De esta manera podremos asumir la Ley de Hooke Generalizada con efectos térmicos mencionada en [1].

## 2. Aplicación al BEM

A continuación se presentan las ecuaciones integrales de contorno y sus soluciones fundamentales de termoelasticidad obtenidas de [1] donde se puede ver su obtención. Se puede apreciar su similitud con las de la elasticidad.

$$c_{ij}(y)u_j(y) + \int_{\Gamma}^{CPV} T_{ij}(y, x)u_j(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{P}_i(y, x)\theta(x)d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(y, x)t_j(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{Q}_i(y, x)q(x)d\Gamma \quad (5)$$

donde tenemos como soluciones fundamentales del problema elástico  $T_{ij}$  y  $U_{ij}$  además de las del problema termoelástico  $\bar{Q}_i$  y  $\bar{P}_i$ .

$$\bar{P}_i(y, x) = \frac{\alpha(1 + \nu)}{8\pi(1 - \nu)r} [n_i - \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i}] \quad (6)$$

$$\bar{Q}_i(y, x) = \frac{-\alpha(1 + \nu)}{8\pi\lambda(1 - \nu)} [r_{,i}] \quad (7)$$

$$T_{ij}(y, x) = \frac{-1}{8\pi(1 - \nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] - (1 - 2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} \quad (8)$$

$$U_{ij}(y, x) = \frac{-1}{16\pi(1 - \nu)\mu r} \{ (3 - 4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \} \quad (9)$$

## Referencias

- [1] RAFAEL BALDERRAMA, MANUEL MARTÍNEZ, ADRIÁN P. CASILINO ,  
*Aplicación De La Integral J De Dominio Al Análisis Tridimensional De Grietas En Sólidos Termoelásticos*, Tesis Doctoral, Caracas, Venezuela, 2004.