



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

# «Нелинейная задача оптимального управления»

*Студент 315 группы*  
В. В. Кожемяк

*Руководитель практикума*  
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2018

## Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Аналитическое решение</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Особенности реализации программы</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Результаты работы программы</b>	<b>7</b>
4.1	Зависимость от параметра $\alpha$ . . . . .	7
4.2	Зависимость от параметра $t$ . . . . .	8
4.3	Неподвижные точки . . . . .	10

## 1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x^3 + 3x \sin(x) + \dot{x}^2 = u,$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . На возможные значения управляющего параметра  $u$  наложено ограничение:  $u \in [-\alpha, \alpha]$ . Задан начальный момент времени  $t_0 = 0$  и начальная позиция  $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$ . Необходимо построить множество достижимости  $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$  (множество пар  $(x(t), \dot{x}(t))$ ) в классе программных управлений в заданный момент времени  $t \geq t_0$ .

1. Необходимо написать в среде Matlab функцию `reachset(t, alpha)`, которая по заданному параметру  $t \geq t_0$  рассчитывает приближенно множество достижимости  $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ . На выходе функции — два массива  $X, Y$  с упорядоченными координатами точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны быть упорядочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функциям визуализации (например, `plot`). Продемонстрировать такой режим работы функции, при котором она возвращает также координаты линий переключения оптимального управления (с возможностью из визуализации).
2. Необходимо реализовать функцию `reachsetdyn(t1, t2, alpha, N, filename)`, которая, используя функцию `reachset(t, alpha)`, строит множества достижимости для моментов времени  $\tau_i = t_1 + \frac{(t_2 - t_1)i}{N}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Здесь  $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ ,  $N$  — натуральное число. Для каждого момента времени  $\tau_i$  функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции должен быть сохранён в виде видео-файла `filename.avi`. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции (при отсутствии параметра `filename`) без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай, функция должна иметь возможность строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени (при  $t_2 = t_1$ ).
3. В соответствующий заданию отчёте необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости, описать схему алгоритма построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости от величины параметра  $\alpha$ . Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны.

## 2 Аналитическое решение

Для начала проведём нормализацию дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + x^3 + 3x \sin(x) + \dot{x}^2 = u.$$

В результате замены  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  получим следующую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u - x_1^3 - 3x_1 \sin(x_1) - x_2^2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и всюду далее положим  $x_1 = x_1(t)$ ,  $x_2 = x_2(t)$ ,  $u = u(t)$ ,  $\psi_1 = \psi_1(t)$ ,  $\psi_2 = \psi_2(t)$ .

Теперь запишем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(x, u, \psi) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (u - x_1^3 - 3x_1 \sin(x_1) - x_2^2),$$

и сопряжённую систему

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 3x_1^2 \psi_2 + 3\psi_2 \sin(x_1) + 3\psi_2 x_1 \cos(x_1), \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + 2\psi_2 x_2. \end{cases} \quad (2)$$

В силу условия максимума получаем

$$u^* = \begin{cases} \alpha, & \psi_2 > 0, \\ -\alpha, & \psi_2 < 0, \\ [-\alpha, \alpha], & \psi_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

**Утверждение.** *Равенство  $\psi_2 = 0$  выполняется в изолированные моменты времени. следовательно отсутствует особый режим.*

*Доказательство:* Предположим противное. Пусть  $\exists \tau_1, \tau_2 : \psi_2(t) = 0, \forall t \in [\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$ . Тогда в силу сопряжённой системы (2) получается, что  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ . Возникает противоречие с условием нетривиальности вектора сопряжённых переменных.  $\square$

Ввиду утверждения можно записать новое выражение для управления

$$u^* = \alpha \cdot \text{sign}(\psi_2),$$

и разбить систему (1) на две системы

$$S^+ = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha - x_1^3 - 3x_1 \sin(x_1) - x_2^2, \end{cases} \quad (4)$$

$$S^- = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\alpha - x_1^3 - 3x_1 \sin(x_1) - x_2^2. \end{cases} \quad (5)$$

Сформулируем следующую теорему, доказательство которой можно найти в [1].

**Теорема 2.1** (о нулях  $x_2$  и  $\psi_2$ ). *Если  $\tau_1 < \tau_2$  и*

1.  $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$  и  $x_2(\tau_1) = 0 \Rightarrow x_2(\tau_2) = 0$ ;
2.  $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0, x_2(t) \neq 0, \forall t \in (\tau_1, \tau_2)$ , и  $\psi_2(\tau_1) = 0 \Rightarrow \psi_2(\tau_2) = 0$ ;
3.  $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$  и  $x_2(\tau_1) \neq 0 \Rightarrow x_2(\tau_2) \neq 0$ , но  $\exists t' \in (\tau_1, \tau_2) : x_2(t') = 0$ .
4.  $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$  и  $\psi_2(\tau_1) \neq 0 \Rightarrow \psi_2(\tau_2) \neq 0$ , но  $\exists t'' \in (\tau_1, \tau_2) : \psi_2(t'') = 0$ .

Чтобы корректно построить множество достижимости необходимо изучить его особые точки.

1. Проверим наличие особых точек у системы (4), т.е. решим следующую систему

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ \alpha - x_1^3 - 3x_1 \sin(x_1) - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Как можно видеть, нужно решить трансцендентное уравнение

$$x_1^3 + 3x_1 \sin(x_1) = \alpha.$$

В результате численного решения получим, что  $x_1 = x_1^0$ , где  $x_1^0$  есть решение данного уравнения. Следовательно точка  $(x_1, x_2) = (x_1^0, 0)$  — неподвижная точка данной системы. Далее выясним характер этой неподвижной точки. Для этого выпишем матрицу Якоби системы (4)

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 - 3\sin(x_1) - 3x_1 \cos(x_1) & -2x_2 \end{bmatrix}.$$

Подставим в координаты неподвижной точки в матрицу Якоби

$$A = J(x_1^0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3(x_1^0)^2 - 3\sin(x_1^0) - 3x_1^0 \cos(x_1^0) & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее обозначим через  $\beta = -3(x_1^0)^2 - 3\sin(x_1^0) - 3x_1^0 \cos(x_1^0)$  и найдём собственные значения матрицы  $A$ :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \beta & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \beta = 0.$$

- Если  $\beta \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{\beta}, \lambda_2 = -\sqrt{\beta}$ . Получается, что точка  $(x_1^0, 0)$  является седловой точкой.
- Если  $\beta < 0 \Rightarrow \lambda_1 = i\sqrt{\beta}, \lambda_2 = -i\sqrt{\beta}$ . Получается, что точка  $(x_1^0, 0)$  является точкой типа центр.

2. Проверим наличие особых точек у системы (5), т.е. решим следующую систему

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ -\alpha - x_1^3 - 3x_1 \sin(x_1) - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Как можно видеть, нужно решить трансцендентное уравнение

$$x_1^3 + 3x_1 \sin(x_1) = -\alpha.$$

В результате численного решения получим, что  $x_1 = x_1^0$ , где  $x_1^0$  есть решение данного уравнения. Следовательно точка  $(x_1, x_2) = (x_1^0, 0)$  — неподвижная точка данной системы. Далее выясним характер этой неподвижной точки. Для этого выпишем матрицу Якоби системы (4)

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 - 3\sin(x_1) - 3x_1 \cos(x_1) & -2x_2 \end{bmatrix}.$$

Подставим в координаты неподвижной точки в матрицу Якоби

$$A = J(x_1^0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3(x_1^0)^2 - 3\sin(x_1^0) - 3x_1^0 \cos(x_1^0) & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее обозначим через  $\beta = -3(x_1^0)^2 - 3\sin(x_1^0) - 3x_1^0 \cos(x_1^0)$  и найдём собственные значения матрицы  $A$ :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \beta & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \beta = 0.$$

- Если  $\beta \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{\beta}, \lambda_2 = -\sqrt{\beta}$ . Получается, что точка  $(x_1^0, 0)$  является седловой точкой.
- Если  $\beta < 0 \Rightarrow \lambda_1 = i\sqrt{\beta}, \lambda_2 = -i\sqrt{\beta}$ . Получается, что точка  $(x_1^0, 0)$  является точкой типа центр.

И так, опишем теперь шаги алгоритма, по которым будем строить границу области достижимости.

1. Решить систему (4) с нулевыми начальными условиями до времени  $t' : x_2(t') = 0$ .
2. Организовать перебор по времени переключения  $t^* \in [0, t']$ .
3. Решит систему (5) и сопряжённую систему с начальными данными  $(x_1(t^*), x_2(t^*), 1, 0)$  до времени переключения  $t^{**}$ , т.е.  $(\psi_2(t^{**}) = 0)$ .
4. Решит систему (4) и сопряжённую систему с начальными данными  $(x_1(t^{**}), x_2(t^{**}), -1, 0)$  до времени следующего переключения  $t^{**}$ . Повторять пункты (3) - (4) до тех пор, пока не исчерпается время.
5. Прodelать аналогичные действия для системы (5).
6. Объединить концы полученных траекторий в одну кривую. Для этого переберём все отрезки, из которых состоит ломаная, проверим их на пересечение. Построим объединение, последовательно двигаясь по точкам кривой, переключаясь на другую кривую, если имело место переключение.
7. Удалить самопересечения. Этот пункт можно опустить, ввиду того что наша ломаная не имеет самопересечения. Ниже приведены графики, на которых можно убедиться в этом.

### 3 Особенности реализации программы

Все интегрирования в данной программе производятся численно с помощью встроенной функции `ode45`, которая использует метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

Также в программе производится поиск корней трансцендентного уравнения, который реализуется с помощью встроенной функции `fzero`.

## 4 Результаты работы программы

Здесь и всюду далее

- зелёным цветом изображены траектории, концы которых образуют границу множества достижимости;
- красным цветом изображена линия переключения;
- синим цветом изображена граница множества достижимости.

Параметры подбирались из соображений, проиллюстрировать качественно возможные случаи.

### 4.1 Зависимость от параметра $\alpha$

Продemonстрируем, как ведёт себя граница множества достижимости при фиксированном времени  $t = 1$  и различных  $\alpha$ .

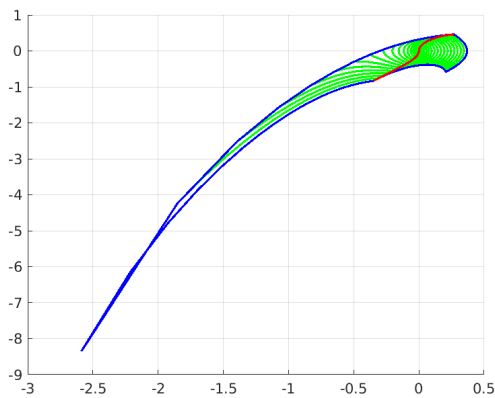


График при  $\alpha = 0.6$ .

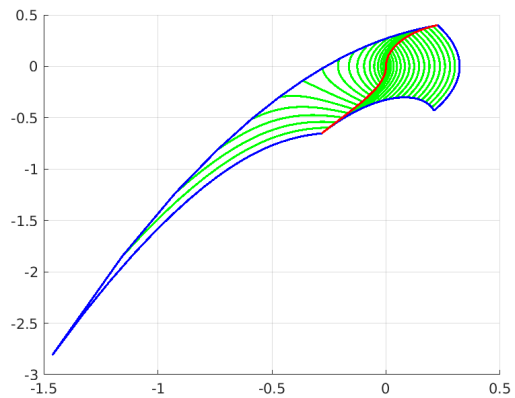


График при  $\alpha = 0.5$ .

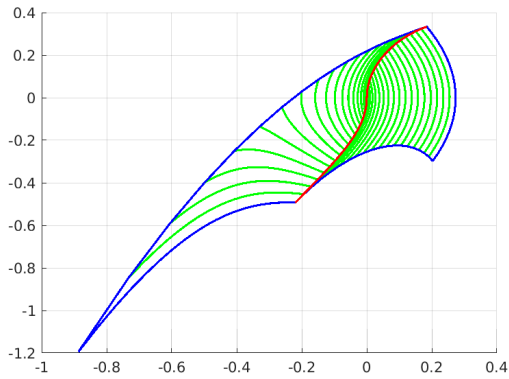


График при  $\alpha = 0.4$ .

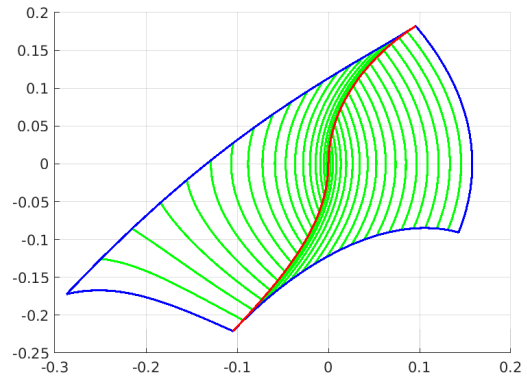


График при  $\alpha = 0.2$ .

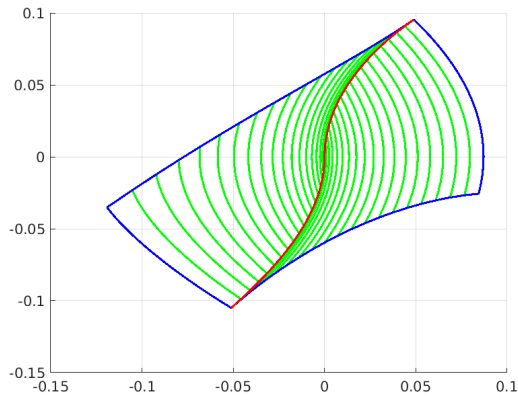


График при  $\alpha = 0.1$ .

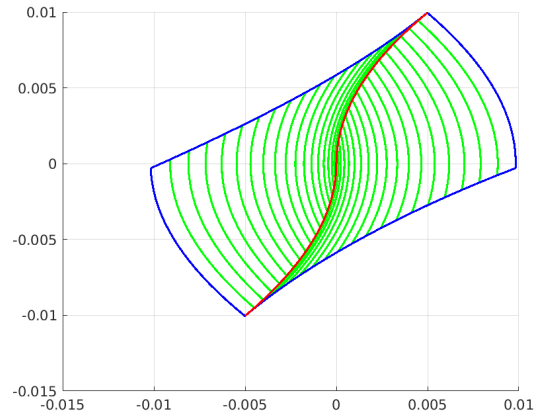


График при  $\alpha = 0.01$ .

Из графиков следует, чем меньше параметр  $\alpha$ , тем более “аккуратней” становится граница множества достижимости. Это связано с тем, что  $\alpha$  является параметром, ограничивающий управление. Поэтому, чем меньше параметр  $\alpha$ , тем более жёсткие условия накладываются на управление.

## 4.2 Зависимость от параметра $t$

Покажем, как меняется граница множества достижимости при фиксированном параметре  $\alpha = 0.05$  и различных  $t$ .



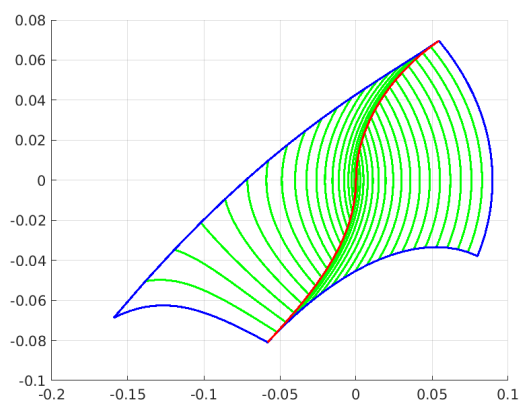


График при  $t = 1.5$ .

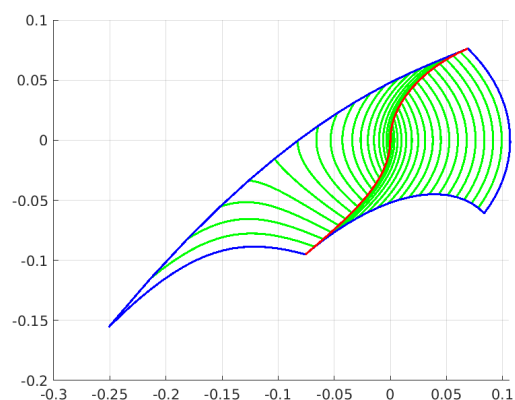


График при  $t = 1.7$ .

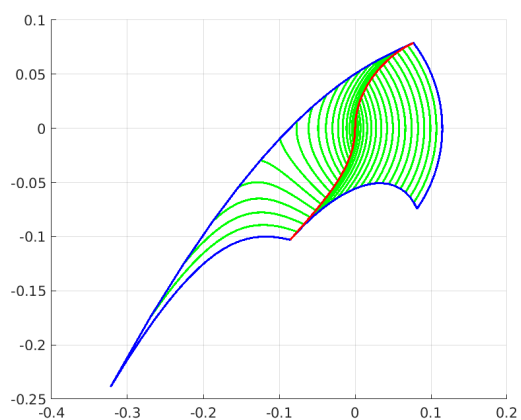


График при  $t = 1.8$ .

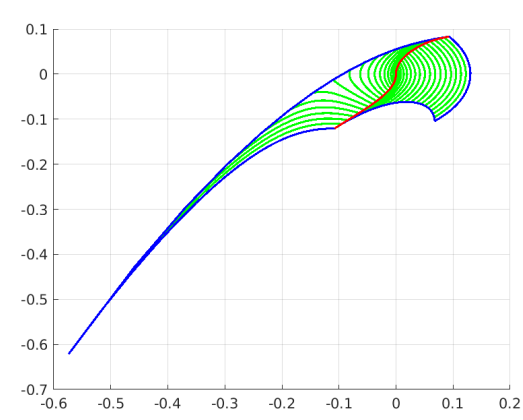
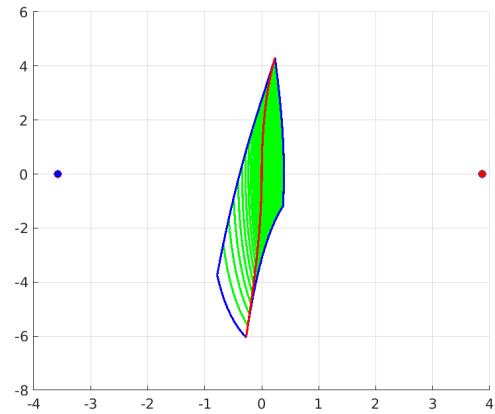
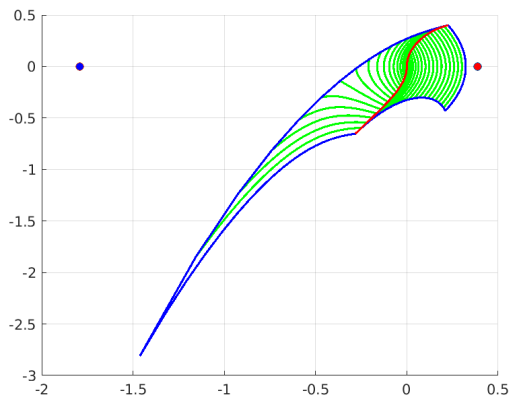


График при  $t = 2$ .

Из вышеприведённых графиков можно сделать вывод: какое бы “жёсткое” управление не было бы, найдётся такой момент времени  $t^*$ , начиная с которого у множества достижимости будет появляться “хвост” и уходить на бесконечность.

### 4.3 Неподвижные точки



Из графиков видно, неподвижные точки никак не влияют на границу множества достижимости.

### Список литературы

- [1] Рублёв И. В. Лекции по оптимальному управлению. 2017.
- [2] Понтрягин Л. С, Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.