FRI
UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za računalništvo in informatiko

Sila težnosti

Numerična matematika

—

2. domača naloga

Avtor: Vito Levstik

Akademsko leto 2024/2025

1 Uvod

Cilj naloge je izračunati silo težnosti med dvema vzporednima homogenima enotskima kockama, na medsebojni razdalji 1 (med najbljižjima stranicama) na 10 decimalk (z relativno natančnostjo 10^{-10}). Predpostavimo, da so vse fizikalne konstante enake 1, kar pomeni, da je iskana sila

$$\mathbf{F} = \int_{T_1} \int_{T_2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|_2^3} \, d\mathbf{r}_1 \, d\mathbf{r}_2$$

kjer sta T_1 in T_2 kocki po katerih integriramo.

2 Implementacija

Najprej postavimo kocki v koordinatni sistem. Prva kocka T_1 naj bo $[0,1]^3$, druga kocka T_2 pa $[2,3] \times [0,1]^2$. S tem zagotovimo, da sta kocki enotski, vzporedni in na razdalji 1. Sedaj lahko iskani integral zapišemo po komponentah

$$\mathbf{F} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_2^3 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2)^{3/2}} \, dz_2 \, dy_2 \, dx_2 \, dz_1 \, dy_1 \, dx_1,$$

kjer so (x_1, y_1, z_1) koordinate točk prve kocke in (x_2, y_2, z_2) koordinate točk druge kocke.

Integral rešimo s Simpsonovo metodo. Ker imamo 6 integralov, bo naivna implementacija imela časovno kompleksnost $O(n^6)$, kjer je n število delitev integracijskega intervala. Ker potrebujemo veliko natančnost, je tak naiven pristop nemogoč. Ključna pohitritev je, da prevedemo 6-kratni integral v 3-kratnega, s čimer bomo spremenili časovno odvisnost v $O(n^3)$. Definiramo

$$K(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|_2^3} \quad \text{in} \quad \chi_T(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{če } \mathbf{r} \in T \\ 0 & \text{drugače} \end{cases}$$

in tako zapišemo integral kot

$$\mathbf{F} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} K(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) \, \chi_{T_1}(\mathbf{r_1}) \, \chi_{T_2}(\mathbf{r_2}) \, d\mathbf{r_1} d\mathbf{r_2}$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko $\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$. Ob upoševanju domen za $\mathbf{r_1}$ in $\mathbf{r_2}$ je $x \in [-3, -1]$, $y \in [-1, 1]$ in $z \in [-1, 1]$. Jakovijeva matrika je $-I_3$, kjer je I_3 enotska matrika v treh dimenzijah, zato je determinanta enaka -1. Iz tega sledi $d\mathbf{r_2} = |\det J| \, d\mathbf{r} = d\mathbf{r}$, torej lahko pišemo

$$\mathbf{F} = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{T_1}(\mathbf{r_1}) \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{T_2}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r}) K(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \, d\mathbf{r_1}.$$

Vrstni red integracije lahko zamenjamo in upoštevamo

$$\chi_{T_2}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{če } \mathbf{r_1} - \mathbf{r} \in T_2 \\ 0 & \text{drugače} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{če } \mathbf{r_1} \in T_2 + \mathbf{r} \\ 0 & \text{drugače} \end{cases} = \chi_{T_2 + \mathbf{r}}(\mathbf{r_1}).$$

Tako dobimo

$$\mathbf{F} = \int_{\mathbb{R}^3} K(\mathbf{r}) \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{T_1}(\mathbf{r_1}) \, \chi_{T_2 + \mathbf{r}}(\mathbf{r_1}) \, d\mathbf{r_1} \, d\mathbf{r}.$$

Pomemben razmislek je, da je notranji integral enak volumnu preseka kock T_1 in $T_2 + \mathbf{r}$, ki ga označimo z $V(\mathbf{r})$. Končen integral je tako

$$\mathbf{F} = \int_{\mathbb{R}^3} K(\mathbf{r}) \, V(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}.$$

Ker je presek dveh kock kvader, lahko $V(\mathbf{r})$ izračunamo kot produkt presekov po posameznih koordinatah. Ob upoštevanju domen za $\mathbf{r}$ dobimo

$$V(x, y, z) = (\min(1, 3 + x) - \max(0, 2 + x))\,(1 + |y|)(1 + |z|).$$

Upoštevmo še dejstvo, da bo končna sila le v x smeri, saj sta kocki vzporedni. Silo lahko tako zapišemo kot

$$F_x = \int_{-3}^{-1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, V(x, y, z)\, dz\, dy\, dx,$$

kar nam da časovno kompleksnost $O(n^3)$. Kompleksnost lahko še dodatno zmanjšamo na $O(n^2)$, če analitično izračunamo integral po z. Potrebno je overdnotiti

$$\int_{-1}^{1} \frac{1 - |z|}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dz.$$

Ker je integrand soda funkcija, lahko integriramo na intervalu $[0, 1]$ in rezultat pomnožimo z 2 (ter uporabimo $|z| = z$). Integral je tako

$$2 \int_{0}^{1} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dz - 2 \int_{0}^{1} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dz.$$

Pogledamo v tabele integralov [1], izračunamo in dobimo

$$\frac{2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = f(x, y).$$

Označimo $l(x) = (\min(1, 3 + x) - \max(0, 2 + x))$. Končen integral je tako

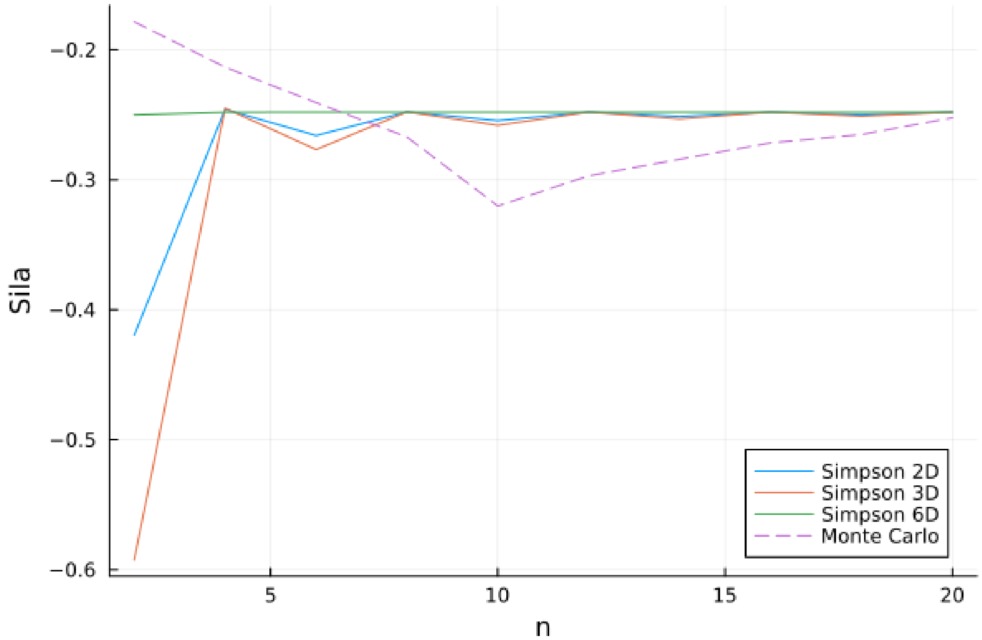
$$F_x = \int_{-3}^{-1} \int_{-1}^{1} x\, l(x)(1 - |y|) f(x, y)\, dy\, dx.$$

Sedaj implementiramo funkcijo `simpson2D(n)`, ki sprejme število delitev n (mora biti sodo za Simpsonovo metodo) in vrne silo v x smeri. Ker je širina integracijskih intervalov v x in y enaka 2, uporabimo enako velikost koraka $h = 2/n$ za obe smeri. V funkciji ustvarimo vektor uteži $w = [1, 4, 2, \ldots, 2, 4, 1]$, dolžine $n + 1$, da lahko do iskanih uteži pri posameznih vozlih dostopamo s pomočjo indeksa. Funkcija je nato dvojna zanka po x in y koordinatah, kjer v zanki po y iteriramo do polovice $n/2$ in nato pomnožimo rezultat z 2, saj je integrand soda funkcija v y smeri. Za vsako točko (x, y) izračunamo vrednost integranda, ga pomnožimo z utežjo in dodamo k skupni vsoti sile. Na koncu pomnožimo vsoto s faktorjem $h^2/9$, kar nam da končno vrednost sile v x smeri.

Tekom postopka implementacije funkcije `simpson2D(n)` smo implementirali funkcije `simpson6D(n)`, ki je naivna implementacija 6-kratnega integrala, `simpson3D(n)`, ki je implementacija 3-kratnega integrala in `monte_carlo_integration(n)`, ki izračuna 6-kratni integral z Monte Carlo metodo. Te funkcije smo implementirali, saj smo sprva mislili, da bo ne bo potrebna redukcija 6-kratnega integrala v 3-kratnega in 2-kratnega. Sedaj te funkcije lahko uporabimo za primerjavo rezultatov.

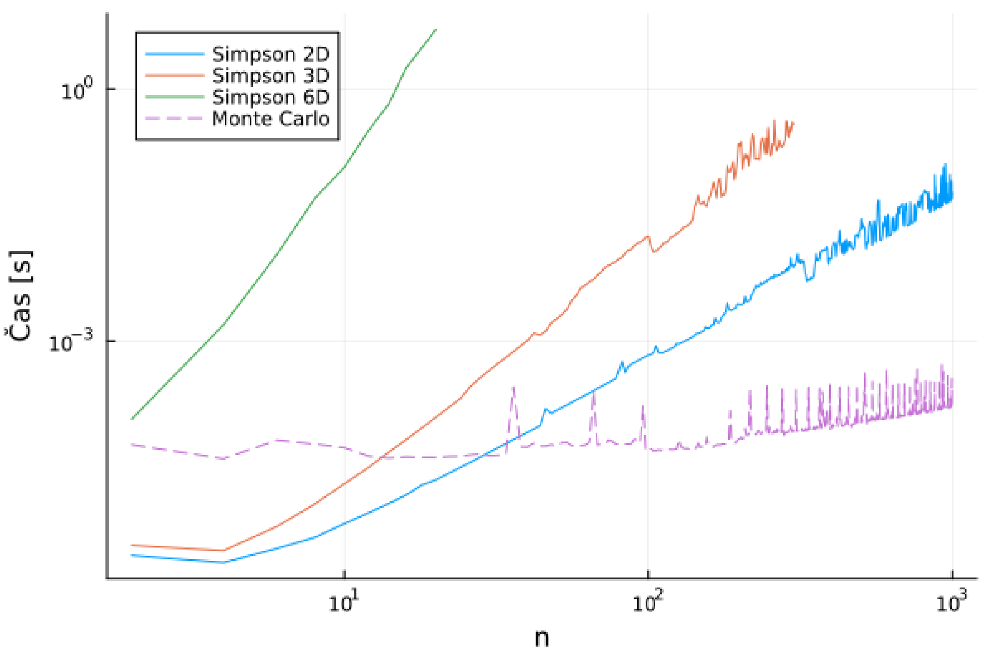
3 Rezultati

Da dosežemo željeno natančnost, povečujemo n in preverimo da je absolutna vrednost kvocienta razlike med dvema zaporednima izračunoma in vrednosti zadnjega izračuna manjša od 10^{-10}. Pri $n = 200000$ dobimo silo, zaokroženo na 10 decimalk, $F \approx -0.2479229692$. Minus označuje, da je sila med kockama privlačna. Pri tem je relativna natančnost $6.76 \cdot 10^{-11}$, kar je manj kot 10^{-10}, zato lahko rezultat sprejmemo. Čas izvajanja je bil približno 1500 sekund.



Slika 1: Konvergenca različnih metod.

Za konec še primerjamo konvergenco in časovno zahtevnost rezultatov različnih metod na različnih intervalih za n. Na sliki 1 so prikazane vrednosti sile za različne n. Kljub temu, da je metoda `simpson6D` najpočasnejša, izgleda, da ima najboljšo konvergenco. `simpson3D` in `simpson2D` imata bistveno večja odstopanja pri $n = 2, 6, 10, 14, 18$, kar je verjetno posledica tega, da zaradi preoblikovanja rešujemo drugačen integral kot na začetku. Ima pa `simpson2D` boljše rezultate kot `simpson3D`, kar je pričakovano, saj je integral po z že bil izračunan analitično. `monte_carlo_integration` je najslabša metoda, saj je nedeterministična in je odvisna od naključne izbire točk.



Slika 2: Čas izvajanja različnih metod.

Na sliki 2 so prikazani časi izvajanja različnih metod. Pričakovano je `simpson6D(n)` najpočasnejša. Metoda `simpson3D(n)` je bistveno hitrejša, vendar je `simpson2D(n)` najhitrejša od determinističnih metod. Metoda `monte_carlo_integration(n)` je hitrejša od vseh, kar je pričakovano, saj je potrebno izračunati le n naključnih točk in izračunati povprečno vrednost integranda, torej ima časovno kompleksnost $O(n)$. Ker pa je ta metoda nedeterministična, v nalogi pa iščemo natančno vrednost na 10 decimalk, te metode nismo uporabili. Če bi zadoščalo podati rezultat na 10 decimalk natančno z intervalom zaupanja, bi morda uporabili to metodo, odvisno od tega kako velik interval zaupanja bi želeli.

4 Literatura

[1] Ilja Nikolaevič Bronštejn and Konstantin Adolfovič Semendjaev. *Matematični priročnik: za inženirje in slušatelje tehniških visokih šol.* Tehniška založba Slovenije, 8. edition, 1984.