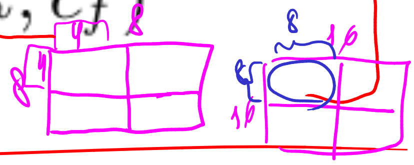
Questão 1)   linhas $1 \ldots n$ colunas $1 \ldots n$ $n - 1 + 1 = 2$

$\textsc{Me1}(M, l_i, l_f, c_i, c_f)$

Resolvidos Diretamente

1: **se** $l_f - l_i + 1 = 2$ **então** → É de comprimento 2? $(n=2)$
2: $\quad s \leftarrow 0$
3: $\quad$ **para** $i \leftarrow l_i$ **até** l_f **faça**   2x $1..2$
4: $\qquad$ **para** $j \leftarrow c_i$ **até** c_f **faça**   2x
5: $\qquad\quad s \leftarrow s + m_{ij}$ 4x
6: $\quad$ **devolve** s

7: $q \leftarrow l_f - l_i + 1$ → Qual o tamanho do problema
8: $k \leftarrow \frac{q}{2}$] divide o problema em 2! $n = 8$ $l_i = 9$ $l_f = 16$ $16 - 9 + 1 = 8/2$
9: $a \leftarrow \textsc{Me1}(M, l_i, l_i + k - 1, c_i, c_i + k - 1)$ $9 + 4 - 1 = 12 \Rightarrow 9, 10, 11, 12$
10: $b \leftarrow \textsc{Me1}(M, l_i, l_i + k - 1, c_i + k, c_f)$ $c_i = 9$; $c_f = 16$ $9 + 4 = 13 \ldots 16$ $13, 14, 15, 16$
11: $c \leftarrow \textsc{Me1}(M, l_i + k, l_f, c_i, c_i + k - 1)$
12: $d \leftarrow \textsc{Me1}(M, l_i + k, l_f, c_i + k, c_f)$
13: **devolve** $\max\{a, b, c, d\}$ → 4 → 1



1ª Chamada: $\textsc{Me1}(M, 1, n, 1, n)$

Análise de Complexidade

→ Resolução direta (linhas 1 a 6) : 7 instruções de alto nível
→ 1 instrução de altíssimo nível
→ c instruções

→ independe o valor de n

→ $\boxed{T(2) = 1}$, $T(2) = \boxed{7}$; ou $T(2) = \boxed{c}$

→ No trecho o qual ñ é possível resolver diretamente (linhas 7 a 13): MED → $T(n)$

- chamada linha 9 : aguardando de tempo: $T(n/2)$
- " " 10 : " " " : $T(n/2)$
- " " 11 : " " " : $T(n/2)$
- " " 12 : " " " : $T(n/2)$

→ $\boxed{4T(n/2)}$

"devolve max{a,b,c,d}" independe do tamanho do problema: ele sempre executa o "max" p/ algo de tamanho fixo em 4.

→ levam 4 instruções
→ " 1 instrução
→ " c instruções

Tempo computacional de MED é

$$T(n) = \begin{cases} T(n) = 1 & \text{se } n \leq 2, \\ T(n) = 4T(n/2) + 1 & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

ME2(M) n

1: $ms \leftarrow 0$ — 1

2: **para** $dl \leftarrow 1$ **até** $\frac{n}{2}$ **faça** — $n/2 \times$

3: **para** $dc \leftarrow 1$ **até** $\frac{n}{2}$ **faça** — $n/2 \times$

4: $s \leftarrow 0$ — 1

5: **para** $i \leftarrow 2(dl-1)+1$ **até** $2dl$ **faça** — $2\times$

6: **para** $j \leftarrow 2(dc-1)+1$ **até** $2dc$ **faça** — $2\times$

7: $s \leftarrow s + m_{ij}$ — 1

8: **se** $s > ms$ **então** — 1

9: $ms \leftarrow s$ — 1

10: **devolve** ms

$dl \leftarrow 1..4$

$dc \quad 1..4$

$2(dl-1)+1$ até $2dl$

$2dl-2+1$

$\boxed{2dl-1 \,..\, 2dl}$

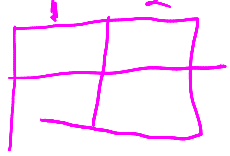
Assumindo $n = 8$

laço da linha 5:

$i = 1$, j 1 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

de dc - 2

1 2



$dl = 1..4$

c/	$dl = 1$	$i \leftarrow 1..2$
"	$dl = 2$	$i \leftarrow 3..4$
"	$dl = 3$	$i \leftarrow 5..6$
"	$dl = 4$	$i \leftarrow 7..8$

laço da linha 6: c/

$dc = 1..4$

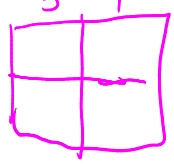
$dc = 1$	$j \leftarrow 1..2$
$dc = 2$	$j \leftarrow 3..4$
$dc = 3$	$j \leftarrow 5..6$
$dc = 4$	$j \leftarrow 7..8$

$dl = 1$, $dc = 2$

$i \leftarrow 1..2$

$j \leftarrow 3..4$

3 4



$n = 16$ $\quad dl = 1..8$

Tempo ME2: $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot 1 = \frac{n^2}{4} \in \Theta(n^2)$

linha 1 linha 2 linha 3 linha 4 l5 l6 l7 l8 l9 l10

$$T(n) = 1 + \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} \cdot \left(1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \right) + 1 + 1 \right) + 1$$

$$T(n) = 1 + \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} \cdot \left(1 + 4 + 1 + 1 \right) \right) + 1$$

$$= 1 + \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{7n}{2} \right) + 2$$

$$= \frac{7n^2}{4} + 2 \in \Theta(n^2)$$

1.c) Invariante de laço: Considerando que as somas das matrizes 2x2 são maiores ou iguais a 0.

O valor de "ms" é o maior valor conhecido das somas dos elementos de submatrizes 2x2 (não sobrepostas) de uma matriz de ordem "n", considerando o percurso de visita na ordem dos índices de linha e coluna de 1 a n, considerando também que visita-se primeiramente as linhas de índice menor.

Inicialização: Como nenhuma submatriz 2x2 foi visitada ainda, o valor de "ms" (definido como 0 na linha 1) corresponde ao maior valor de soma conhecido até então.

Manutenção: Considerando que antes da iteração dos laços das linhas 2 e 3 "ms" possuía o maior valor, isso continua sendo verdade com a execução de uma nova iteração. Entre as linhas 4 e 7 se conhece os elementos de uma nova submatriz ainda não visitada e faz-se o somatório de seus valores. Então, a invariante se mantém verdadeira, pois essa soma é comparada a "ms" na linha 8 e caso a soma seja maior que o valor de "ms", "ms" recebe o valor da soma.

Término:

Quando a última iteração dos laços das linhas 2 e 3 é concluída, a última submatriz 2x2 foi visitada e verificada em relação ao valor de "ms", pela propriedade de manutenção. Desse modo, o valor de "ms" corresponde a maior soma dos elementos de submatrizes 2x2.

---

2) $T(n) = T(n-2) + n$ → ~~$T(1) = 1$~~ → $\boxed{T(1) = c}$

no qual c é uma constante > 0

Pelo método iterativo.

1° Copiar: $T(n) = T(n-2) + n$

2° Descobrir o passo $= T(n-2)$

3° Isolar os próximos passos.

$T(n-2) = T(n-4) + n - 2$

$T(n-4) = T(n-6) + n - 4$

$T(n-6) = T(n-8) + n - 6$

4° Substituir os valores isolados

$\boxed{i=1}$ $T(n) = T(n-2) + n - 2^0$

$\boxed{i=2}$ Substituindo o $T(n-2)$: $T(n) = T(n-4) + n - 2^1 + n - 2^0$

$\boxed{i=3}$ Substituindo o $T(n-4)$: $T(n) = T(n-6) + n - 4 + n - 2 + n$

$\boxed{i=4}$ Substituindo o $T(n-6)$: $T(n) = T(n-8) + n - 6 + n - 4 + n - 2 + n$

5° Identificar a fórmula do i-ésimo passo

$$T(n) = T(n-2i) + in - \sum_{j=1}^{i-1} 2j$$

$$= T(n-2i) + in - 2\sum_{j=1}^{i-1} j \quad \text{(prop. E.1)}$$

prop. E.4: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\Big\}$ $\sum_{j=1}^{i-1} j = \frac{(i-1)(i-\cancel{1}+\cancel{1})}{2} = \frac{i^2 - i}{2}$

$$T(n) = T(n-2i) + in - \cancel{2}\left(\frac{i^2 - i}{\cancel{2}}\right) \quad \text{(prop. E.4)}$$

$$T(n) = T(n-2i) + in - i^2 + i$$

$\boxed{i = 4}$

$$T(n) = T(n-8) + 4n - 16 + 4 =$$

$$= T(n-8) + 4 - 12$$

Teste de sanidade!

6º Descobrir o valor de i para a base da recorrência:

$$T(n-2i) \equiv T(1)$$

$$n - 2i = 1$$

$$-2i = 1 - n$$

$$2i = n - 1$$

$$\boxed{i = \frac{n-1}{2}}$$

7º Substituir o valor de i na fórmula do i-ésimo passo:

$$T(n) = T(1) + \left(\frac{n-1}{2}\right)n - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{n-1}{2}$$

$$T(n) = c + \frac{n^2 - n}{2} + \boxed{?} + \frac{n-1}{2}$$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n^2 - n - n + 1}{4} = \left(\frac{n^2 - 2n + 1}{4}\right)$$

$$T(n) = c + \frac{n^2-n}{2} - \frac{n^2-2n+1}{4} + \frac{n-1}{2}$$

$$= c + \frac{n^2-n}{2} + \frac{-n^2+2n-1}{4} + \frac{n-1}{2}$$

$$= c + \frac{2n^2 \cancel{-2n} - n^2 \cancel{+2n} - 1 + 2n - 2}{4}$$

$$= c + \frac{n^2 + 2n - 3}{4}$$

$$\boxed{T(n) = c + \frac{n^2+2n-3}{4}}$$

8º Identificar a complexidade: $T(n) \in \Theta(n^2)$

9º Provar por indução:

<u>Base</u>: considerando que se espera $T(1) = c$, utilizando a fórmula obtida tem-se:

$$T(n) = c + \frac{n^2+2n-3}{4}$$

$$T(1) = c + \frac{1^2+2(1)-3}{4} = c + 0,$$

o que confirma para o passo base.

Hipótese indutiva: $T(n-2) = c + \frac{(n-2)^2 + 2(n-2) - 3}{4}$

$(n-2)(n-2)$

$n^2 - 2n - 2n + 4$

$$= c + \frac{n^2 - 4n + 4 + 2n - 4 - 3}{4}$$

$$T(n-2) = c + \frac{n^2 - 2n - 3}{4}$$

Passo Indutivo: assumindo a H.I., substitui o valor de $T(n-2)$ na recorrência esperando obter a fórmula do 7º passo

$$T(n) = T(n-2) + n$$

$$T(n) = c + \frac{n^2 - 2n - 3}{4} + n$$

$$= c + \frac{n^2 - 2n - 3 + 4n}{4}$$

$$= c + \frac{n^2 + 2n - 3}{4},$$

O que confirma a fórmula obtida no 7º passo. Então $T(n) = c + \frac{n^2 + 2n - 3}{4}$.

3) $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det(A_{-1-j})$ elimina linha 1 e coluna j

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

determinante

Entrada: uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

3a)

```
1.  if (n > 1) then
2.     soma <- 0
3.     mult <- 1
4.     for j <- 1 to n do
5.        B <- criar matriz R^{n-1 x n-1}
6.        For l <- 1 to n-1 do
7.           For c <- 1 to n do
8.              if (c == j) continue
9.              if (c < j) B[l,j] <- A[l+1,j]
10.             if (c > j) B[l,j-1] <- A[l+1,j]
11.
12.       soma <- soma + mult * A[1,j] * determinante(B)
13.       mult <- mult * -1
14.    return soma
15. else
16.    return A[1,1]
```

C

C

(n-1) n

C

C

T(n-1)

C

3b) $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ n \cdot \left(T(n-1) + n^2 - n\right) + 1 & \end{cases}$