



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Быстрое преобразование Фурье»

Студент 315 группы
В. В. Кожемяк

Руководители практикума
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2017

Содержание

1	Постановка задачи	3
1.1	Общая формулировка задачи	3
1.2	Формальная постановка задачи	3
2	Вычисление аналитических преобразований Фурье	4
2.1	Некоторые необходимые обозначения и соотношения	4
2.2	Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_1(t) = \frac{1-\cos^2 t}{t}$	5
2.3	Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_2(t) = te^{-2t^2}$	7
2.4	Примеры, иллюстрирующие работу программы	8

1 Постановка задачи

1.1 Общая формулировка задачи

Дана система функций (всюду далее, если не сказано противное, предполагается, что $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и функция суммируема и обладает достаточной гладкостью)

$$\begin{cases} f_1(t) = \frac{1 - \cos^2 t}{t} \\ f_2(t) = te^{-2t^2} \\ f_3(t) = \frac{2}{1 + 3t^6} \\ f_4(t) = e^{-5|t|} \ln(3 + t^4) \end{cases} \quad (1.1)$$

Для каждой функции из системы (1.1) требуется:

1. Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ при помощи быстрого преобразования Фурье (**БПФ** / **FFT**), выбирая различные шаги дискретизации исходной функции и различные окна, ограничивающие область определения $f(t)$.
2. Построить графики $F(\lambda)$.
3. Для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из заданного набора вычислить аналитически преобразование Фурье

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt \quad (1.2)$$

и сравнить графики $F(\lambda)$, полученные из аналитического представления и из аппроксимации через **БПФ**.

1.2 Формальная постановка задачи

1. Реализовать на языке MATLAB функцию `plotFT(hFigure, fHandle, fFTHandle, step, inpLimVec, outLimVec)` со следующими параметрами:
 - **hFigure** — указатель на фигуру, в которой требуется отобразить графики
 - **fHandle** — указатель на функцию (**Function Handle**), которую требуется преобразовывать ($f(t)$)
 - **fFTHandle** — указатель на функцию (**Function Handle**), моделирующую аналитическое преобразование Фурье (1.2) функции $f(t)$ (может быть пустым вектором, в таком случае график аналитического преобразования строить не требуется)
 - **step** — положительное число, задающее шаг дискретизации Δt
 - **inpLimVector** — вектор-строка, задающая окно $[a, b]$ для функции $f(t)$, первый элемент вектора содержит a , второй b , причём $a < b$, но не обязательно $a = -b$

- **outLimVector** — вектор-строка, задающая окно $[c, d]$ для вывода графика преобразования Фурье (пределы осей абсцисс). В случае, если передаётся пустой вектор, следует брать установленные в фигуре пределы или определять свои разумным образом

Данная функция строит графики вещественной и мнимой частей численной аппроксимации преобразования Фурье (1.2) функции $f(t)$, заданной в **fHandle** (и, при необходимости, соответствующие графики аналитического преобразования Фурье $F(\lambda)$)

Кроме того, данная функция, должна возвращать структуру, содержащую следующие параметры:

- **nPoints** — число вычисляемых узлов сеточной функции, рассчитываемое по формуле: $nPoints = \left\lfloor \frac{(b-a)}{step} \right\rfloor$
- **step** — поправленное значение шага дискретизации Δt , рассчитываемое по формуле: $step = \frac{(b-a)}{nPoints}$
- **inpLimVec** — окно $[a, b]$ для функции $f(t)$
- **outLimVec** — окно для вывода графика преобразования Фурье $f(\lambda)$

2. Построить, используя написанную функцию **plotFT**, для каждой из функций системы (1.1) графики λ для разных значений входных параметров (окон **inpLimVec**, **outLimVec** и частоты дискретизации **step**).

В частности, для некоторых функций подобрать параметры так, чтобы проиллюстрировать эффекты *наложения спектра, появления ряби и их устранения* (в случае ряби — в точках непрерывности λ)

3. Для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из системы (1.1) вычислить аналитически их преобразования Фурье $F(\lambda)$ и построить их графики вместе с графиками численной аппроксимации $F(\lambda)$

2 Вычисление аналитических преобразований Фурье

2.1 Некоторые необходимые обозначения и соотношения

Напомним, что преобразование Фурье $F(\lambda)$ функции $f(t)$ задаётся формулой (1.2):

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt$$

Далее, для краткости будем писать:

$$f(t) \rightarrow F(\lambda)$$

Для вычисления аналитического преобразования Фурье нам потребуется лемма Жордана и теорема о вычетах.

Лемма 2.1 (лемма Жордана). Если $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im}(z) > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и при $|z| \rightarrow \infty$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg z$. Тогда для любого $\alpha > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) \cdot e^{i\alpha z} dz = 0$$

, где C_R верхняя полуокружность $|z| = R, \text{Im}(z) > 0$

Теорема 2.2 (Основная теорема о вычетах). Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду в области D за исключением конечного числа изолированных особых точек z_1, \dots, z_n . Тогда для любой замкнутой области \bar{G} , лежащей в D и содержащей точки z_1, \dots, z_n внутри, справедливо равенство

$$\int_{\partial G} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res} f(z_k)$$

И еще необходим будет интеграл:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (2.1)$$

2.2 Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_1(t) = \frac{1 - \cos^2 t}{t}$

Для начала упростим выражение

$$f_1(t) = \frac{1 - \cos^2 t}{t} = \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1 - \cos 2t}{2t}$$

Преобразование Фурье $F_1(\lambda)$ функции $f_1(t)$ задаётся формулой:

$$F_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot e^{-i\lambda t} dt$$

Вычислим этот интеграл. Для начала распишем $e^{-i\lambda t}$ по определению:

$$e^{-i\lambda t} = \cos \lambda t - i \sin \lambda t.$$

Далее это выражение подставляем в интеграл и пользуемся линейностью интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot e^{-i\lambda t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot \cos \lambda t dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot \sin \lambda t dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2t} \cdot \cos \lambda t dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t} \cdot \cos \lambda t dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2t} \cdot \sin \lambda t dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t} \cdot \sin \lambda t dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2}I_2 - \frac{i}{2}I_3 + \frac{i}{2}I_4$$

Рассмотрим каждый из интегралов отдельно.

1. Вычисление I_1 :

Из леммы Жордана (см. выше) и основной теоремы вычетов следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} \cdot f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[e^{i\alpha z} f(z) | z = \operatorname{Im}(z_k) > 0] \quad (2.2)$$

Поэтому интеграл I_1 равен нулю.

2. Вычисление I_2 :

Заметим, что

$$\cos 2t \cdot \cos \lambda t = \frac{\cos(2 + \lambda)t + \cos(2 - \lambda)t}{2}.$$

Пользуясь линейностью интегралов и делая замену переменной, мы сведем эти интегралы к I_1 .

3. Вычисление I_3 :

Следует рассматривать 3 случая:

(а) $\lambda > 0$:

Разбивая на два интеграла и делая замену переменной, мы сведем I_3 к уже известному интегралу (2.1).

(b) $\lambda < 0$:

Т.к. функция $\sin x$ — нечетная, значит знак "минус" можно вынести. И далее опять разбивая на два интеграла и делая замену переменной, мы сведем I_3 к уже известному интегралу (2.1).

(с) $\lambda = 0$:

Очевидно, что $I_3 = 0$.

4. Вычисление I_4 :

Заметим, что

$$\cos 2t \cdot \sin \lambda t = \frac{\sin(\lambda + 2)t + \sin(\lambda - 2)t}{2}.$$

Тогда получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2t \sin \lambda t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda + 2)t}{t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda - 2)t}{t} dt$$

Следует рассматривать несколько случаев:

(a) $\lambda > 2$:

Делая замену переменной, получим интегралы типа (2.1).

(b) $\lambda = 2$:

Второй интеграл в правой части обнулится, а первый, путем замены переменной, сведётся к (2.1).

(c) $\lambda \in (-2; 2)$:

Очевидно, что $I_4 = 0$.

(d) $\lambda = -2$:

Первый интеграл в правой части обнулится, а второй, путем замены переменной, сведётся к (2.1).

(e) $\lambda < -2$:

Пользуясь тем, что функция $\sin x$ — нечетная, значит знак "минус" можно вынести и производя замену переменной, получим интегралы типа (2.1).

Итого, в результате получается, что

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in \{-\infty; 2\} \cup \{0\} \cup \{2; +\infty\} \\ -\frac{\pi i}{2}, & \lambda \in (0; 2) \\ \frac{\pi i}{2}, & \lambda \in (-2; 0) \\ \frac{\pi i}{4}, & \lambda = -2 \\ -\frac{\pi i}{4}, & \lambda = 2 \end{cases} \quad (2.3)$$

2.3 Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_2(t) = te^{-2t^2}$

Преобразование Фурье $F_2(\lambda)$ функции $f_2(t) = te^{-2t^2}$ задаётся формулой:

$$F_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2t^2} e^{-i\lambda t} dt.$$

Выведем некоторую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2t^2} e^{-i\lambda t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2t^2 - i\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\left(2t^2 + i\lambda t + \frac{i^2\lambda^2}{8}\right) + \frac{i^2\lambda^2}{8}} dt = \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\left(\sqrt{2}t + \frac{i\lambda}{2\sqrt{2}}\right)^2} dt = \left\{ \sqrt{2}t + \frac{i\lambda}{2\sqrt{2}} = s \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{i\lambda}{4} \right) e^{-s^2} ds = \frac{1}{4} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} se^{-s^2} ds - \frac{i\lambda}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds^2 - \frac{i\lambda}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds.$$

Таким образом, первый интеграл обнуляется, а второй является известным интегралом (2.1). Следовательно получаем:

$$F_2(\lambda) = -\frac{i\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \cdot \lambda \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{8}}.$$

2.4 Примеры, иллюстрирующие работу программы

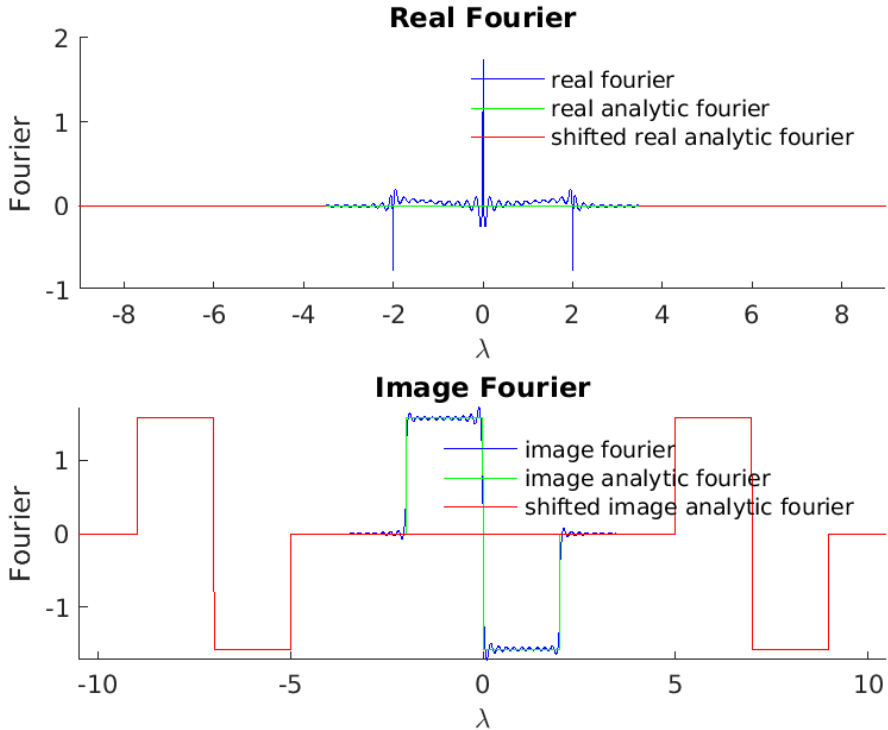
1. Рассмотрим функцию:

$$f_1(t) = \frac{1 - \cos^2 t}{t}.$$

Заметим, что она имеет разрыв первого рода в точке $t = 0$. Исходя из её аналитического представления, мы знаем, что у него пять точек разрыва $(\lambda = \pm \frac{\pi i}{2}, \pm \frac{\pi i}{4}, 0)$.

Выберем несколько значений параметров Δt (шаг дискретизации), $[a, b]$ (окно, ограничивающее область действия функции $f_1(t)$), $[c, d]$ (окно для вывода преобразования Фурье $F_1(\lambda)$).

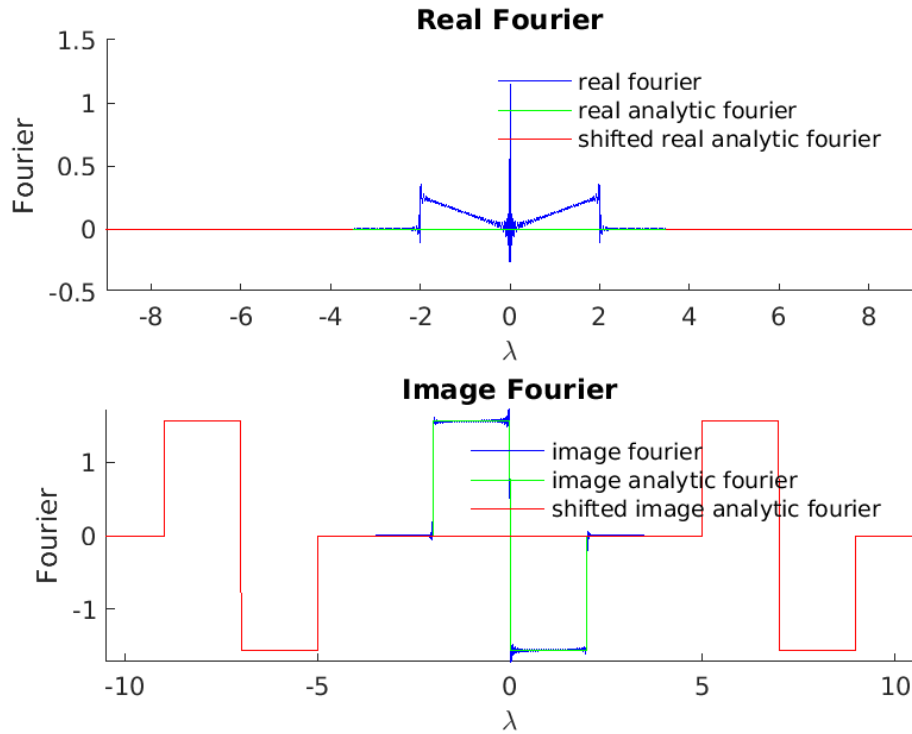
(a) $\Delta t = 0.9$, $[a, b] = [-30, 1000]$, $[c, d] = [-2, 2]$.



Следствие 2.2.1. • Мнимая часть преобразования Фурье, полученные аналитически и численно, совпадают с точностью до ряби. Эта рябь неизбежно возникает в точках разрыва, но также она появляется и в точках непрерывности функции $F_1(\lambda)$. Первое связано со свойствами преобразования Фурье, а второе - с диапазоном окна.

- Из аналитического представления $F_1(\lambda)$ следует, что вещественная часть преобразования Фурье равна нулю, в то время, как вещественная часть, полученная численно, по модулю отлична от нуля не больше чем на шаг дискретизации Δt . Отметим, что точки разрыва в преобразовании Фурье, посчитанного численно, вещественной и мнимой частях совпадают.

(b) $\Delta t = 0.9$, $[a, b] = [-300, 2500]$, $[c, d] = [-2, 2]$.



Следствие 2.2.2. • Мнимые части преобразования Фурье, полученные численно и аналитически совпадают. Но в отличие от предыдущего примера, рябь возникает только в точках разрыва (совсем ее убрать нельзя!). Следовательно увеличивая диапазон окна, можно добиться исчезновения ряби в точках непрерывности функции $F_1(\lambda)$.

- Ситуация с действительной частью обстоит также, как и в предыдущем примере.

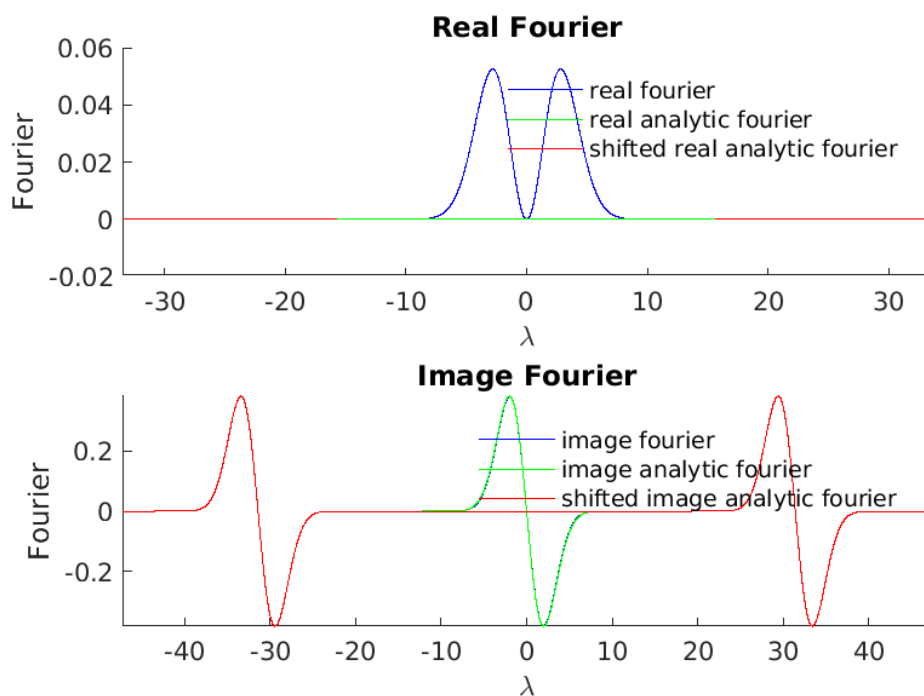
2. Теперь рассмотрим функцию:

$$f_2(t) = te^{-2t^2}.$$

Как можно видеть, эта функция и её преобразование Фурье непрерывны. Выберем

несколько значений параметров Δt (шаг дискретизации), $[a, b]$ (окно, ограничивающее область действия функции $f_1(t)$), $[c, d]$ (окно для вывода преобразования Фурье $F_2(\lambda)$).

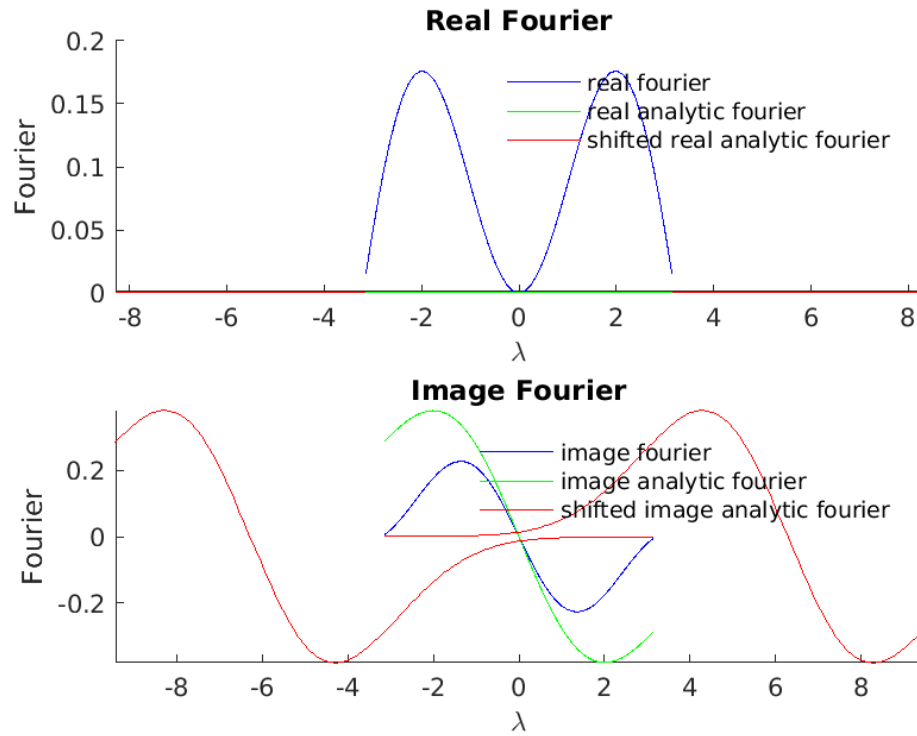
(a) $\Delta t = 0.2$, $[a, b] = [-200, 500]$, $[c, d] = [-2, 2]$.



Следствие 2.2.3. • Мнимые части преобразования Фурье, полученные численно и аналитически, совпадают.

- Вещественная часть преобразования Фурье, полученная аналитически равна нулю, в то время, как, полученная численно, по модулю не превосходит шага дискретизации Δt .
- Отсутствует рябь. Т.к. нет точек разрыва.

(b) $\Delta t = 1$, $[a, b] = [-60, 100]$, $[c, d] = [-2, 2]$.



Следствие 2.2.4. • Вещественная часть преобразования Фурье по прежнему равна нулю, поэтому сдвиг ничего не изменит.

- Что касается мнимой части, то здесь наблюдается эффект наложения спектра. При этом численное преобразование Фурье не совпадает с аналитическим. Данное явление обусловлено нарушением соотношения

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{\Lambda},$$

где Δt — шаг дискретизации, а $\Lambda > 0$ ($|\lambda| < \Lambda$) — промежуток, где нужно устранить наложение спектра.

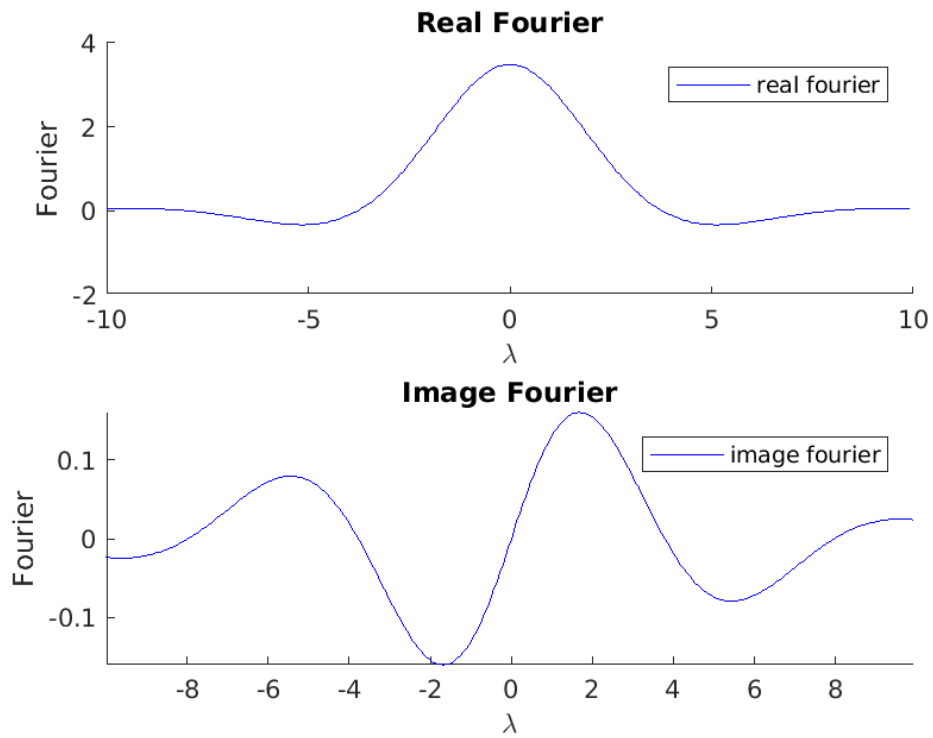
В данном случае эффект наложения спектра можно устранить, т.к. функция $F_1(\lambda) \rightarrow 0$, при $|\lambda| \rightarrow +\infty$. И чтобы его устранить нужно: увеличить окно \Rightarrow уменьшится шаг дискретизации Δt (см. пример выше);

3. Далее рассмотрим функцию:

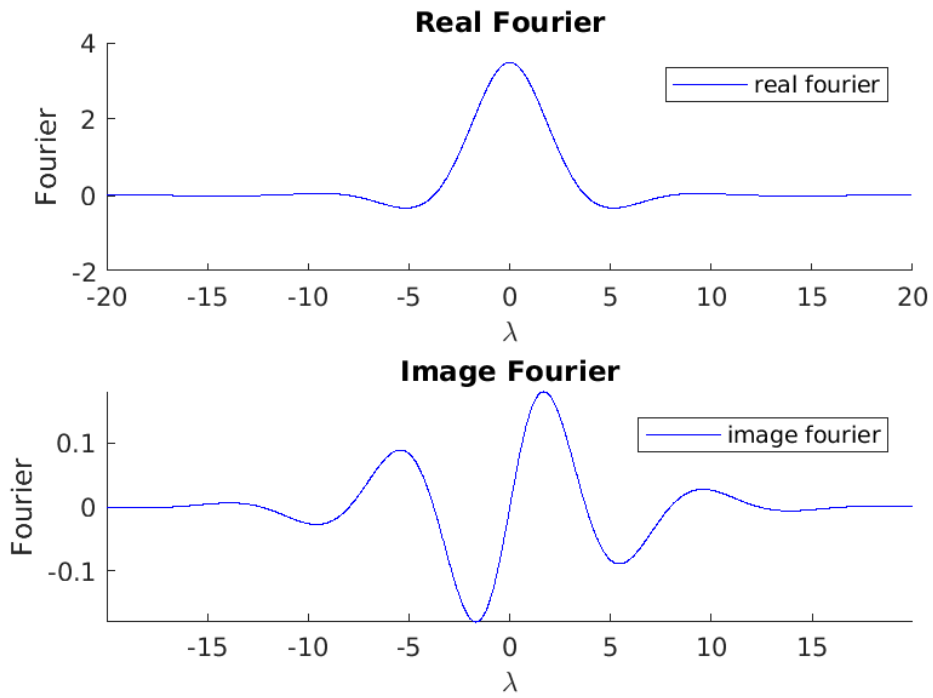
$$f_3(t) = \frac{2}{1 + 3t^6}$$

Данная функция является непрерывной. Будем вычислять преобразование Фурье численно. Выберем несколько значений параметров Δt (шаг дискретизации), $[a, b]$ (окно, ограничивающее область действия функции $f_1(t)$), $[c, d]$ (окно для вывода преобразования Фурье $F_3(\lambda)$).

(а) $\Delta t = 0.1$, $[a, b] = [-40, 50]$, $[c, d] = [-10, 10]$.



(b) $\Delta t = 0.1$, $[a, b] = [-200, 200]$, $[c, d] = [-20, 20]$.



Следствие 2.2.5. *Сравнив графики мнимых и вещественных частей преобразования Фурье соответственно, мы делаем вывод, что ничего существенного не*

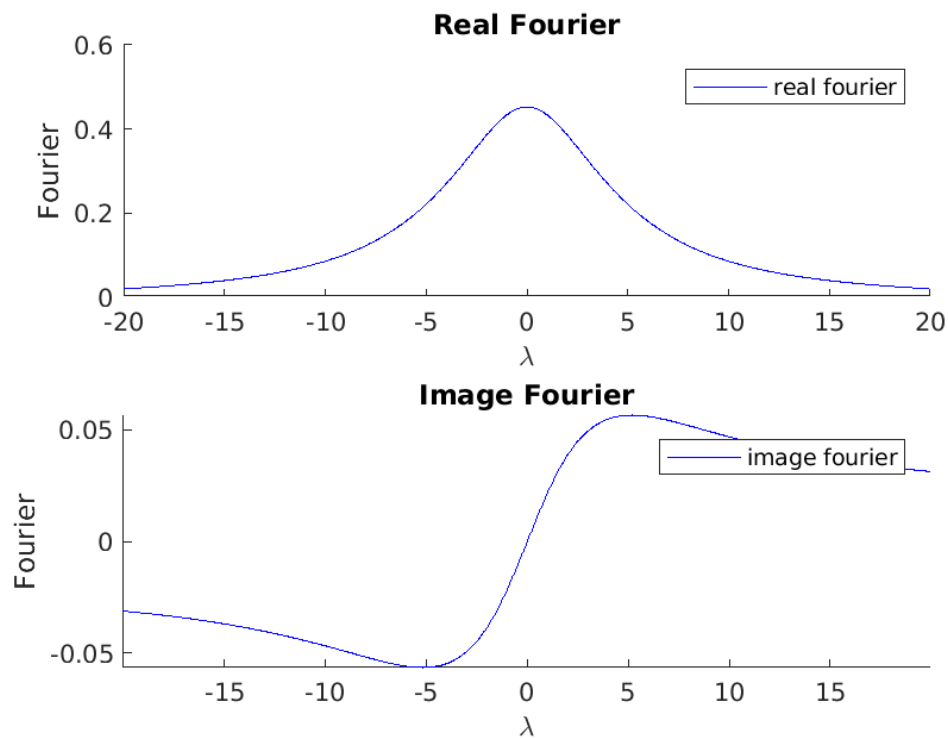
изменилось при подборе различных параметров. Но мы поняли по графику, что преобразование Фурье непрерывное.

4. Наконец рассмотрим функцию:

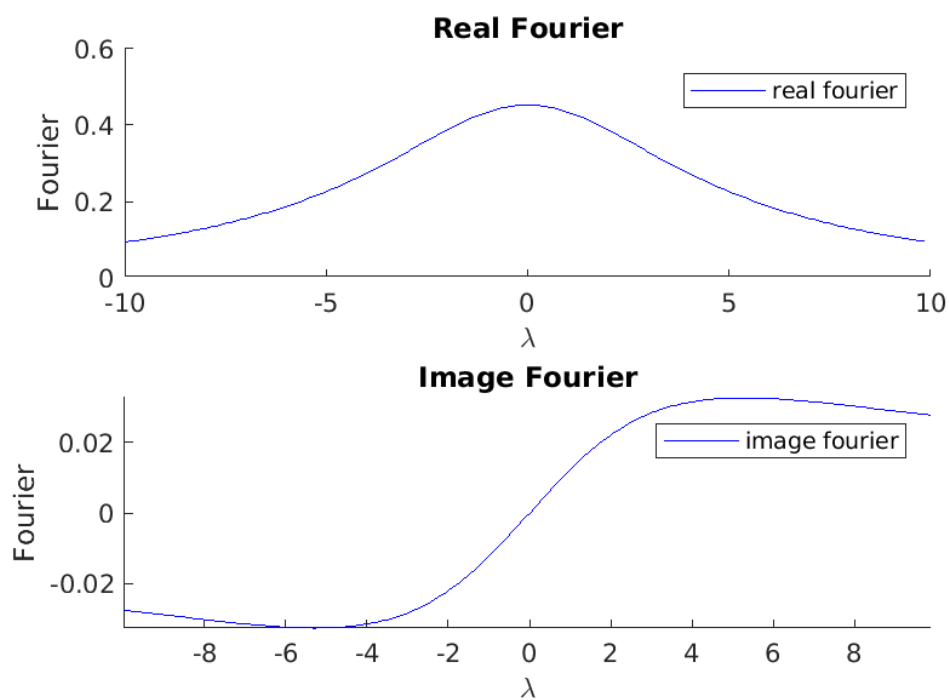
$$f_4(t) = e^{-5|t|} \ln(3 + t^4)$$

Эта функция - непрерывна. Будем вычислять преобразование Фурье численно. Выберем несколько значений параметров Δt (шаг дискретизации), $[a, b]$ (окно, ограничивающее область действия функции $f_1(t)$), $[c, d]$ (окно для вывода преобразования Фурье $F_4(\lambda)$).

(a) $\Delta t = 0.1$, $[a, b] = [-100, 100]$, $[c, d] = [-20, 20]$.



(b) $\Delta t = 0.1$, $[a, b] = [-20, 50]$, $[c, d] = [-10, 10]$.



Следствие 2.2.6. *Сравнив графики мнимых и вещественных частей преобразования Фурье соответственно, мы делаем вывод, что ничего существенного не изменилось при подборе различных параметров. И опять мы понимаем, что преобразование Фурье непрерывно.*