EP3 - Relatório

MAC0210 - Laboratório de Métodos Numéricos

Autor: Vítor Carvalho de Melo (10723753)
Professor: Ernesto G. Birgin

São Paulo - 19/06/2023

Conteúdo

Parte 1

Computando trabalho

1.1 Interpolando a função

x (em metros)	$F(x)$ (em N)	$\theta(x)$ (em radianos)	$F(x)\cos(\theta(x))$
0	0.0	0.50	0.0000
5	9.0	1.40	1.5297
10	13.0	0.75	9.5120
15	14.0	0.90	8.7025
20	10.5	1.30	2.8087
25	12.0	1.48	1.0881
30	5.0	1.50	0.3537

Tabela 1. Dados para força $F(x)$ e ângulo $\theta(x)$ como uma função da posição x.

Nesta primeira seção, utiliza-se os dados da Tabela 1 para calcular um polinômio interpolador para a função $trabalho = \int_{x_0}^{x_n} F(x)cos(\theta(x))dx$ utilizando interpolação de Lagrange, em que calcularemos $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$:

- $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x)+f(x_1)L_1(x)+f(x_2)L_2(x)+f(x_3)L_3(x)+f(x_4)L_4(x)+f(x_5)L_5(x)+f(x_6)L_6(x)$

Como temos que $L_i(x) = f(x_i)\prod_{j=0;j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$, expandimos a expressão acima:

- $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x)+f(x_1)L_1(x)+f(x_2)L_2(x)+f(x_3)L_3(x)+f(x_4)L_4(x)+f(x_5)L_5(x)+f(x_6)L_6(x)$
- $p_n(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)(x_0-x_6)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_1-x_6)}+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_2-x_6)}+f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_3-x_6)}+ f(x_4)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)(x_4-x_6)}+f(x_5)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_6)}{(x_5-x_0)(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)(x_5-x_6)}+ f(x_6)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_6-x_0)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)(x_6-x_5)}$

Substituindo os x_i pelos valores da tabela:

- $p_n(x) = 0\frac{(x-5)(x-10)(x-15)(x-20)(x-25)(x-30)}{(0-5)(0-10)(0-15)(0-20)(0-25)(0-30)} + 1.5297\frac{(x-0)(x-10)(x-15)(x-20)(x-25)(x-30)}{(5-0)(5-10)(5-15)(5-20)(5-25)(5-30)}+ 9.5120\frac{(x-0)(x-5)(x-15)(x-20)(x-25)(x-30)}{(10-0)(10-5)(10-15)(10-20)(10-25)(10-30)}+8.7025\frac{(x-0)(x-5)(x-10)(x-20)(x-25)(x-30)}{(15-0)(15-5)(15-10)(15-20)(15-25)(15-30)}+ 2.8087\frac{(x-0)(x-5)(x-10)(x-15)(x-25)(x-30)}{(20-0)(20-5)(20-10)(20-15)(20-25)(20-30)}+1.0881\frac{(x-0)(x-5)(x-10)(x-15)(x-20)(x-30)}{(25-0)(25-5)(25-10)(25-15)(25-20)(25-30)}+ 0.3537\frac{(x-0)(x-5)(x-10)(x-15)(x-20)(x-25)}{(30-0)(30-5)(30-10)(30-15)(30-20)(30-25)}$

- $p_n(x) = 0\frac{(x-5)(x-10)(x-15)(x-20)(x-25)(x-30)}{11250000} + 1.5297\frac{(x-0)(x-10)(x-15)(x-20)(x-25)(x-30)}{-1875000}+ 9.5120\frac{(x-0)(x-5)(x-15)(x-20)(x-25)(x-30)}{750000} + 8.7025\frac{(x-0)(x-5)(x-10)(x-20)(x-25)(x-30)}{-562500}+ 2.8087\frac{(x-0)(x-5)(x-10)(x-15)(x-25)(x-30)}{750000} + 1.0881\frac{(x-0)(x-5)(x-10)(x-15)(x-20)(x-30)}{-1875000}+ 0.3537\frac{(x-0)(x-5)(x-10)(x-15)(x-20)(x-25)}{11250000}$

- $p_n(x) = 1.5297\frac{x^6-100x^5+3875x^4-72500x^2+652500x^2-2250000x}{-1875000} + 9.5120\frac{x^6-95x^5+3425x^4-57625x^3+438750x^2-1125000x}{750000} + 8.7025\frac{x^6-90x^5+3025x^4-46500x^3+317500x^2-750000x}{-562500} + 2.8087\frac{x^6-85x^5+2675x^4-38375x^3+247500x^2-562500x}{750000} + 1.0881\frac{x^6-80x^5+2375x^4-32500x^3+202500x^2-450000x}{-1875000} + 0.3537\frac{x^6-75x^5+2125x^4-28125x^3+171250x^2-375000x}{11250000}$

Simplificando esta expressão (com a ajuda do Symbolab), obtemos o nosso polinômio interpolador:

$p_6(x) = -\frac{22963}{56250000000}x^6 - \frac{4801}{937500000}x^5 + \frac{9823}{4500000}x^4 - \frac{1170289}{15000000}x^3 + \frac{84136223}{90000000}x^2 - \frac{8058593}{3000000}x$ A figura abaixo consiste de uma visualização gráfica da função interpoladora $p_6(x)$ encontrada. Os pontos em azul são os sete pontos fornecidos pela Tabela 1 do enunciado.

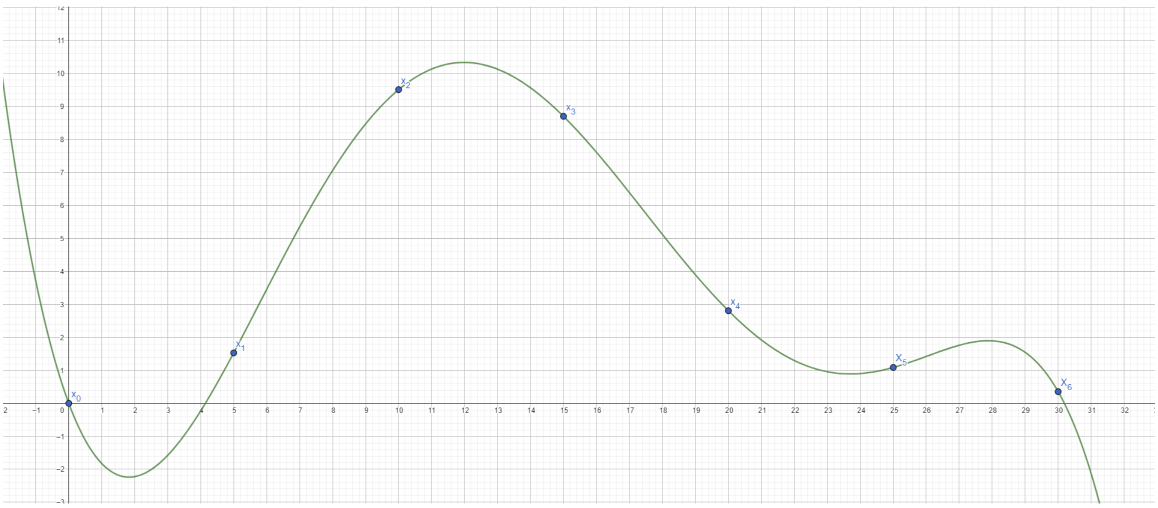

Figura 1. Visualização gráfica do polinômio interpolador

Ao levar-se em consideração o contexto no qual foram extraídos os dados da tabela, fica claro ao se analisar o gráfico da Figura 1 que o polinômio interpolador encontrado não fornece uma boa aproximação da função original $F(x)cos(\theta(x))$ em todo o intervalo. Duas improbabilidades chamam nossa atenção: primeiramente, entre os pontos x_0 e x_1, a força utilizada provavelmente exclusivamente aumentou, embora a função interpolante registre um decrescimento que inclusive atinge valores negativos; também, entre os pontos x_5 e x_6, tudo indica que a função original registra um decrescimento exclusive, e a função interpolante registra uma curva. Estes dois erros me fazem pensar que provavelmente teria sido mais interessante fazer uma interpolação por partes nos pontos da tabela para encontrar um polinômio interpolador.

1.2 Integração numérica

Nesta seção vamos utilizar os métodos do trapézio e de Simpson compostos para aproximar o valor da integral definida da função $F(x)cos(\theta(x))$ no intervalo $x_0 = 0$ e $x_n = 30$. Ou seja, para $h = x_{i+1} - x_i$ procuramos calcular $\int_{x_0}^{x_n} F(x)cos(\theta(x))dx \approx I_{trap} = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_0 + ih) + f(x_n)]$ para a regra do trapézio composto e $\int_{x_0}^{x_n} F(x)cos(\theta(x))dx \approx I_{Simp} = \frac{h}{3}[f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{(r/2)-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{r/2} f(x_{2k-1}) + f(x_n)]$ para a regra de Simpson, com $r =$ número de intervalos.

1.2.1 Regra do trapézio composto

Vamos primeiramente calcular a aproximação da integral utilizando apenas os pontos que conhecemos. Seja $h_i = x_i - x_{i-1}$, para todo $i \in [0, ..., 6]$. Como todos os valores consecutivos de x_i estão igualmente distantes, temos que $h = x_1 - x_0 = 5$. Assim, podemos calcular a aproximação da integral $I_{trap} = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{5} f(x_j) + f(x_6)]$. Para isso, construí o programa *trapezoide_composto.c*, que ao ser executado, calcula $I_{trap} = \frac{5}{2}(0.0 + 2(1.5297) + 2(9.5120) + 2(8.7025) + 2(2.8087) + 2(1.0881) + 0.3537)$, que resulta no número **119.089264**.

1.2.2 Regra de Simpson composto

Vamos primeiramente calcular a aproximação da integral utilizando apenas os pontos que conhecemos. Seja $h_i = x_i - x_{i-1}$, para todo $i \in [0, ..., 6]$. Como todos os valores consecutivos de x_i estão igualmente distantes, temos que $h = x_1 - x_0 = 5$. Assim, podemos calcular a aproximação da integral $I_{Simp} = \frac{h}{3}[f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{2} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{3} f(x_{2k-1}) + f(x_6)]$. Para isso, construí o programa *trapezoide_composto.c*, que ao ser executado, calcula $I_{trap} = \frac{5}{3}(0.0+4(1.5297)+2(9.5120)+4(8.7025)+2(2.8087)+4(1.0881)+0.3537)$, que resulta no número **117.127174**.

Com o objetivo de testar os *scripts*, foi feita uma pequena bateria de testes, em que informa-se diferentes valores de $h =$ intervalo entre dois x_i consecutivos, e os resultados encontram-se na tabela abaixo:

Método	*h = 8*	*h = 5*	*h = 3*	*h = 1*	*h = 0.5*	*h = 0.1*
Trapézio	76.261	117.127	117.123	117.131	117.132	117.132
Simpson	118.813	119.089	117.832	117.209	117.151	117.132

Pelos dados da tablela, percebemos uma clara convergência em ambos os métodos para o valor **117.132**. Entretanto, percebemos que, dados um valor de h suficiente pequeno (e.g. 5), o método de Simpson converge para este valor mais rapidamente.

Parte 2

Integração por Monte Carlo

2.1 Integrais unidimensionais

Nesta seção do EP, aproximamos integrais definidas de três funções utilizando o método de Monte Carlo unidimensional, que estabelece que $I = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$, para um número n de valores de x sorteados aleatoriamente. Abaixo estão os resultados das aproximações para as três funções:

1. $\int_0^1 sin(x)dx$

   O valor calculado analiticamente desta integral é aproximadamente **0.4596976941318603**. Pelos testes, obtemos as seguintes aproximações para diferentes valores de i = número de pontos aleatórios utilizados.

	$i = 10^3$	$i = 10^4$	$i = 10^5$	$i = 10^6$	$i = 10^7$	$i = 10^8$
Aproximação	0.453226	0.458278	0.459825	0.459615	0.459688	0.459705

2. $\int_3^7 x^3dx$

   O valor calculado analiticamente desta integral é **580**. Pelos testes, obtemos as seguintes aproximações para diferentes valores de i = número de pontos aleatórios utilizados.

	$i = 10^3$	$i = 10^4$	$i = 10^5$	$i = 10^6$	$i = 10^7$	$i = 10^8$
Aproximação	588.806462	581.403593	579.604071	579.466003	580.108045	580.004980

3. $\int_0^\infty e^{-x}dx$

   O valor calculado analiticamente desta integral é **1**. Pelos testes, obtemos as seguintes aproximações para diferentes valores de i = número de pontos aleatórios utilizados.

	$i = 10^3$	$i = 10^4$	$i = 10^5$	$i = 10^6$	$i = 10^7$	$i = 10^8$	$i = 10^9$
Aproximação	0.000000	0.000000	0.000070	0.003716	0.647181	1.051854	1.023556

   Como não há troca de variáveis, foi utilizado apenas um valor alto para simular infinito no cálculo de uma integral definida de 0 à infinito. Esta decisão com certeza impactou negativamente a performance do método para aproximar esta integral, e precisamos de uma quantidade muito grande de iterações para começar a nos aproximar do valor correto.

2.2 Integrais multidimensionais

Nesta última seção do exercício programa, foi aproximado o valor de π. Para isso, estabeleceu-se um círculo de raio unitário ao redor do centro de um plano cartesiano e calculamos sua área utilizando o método de Monte Carlo bidimensional. Isso é possível pois sabemos que a área de um círculo de raio unitário é igual à π, pois a área de qualquer círculo pode ser calculada como $area = \pi r^2$.

A implementação do método de Monte Carlo para este propósito é muito simples: basta sortear pares de coordenadas (x_i, y_i), com $x_i, y_i \in [-1, 1]$, verificar se estes pares estão dentro do círculo, somar quantos estão inscritos no círculo, dividir pela quantidade total de pontos sorteados e multiplicar pela área total do quadrado que circunscreve o círculo. Como o quadrado que circunscreve o círculo de raio unitário possui altura = 2 e largura = 2, sua área é = 4. Assim, para concluímos o cáculo da área do círculo, basta multiplicar a porcentagem [0,1] dos pontos sorteados que estão dentro do círculo e multiplicá-la por 4. Nos testes, diferentes valores de i = número de pontos aleatórios utilizados, obtemos as seguintes aproximações de π:

	$i = 10^3$	$i = 10^4$	$i = 10^5$	$i = 10^6$	$i = 10^7$	$i = 10^8$	$i = 10^9$
Aproximação	3.124000	3.114800	3.132360	3.140460	3.140992	3.141546	3.141599